INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 249, p. 2255-2258, séance du 30 novembre 1959.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Propriétés classiques et représentation bilocale du rotateur de Nakano.* Note de MM. **Louis de Broglie**, **Pierre Hillion** et **Jean-Pierre Vigier**.

En substituant un rotateur relativiste au modèle classique de particule ponctuelle, on introduit des paramètres supplémentaires qui décrivent la rotation instantanée de corpuscules étendus supposés très petits. Dans le cas du rotateur sphérique proposé par Nakano on obtient des propriétés remarquables, homologues classiques de la relation $E = h\nu$ et du tremblement de Schrödinger.

La notion de corpuscule matériel ponctuel décrivant dans l'espace-temps une ligne d'Univers sans dimension constitue le fondement classique de la théorie des quanta. Cette image du corpuscule microscopique représenté mathématiquement par une fonction δ a conduit à nombre de résultats remarquables. On peut toutefois se demander si elle n'a pas fait son temps et s'il n'est pas devenu nécessaire d'enrichir l'idée classique que nous nous faisons des éléments constitutifs de la matière. Au cours de la dernière période en effet un certain nombre d'arguments ont été avancés contre ce point de départ. Nous en rappellerons deux seulement. M. Dirac [1] tout d'abord a souligné que le modèle ponctuel pourrait bien être à l'origine de certaines divergences de la théorie des champs puisqu'il se trouve lié à l'emploi de fonctions δ. On sait en second lieu qu'un tel modèle paraît difficilement conciliable avec les expériences d'Hofstadter [2].

Il est clair que l'enrichissement recherché peut se faire dans diverses directions. Celle que nous proposons ici s'inspire directement de l'interprétation causale de la théorie des quanta et rejoint le modèle bilocal proposé par M. Yukawa [3]. Comme on le sait, la recherche d'une représentation hydrodynamique des ondes de la Mécanique ondulatoire a conduit M. Takabayasi [4] à proposer comme éléments matériels constitutifs des ondes de Dirac non des points matériels, mais des rotateurs relativistes formés dans l'univers de Minkowski :

— d'une origine $x_\mu(\tau)$ qui parcourt une ligne d'univers l, dotée d'un temps propre τ, μ désignant les indices tensoriels habituels;

— de quatre vecteurs d'univers $b^\xi_\mu(\tau)$ unitaires et orthogonaux, les indices supérieurs ξ caractérisant les vecteurs.

L'origine d'un tel tétrapode mobile est animée d'une vitesse $\dot{x} = dx_\mu/d\tau$ qu'on peut supposer alignée sur b^4_μ soit

$$\dot{x}_\mu = icb^4_\mu. \tag{1}$$

Le tétrapode est alors animé d'une vitesse angulaire instantanée de rotation $\omega_{\mu\nu} = \dot{b}^\xi_\mu b^\xi_\nu$ (avec par définition $\dot{A} = dA/d\tau$) puisque $b^\xi_\mu b^\xi_\nu = \delta_{\mu\nu}$ et $b^\xi_\mu b^\eta_\mu = \delta^{\xi\eta}$. Son origine suit une ligne de courant de Dirac s'il est soumis à des tensions convenables.

Si l'on rapproche ce résultat du fait que de tels rotateurs permettent également de décrire le comportement simplifié de corpuscules étendus ([5]), on est conduit à proposer l'hypothèse suivante : *substituer le rotateur relativiste à la particule sans dimensions comme fondement classique de la théorie des quanta.*

Pour préciser cette hypothèse, il faut fournir *a priori* le formalisme lagrangien. A titre d'exemple partons du lagrangien *de ligne* simple :

$$\delta \int_{M_1}^{M_2} \Big[-\frac{1}{4} I \left(\dot{b}^r_\alpha b^s_\beta - \frac{1}{c^2} \ddot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \right) \left(\dot{b}^r_\alpha b^s_\beta - \frac{1}{c^2} \ddot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \right) + \lambda_{\mu\nu} \left(b^r_\mu b^r_\nu - \frac{1}{c^2} \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu - \delta_{\mu\nu} \right) - \frac{\lambda}{4} (\omega_{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} - K^2) \Big] \delta\tau = 0 \qquad (I = \mathrm{Cte}), \tag{2}$$

où r, $s = 1, 2, 3$, (les $\delta x_\alpha \, \delta \dot{x}_\alpha \, \delta b^r_\alpha$ s'annulant aux limites), proposé par Nakano ([6]). Le moment cinétique associé à ce lagrangien s'obtient immédiatement à partir des recherches de M. Halbwachs et de l'un d'entre nous (J. P. V.) sur le formalisme lagrangien relativiste ([7]). Il vient $M_{\alpha\beta} = (I + \lambda)\omega_{\alpha\beta}$ si l'on tient compte de (1) et des relations d'orthogonalité. Il en résulte que le rotateur correspondant dit « de Nakano », a son moment angulaire proportionnel à la vitesse angulaire; ce qui généralise l'expression non relativiste du moment cinétique du corps sphérique, le terme $(I + \lambda)$ jouant le rôle de moment d'inertie. Le premier terme de (2) exprime donc que l'énergie du rotateur provient exclusivement de sa rotation, les deux derniers termes étant deux conditions de Lagrange (avec les multiplicateurs $\lambda_{\alpha\beta}$ et λ) destinées à assurer l'unitarité et l'orthogonalité des vecteurs du tétrapode et la constance de $K^2 = \omega_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}$. Le vecteur énergie-impulsion G_α associé est défini par la relation

$$G_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_\alpha}.$$

Partant alors de (2), on aboutit au système d'équations

$$\dot{\mathrm{G}}_\alpha = 0, \tag{3 a}$$

$$\dot{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} = \mathrm{G}_\alpha v_\beta - \mathrm{G}_\beta v_\alpha, \tag{3 b}$$

$$\mathrm{M}_{\alpha\beta} v_\beta = (1 + \lambda)\, \dot{v}_\alpha \tag{3 c}$$

qui généralise manifestement [8] les équations de Weyssenhoff.

L'intégration du mouvement s'effectue sans difficulté : contractant (3 c) par G_α il vient, compte tenu de (3 b) et (3 a) :

$$\frac{1}{2} \mathrm{M}_{\alpha\beta} \dot{\mathrm{M}}_{\alpha\beta} = (1 + \lambda)\, \ddot{x}_\alpha \mathrm{G}_\alpha = - \dot{m} c^2 (1 + \lambda) \qquad \text{avec} \qquad - mc^2 = \mathrm{G}_\alpha \dot{x}_\alpha.$$

Si l'on introduit alors les deux quantités scalaires $4\Sigma^2 = \mathrm{M}_{\alpha\beta}\mathrm{M}_{\alpha\beta}$ et $- \mathrm{M}^2 c^2 = \mathrm{G}_\alpha \mathrm{G}_\alpha$, on obtient immédiatement $\dot{\mathrm{M}} = 0$ et aussi

$$2\Sigma\dot{\Sigma} = -(1 + \lambda)\, \dot{m} c^2 \qquad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (1 + \lambda)\, \mathrm{K}^2 = - \dot{m} c^2. \tag{4}$$

Si Σ ou λ sont constants, m l'est donc aussi. Pour montrer que $\dot{m} = 0$, effectuons le changement de variables (1). Le lagrangien devient une fonction $\mathrm{L}(v_\mu, b^\zeta_\mu, \ddot{x}_\mu)$. Si l'on pose

$$\eta_\mu = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \ddot{x}_\mu}, \tag{5}$$

$$\mathrm{G}_\alpha = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} - \dot{\eta}_\alpha \qquad \text{et} \qquad \pi^\zeta_\mu = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial b^\zeta_\mu}. \tag{6}$$

et qu'on tire $\ddot{x}_\mu$ et $\dot{b}^\zeta_\mu$ des relations (5) et (6), Weyssenhoff [9] et Bopp [10] ont alors montré que l'hamiltonien relativiste correspondant

$$\mathrm{H}(v_\mu, \mathrm{G}_\mu, \eta_\mu, b^\zeta_\mu, \pi^\zeta_\mu) = \mathrm{G}_\mu v_\mu + \eta_\mu \ddot{x}_\mu + \pi^\zeta_\mu b^\zeta_\mu - \mathrm{L}(v_\mu, b^\zeta_\mu, \ddot{x}_\mu)$$

est aussi une constante du mouvement. Comme dans notre cas on obtient

$$\mathrm{H} = - mc^2 - \frac{1}{4}(1 + \lambda)\, \mathrm{K}^2 - \lambda_{\alpha\beta}\left(b^\zeta_\alpha b^\zeta_\beta - \frac{1}{c^2} v_\alpha v_\beta - \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\lambda}{4}(\omega_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} - \mathrm{K}^2),$$

on en tire par dérivation $-4\, \dot{m} c^2 = \mathrm{K}^2 (d/d\tau)(1 + \lambda)$; ce qui donne bien $\dot{\lambda} = \dot{m} = 0$ par comparaison avec (4). On obtient du reste le même résultat à partir des équations canoniques associées à H.

Partant directement des équations (3) et de la constance de m, M et Σ M. Halbwachs [11] a alors établi des résultats importants que nous nous contenterons de commenter.

a. Le point y_μ défini par les coordonnées $y_\mu = x_\mu + \mathrm{M}_{\mu\nu} \mathrm{G}_\nu/\mathrm{M}c = x_\mu + r_\mu$ parcourt une ligne d'univers rectiligne L avec la vitesse $\mathrm{G}_\mu/\mathrm{M}c$, l'intervalle $r_\mu r_\mu$ étant une constante du mouvement. L'origine x_μ parcourt en conséquence une hélice d'axe L et dans le système d'inertie II (où $\mathrm{G} = 0$) décrit un cercle autour de y, cercle situé dans un plan perpendiculaire au moment de rotation $s_\mu = (1/2)\, \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, b^4_\nu\, \mathrm{M}_{\alpha\beta}$ et ce avec un rayon constant et une vitesse angulaire Ω constante définie par la relation $s_\mu s_\mu \Omega^2 = \mathrm{M}^2 c^4$. Ce mouvement, comme l'a remarqué M. Möller [12], constitue l'analogue classique du tremblement de Schrödinger. Ainsi l'introduction des nouveaux paramètres conduit nécessairement à une représentation « bilocale »; les points x et y constituant une matérialisation dans l'univers de Minkowski du modèle proposé par M. Yukawa ([3]) pour les particules élémentaires.

b. Si l'on place les axes du genre espace b_μ^r dans une position initiale particulière où l'on a $s_\mu = kb_\mu^3$, on démontre sans peine que $\dot{s}_\mu = 0$ avec $s_\mu = (1+\lambda)\left(\dot{b}_\nu^1 b_\nu^2\right) b_\mu^3$, la vitesse de rotation autour de b^3, $\omega^3 = \dot{b}_\mu^1 b_\mu^2$) étant également une constante du mouvement. Comme on a d'autre part $k^2 = \Sigma^2 - (1+\lambda)^2 \gamma^2$ avec $\gamma = ic\left(\dot{b}_\mu^1 \dot{b}_\mu^1\right)^{1/2}$, on en déduit que γ est également une constante du mouvement. Il en résulte que si l'on a initialement $mc^2 = -G_\alpha \dot{x}_\alpha = k\omega^3$ cette relation est automatiquement conservée. Elle constitue manifestement l'homologue classique de l'identité $E = h\nu$ car si l'on se place dans le système propre de x_μ, où il n'y a pas d'énergie de translation, l'énergie se réduit à $E = (1+\lambda)(\omega^{(3)})^2 = k\omega^{(3)}$. Mais si la grandeur du moment de rotation est $k = h/2\pi$, on voit que cette relation donne simplement $G_4 = E = \hbar\omega^3 = h\nu = mc^2$. La fréquence de la rotation des axes $b_\mu^1 b_\mu^2$ autour du vecteur s_μ, tout à fait différente de celle du tremblement de Schrödinger, peut ainsi apparaître comme la fréquence fondamentale de « l'horloge » que dès son origine ([13]) la mécanique ondulatoire a été amenée à associer à tout micro-objet.

Terminons par une remarque physique. Le corpuscule sans dimensions est évidemment un cas dégénéré du rotateur relativiste. Les paramètres supplémentaires décrivant la rotation instantanée peuvent être considérés comme des « paramètres cachés » qu'on ignore habituellement. L'intérêt de tels paramètres ne se limite évidemment pas aux résultats de ce travail. Ils correspondent, en effet, à des degrés de liberté « internes » nouveaux qu'on peut quantifier à leur tour. Utilisant les angles d'Euler relativistes, des travaux en cours en collaboration avec M. Bohm ([14]) permettent d'espérer qu'on arrivera ainsi à comprendre le spin isotopique, l'étrangeté et le nombre baryonique sans sortir du cadre habituel de l'univers de Minkowski.

([1]) P. A. M. Dirac, *Colloque C. N. R. S. Particules fondamentales et noyaux*, Paris, 1950.

([2]) R. Hofstadter, *Rev. Mod. Phys.*, 28, 1956, p. 214.

([3]) H. Yukawa, *Phys. Rev.*, 77, 1950, p. 219.

([4]) T. Takabayasi, *Nuovo Cimento*, 13, n° 3, 1959, p. 532.

([5]) F. Halbwachs, P. Hillion et J.-P. Vigier, *Internal motion of relativistic fluid masses*, à paraître au *Nuovo Cimento*.

([6]) T. Nakano, *Progr. Theor. Phys.*, 45, 1956, p. 333.

([7]) F. Halbwachs et J.-P. Vigier, *Comptes rendus*, 248, 1959, p. 490 et 1124.

([8]) J. Weyssenhoff, *Act. Phys. Pol.*, 9, n° 7, 1947.

([9]) J. Weyssenhoff, *Act. Phys. Pol.*, 1, n° 1, 1951, p. 4.

([10]) F. Bopp, *Z. Naturforsch.*, 3 *a*, 1948, p. 564.

([11]) F. Halbwachs, *Comptes rendus*, 249, 1959, p. 2293.

([12]) C. Moller, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 11-12, 1949, p. 251.

([13]) L. de Broglie, *Thèse*, Masson, Paris, 1924.

([14]) D. Bohm, P. Hillion et J.-P. Vigier, *Quantum levels of relativistic rotators*, à paraître au *Progr. of Theor. Phys.*

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

156553-59 Paris. Quai des Grands-Augustins, 55. Imprimé en France.