1962

INSTITUT DE FRANCE

ACADÉMIE DES SCIENCES.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 255, p. 1052-1054, séance du 6 août 1962.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Quelques conséquences de la Thermodynamique de la particule isolée.* Note (*) de M. **Louis de Broglie.**

Des applications sont données de la Thermodynamique de la particule isolée qui a été exposée dans une Note récente : elles concernent la relation du principe de Hamilton avec le second principe de la Thermodynamique et l'étude des fluctuations de la masse propre.

Dans une Note toute récente ([1]), nous avons donné une nouvelle présentation de la Thermodynamique de la particule isolée déjà présentée l'an dernier et nous avons écrit les relations fondamentales de cette théorie, avec les notations qui ont été précisées, sous la forme,

$$(1)\qquad h\nu_c = kT, \qquad S = S_0 + S(M_0) = S_0 + \frac{k}{h} Ⓐ.$$

Nous voulons indiquer ici quelques conséquences de ces formules.

Étudions d'abord la relation qu'elles permettent d'établir entre le principe de Hamilton et le second principe de la Thermodynamique. Nous commençons par introduire une idée qui paraît intéressante. Dans l'application usuelle du principe de Hamilton, on part d'un mouvement « naturel », c'est-à-dire conforme aux lois de la Mécanique utilisée, au cours duquel la particule partant d'un point A de l'espace physique au temps t_0 parvient en un point B au temps t_1 ; puis on imagine un mouvement « varié », qui est fictif et reste infiniment voisin du mouvement naturel, en imposant à ce mouvement varié la condition que les points A et B et les temps t_0 et t_1 restent les mêmes que dans le mouvement naturel.

Le principe de Hamilton nous dit alors que le mouvement naturel est défini par l'équation

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta \mathcal{L}]_{M_0}\, dt = 0 \tag{2}$$

où la variation $[\delta \mathcal{L}]_{M_0}$ est la variation de la fonction $\mathcal{L}$ de Lagrange à masse propre constante.

Mais, si l'on admet que la valeur de la masse propre de la particule puisse subir des fluctuations, il devient possible de considérer les mouvements variés comme étant non plus des mouvements fictifs purement imaginés, mais des mouvements pouvant avoir lieu réellement sous l'action d'une certaine fluctuation de la masse propre pendant l'intervalle de temps t_1-t_0.

Cette hypothèse étant admise, nous remarquerons que sur la trajectoire naturelle A C B, la variation première de l'action hamiltonienne étant nulle d'après l'équation (2), la variation seconde est positive parce que le principe de Hamilton est un principe de moindre action et nous avons

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0}\, dt > 0. \tag{3}$$

Mais, d'après l'hypothèse admise, nous devons pouvoir écrire sur la trajectoire variée A C′ B

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} \delta(\mathcal{L} + \delta \mathcal{L})\, dt = 0, \tag{4}$$

mais cette fois nous n'avons plus à assujettir la masse propre à rester constante. Nous écrirons donc

$$\delta \mathcal{L} = [\delta \mathcal{L}]_{M_0} + \delta_{M_0} \mathcal{L}, \qquad \delta^2 \mathcal{L} = [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0} + \delta^2_{M_0} \mathcal{L}, \tag{5}$$

où $\delta_{M_0} \mathcal{L}$ et $\delta^2_{M_0} \mathcal{L}$ sont les termes provenant de la variation de la masse propre. Nous admettrons, ce qui sera justifié plus loin, que $\delta^2_{M_0} \mathcal{L}$ peut être négligé. L'équation (4), compte tenu de (2), nous donne alors

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta_{M_0} \mathcal{L}\, dt = (t_1 - t_0)\, \overline{\delta_{M_0} \mathcal{L}} = -\int_{t_0}^{t_1} [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0}\, dt < 0, \tag{6}$$

la valeur moyenne $\overline{\delta_{M_0} \mathcal{L}}$ étant prise dans l'intervalle de temps t_1-t_0. Or, en raison de la petitesse de la période τ_c, la seconde formule (1) nous donne $\delta S \sim \tau_c\, \delta_{M_0} \mathcal{L}$ et nous avons

$$\overline{\delta S} = \tau_c\, \overline{\delta_{M_0} \mathcal{L}}, \tag{7}$$

d'où nous tirons, par comparaison avec (6),

$$\frac{t_1 - t_0}{\tau_c}\, \overline{\delta S} < 0 \tag{8}$$

et comme $(t_1$-$t_0)/\tau_c$ est positif, $\overline{\delta S} < 0$. Comme $\delta \overline{S} = \overline{\delta S}$, nous en concluons que la valeur moyenne de l'entropie est maximale sur la trajectoire naturelle pour toutes les variations satisfaisant aux conditions de la variation hamiltonienne, ce qui fait apparaître une relation remarquable entre le principe de Hamilton et le second principe de la Thermodynamique.

Il reste à prouver que $\delta^2_{M_0}\mathcal{L}$ est négligeable. Or on voit sur l'équation (6) que $\delta_{M_0}\mathcal{L}$ est de l'ordre de $[\delta^2\mathcal{L}]_{M_0}$ de sorte que $\delta^2_{M_0}\mathcal{L}$ est du troisième ordre par rapport aux variations hamiltoniennes et peut donc être négligé.

Passons à une autre conséquence de notre théorie. Plaçons-nous dans le système propre de la particule supposée libre : l'énergie interne de celle-ci y a pour valeur $W_0 = M_0c^2$ en fonction de la masse fluctuante M_0. D'après la loi de distribution canonique de Gibbs, la probabilité de la valeur W_0 de l'énergie interne de la particule en contact avec le thermostat caché introduit dans notre Note précédente est proportionnelle à e^{-W_0/kT_0}. La valeur moyenne de W_0 est donc, d'après un calcul classique,

$$\overline{W}_0 = \overline{M}_0c^2 = \frac{\int_0^\infty W_0 e^{-\frac{W_0}{kT_0}} dW_0}{\int_0^\infty e^{-\frac{W_0}{kT_0}} dW_0} = kT_0. \tag{9}$$

De la relation $h\nu_0 = m_0c^2 = kT_0$, nous déduisons alors aisément

$$\overline{M}_0 = m_0 \tag{10}$$

Donc, ce que nous nommons la masse propre m_0 de la particule serait la valeur moyenne de sa masse propre réelle M_0 qui est fluctuante.

Si dans l'équation des ondes de la Mécanique ondulatoire, nous remplaçons la masse propre constante m_0 par la masse propre fluctuante M_0, nous obtiendrons le terme usuel de masse en m_0 augmenté de termes contenant la fluctuation aléatoire δM_0 de M_0. Ces termes assimilables à un potentiel perturbateur aléatoire représenteraient l'interaction continuellement variable de la particule avec le milieu subquantique.

Si, au lieu de supposer la particule libre, nous la supposons placée dans un champ extérieur, nous aurons pour son énergie interne une expression de la forme $W_0 = M_0c^2 + U_0$ et le calcul indiqué plus haut nous fournirait pour $\overline{M}_0$ une valeur m'_0 un peu différente de m_0. Ceci pourrait avoir quelque rapport avec la renormalisation de la masse en théorie quantique des champs.

D'après la relation (10), le terme $S(M_0)$ dont la valeur est sensiblement égale à $-(k/h\nu_0)\ M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}$ pour une particule libre a comme valeur moyenne $-k$ de sorte qu'on a

$$\overline{S} = S_0 + \overline{S(M_0)} = S_0 - k. \tag{11}$$

Pendant les fluctuations de M_0, cette quantité peut varier de 0 à $+\infty$ et, par suite, $S(M_0)$ varie de 0 à $-\infty$ avec $-k$ comme valeur moyenne.

Ces remarques permettent d'appliquer aux fluctuations de la masse propre et aux mouvements de la particule qui en résultent la théorie des fluctuations d'Einstein en écrivant que la probabilité de la valeur M_0 de la masse propre fluctuante est

$$P(M_0) = P_m e^{\frac{S(M_0)}{k}} = P_m e^{-\frac{M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}}{kT}}, \tag{12}$$

où P_m est la probabilité de l'état de probabilité maximale.

La formule (12) paraît pouvoir servir de base à l'étude des mouvements aléatoires de la particule dans son onde, mouvements qui doivent se superposer, comme nous l'avons précisé dans notre récente Note, à son mouvement naturel le long des lignes de courant de l'image hydrodynamique de la propagation de l'onde.

(*) Séance du 30 juillet 1962.
(1) *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 807.

GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
162391-62 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55. Imprimé en France.