

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur la théorie des foyers cinétiques dans la thermodynamique de la particule isolée.* Note de M. LOUIS DE BROGLIE.

Rappelant la manière dont il a rattaché le principe de moindre action de Hamilton au maximum de l'entropie dans sa Thermodynamique de la particule isolée, l'auteur montre comment se présente dans ce cadre d'idées la question des foyers cinétiques.

Nous allons d'abord rappeler la relation que nous avons établie dans une Note antérieure <sup>(1)</sup> entre le principe de moindre action de Hamilton et le second principe de la Thermodynamique.

Nous commencerons par le rappel d'une définition. Si  $A$  est une quantité qui dépend de la masse propre variable  $M_0$  d'une particule et d'autres variables, nous désignons par  $\partial_{M_0} A$  la variation éprouvée par  $A$  quand  $M_0$  varie, les autres variables restant fixes, et par  $[\partial A]_{M_0}$  la variation éprouvée par  $A$  quand les autres variables varient,  $M_0$  restant fixe.

Considérons le mouvement « naturel » d'une particule qui l'amène d'un point  $A$  au temps  $t_0$  en un point  $B$  au temps  $t_1$  et envisageons la variation hamiltonienne usuelle qui maintient fixes les points  $A$  et  $B$  ainsi que les époques  $t_0$  et  $t_1$ . Avec notre thermodynamique de la particule isolée, nous avons obtenu la formule suivante :

$$(1) \quad - \int_{t_0}^{t_1} \partial_{M_0} \mathcal{L} = \int_{t_0}^{t_1} [\partial^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt,$$

d'où, en prenant des valeurs moyennes dans l'intervalle de temps  $t_1 - t_0$  et en adoptant notre définition de l'entropie  $S$  du thermostat caché, nous trouvons

$$(2) \quad \partial \bar{S} = - [\overline{\partial^2 \mathcal{L}}]_{M_0} < 0,$$

puisque l'action hamiltonienne est minimale pour le mouvement naturel. Nous avons ainsi rattaché le fait que l'intégrale d'action hamiltonienne  $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$  est minimale pour le mouvement naturel à un maximum de l'entropie moyenne pour ce mouvement.

En termes imagés, on peut traduire ce résultat en disant que le mouvement naturel s'effectue suivant la ligne de talweg d'une vallée de néguen-

tropie. On voit alors que toute trajectoire variée doit grimper au-dessus du fond de la vallée, ce qui donne une intéressante image intuitive de l'augmentation de la néguentropie moyenne, donc de la diminution de l'entropie moyenne, quand on passe du mouvement naturel à l'un quelconque des mouvements variés.

Mais on sait que l'action n'est pas toujours minimale pour toute position donnée des points A et B sur la trajectoire naturelle. L'examen de cette question conduit à introduire la notion de « foyer cinétique ». Le problème est généralement étudié dans le cas du principe de Maupertuis, mais il se transpose facilement dans le cas de l'action hamiltonienne.

Supposons qu'il existe deux mouvements naturels 1 et 2 très voisins qui amènent la particule d'un point A à l'instant  $t_0$  en un point C à l'instant  $t_2$ . Désignons par  $\partial_{12}$  et  $\partial_{21}$  les variations correspondant au passage du mouvement 1 au mouvement 2 et inversement : on a évidemment  $\partial_{21} = -\partial_{12}$ . Appliquons le principe de Hamilton aux mouvements 1 et 2 en considérant chacun d'eux comme étant un mouvement varié par rapport à l'autre. Nous devons avoir

$$(3) \quad \int_{t_0}^{t_2} [\partial_{12}^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt \geq 0, \quad \int_{t_0}^{t_2} [\partial_{21}^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt \geq 0,$$

ce qui n'est possible que si

$$(4) \quad \int_{t_0}^{t_2} [\partial^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt = 0.$$

La trajectoire 2 est donc caractérisée par le fait que la variation seconde de l'action hamiltonienne quand on passe de 1 à 2 (ou inversement) est nulle. Mais alors la relation (1) nous donne

$$(5) \quad \partial_{12} \bar{S} = \partial_{21} \bar{S} = 0.$$

L'entropie moyenne reste donc la même quand on passe du mouvement 1 au mouvement 2 ou inversement.

Ceci posé, il est bien connu que, si l'on effectue la variation hamiltonienne entre un point A et un point B situé entre A et C ( $t_2 > t_1 > t_0$ ), l'action est minimale pour l'intervalle de temps  $t_1 - t_0$ . Mais si, au contraire, le point B est situé sur la trajectoire 1 au-delà du point C ( $t_1 > t_2 > t_0$ ), il n'y a plus de minimum de l'action pour l'intervalle de temps.

Interprétons ceci avec notre point de vue thermodynamique. Les deux trajectoires 1 et 2 suivent les lignes de talweg de deux vallées de néguentropie très voisines, de même profondeur moyenne (puisque  $\partial_{12} \bar{S} = 0$ ), qui sont séparées l'une de l'autre par une colline de néguentropie, mais qui viennent se rejoindre en C. Si B se trouve sur la trajectoire 1 entre A et C, toute trajectoire variée devra grimper sur le flanc des collines de

néguentropie qui bordent la trajectoire 1 : on aura donc  $\partial \bar{S} < 0$  ou  $[\partial^2 \bar{L}^0]_{M_0} > 0$ , c'est-à-dire qu'il y aura pour A 1 B un minimum de l'action hamiltonienne. Si, au contraire, le point B est sur la trajectoire 1 au-delà du point C, on pourra prendre A 2 C 1 B comme trajectoire variée et comme cette trajectoire variée reste au fond d'une vallée de néguentropie de même niveau moyen que la vallée A 1 C 1 B, on a pour cette variation  $\partial \bar{S} = 0$  ou  $[\partial^2 \bar{L}^0]_{M_0} = 0$  et l'action hamiltonienne n'est pas minimale pour toute variation possible.

Ainsi il apparaît que l'aspect thermodynamique que nous avons introduit dans l'étude du principe de moindre action de Hamilton est susceptible de fournir une interprétation intuitive simple du rôle joué par les foyers cinétiques.

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 1052.