PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la relation d'incertitude $\delta n \cdot \delta \varphi \geq 2\pi$.*
 Note (*) de M. **LOUIS DE BROGLIE**, Membre de l'Académie.

En utilisant ses idées sur la coexistence des ondes et des photons dans la structure des rayonnements, l'auteur propose une interprétation de la relation d'incertitude $\delta n \cdot \delta \varphi \geq 2\pi$ dont la véritable signification est restée jusqu'à présent assez mystérieuse.

La théorie de la seconde quantification et la théorie quantique des champs qui en dérive ont conduit à admettre la validité de la relation d'incertitude entre le nombre de photons portés par une onde électromagnétique et sa phase

$$(1) \quad \delta n \cdot \delta \varphi \geq 2\pi.$$

On a cherché à rattacher cette relation à la 4^e relation d'incertitude de Heisenberg dont la véritable interprétation a été, elle aussi, assez discutée. Le raisonnement qu'on a proposé pour rattacher cette 4^e relation d'incertitude

$$(2) \quad \delta W \cdot \delta t \geq h$$

à la relation (1) est le suivant. Soit un train d'ondes de fréquence ν transportant n photons. Si l'incertitude sur n est δn , l'incertitude sur l'énergie est $\delta W = \delta n \cdot h\nu$. D'autre part, on peut écrire $\delta \varphi = 2\pi\nu \delta t$, où δt est considéré comme une incertitude sur le temps. On alors $\delta n \cdot \delta \varphi = (2\pi/h) \delta W \cdot \delta t$ et de (2), on déduit (1).

Cette démonstration ne me paraît plus aujourd'hui satisfaisante. D'abord la 4^e relation d'incertitude (2) se déduit de la relation *non quantitative* $\delta \nu \cdot \delta t \geq 1$ qui est classique en théorie des ondes et c'est en multipliant cette inégalité par h qu'on obtient (2). Or, on n'a pas le droit de poser $\delta W = \delta n \cdot h\nu$ et d'introduire ce δW dans (2) puisque l'incertitude δW de (2) provient en réalité de la largeur spectrale $\delta \nu$ et non d'une incertitude sur le nombre de photons (sans intervention de la largeur spectrale). D'autre part, dans la relation $\delta \nu \cdot \delta t \geq 1$ dont dérive (2), δt n'est pas une incertitude sur la coordonnée temps, c'est la durée du passage du train d'ondes en un point de l'espace ou, si l'on préfère, c'est la durée τ de l'émission du train d'ondes par la source. Il me semble donc que la démonstration rappelée ci-dessus repose sur des confusions.

Pour trouver la véritable signification de la relation (1), il me semble qu'on doit partir de l'idée suivante : dans toutes les relations d'incertitude de la théorie quantique portant sur un produit de la forme $\delta a \cdot \delta b$, les incertitudes sont des incertitudes sur le résultat d'une mesure de la grandeur correspondante, les deux grandeurs a et b n'étant pas simultanément mesurables avec précision dans un même processus de mesure.

Nous pouvons appliquer cette idée à la relation (1) car n et φ ne sont pas simultanément mesurables. En effet, pour mesurer n , il faudrait pouvoir faire produire par les n photons portés par l'onde des effets photo-électriques séparés et dénombrables. Au contraire, pour enregistrer la phase, nous devons faire *coopérer* les photons du train d'ondes à la production d'une oscillation dans un système du genre circuit oscillant, cavité résonnante, etc., comme je l'ai expliqué dans une Note antérieure (1); or cette opération n'est pas compatible avec un dénombrement des photons. Les conditions sont donc remplies pour qu'il existe une relation d'incertitude entre n et φ .

Pour préciser notre point de vue, nous allons chercher à imaginer un procédé de mesure tel que les incertitudes δn et $\delta\varphi$ puissent avoir toutes les deux une valeur finie. Soit un train d'ondes portant un nombre *inconnu* n de photons et ayant une largeur spectrale $\delta\nu$ reliée à la durée d'émission τ par la relation classique

$$(3) \quad \delta\nu \cdot \tau \approx 1.$$

Si nous voulons chercher à déterminer à la fois, avec la plus grande précision possible, le nombre de photons et la phase de l'onde, nous devons faire traverser par le train d'ondes un dispositif où se produisent des effets photoniques de nature quantique et, en principe, dénombrables, puis la faire arriver sur un système capable d'osciller en enregistrant la phase.

Si alors, dans le dispositif de comptage des photons par effet photo-électrique, nous observons m effets, il arrivera seulement $\delta n = n - m$ photons sur le système oscillant, δn étant inconnu puisque n est inconnu. Si les δn photons en question agissent sur le circuit oscillant par impulsions successives rythmées sur la phase de l'onde, ainsi que je l'ai expliqué dans la Note citée plus haut (1), il est raisonnable d'admettre que le système oscillant ne pourra se mettre à osciller régulièrement que s'il reçoit au moins une impulsion par période. Cela nous conduit à écrire $\delta n \cdot (T/\tau) \geq 1$ ou, d'après (3),

$$(4) \quad \delta n \geq \frac{\nu}{\delta\nu}.$$

Mais il nous faut maintenant définir ce que nous appelons l'incertitude $\delta\varphi$. Nous proposons de le faire de la façon suivante. Si l'onde était strictement monochromatique, la variation de sa phase pendant une période $T = 1/\nu$ serait égale à 2π , ce qui revient à dire qu'elle ne varierait pas puisqu'elle n'est définie qu'à 2π près. Mais, en réalité, le train d'ondes a toujours une largeur spectrale $\delta\nu$ et la variation de la phase pour la fréquence $\nu + \delta\nu$ pendant le temps T sera (à 2π près)

$$(5) \quad \delta\varphi = 2\pi \delta\nu T = 2\pi \frac{\delta\nu}{\nu}.$$

Si nous admettons que le $\delta\varphi$ défini par (5) peut être considéré comme l'incertitude sur la valeur de la phase, la comparaison des formules (4) et (5) nous fournit immédiatement la relation (1) qui correspond bien ainsi à une expérience où l'on a cherché à déterminer à la fois, mais nécessairement avec une certaine imprécision, le nombre n des photons portés par le train d'ondes et la valeur de sa phase.

Le raisonnement qui vient d'être exposé nous a permis de retrouver la relation (1) sans avoir aucunement recours à la 4^e relation d'incertitude de Heisenberg. La relation (1) nous apparaît ici comme résultant uniquement de l'hypothèse que le système oscillant subit des impulsions discontinues dues aux arrivées successives des photons portés par le train d'ondes, photons qui sont incorporés dans ce train d'ondes et ont une vibration interne rythmée par la vibration de l'onde. Notre démonstration de la relation (1) se trouve ainsi découler des idées générales auxquelles nous a amené notre conception de la coexistence des photons et des ondes dans les radiations.

Nous devons ajouter l'importante remarque suivante relative à la définition (5) que nous avons adoptée pour $\delta\varphi$: la grandeur $\delta\varphi$ ne doit pas être définie à l'aide de la phase d'une onde plane monochromatique, cas idéal qui n'est jamais physiquement réalisé, mais en considérant un train d'ondes de longueur finie ayant une largeur spectrale $\delta\nu$. La grandeur $\delta\varphi$ définie par (5) mesure donc en quelque sorte « le défaut de monochromaticité » du train d'ondes et ce serait là son véritable sens. En d'autres termes, la véritable signification du $\delta\varphi$ de la relation (1) ne devrait pas être cherchée dans l'existence d'une incertitude sur la phase d'une onde plane monochromatique, mais dans le fait qu'on a toujours affaire à un train d'ondes ayant une largeur spectrale $\delta\nu$ non nulle.

À ce point de vue, il est intéressant de mettre la définition (5) en relation avec le fait suivant : en employant le langage des radioélectriciens, on peut dire que, pour enregistrer exactement la composition spectrale de l'onde incidente, le système oscillant utilisé doit avoir une « qualité » Q telle que sa « bande passante » $\Delta\nu$ donnée par la relation $\Delta\nu/\nu = \alpha/Q$ (où α est un coefficient de l'ordre de l'unité) soit au moins égale à la largeur spectrale $\delta\nu$ de l'onde.

(*) Séance du 31 mai 1965.

(1) *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 6345.