C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 1351-1354 (19 décembre 1966). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la formule* $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ *et les bases de la Mécanique ondulatoire.* Note (*) de M. **Louis de Broglie**, Membre de l'Académie.

L'auteur donne une nouvelle démonstration de la formule $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ en partant d'un modèle très simple de corps contenant de l'énergie calorifique. Cette démonstration met bien en évidence la raison pour laquelle les formules de transformation relativiste de la chaleur et de l'énergie totale sont différentes et permet d'en tirer d'importantes conséquences.

J'ai construit ma récente Thermodynamique cachée des particules [1] sur la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. Comme la validité de cette formule a été récemment contestée, j'en ai donné une nouvelle démonstration dans une Note récente [2]. Je vais en présenter encore une autre démonstration très instructive en considérant un modèle schématique simple d'un corps contenant de la chaleur.

Considérons dans un système de référence galiléen R_0 un corps C formé de N particules de même masse m_0 se déplaçant le long d'un axe Ox avec la vitesse $+v_0$ et de N particules se déplaçant le long du même axe avec la vitesse $-v_0$ de sorte que la quantité de mouvement totale des particules du corps C soit nulle dans R_0.

La formule de transformation relativiste des vitesses quand on passe du système de référence R_0 à un système de référence R où le corps C a un mouvement d'ensemble de vitesse βc le long de Ox permet de démontrer la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1 \mp \beta\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1}$$

formule où l'on doit prendre le signe — si v_0 est dans le sens de Ox et le signe + si v_0 est en sens inverse de Ox et où v a une valeur v_1 dans le premier cas et une *autre* valeur v_2 dans le second cas.

Dans le système de référence R_0, on a

$$W_0 = Q_0 = \frac{2Nm_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} \tag{2}$$

en supposant que l'énergie interne d'agitation de C a le caractère d'une chaleur. Dans le système de référence R, on aura pour les particules de vitesse propre v_0

$$\frac{N m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{N m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{1-\beta\frac{v_1}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3}$$

Au contraire, pour les particules de vitesse propre $-v_0$, on aura

$$\frac{N m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{N m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \frac{1+\beta\frac{v_2}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4}$$

Or, on peut inverser la formule (1) en permutant le rôle de v et de v_0 et en changeant β en $-\beta$. On voit alors aisément que l'énergie totale W du corps C dans le système de référence R est

$$W = \frac{N m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{N m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5}$$

ce qui est la formule usuelle de transformation relativiste de l'énergie.

Compte tenu de toutes les formules précédentes, on obtient donc

$$W_0 = Q_0 = \frac{W}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\frac{N m_0 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{N m_0 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\right], \tag{6}$$

d'où l'on tire

$$W = Q_0\sqrt{1-\beta^2} + \beta c\left[\frac{N m_0 v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} - \frac{N m_0 v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\right]. \tag{7}$$

Mais on voit aisément que la quantité entre crochets dans (7) est égale à la quantité de mouvement du corps dans le système R, c'est-à-dire à $[W_0/(c^2\sqrt{1-\beta^2})]\beta c$.

On voit donc qu'on peut écrire (7) sous la forme

$$\frac{Q_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = Q_0\sqrt{1-\beta^2} + \frac{Q_0\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{8}$$

formule dont la vérification est d'ailleurs immédiate.

Nous arrivons ainsi à l'idée suivante : « *l'énergie interne* W_0 *d'un corps a le caractère d'une énergie de chaleur quand elle est due à des mouvements internes dont la quantité de mouvement totale est nulle* ». On voit alors que la formule (8) signifie que l'énergie totale du corps C dans le système R se décompose en un terme $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ qui est la chaleur renfermée dans le corps en mouvement et en terme d'énergie de translation $Q_0\beta^2/\sqrt{1-\beta^2}$. La raison pour laquelle W et Q ne se transforment pas de la même façon est ainsi mise clairement en évidence et l'on s'aperçoit, par exemple en faisant $N = 1$ dans le raisonnement qui précède, que notre définition de l'énergie de chaleur est encore applicable à un corps de structure très simple.

Si nous appelons M_0 la masse propre totale du corps C dans son système propre, on pourra poser $Q_0 = M_0 c^2$ et écrire

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{9}$$

Cette formule — et non la formule usuelle

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0 c^2 + M_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]$$

— nous apparaît comme la *véritable* formule de décomposition de l'énergie totale d'un corps en mouvement en une énergie interne et une énergie de mouvement quand l'énergie interne est une énergie de chaleur dans le sens précisé plus haut.

Il est maintenant intéressant de constater que les idées qui me guidèrent jadis dans mes premiers travaux sur la Mécanique ondulatoire conduisent précisément à considérer l'énergie interne d'une particule comme ayant le caractère d'une chaleur. En effet, je définissais l'énergie W_0 et la quantité de mouvement de la particule $\vec{p}_0$ dans son système propre par

$$W_0 = m_0 c^2 = h\nu_0, \qquad \vec{p}_0 = 0. \tag{10}$$

La première de ces équations conduit naturellement à penser que l'énergie de masse $m_0 c^2$ de la particule résulte d'un mouvement interne de fréquence ν_0 tandis que la seconde signifie que dans le système propre ce mouvement interne a une quantité de mouvement nulle, ce qui donne bien à l'énergie interne le caractère d'une chaleur telle que nous l'avons définie. On peut donc appliquer à l'énergie $m_0 c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ de la particule en mouvement la formule (9) où, au second membre, la quantité de chaleur $Q = m_0 c_2 \sqrt{1-\beta^2}$ n'est pas autre chose que la fonction de Lagrange, changée de signe, de la particule en mouvement. On retrouve là l'une des bases essentielles sur lesquelles j'ai pu construire dans ces dernières années une Thermodynamique cachée des particules [1] dont le résultat le plus remarquable est d'avoir permis de ramener le principe de moindre action au second principe de la Thermodynamique.

Une idée qui se trouve déjà dans ma thèse de Doctorat de 1924 et qui est devenue aujourd'hui le principe fondamental de ma théorie du guidage de la particule par l'onde peut s'énoncer comme il suit : « la particule se déplace toujours dans son onde de façon que sa vibration interne reste en phase avec celle de l'onde ». Or ce fait peut se déduire de l'équation (9) qui, compte tenu de (10), peut s'écrire

$$h\nu_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{\beta}{c}\beta c. \tag{11}$$

Si nous définissons dans le système R l'onde par sa fréquence $\nu = \nu_0/\sqrt{1-\beta^2}$ et par sa vitesse de phase $V = c/\beta$ et si nous appelons ν_H la fréquence interne de la particule assimilée à une horloge en mouvement, nous obtenons après multiplication par $(2\pi/h)dt$

$$2\pi\nu\left(dt - \frac{dx}{V}\right) = 2\pi\nu_H\, dt, \tag{12}$$

où dt est un intervalle du temps de R et $dx = \beta c\, dt$ le déplacemental de particule pendant le temps dt. L'équation (12) exprime bien que la vibration interne de la particule-horloge reste en phase avec l'onde.

Je veux maintenant conclure. Quand j'ai autrefois étendu à toutes les particules la coexistence des ondes et des particules aperçue dans le cas de la lumière par Einstein dès 1905, j'avais dans l'esprit des images physiques précises et conformes à la théorie de la relativité. Mon point de départ a été de remarquer que la fréquence d'une onde se transforme suivant la formule $\nu = \nu_0/\sqrt{1-\beta^2}$ tandis que celle d'une horloge a pour loi de transformation $\nu_H = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. Cette différence est la même que celle qui existe entre les formules de transformation de l'énergie et de la chaleur. Le présent travail montre nettement pourquoi il en est ainsi. Il est bien regrettable que, dans les exposés trop abstraits qu'on fait de la « Mécanique quantique », on ne mentionne même plus les idées physiques qui ont permis la découverte de la Mécanique ondulatoire.

(*) Séance du 7 décembre 1966.

(1) *La Thermodynamique de la particule isolée* (ou *Thermodynamique cachée des particules*), Gauthier-Villars, Paris, 1964.

(2) *Comptes rendus*, 262, 1966, p. 1235.

(94, *rue Perronet, Neuilly-sur-Seine, Hauts-de-Seine.*)

173883. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e)
Imprimé en France.