. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 645-648 (5 septembre 1966). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur l'interprétation de l'opérateur hamiltonien* H_{op} *et de l'opérateur « carré du moment angulaire »* M^2_p *de la Mécanique quantique.* Note de MM. **Louis de Broglie**, Membre de l'Académie et **João Andrade e Silva**.

Les auteurs montrent comment on doit interpréter en théorie de la double solution les opérateurs H_{op} et M^2_{op} de la Mécanique quantique en les considérant comme contenant un terme qui provient par dégénérescence newtonienne de la Dynamique du corpuscule à masse propre variable.

Remarquons d'abord qu'en coordonnées sphériques r, θ, α, on peut décomposer l'opérateur laplacien Δ en un opérateur radial Δ_R et un opérateur angulaire Δ_A en posant $\Delta = \Delta_R + \Delta_A$ avec

$$(1)\qquad \Delta_R = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \Delta_A = \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right],$$

ce qui permet de mettre le potentiel quantique

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta a}{a}$$

sous la forme $Q = Q_R + Q_A$, avec

$$(2)\qquad Q_R = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta_R a}{a}, \qquad Q_A = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta_A a}{a}.$$

Rappelons aussi que l'opérateur M^2_{op} de la Mécanique quantique est défini par

$$(3)\qquad M^2_{op} = -\hbar r^2 \Delta_A.$$

Or, en théorie de la double solution avec $\Psi = a\, e^{(i/\hbar)\varphi}$, on a pour la quantité de mouvement $\vec{p}$ l'expression $\vec{p} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ et il est alors naturel de poser

$$(4)\qquad M_x = -\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \quad \ldots, \qquad \text{d'où} \qquad M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \left(y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \ldots.$$

Notons que M_x, M_y, M_z ainsi définis sont des grandeurx physiques et non pas des opérateurs. Bien que l'emploi des opérateurs soit souvent très commode, nous pensons qu'une véritable théorie physique devrait toujours pouvoir se mettre sous une forme qui n'emploie que des grandeurs physiques sans intervention explicite d'opérateurs.

Rappelons maintenant comment se décompose en théorie de la double solution l'opérateur H_{op} correspondant à l'énergie cinétique qui est égal à

$$H_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta. \tag{5}$$

Comme l'un de nous l'a démontré antérieurement [1], on a

$$H_{op}\Psi = \left[\frac{1}{2m_0}(\operatorname{grad}\varphi)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta a}{a}\right]\Psi = \left(\frac{1}{2}m_0 v^2 + Q\right)\Psi. \tag{6}$$

Le premier terme de la parenthèse correspond à l'énergie cinétique définie par la théorie de la double solution et le second au potentiel quantique Q. L'origine de ces deux termes est la suivante. La forme relativiste de l'énergie d'un corpuscule avec la masse propre variable M_0 [2] est $M_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$ qui, à l'approximation newtonienne, compte tenu de la définition relativiste $Q = M_0c^2 - m_0c^2$ du potentiel quantique donne

$$m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 + Q, \qquad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m_0 v^2 + Q$$

si l'on néglige, comme on le fait toujours à l'approximation newtonienne, le terme en m_0c^2. On retrouve alors la formule (6) et l'on voit que la Mécanique quantique avec son opérateur H_{op} confond en un seul terme l'énergie cinétique proprement dite du corpuscule et le potentiel quantique qui, lui, est une dégénérescence newtonienne de la masse propre variable M_0.

Passons maintenant à l'opérateur M^2_{op} de la Mécanique quantique. Nous avons

$$\frac{1}{2m_0r^2}M^2_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta_A. \tag{7}$$

Nous voyons alors que l'opérateur $(1/2m_0r^2)\,M^2_{op}$ est égal à la partie « angulaire » de l'opérateur hamiltonien H_{op}. Nous pouvons donc écrire à l'approximation newtonienne la formule analogue à (6)

$$\frac{1}{2m_0r^2}M^2_{op}\Psi = \left[\frac{1}{2m_0}(\operatorname{grad}_A\varphi)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\Delta_A a}{a}\right]\Psi = \left[\frac{1}{2}m_0(v_\theta^2 + v_\alpha^2) + Q_A\right]\Psi \tag{8}$$

et nous voyons encore ici que l'opérateur M^2_{op} de la Mécanique quantique conduit à confondre en un seul terme la partie angulaire de l'énergie cinétique et la partie angulaire du potentiel quantique qui constitue une partie de la dégénérescence newtonienne de la masse propre variable M_0.

On peut d'ailleurs mettre la formule (8) sous une forme un peu différente en partant de la remarque suivante. La composante v_r de la vitesse du corpuscule ne contribue évidemment pas au moment angulaire qui dépend uniquement du vecteur $\vec{v}_A$ de composantes v_θ et v_α. Si l'on mène par le point O une droite perpendiculaire à $\vec{v}_A$, cette droite est l'axe instantané de rotation pour le corpuscule. On a alors à l'approximation newtonienne pour le moment angulaire la valeur $M = m_0 v_A r$ et, par suite,

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = m_0^2 v_A^2 r^2 = 2 m_0 r^2 \frac{1}{2} m_0 v_A^2 = r^2 (\mathrm{grad}_A \varphi)^2. \tag{9}$$

L'équation (8) peut donc s'écrire

$$M_{op}^2 \Psi = [M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 + 2 m_0 r^2 Q_A] \Psi. \tag{10}$$

Ainsi, comme le montrent les calculs précédents, les opérateurs du second ordre H_{op} et M_{op}^2 de la Mécanique quantique usuelle mélangent la véritable grandeur physique qu'ils sont censés représenter avec un terme de potentiel quantique qui provient de la dégénérescence newtonienne de la masse propre variable M_0.

Nous sommes donc conduits à la conséquence très importante que l'équation de Schrödinger, qui est une dégénérescence newtonienne de l'équation relativiste de Klein-Gordon, garde la marque de son origine et qu'elle contient des choses qui ne peuvent bien se comprendre qu'en partant de la Dynamique relativiste du corpuscule à masse propre variable.

Il est d'ailleurs facile de donner un exemple des erreurs auxquelles on est conduit quand on oublie que l'équation de Schrödinger n'est qu'une dégénérescence newtonienne de la forme relativiste de la Mécanique ondulatoire. En effet, quand ils traitent de l'équation de Schrödinger, beaucoup d'auteurs raisonnent comme il suit. Pour une onde plane monochromatique, l'énergie W et la quantité de mouvement p d'un corpuscule de masse m sont égales à

$$W = \frac{1}{2} m v^2 = h\nu, \qquad p = mv = \frac{h}{\lambda}, \tag{11}$$

d'où l'on conclut que la vitesse de phase V de l'onde, définie par $V = \lambda\nu$, est

$$V = \frac{W}{p} = \frac{1}{2} v. \tag{12}$$

Or, cette forme est inexacte car les expressions rigoureuses de W et de p sont

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - p^2}} = h\nu \qquad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - p^2}} = \frac{h}{\lambda}, \tag{13}$$

d'où

$$V = \nu\lambda = \frac{c^2}{v}, \tag{14}$$

formule d'ailleurs bien connue. Où est donc l'erreur qui conduit à la formule (12) ? On le voit en remarquant qu'à l'approximation newtonienne où $\beta \ll 1$, les formules rigoureuses (13) donnent

$$W = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right), \qquad p = m_0 v \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right), \tag{15}$$

ce qui redonne bien l'expression (14). Or, en passant de (15) à (11), dans l'expression de p on néglige β^2 devant l'unité, ce qui est licite, mais dans l'expression de W on néglige 1 devant β^2, ce qui est évidemment inexact.

Concluons donc, ce qu'on oublie trop souvent, que la Mécanique ondulatoire est essentiellement une théorie relativiste.

(1) Louis de Broglie, *La théorie de la Mesure en Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1957, p. 75.

(2) Pour l'introduction de la masse propre variable dans la théorie de la double solution, *voir*, par exemple : Louis de Broglie, *La Thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964, p. 77.

(94, *rue Perronet, Neuilly-sur-Seine, Hauts-de-Seine*.)

173094. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.