C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 1041-1044 (10 avril 1967). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Le mouvement brownien d'une particule dans son onde.* Note (*) de M. **Louis de Broglie**, Membre de l'Académie.

En s'appuyant sur la théorie de la double solution complétée par l'hypothèse des perturbations d'origine subquantique, l'auteur montre que la particule doit être animée dans son onde d'une sorte de mouvement brownien représenté par une équation de diffusion.

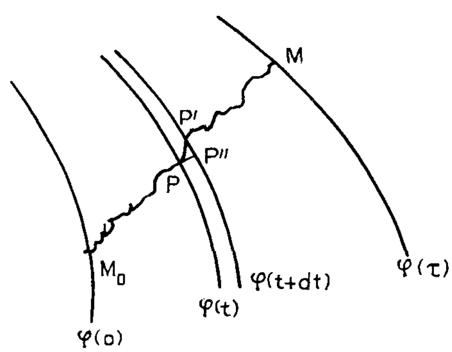
Dans un article récent de la *Physical Review* [1], M. Edward Nelson a eu la très intéressante idée de rechercher si l'équation de Schrödinger ne pouvait pas être considérée comme correspondant au mouvement brownien d'une particule et il a trouvé que le coefficient de diffusion D de ce mouvement serait égal à $C(\hbar/m)$, où C est une constante numérique qui, d'après son calcul, a la valeur $1/2$. Une expression de cette forme pouvait être prévue pour des raisons de dimensions dans une théorie non relativiste où l'on ne dispose que des deux constantes physiques m et h.

Mes idées actuelles sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire me font penser que la tentative de M. Nelson est orientée dans une bonne direction. Je crois, en effet, qu'il faut rétablir la localisation de la particule dans son onde, admettre qu'elle possède un mouvement « moyen » qui, en l'absence de perturbations, lui ferait décrire une des courbes orthogonales aux surfaces d'égale phase de l'onde, mais que ce « mouvement de guidage » est constamment perturbé par des interactions provenant d'un milieu caché « le milieu subquantique ». Il en résulte que la particule, partant d'une certaine position initiale, est constamment diffusée autour de cette position initiale et possède donc une sorte de mouvement brownien, approximativement représentable par une équation de diffusion, qui se superpose au mouvement de guidage.

Mais, bien que je sois d'accord sur le sens de la tentative de M. Nelson, elle ne me donne pas entière satisfaction, en particulier parce qu'elle conduit à une équation de diffusion de la forme $\partial\Psi/\partial t = D\,\Delta\Psi$ où la fonction d'onde Ψ de Schrödinger joue le rôle d'une densité alors que c'est la quantité $|\Psi|^2$ qui devrait jouer ce rôle. J'ai ainsi été amené à reprendre une tentative analogue, mais sur des bases différentes. Depuis longtemps, je suis convaincu qu'on ne peut pas déduire l'équation de Schrödinger d'une équation de diffusion parce qu'une équation de diffusion, qui a la forme de l'équation de la chaleur, est du type parabolique tandis que l'équation de Schrödinger, dégénérescence non relativiste de celle de Klein-Gordon, est en réalité, malgré les apparences, du type hyperbolique. Inversement je ne crois pas non plus qu'on puisse faire dériver une véritable équation de diffusion de la seule équation de Schrödinger. Pour déduire de la propagation d'une onde un phénomène de diffusion, il me paraît nécessaire d'introduire une hypothèse supplémentaire qui se présente tout naturellement dans ma théorie de la double solution.

Dans celle-ci, en effet, on admet comme principe essentiel que la particule est toujours localisée et qu'elle se déplace dans son onde de telle façon que sa vibration interne reste constamment en phase avec l'onde qui la porte (onde v de ma théorie à laquelle l'onde Ψ est proportionnelle). Quand le milieu subquantique n'exerce aucune perturbation sur l'onde, le mouvement de la particule est défini par la « formule du guidage » suivant laquelle la quantité de mouvement est égale au gradient de la phase de l'onde. Nous pouvons dire alors que la trajectoire non perturbée est l'une des lignes de courant de l'onde. Mais, si une perturbation provenant du milieu subquantique se produit, l'onde devient $v' = v + w$, où w traduit l'existence de la perturbation et alors la particule se déplace à chaque instant en suivant l'une des lignes de courant de v' et *en restant ainsi constamment en phase avec* v'. Quand la perturbation est terminée, on a de nouveau $w = 0$ et $v' = v$ de sorte que la particule se met finalement à suivre la ligne de courant de v sur laquelle elle est parvenue. Nous nous proposons de montrer qu'en admettant cette hypothèse supplémentaire, nous allons pouvoir attribuer à la particule un mouvement brownien représenté par une équation de diffusion.

Nous désignerons par φ la phase de l'onde non perturbée v et par φ' la phase « interne » du corpuscule pendant le mouvement brownien. Représentons les surfaces d'égale phase de l'onde non perturbée aux instants o, t, $t + dt$ et τ en supposant que la perturbation commence au temps o et se termine au temps τ.



La particule dans son mouvement brownien zigzaguant qui va de M_0 en M suit pendant l'intervalle de temps $t - t + dt$ le petit segment $\overline{PP'}$ qui est différent du segment $\overline{PP''}$ qui correspondrait au mouvement de guidage en P en l'absence de perturbation subquantique. Nous pouvons représenter la vitesse de la particule sur $\overline{PP'}$ par $\vec{v}_g + \vec{v}$, où $\vec{v}_g$ est la vitesse de guidage non perturbée en P et $\vec{v}$ est la vitesse due à la perturbation d'origine subquantique.

La variation $d\varphi$ de la phase non perturbée le long du segment $\overline{\mathrm{PP}'}$ est, pendant la durée dt du parcours de ce segment, égale à

$$(1)\qquad d\varphi = \frac{m_0 c^2}{\hbar} dt + \frac{1}{2\hbar} m_0 v_g^2\, dt - \frac{m_0 v_g}{\hbar} \overline{\mathrm{PP}''} = \frac{m_0 c^2}{\hbar} dt - \frac{1}{2\hbar} m_0 v_g^2\, dt$$

puisque $\overline{\mathrm{PP}''} = v_g\, dt$. D'où

$$(2)\qquad \varphi(\tau) - \varphi(0) = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\tau - \int_0^\tau \frac{m_0}{2\hbar} v_g^2\, dt = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\tau - \frac{m_0 \overline{v}_g^2}{2\hbar}\tau.$$

Puisque nous admettons que la vitesse de la particule pendant son mouvement brownien est $\vec{v}_g + \vec{v}$, nous trouvons pour la variation $d\varphi'$ de la phase interne de la particule de P en P$'$:

$$(3)\qquad d\varphi' = \frac{m_0 c^2}{\hbar} dt - \frac{m_0}{2\hbar}(v + v_g)^2\, dt = \frac{m_0 c^2}{\hbar} dt - \frac{m_0 v^2}{2\hbar} dt - \frac{m_0 v_g^2}{\hbar} dt - \frac{2\, m_0 \vec{v}\cdot\vec{v}_g}{\hbar} dt$$

puisque, d'après la formule relativiste de ralentissement des horloges, la fréquence interne de la particule en mouvement est

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2} \simeq \frac{m_0 c^2}{h}\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2\right) = \frac{m_0 c^2}{h} - \frac{1}{2}\,\frac{m_0 (v + v_g)^2}{h}.$$

Si nous intégrons $d\varphi'$ le long de la trajectoire brownienne de la particule en remarquant qu'on a par hypothèse $\varphi'(0) = \varphi(0)$, on trouve

$$(4)\qquad \varphi'(\tau) - \varphi(0) = \frac{m_0 c^2}{\hbar}\tau - \frac{m_0 \overline{v}_g^2}{2\hbar}\tau - \frac{m_0 \overline{v}^2}{2\hbar}\tau$$

car le dernier terme de (3) est nul en moyenne le long de la trajectoire brownienne puisque la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{v}_g$ varie aléatoirement le long de cette trajectoire.

La comparaison de (2) et de (4) fournit alors

$$(5)\qquad \varphi(\tau) - \varphi'(\tau) = \frac{m_0 \overline{v}^2}{2\hbar}\tau$$

et pour que les phases $\varphi(\tau)$ et $\varphi'(\tau)$ coïncident, il faut que

$$(6)\qquad \overline{v}^2\tau = 4\pi n \frac{\hbar}{m_0} \qquad (n \text{ entier}).$$

Pour trouver maintenant l'équation de diffusion représentant ce mouvement brownien, nous compterons la variable x le long de la droite, $\overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$, c'est-à-dire que nous poserons $\overline{\mathrm{MM}_0} = x$. Comme pendant l'intervalle de temps dt la diffusion brownienne est $dx = v_x\, dt$ on aurait, si v_x était constant, $x = v_x\tau$. Mais v_x varie aléatoirement de sorte que $\overline{v}_x$ est nul et nous devons nous contenter de poser

$$(7)\qquad \overline{x}^2 = \overline{v}_x^2\tau^2.$$

En désignant alors par α l'angle constamment variable que fait la vitesse brownienne instantanée avec $\overline{M_0 M}$, on aura

$$\overline{v_x^2} = \overline{(v \cos \alpha)^2} = \frac{\overline{v^2}}{3}, \tag{8}$$

d'où d'après (7) et (6) :

$$\frac{\overline{x^2}}{\tau} = \overline{v_x^2}\,\tau = \frac{1}{3}\overline{v^2}\,\tau = \frac{4\pi n}{3}\frac{\hbar}{m_0}. \tag{9}$$

Or la théorie du mouvement brownien repose sur l'équation de diffusion

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathrm{D}\,\Delta\rho, \tag{10}$$

où ρ est la probabilité de la présence de la particule à une distance x de son point de départ. La solution bien connue de l'équation (10) est pour $t = \tau$:

$$\rho(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\,\mathrm{D}\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{2\mathrm{D}\tau}} \tag{11}$$

qui donne aisément

$$\overline{x^2} = 2\,\mathrm{D}\tau \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{D} = \frac{\overline{x^2}}{2\tau}. \tag{12}$$

Compte tenu de (9), on obtient finalement comme coefficient de diffusion pour le mouvement brownien de la particule dans son onde

$$\mathrm{D} = \frac{2\pi}{3}\,n\,\frac{\hbar}{m_0}, \tag{13}$$

ce qui, pour $n = 1$, ne diffère que par le facteur numérique $4\pi/3$ de la valeur $\hbar/2\,m$ trouvée par M. Nelson.

La théorie qui précède n'est valable qu'à l'approximation newtonienne et l'on sait qu'un phénomène de diffusion n'est qu'approximativement représentable par une équation du type (10). De plus, le mouvement brownien de la particule dans son onde représenté par les équations (10) à (13) est défini abstraction faite du mouvement de guidage.

(*) Séance du 29 mars 1967.
(1) *Phys. Rev.*, 150, 1966, p. 1079.

(94, *rue Perronet, Neuilly-sur-Seine, Hauts-de-Seine.*)

174910. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.