C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 1173-1175 (17 avril 1967). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la Dynamique du corps à masse propre variable et la formule de transformation relativiste de la chaleur.* Note (*) de M. **Louis de Broglie**, Membre de l'Académie.

L'auteur retrouve d'abord la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ à partir de la Dynamique du corps à masse propre variable. Puis, par un raisonnement simple, il montre que la formule $Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}$ proposée par certains auteurs ne paraît pas admissible.

Dans des Notes précédentes [1], nous avons donné de nouvelles démonstrations de la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$. Nous allons montrer qu'on peut aussi la déduire de la Dynamique du corps à masse propre variable. Pour établir les équations de cette Dynamique dans le cas de l'absence de forces extérieures, nous partirons de l'expression relativiste de la fonction de Lagrange pour un corps de masse propre M_0 qui est

$$\mathcal{L} = -M_0 c^2\sqrt{1-\beta^2} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right).$$

Si l'on écrit que, d'après le principe de moindre action, on doit avoir $\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,dt = 0$, on en tire en désignant par $p_k = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_k$ les composantes de la quantité de mouvement

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) = \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{M_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,M_0,$$

où le second membre peut être considéré comme une force intrinsèque due à la variation de la masse propre. La symétrie relativiste entre l'espace et le temps conduit à adjoindre à (3) l'équation de variation de l'énergie $W = M_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$,

$$(4) \qquad \frac{dW}{dt} = c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\partial M_0}{\partial t}.$$

De (3) et (4) on tire

$$(5) \qquad \frac{dW}{dt} - \vec{v}\,\frac{d\vec{p}}{dt} = c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{dM_0}{dt} \qquad \text{car} \quad \frac{dM_0}{dt} = \frac{\partial M_0}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,M_0.$$

Or, nous avons

$$(6)\quad \begin{cases} \vec{v}\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{v}.\vec{p}) - \vec{p}\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{v}.\vec{p}) - \dfrac{M_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{d\vec{v}}{dt}, \\ c^2\sqrt{1-\beta^2}\dfrac{dM_0}{dt} = \dfrac{d}{dt}(M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}) + \dfrac{M_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\dfrac{d\vec{v}}{dt}. \end{cases}$$

En portant (6) dans (5), il vient aisément

$$(7)\quad \frac{d}{dt}\left[W - \vec{v}.\vec{p} - M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}\right] = 0$$

quand le corps est au repos, le crochet est nul parce qu'alors $\beta = 0$ et $W_0 = M_0c^2$. Il en résulte la relation

$$(8)\quad \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Cette relation exprime que l'énergie totale du corps en mouvement se décompose en une énergie interne $Q = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2} = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ contenue dans le corps et ayant le caractère d'une chaleur augmentée d'une énergie de translation d'ensemble exprimée par la pseudo-énergie cinétique $M_0v^2/\sqrt{1-\beta^2}$.

Nous retrouvons ainsi une fois de plus la formule correcte de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ en la rattachant à la Dynamique du corps à masse propre variable. De plus notre raisonnement a l'intérêt de nous montrer que la formule (8) est non seulement valable pour le problème particulier du changement du système de référence comme on le savait depuis le très ancien raisonnement de Planck et Laue, mais *qu'elle est valable à chaque instant, même quand la vitesse varie.*

On voit aussi que dans le mouvement du corps à masse propre variable, c'est la force due à la variation de la masse propre, représentée par le second membre de l'équation (3), qui assure à chaque instant la validité de la relation (8).

Dans ma Note du 9 mai 1966, je m'était placé dans un système de référence galiléen R et j'avais considéré un corps qui, d'abord en repos dans ce système, passait ensuite dans un état final où il possédait une vitesse constante βc. Mes calculs m'avaient alors conduit à montrer que dans cet état final la relation (8) entraînant la formule $Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}$ était valable. Or, le raisonnement fait ci-dessus, rend ce fait tout à fait évident. En effet, la relation (8) est vérifiée pendant tout le processus d'accélération qui fait passer le corps de l'état de vitesse nulle à l'état de vitesse βc. Il en résulte évidemment qu'elle est encore valable dans l'état final où le corps conserve la vitesse constante βc.

Dans ces dernières années, plusieurs auteurs, guidés par une fausse analogie entre l'énergie totale d'un corps et son énergie interne de masse propre ayant le caractère d'une chaleur, ont soutenu la validité de la formule de transformation $Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}$. En développant un argument dont l'idée nous a été suggérée par M. Georges Lochak, nous allons montrer par un raisonnement simple que cette formule est inacceptable.

Considérons un corps C qui, dans son système propre R_0, contient une quantité de chaleur (énergie de masse propre comprise) Q_0. Une molécule M de corps possède dans R_0 à un instant donné une vitesse $\vec{v}_0$. Passons ensuite à un système de référence R où le corps C a une vitesse d'ensemble βc dans le sens de l'axe des z. Les formules de transformation relativiste des composantes de la vitesse de la molécule M nous donnent

$$(9) \qquad v_x = \frac{v_{0x}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\dfrac{v_{0z}}{c}}, \qquad v_y = \frac{v_{0y}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\dfrac{v_{0z}}{c}}, \qquad v_z = \frac{v_{0z}+\beta c}{1+\beta\dfrac{v_{0z}}{c}}.$$

On voit tout de suite que, si β tend vers 1, on a

$$(10) \qquad v_x \to 0, \qquad v_y \to 0, \qquad v_z \to c.$$

Donc, dans le système R, plus β est voisin de 1, plus v est voisin de c dans le sens Oz. Cela signifie que plus la vitesse du corps C est voisine de c, plus la vitesse *relative* de la molécule M dans le corps C devient petite. Autrement dit, quand β tend vers 1, toute l'énergie du corps tend à devenir une énergie de translation d'ensemble, l'énergie d'agitation interne tendant vers zéro. Cela se voit d'ailleurs facilement sur la formule (8).

Si la quantité de chaleur contenue dans C est Q_0 dans R_0 et Q dans R, on doit avoir une formule de transformation du type

$$(11) \qquad Q = Q_0 f(\beta^2).$$

car la fonction f ne peut pas dépendre du sens de la vitesse βc le long de Oz. Or, d'après ce qui précède, $f(\beta^2)$ égale à 1 pour $\beta = 0$ doit tendre vers zéro quand β tend vers 1. Cela rend évidemment impossible d'admettre la formule $Q = Q_0/\sqrt{1-\beta^2}$.

(*) Séance du 10 avril 1967.

(1) *Comptes rendus*, 262, série B, 1966, p. 1235 et 263, série B, 1966, p. 1351.

(94, *rue Perronet, Neuilly-sur-Seine, Hauts-de-Seine.*)