

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur les discussions relatives à la formule*
 $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ *et la définition de la pression en Thermodynamique*
relativiste. Note de M. LOUIS DE BROGLIE, Membre de l'Académie.

L'auteur montre que, si l'on a pu récemment mettre en doute la validité de la formule de transformation relativiste de la chaleur $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, cela tient sans doute aux ambiguïtés qui se présentent quand on introduit la notion de pression en Thermodynamique relativiste.

Planck et Laue ont démontré vers 1908 la formule suivante de transformation relativiste de la chaleur

$$(1) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

qui a été longtemps admise sans contestation. Mais ils ont aussi utilisé la formule de transformation relativiste du tenseur symétrique de rang 2 qui représente les densités d'énergie-impulsion et de pression interne dans un corps. De cette dernière formule, on peut tirer par intégration sur le volume des formules de transformation pour l'énergie U , la pression interne P supposée isotrope, le volume V et la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un corps quand on passe d'un système de référence R_0 où il est immobile à un système de référence R où il est animé de la vitesse constante $v = \beta c$. Ces relations peuvent s'écrire

$$(2) \quad U = \frac{U_0 + P_0 V_0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \vec{p} = \frac{U_0 + P_0 V_0}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \vec{v}; \quad PV = \frac{P_0 V_0 + U_0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Or, divers auteurs se sont appuyés sur ces formules pour contester la validité de la formule (1). Comme de nombreux raisonnements m'ont conduit à penser que la formule (1) est exacte, j'en suis arrivé à me demander si les formules (2) n'étaient pas sinon inexactes, du moins inexactement appliquées dans le cas d'un corps contenant de la chaleur et je me suis aperçu que l'introduction de la pression en Thermodynamique relativiste comporte des ambiguïtés qu'il importe de bien préciser.

Même si l'on se contente de considérer dans R_0 un corps en état d'équilibre calorifique homogène et invariable, l'application des formules (2) au simple changement de système de référence $R_0 \rightarrow R_1$ soulève des difficultés. Si l'on examine la question, on voit que toutes les difficultés proviennent des termes en P_0 figurant dans les formules (2) et que, par suite, elles disparaissent si l'on pose $P_0 = 0$. Cette hypothèse me paraît pouvoir être justifiée. En effet, si l'on admet qu'un corps dans un état d'équilibre

homogène et invariable contient dans son système propre une agitation moléculaire partout isotrope et si l'on considère un petit élément de surface placé dans R_0 , cet élément de surface reçoit sur ses deux faces la même quantité de mouvement due aux impacts moléculaires de sorte que la pression qu'il subit est nulle. C'est seulement aux limites du corps que la pression P_0 apparaît et qu'elle peut se manifester par le travail $P_0 dV_0$ quand V_0 varie.

Il paraît donc essentiel de bien distinguer la pression interne qui, on le voit dans les formules (2), n'est pas invariante et qui dans le cas considéré est nulle dans R_0 de la pression aux limites du corps qui n'est pas nulle dans R_0 et qui intervient dans l'expression du travail. Or cette dernière pression n'est pas non plus invariante. Elle ne le serait que si l'on pouvait négliger l'énergie de translation globale du corps dans R qui est égale à $E_t = U_0 \beta^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$; c'est ce qui ressort clairement des calculs exposés dans une dernière Note aux *Comptes rendus* ⁽¹⁾ (où j'ai écrit W au lieu de U).

Cette non-invariance de la pression P qui intervient dans l'expression du travail peut aussi se voir autrement. Planck et Laue ont autrefois démontré ⁽²⁾ non pas l'invariance de la pression P comme on le croit souvent, mais l'invariance d'une autre pression $\mathfrak{P}$ qu'ils ont appelée la « pression relative » et qui ne coïncide pas avec P .

Ayant examiné cette démonstration assez compliquée, je crois qu'on peut en tirer la conclusion suivante : si P et $\mathfrak{P}$ désignent respectivement la pression qui figure dans l'expression du travail et la pression invariante de Planck-Laue, on peut écrire dans R quand V varie, les deux pressions étant comptées dans le sens qui va de l'intérieur à l'extérieur du corps,

$$(3) \quad \mathfrak{P} \Delta V = P \Delta V + \Delta E_t$$

et l'on a $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 = P_0$. En employant les notations de ma dernière Note ⁽¹⁾, le travail total que le corps reçoit dans R de l'extérieur quand son volume varie de ΔV est

$$(4) \quad -P \Delta V = -\mathfrak{P} \Delta V + \Delta E_t = -P_0 \Delta V_0 \sqrt{1 - \beta^2} + \Delta E_t = \Delta \mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}'.$$

L'accord de cette évaluation du travail dans R avec les résultats de ma dernière Note est alors évident. Il montre bien qu'on ne peut supposer invariante la pression qui figure dans l'expression du travail qu'en oubliant de tenir compte de la variation de E_t .

Les ambiguïtés que présente ainsi la définition de la pression et de sa variance sont me semble-t-il, à l'origine de confusions qui ont conduit à contester la validité de la formule (1).

Revenons aux formules (2) en admettant qu'on peut y poser dans le cas considéré $P_0 = 0$. Nous obtenons d'abord les relations

$$(5) \quad U = \frac{U_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{P} = \frac{U_0}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \vec{c}$$

qui sont entièrement satisfaisantes. La première peut s'écrire

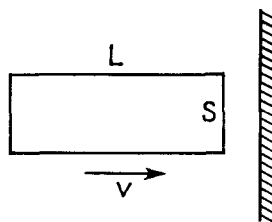
$$(6) \quad U = U_0 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{U_0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

où $U_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ est l'énergie que le corps transporte à son intérieur pendant son mouvement dans R, ce qui justifie la formule (1), tandis que $U_0 \beta^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ est l'énergie de translation d'ensemble E_t dans R.

Reste à interpréter la formule

$$(7)' \quad PV = \frac{U_0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Pour en voir l'origine, nous considérerons dans R un corps chaud ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur L et de section S perpendiculaire à la direction du mouvement. Nous supposerons que le corps vient s'aplatir contre une paroi rigide, les molécules du corps s'incorporant à la paroi tandis que la pression P reste constante pendant tout le processus.



Pendant le processus envisagé, la paroi exerce sur le corps une force F égale et opposée à la force de pression PS qu'elle subit et c'est cette force qui annule progressivement la quantité de mouvement du corps. Comme on a à chaque instant $dp = F dt = -PS dt$, on obtient en intégrant sur toute la durée T du processus

$$(8) \quad \Delta p = -p = -PST.$$

Mais on a évidemment $T = L/v$ et il vient d'après (5) :

$$(9) \quad PSL = PV = \nu p = \frac{U_0 \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

ce qui est bien la relation (7).

En conclusion, il semble bien que, si l'on admet la relation $P_0 = 0$, l'application des formules (2) au changement de système de référence $R_0 \rightarrow R$ ne soulève plus de difficultés et qu'elle est en accord avec la formule (1).

(¹) *Comptes rendus*, 265, série B, 1967, p. 437.

(²) VON LAUE, *Die Relativitätstheorie*, Vieweg, Braunschweig, 1919, p. 213-214.