PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur un problème de mouvement d'une particule dans un milieu réfringent.* Note (*) de M. **LOUIS DE BROGLIE**, Membre de l'Académie.

L'auteur étudie dans le cadre de la théorie de la double solution un problème de Dynamique à masse propre variable pour une particule se déplaçant dans un milieu réfringent éventuellement dispersif.

En Mécanique ondulatoire sous sa forme générale applicable à toutes les particules (même aux photons quand on suppose leur masse extraordinairement petite, mais non nulle), on sait que pour une particule se déplaçant librement dans un milieu non réfringent tel que le vide, la vitesse de phase V et la vitesse de groupe ν égale à celle de la particule sont reliées par la relation $\nu V = c^2$ avec $\nu < c$ et $V > c$. Il en résulte que l'on a $\nu = \beta c$ et $V = c/n$ avec $\beta = n$. L'indice de réfraction n est donc déterminé par la formule $h\nu = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ où ν est la fréquence de l'onde et m_0 la masse propre de la particule. On en tire la relation

$$n = \beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}},$$

ce qui montre que n est fonction de ν et que, par suite, tout se passe dans le vide comme si la propagation avait lieu dans un milieu dispersif.

Tout cela est connu depuis longtemps, mais il en est autrement quand l'onde transportant la particule se propage dans un milieu matériel qui influe sur sa propagation et où l'on a

$$V = \frac{c}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{c} \frac{d(n\nu)}{d\nu}.$$

Dans ce cas comme je l'avais rappelé récemment (1) en reprenant un résultat beaucoup plus ancien, on est amené à admettre que le milieu exerce sur la particule une action représentée par un potentiel P défini dans le système de référence où le milieu réfringent est immobile par la formule

$$(1) \quad \frac{W - P}{c^2} \nu = p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{V},$$

où $W = h \nu$ est l'énergie de la particule et $p = h/\lambda$ sa quantité de mouvement, ce qui donne pour P l'expression

$$(2) \quad P = W \left(1 - \frac{c^2}{vV} \right),$$

P est donc nul dans le vide où $vV = c^2$ comme cela doit être.

Dans une Note récente ⁽²⁾, j'ai repris la théorie précédente d'une manière plus synthétique. M'appuyant sur le principe fondamental de la théorie de la double solution suivant lequel la particule se déplace toujours dans son onde de telle façon que sa vibration périodique interne reste en phase avec l'onde, j'ai pu démontrer que, si l'on fait abstraction des perturbations d'origine subquantique, l'on doit attribuer à la particule en mouvement dans le milieu réfringent une masse propre M_0 , supérieure à la masse propre normale m_0 , telle que l'on ait

$$(3) \quad W = \frac{M_0 v V}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Or, les formules (1) et (2) nous donnent les relations

$$(4) \quad W - P = h \nu \frac{c^2}{vV}, \quad p = \frac{h \nu}{c^2} v \frac{c^2}{vV} = \frac{h \nu}{V}.$$

La comparaison de (3) et de (4) montre alors que la quantité de mouvement est égale à

$$(5) \quad p = \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Des travaux récents de M. Lucas ⁽³⁾ ont attiré mon attention sur le problème de la propagation d'une onde plane monochromatique de fréquence ν dans une direction Ox à l'intérieur d'un milieu réfringent dont l'indice n est fonction de x . J'ai été ainsi amené à traiter ce problème dans le cadre de la Dynamique à masse propre variable qui constitue à l'heure actuelle la forme la plus perfectionnée du calcul des trajectoires de guidage en théorie de la double solution.

La Dynamique de la particule à masse propre variable repose sur l'application du principe de moindre action :

$$(6) \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0,$$

où $\mathcal{L}$ est la fonction de Lagrange. Les raisonnements qui conduisent aux formules (3), (4) et (5) suggèrent d'adopter pour la fonction de Lagrange adaptée au problème que nous traitons la forme suivante :

$$(7) \quad \mathcal{L} = -M_0 c^2 \alpha \sqrt{1 - \beta^2},$$

avec $\alpha(x) = vV/c^2$. Dans le vide où $\alpha = 1$, on retrouve la forme classique de la fonction de Lagrange $\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$.

Le principe de moindre action (6) conduit, comme il est bien connu, à écrire

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} \quad \left(\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt} \right),$$

ce qui, dans le cas particulier que nous étudions, donne

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v} \right) = -c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{d}{dx} (M_0 \alpha).$$

Comme l'on a $\partial \mathcal{E} / \partial v = M_0 v \alpha / \sqrt{1 - \beta^2}$ et que $dx/dt = v$, on trouve

$$(10) \quad v d \left(\frac{M_0 v \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = -c^2 \sqrt{1 - \beta^2} d(M_0 \alpha).$$

En multipliant les deux membres de (10) par $M_0 \alpha / \sqrt{1 - \beta^2}$, on trouve aisément

$$(11) \quad d \left(\frac{M_0^2 c^2 \alpha^2}{1 - \beta^2} \right) = 0.$$

Or, d'après (3),

$$\frac{M_0^2 c^2 \alpha^2}{1 - \beta^2} = \frac{h^2 v^2}{c^2} = \text{Cte},$$

de sorte que l'équation (11) est bien vérifiée. L'application au problème envisagé de la Dynamique à masse propre variable conduit donc à un résultat satisfaisant. Il serait intéressant de faire des calculs analogues dans des cas plus généraux de propagation de l'onde portant la particule dans des milieux réfringents ou biréfringents.

Il importe de bien préciser le point suivant. Quand une particule se déplace dans le vide ou dans un milieu qui n'agit pas sur elle, on peut définir la quantité de mouvement par $W v / c^2$, c'est-à-dire comme le flux de l'énergie divisée par c^2 . Or, il semblerait donc que l'on devrait poser $p = (M v V / \sqrt{1 - \beta^2}) (v / c^2)$, valeur de p qui diffère de la valeur (5). Mais en réalité c'est bien (5) qui est la formule exacte. En effet, l'énergie W est la somme de deux termes $M_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ et $P = M_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2} [(\nu V / c^2) - 1]$ dont le premier est égal à l'énergie que transporte la particule en mouvement et dont le second traduit l'action du milieu sur la particule. Seul le premier terme correspond à un flux d'énergie qui, divisé par c^2 , est bien égal à $M_0 v / \sqrt{1 - \beta^2}$ en accord avec (5).

Bien entendu, les calculs précédents se rapportent uniquement au mouvement de guidage de la particule dans le milieu réfringent, abstraction faite des perturbations d'origine subquantique qui font constamment passer la particule d'une trajectoire de guidage sur une autre.

(*) Séance du 2 juin 1971.

(1) *Journal de Physique*, 28, mai-juin 1967, p. 481.

(2) *Comptes rendus*, 271, série B, 1970, p. 549.

(3) R. LUCAS, *Comptes rendus*, 268, série B, 1969 p. 1129; voir aussi : 270, série B, 1970, p. 1597 et 272, série B, 1971, p. 216.