C. R. Acad. Sc. Paris, t. 272, p. 349-352 (8 février 1971). Série B

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Spin et moment de quantité de mouvement.*
Note (*) de M. Louis de Broglie, Membre de l'Académie.

L'auteur précise, dans le cadre de sa théorie de la double solution la relation existant entre le spin et le moment de quantité de mouvement.

Dans l'étude des systèmes atomiques contenant des électrons, on est amené à considérer le spin comme une grandeur ayant la même nature physique qu'un moment de quantité de mouvement parce que c'est la somme de ces deux grandeurs qui obéit à un théorème de conservation. Cependant cette affirmation soulève une difficulté car le spin défini par la théorie de Dirac n'a pas les mêmes propriétés de variance relativiste qu'un moment de quantité de mouvement. Les composantes S_x, S_y, S_z d'un moment de quantité de mouvement $\vec{S}$ se transforment, en effet, comme les composantes d'espace M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} d'un tenseur complètement antisymétrique du second ordre. Au contraire, le vecteur spin $\vec{\sigma}$ défini par la théorie de Dirac est formé par les trois composantes d'espace d'un quadrivecteur d'espace-temps dont la composante de temps est nulle dans le système propre de la particule. Cette différence de variance relativiste entre les vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{\sigma}$ ne paraît pas permettre de les considérer comme des grandeurs de même nature physique.

Pour aborder l'étude de cette question dans le cadre de la théorie de la double solution, rappelons d'abord comment on peut relier, dans le cas des composantes de la quantité de mouvement, les valeurs moyennes fournies par la Mécanique quantique usuelle et par la théorie de la double solution. En Mécanique quantique, on fait correspondre aux composantes p_x, p_y, p_z de la quantité de mouvement les opérateurs

$$(p_x)_{\text{op}}=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\qquad (p_y)_{\text{op}}=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y},\qquad (p_z)_{\text{op}}=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}.$$

La valeur moyenne de p_x est alors définie par la formule

$$\bar{p}_x=\int \Psi^*(p_x)_{\text{op}}\Psi\,d\tau. \tag{1}$$

Posons $\Psi = a\,e^{(2\pi i/h)\varphi}$ avec a et φ réels, il vient

$$\bar{p}_x=-\int a^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,d\tau-\frac{h}{2\pi i}\int a\frac{\partial a}{\partial x}\,d\tau=-\int a^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,d\tau, \tag{2}$$

car a est toujours nul à l'infini. On trouve des formules analogues pour p_y et p_z, d'où

$$\overline{\vec{p}} = -\int a^2 \, \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi \, d\tau. \tag{3}$$

Or, en théorie de la double solution, la probabilité de la *présence* de la particule dans l'élément de volume $d\tau$ est donnée par $\rho \, d\tau = |\Psi|^2 \, d\tau$ et l'on doit poser

$$\overline{\vec{p}} = \int \vec{p} \, a^2 \, d\tau = \int \vec{p} \rho \, d\tau. \tag{4}$$

On voit ainsi que la valeur (3) prévue par la Mécanique quantique et la valeur (4) prévue par la théorie de la double solution où $\vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi$ sont égales. Il y a cependant entre les deux formules une différence importante. Tandis que la Mécanique quantique répartit la quantité de mouvement dans toute l'onde avec la densité $\rho = a^2$, la théorie de la double solution la considère comme attachée à la particule *localisée* dans l'onde dont la probabilité de présence en un point est $|\Psi|^2 = \rho$.

Passons maintenant au cas du moment de quantité de mouvement $\vec{S}$. Si nous considérons un système contenant une particule en mouvement autour d'un point central (comme l'électron dans la forme primitive de la théorie de l'atome de Bohr), le moment de quantité de mouvement a pour composantes

$$S_x = y p_z - z p_y, \qquad S_y = z p_x - x p_z, \qquad S_z = x p_y - y p_x. \tag{5}$$

La Mécanique quantique utilise ces expressions en y remplaçant p_x, p_y, p_z par les opérateurs définis plus haut. Elle pose donc

$$\overline{S}_x = -\frac{h}{2\pi i} \int \Psi^* \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi \, d\tau. \tag{6}$$

Remplaçons encore Ψ par $a \, e^{(2\pi i/h)\varphi}$ avec a et φ réels. Nous obtenons, en tenant toujours compte du fait que a s'annule à l'infini,

$$\overline{S}_x = -\int a^2 \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau. \tag{7}$$

La théorie de la double solution, qui pose $\vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi$, écrit

$$\overline{S}_x = \int (y p_z - z p_y) \, a^2 \, d\tau. \tag{8}$$

Des formules analogues à (7) et (8) sont obtenues pour $\overline{S}_y$ et $\overline{S}_z$. Nous voyons de nouveau ici que les valeurs moyennes sont les mêmes en Mécanique quantique et en théorie de la double solution, mais dans cette théorie le moment de quantité de mouvement, au lieu d'être réparti dans toute l'onde avec une densité *continue*, est attaché à une particule *localisée* dont la position dans l'onde est aléatoire.

Nous pouvons maintenant étudier le cas du spin. Avec les conceptions de la théorie de la double solution, le spin de l'électron doit être regardé comme une propriété *interne* attachée à une particule dont on ignore la structure, mais que l'on peut en première approximation considérer comme ponctuelle. Nous devons donc, avec nos conceptions, nous contenter d'attacher à l'électron un vecteur spin dont la valeur moyenne dans l'onde devra $\vec{\Sigma}$ avoir les propriétés de variance relativiste d'un moment de quantité de mouvement. Nous allons voir que ce vecteur spin n'est pas le vecteur $\vec{\sigma}$ de la théorie de Dirac qui n'est qu'une densité moyenne de spin.

Dans un de mes livres [1], j'ai développé des calculs concernant la relation du moment de quantité de mouvement $\vec{S}$ et le vecteur spin $\vec{\sigma}$ de la théorie de Dirac. J'ai d'abord démontré que, si l'on considère le mouvement d'une particule dans un système matériel, le moment de la quantité de mouvement $\vec{S}$ se transforme suivant les formules

$$S_x = S_{0x}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad S_y = S_{0y}\sqrt{1-\beta^2}, \qquad S_z = S_{0z} \tag{9}$$

quand on passe du système de référence où la particule est au repos au système où elle est en mouvement avec la vitesse βc dans le sens Oz. J'ai montré aussi que le vecteur spin $\vec{\sigma}$ se transforme alors par les formules

$$\sigma_x = \sigma_{0x}, \qquad \sigma_y = \sigma_{0y}, \qquad \sigma_z = \frac{\sigma_{0z}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{10}$$

de sorte qu'en tenant compte de la contraction de Lorentz, ce sont les intégrales $\int \sigma_x d\tau$, $\int \sigma_y d\tau$, $\int \sigma_z d\tau$ qui se transforment comme S_x, S_y, S_z.

Le vecteur $\vec{\sigma}$ de Dirac n'est donc qu'une densité de spin et, avec les conceptions de notre théorie, il faut chercher à attacher à l'électron un vecteur spin $\vec{\Sigma}$ différent de $\vec{\sigma}$ et tel que

$$\overline{\vec{S}} = \int \vec{\Sigma}\rho\, d\tau, \qquad \text{avec} \quad \rho = \sum_{k=1}^{4} |\Psi_k|^2, \tag{11}$$

les Ψ_k étant les composantes de la fonction d'onde Ψ de Dirac. Comme l'on a

$$\overline{S_x} = \int \sigma_x\, d\tau, \qquad \overline{S_y} = \int \sigma_y\, d\tau, \qquad \overline{S_z} = \int \sigma_z\, d\tau, \tag{12}$$

l'équation est satisfaite si l'on pose

$$\vec{\Sigma} = \frac{\vec{\sigma}}{\rho}. \tag{13}$$

C'est le vecteur $\vec{\Sigma}$ ainsi défini que nous devons, en théorie de la double solution, considérer comme le spin *attaché* à la particule « électron ». Comme le produit $\rho\, d\tau$ est un invariant, la formule (11) montre que les vecteurs $\vec{S}$

et $\vec{\Sigma}$ ont la même variance. C'est donc bien le vecteur $\vec{\Sigma}$, et non le vecteur $\vec{\sigma}$ de Dirac, qui a vraiment la nature physique d'un moment de quantité de mouvement.

D'ailleurs, en théorie de la double solution, les grandeurs attachées à une particule doivent pouvoir se définir à l'aide de la seule onde physique v et, par suite, être indépendante de la normalisation de l'onde statistique Ψ. C'est bien le cas pour la quantité de mouvement $\vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ parce que la phase φ a la même valeur pour les ondes v et Ψ, la normalisation ne portant que sur l'amplitude a. Or, le vecteur $\vec{\sigma}$ de la théorie de Dirac dépend des composantes Ψ_k de l'onde statistique Ψ de Dirac et donc de la normalisation par la formule $\int \sum_1^4{}_k |\Psi_k|^2 d\tau = 1$. Au contraire, le vecteur $\vec{\Sigma} = \vec{\sigma}/\rho$ est une fonction des amplitudes a_k qui ne dépend pas de la valeur absolue de ces amplitudes et est donc indépendante de la normalisation. C'est une raison de plus pour penser que c'est le vecteur $\vec{\Sigma}$ qui représente le spin attaché à l'électron.

Remarquons enfin que les expressions $yp_z - zp_y \ldots$ des composantes du moment de quantité de mouvement se justifient très naturellement dans une théorie où l'on considère la particule comme constamment localisée, comme c'est le cas en Mécanique ancienne classique ou relativiste et en théorie de la double solution. Mais partir de ces expressions dans une théorie où la particule n'est pas localisée pour construire les opérateurs $y(p_z)_{op} - z(p_y)_{op} - \ldots$ est très paradoxal. En le faisant, la Mécanique quantique usuelle construit ces opérateurs en partant de formules qu'elle considère comme ne pouvant avoir aucun sens physique. Si elle parvient à en tirer des conclusions exactes, c'est parce qu'elle se résigne à n'être qu'une théorie statistique qui ne donne pas une véritable représentation de la réalité physique parce que, derrière le formalisme statistique, est dissimulée une localisation cachée des particules. Une véritable description de la réalité physique doit pouvoir se faire uniquement à l'aide de fonctions définies en chaque point de l'espace à chaque instant *sans jamais introduire d'opérateurs*. L'emploi des opérateurs, souvent très utiles pour effectuer les calculs, nous paraît avoir l'inconvénient de cacher la véritable nature des grandeurs physiques.

(*) Séance du 1er février 1971.

(1) *Théorie générale des particules à spin*, Gauthier-Villars, Paris, 2e éd., 1954, p. 48 et suiv.

(94, *rue Perronet*, 92-*Neuilly-sur-Seine*, *Hauts-de-Seine*.)

183326. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.