PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la répartition des potentiels d'interaction entre les particules d'un système.* Note (*) de M. LOUIS DE BROGLIE, Membre de L'Académie.

L'auteur expose comment on peut répartir les potentiels d'interaction entre les particules d'un système et les incorporer à leur masse propre.

En étudiant la Mécanique classique, on peut être intrigué par le fait suivant. Considérons deux particules qui interagissent et soit $V_{12} = V_{21}$ leur potentiel d'interaction. Si T_1 et T_2 sont les énergies cinétiques des deux particules, leurs énergies individuelles sont assez naturellement regardées comme égales à $E_1 = T_1 + V_{12}$ et à $E_2 = T_2 + V_{12}$. Il semblerait donc que l'énergie du système des deux particules devrait être

$$E = E_1 + E_2 = T_1 + T_2 + 2V_{12}.$$

Or cette formule est inexacte et l'on doit poser $E = T_1 + T_2 + V_{12}$. Naturellement pour un système de N particules on retrouve la même

difficulté car l'énergie du système est alors $E = \sum_i^N T_i + \sum_{(ij)} V_{ij}$ et non $E = \sum_1^N T_i + 2 \sum_{(ij)} V_{ij}$.

Cette difficulté avait frappé Léon Brillouin et dans un livre publié à la fin de sa vie ⁽¹⁾, il avait proposé de répartir l'énergie d'interaction entre les constituants du système, mais il ne semble pas être parvenu à bien résoudre le problème.

J'ai envisagé la solution suivante. Considérons deux particules de masse M_1 et M_2 soumises à un potentiel d'interaction $V_{12} = V_{21}$. On a, les forces étant égales et opposées, la relation

$$(1) \quad -\overrightarrow{\text{grad}}_1 V_{12} = \overrightarrow{\text{grad}}_2 V_{12},$$

si nous voulons répartir l'énergie potentielle entre les deux particules, je propose d'attribuer à la première l'énergie $(M_2/M_1 + M_2) V_{12}$ et à la seconde l'énergie $(M_1/M_1 + M_2) V_{12}$. Si $M_2 \gg M_1$, la totalité du potentiel est attribuée à la première particule, si $M_1 \gg M_2$ elle est attribuée à la seconde particule et si $M_1 = M_2$, elle est partagée également entre les deux particules. Cela paraît satisfaisant.

Considérons alors le mouvement des deux particules. Si $\vec{p}_1 = M_1 \vec{v}_1$ et $\vec{p}_2 = M_2 \vec{v}_2$ sont leurs quantités de mouvement, on a en appliquant le principe de moindre action :

$$(2) \quad \delta \int \mathcal{L} dt = \delta \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) dt = 0$$

avec $\mathcal{L}_1 = T_1 - V_1$ et $\mathcal{L}_2 = T_2 - V_2$. Comme $[d/dt (\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i)] = \partial \mathcal{L} / \partial q_i$, on trouve

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = - \left[\frac{M_2}{M_1 + M_2} \overrightarrow{\text{grad}}_1 V_{12} + \frac{M_1}{M_1 + M_2} \overrightarrow{\text{grad}}_1 V_{21} \right] = - \overrightarrow{\text{grad}}_1 V_{12}, \\ \frac{dp_2}{dt} = - \left[\frac{M_2}{M_1 + M_2} \overrightarrow{\text{grad}}_2 V_{21} + \frac{M_1}{M_1 + M_2} \overrightarrow{\text{grad}}_2 V_{12} \right] = - \overrightarrow{\text{grad}}_2 V_{12}. \end{cases}$$

On peut donc écrire en vertu de (1) :

$$(4) \quad \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt} (M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2) = 0,$$

d'où

$$(5) \quad M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2 = \text{cste}$$

On en déduit la propriété essentielle du centre de gravité du système, dont le mouvement n'est pas influencé par les forces internes, d'avoir une vitesse constante ou nulle.

Si maintenant nous considérons un ensemble de particules en interaction, nous pourrions poser $\mathcal{L}_i = T_i - V_i$ avec toujours $V_{ij} = V_{ji}$ et l'application du principe de moindre action nous fournira la formule

$$(6) \quad \frac{dp_i}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}}_i \left[\sum_j \frac{M_j}{M_i + M_j} V_{ij} + \sum_j \frac{M_i}{M_i + M_j} V_{ij} \right] = - \overrightarrow{\text{grad}}_i \sum_j V_{ij}.$$

On aura donc

$$(7) \quad \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = - \sum_{ij} \overrightarrow{\text{grad}}_i V_{ij} = - \frac{1}{2} \sum_{ij} [\overrightarrow{\text{grad}}_i V_{ij} + \overrightarrow{\text{grad}}_j V_{ij}] = 0,$$

car $\overrightarrow{\text{grad}}_i V_{ij} = - \overrightarrow{\text{grad}}_j V_{ij}$.

Nous avons jusqu'ici raisonné à l'approximation newtonienne. Reprenons maintenant le problème en Mécanique relativiste en nous bornant au cas de deux particules. Nous écrirons :

$$(8) \quad W_1 = \frac{M_{01} c^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} + \frac{M_{02}}{M_{01} + M_{02}} V_{12}, \quad W_2 = \frac{M_{02} c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} + \frac{M_{01}}{M_{01} + M_{02}} V_{12}.$$

Si nous posons

$$(9) \quad m_{01} c^2 = M_{01} c^2 + \frac{M_{02}}{M_{01} + M_{02}} \sqrt{1 - \beta_1^2} V_{12}, \quad m_{02} c^2 = M_{02} c^2 + \frac{M_{01}}{M_{01} + M_{02}} \sqrt{1 - \beta_2^2} V_{12},$$

nous avons

$$(10) \quad W_1 = \frac{m_{01} c^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}, \quad W_2 = \frac{m_{02} c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}.$$

Dans le cas où $M_2 \gg M_1$, nous pouvons écrire très approximativement pour la particule 1 en supprimant les indices

$$(11) \quad m_0 c^2 = M_0 c^2 + \sqrt{1 - \beta^2} V.$$

Or, si V_0 est la valeur du potentiel dans le système propre de la particule, nous avons $V = V_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$ et nous obtenons

$$(12) \quad m_0 = M_0 + \frac{V_0}{c^2}.$$

Nous voyons ainsi que le potentiel peut alors être incorporé à la masse propre et ce résultat est en accord avec une remarque que j'avais faite récemment dans un de mes livres ⁽²⁾.

(*) Séance du 6 décembre 1972.

(¹) *Relativity reexamined*, Academic Press, New York and London, 1970, p. 20 et suivantes.

(²) *La réinterprétation de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 25.

94, rue Perronet,
92200 Neuilly-sur-Seine,
Hauts-de-Seine.