ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
411
EXPOSÉS DE PHYSIQUE THÉORIQUE
Publiés sous la direction de
M. LOUIS DE BROGLIE
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Lauréat du Prix Nobel
XX

NOUVELLES RECHERCHES SUR LA LUMIÈRE

PAR

LOUIS DE BROGLIE

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1936

PRÉFACE

DANS un précédent fascicule de la même collection, j'ai exposé les idées qui m'avaient guidé dans la recherche d'une « Nouvelle conception de la lumière » (1). A la fin de ce fascicule, je donnais à ma théorie une forme symétrique qui me paraissait être la plus satisfaisante. Le but du présent fascicule est d'approfondir et d'améliorer autant que possible cette forme de la théorie. J'ai supposé connues du lecteur les idées générales exposées dans le précédent fascicule et j'ai abordé d'emblée l'étude des équations placées à la base de la théorie et de leurs conséquences. Cette mise au point m'a d'ailleurs permis, chemin faisant, de compléter ou même de rectifier certains points particuliers de mon exposé antérieur.

On verra qu'en cherchant à donner à l'ensemble de cette tentative une forme logiquement cohérente, on rencontre des difficultés qui sont du reste analogues à celles qu'on rencontre dans d'autres tentatives du même genre. Néanmoins les résultats réunis dans ce fascicule présentent plus d'un aspect intéressant et méritent, croyons-nous, d'être étudiés.

Comme nous le mentionnons à la fin de notre exposé, M. P. Jordan, s'inspirant de nos travaux, a développé une conception de la lumière qui, à l'étude, se révèle très différente de la nôtre. M. de R. L. Kronig a développé ensuite les idées de M. Jordan dans des travaux qu'il a lui-même exposés l'hiver dernier à l'Institut Henri Poincaré. Il y a là une tentative très intéressante dont

(1) *Actualités scientifiques*, Hermann (1934), fascicule n° 181.

on devra tenir grand compte. Cependant, il nous paraît utile de ne pas abandonner la voie que nous avions ouverte.

Je remercie vivement MM. Jacques Winter, Jean-Louis Destouches et Gérard Petiau pour l'aide et les suggestions qu'ils m'ont apportées au cours de l'examen de diverses questions étudiées dans les pages qui suivent.

EQUATIONS ET DÉFINITIONS GÉNÉRALES DE LA THÉORIE DES PHOTONS

Les équations du photon :

Rappelons d'abord comment nous avons obtenu les équations que nous prenons comme bases de la théorie [1]. Dans notre nouvelle conception de la lumière, nous considérons le photon comme formé de deux corpuscules complémentaires auxquels nous voulons faire jouer un rôle symétrique. Pour obtenir les équations du photon, nous avons alors commencé par écrire les équations des corpuscules complémentaires constituant le photon, corpuscules que nous supposons obéir aux équations de la théorie de l'électron magnétique de M. Dirac. Et désignant par $\frac{\mu_0}{2}$ la masse propre de chacun des demi-photons, nous avons donc écrit, avec la notation $\varkappa = \frac{2\pi i}{h}$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_l (\alpha_1)_{il}\Psi_l + \frac{\partial}{\partial y}\sum_l (\alpha_2)_{il}\Psi_l + \frac{\partial}{\partial z}\sum_l (\alpha_3)_{il}\Psi_l + \varkappa\frac{\mu_0}{2}c\sum_l (\alpha_4)_{il}\Psi_l \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\sum_m (\alpha_1)_{km}\varphi_m - \frac{\partial}{\partial y}\sum_m (\alpha_2)_{km}\varphi_m + \frac{\partial}{\partial z}\sum_m (\alpha_3)_{km}\varphi_m - \varkappa\frac{\mu_0}{2}c\sum_m (\alpha_4)_{km}\varphi_m \end{aligned}\right.$$

les éléments des matrices α à 4 lignes et 4 colonnes étant définis par les valeurs classiques en théorie de Dirac

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad & \alpha_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad & \alpha_4 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

[1] Voir notre fascicule : *Une nouvelle théorie de la Lumière*, pages 36 et ss.

L'hypothèse que les demi-photons sont liés nous conduit aux relations :

$$(3) \qquad \varphi_k \frac{\partial}{\partial q} \Psi_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\varphi_k \Psi_i) \qquad \Psi_i \frac{\partial}{\partial q} \varphi_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\Psi_i \varphi_k)$$

q étant l'une quelconque des variables x, y, z, t. De plus, on a évidemment :

$$(4) \qquad \varphi_k = \sum_m \delta_{km} \varphi_m \qquad \Psi_i = \sum_l \delta_{il} \Psi_l$$

δ_{km} étant le symbole bien connu, nul si $k \neq m$ et égal à un pour $k = m$. Posons alors par définition :

$$(5) \qquad \Phi_{ik} = \Psi_i \varphi_k$$

puis introduisons 8 matrices $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$, à 16 lignes et 16 colonnes dont les éléments sont :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{A}_1)_{ik,lm} = (\alpha_1)_{il} \delta_{km} \,; \quad (\mathcal{A}_2)_{ik,lm} = (\alpha_2)_{il} \delta_{km} \,; \quad (\mathcal{A}_3)_{ik,lm} = (\alpha_3)_{il} \delta_{km} \,; \\ (\mathcal{A}_4)_{ik,lm} = (\alpha_4)_{il} \delta_{km} \\ (\mathcal{B}_1)_{ik,lm} = (\alpha_1)_{km} \delta_{il} \,; \quad (\mathcal{B}_2)_{ik,lm} = -(\alpha_2)_{km} \delta_{il} \,; \quad (\mathcal{B}_3)_{ik,lm} = (\alpha_3)_{km} \delta_{il} \,; \\ (\mathcal{A}_4)_{ik,lm} = -(\alpha_4)_{km} \delta_{il} \end{array} \right.$$

en convenant que le symbole $\mathcal{A}_1 \Phi_{ik}$ signifie :

$$(7) \qquad \mathcal{A}_1 \Phi_{ik} = \sum_{lm} (\mathcal{A}_1)_{ik,lm} \Phi_{lm}$$

Alors nos équations (1) multipliées respectivement par φ_k et par Ψ_i prennent la forme simple :

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left(\mathcal{A}_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \mathcal{A}_3 \dfrac{\partial}{\partial z} + \varkappa \mu_0 c \mathcal{A}_4\right) \Phi_{ik} \\ (\mathrm{II}) & \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left(\mathcal{B}_1 \dfrac{\partial}{\partial x} + \mathcal{B}_2 \dfrac{\partial}{\partial y} + \mathcal{B}_3 \dfrac{\partial}{\partial z} + \varkappa \mu_0 c \mathcal{B}_4\right) \Phi_{ik} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,3,4 \\ k = 1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

Ce sont là deux systèmes simultanés de 16 équations aux dérivées partielles pour les 16 composantes de l'onde Φ du photon. Au premier abord, il peut sembler qu'il y ait surdétermination. Nous verrons plus loin qu'il n'en est rien.

Nous pouvons considérer les équations (I) et (II) comme les équations de base de la théorie, mais nous pouvons aussi prendre comme équations de base 32 combinaisons linéaires indépendantes des 32 équations (I) et (II). On en obtiendra par exemple en faisant la somme et la différence de (I) et de (II). En combinant en effet les équations (I) et (II) par addition et par soustraction, nous obtenons :

$$\text{(III)}\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t} = \left[\left(\frac{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\mathcal{A}_3+\mathcal{B}_3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \varkappa\mu_0 c\left(\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right)\right]\Phi_{ik}$$

$$\text{(IV)}\quad 0 = \left[\left(\frac{\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\mathcal{A}_3-\mathcal{B}_3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial z} + \varkappa\mu_0 c\left(\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)\right]\Phi_{ik}.$$

Les 16 équations (III) contenant les dérivées $\frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial t}$ déterminent entièrement la variation des Φ à partir d'une forme initiale donnée de ces fonctions. Ce sont des « équations d'évolution » comparables aux équations en $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ de la théorie électro-magnétique. Au contraire les équations (IV), ne contenant pas de dérivées par rapport au temps, expriment 16 conditions auxquelles doivent satisfaire les Φ_{ik} à tout instant donné ; elles sont comparables aux équations en div $\vec{E}$ et div $\vec{H}$ de la théorie électromagnétique et nous pouvons les appeler des « équations de condition ». Nous voyons donc que le fait de combiner par addition et par soustraction les équations (I) et (II) a pour effet de répartir les 32 équations en Φ_{ik} en deux groupes : un groupe de 16 équations d'évolution et un groupe de 16 équations de condition. Notons d'ailleurs que si nous admettions *a priori* la validité des équations (III) et (IV), nous pourrions en déduire par addition et soustraction les équations (I) et (II).

Nous allons maintenant montrer qu'il n'y a pas surdétermination des Φ_{ik}, c'est-à-dire que nos 32 équations sont compatibles. Pour cela, nous allons prouver que si les équations (IV) sont satisfaites à un instant donné, elles le seront toujours en vertu des équations (III), ce qui mettra en évidence la compatibilité des systèmes (III) et (IV). Cette démonstration sera tout à fait analogue à celle par laquelle on prouve en théorie électromagnétique classique la compatibilité des équations de conditions en div $\vec{E}$ et div $\vec{H}$ avec les équations d'évolution en $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$.

Nous remarquons d'abord que nos matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ jouissent, en vertu des propriétés analogues des matrices α de Dirac avec lesquelles elles sont formées, des propriétés suivantes :

$$\text{(V)}\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{A}_i^2 = 1 \qquad \mathcal{B}_i^2 = 1 & & i = 1, 2, 3, 4. \\ \mathcal{A}_i\mathcal{A}_j = -\mathcal{A}_j\mathcal{A}_i \quad ; & \mathcal{B}_i\mathcal{B}_j = -\mathcal{B}_j\mathcal{B}_i & i \neq j \\ \mathcal{A}_i\mathcal{B}_j = \mathcal{B}_j\mathcal{A}_i & & \text{pour tout } i \text{ et tout } j. \end{array}\right.$$

Le théorème à démontrer est alors que la dérivée par rapport au temps de premier membre des équations (IV) est constamment nulle en vertu des équations (III). Or cette dérivée, multipliée par $\frac{1}{c}$, est égale à :

$$(8) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathcal{A}_3-\mathcal{B}_3}{2}\frac{\partial}{\partial z}+\varkappa\mu_0 c\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right]\Phi_{ik}$$

ce qui, grâce à la permutabilité de $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ avec le crochet qui le suit, permet d'écrire en tenant compte de (III) :

$$(9) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{IV})=\left[\frac{\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\cdots+\varkappa\mu_0 c\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right]\left[\frac{\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\cdots+\varkappa\mu_0 c\frac{\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4}{2}\right]\Phi_{ik}.$$

Il est alors aisé de voir que, dans l'expression du second membre une fois développé, tous les termes sont séparément nuls en vertu de (V). Par exemple, le coefficient de $\frac{\partial^2\Phi_{ik}}{\partial x\partial y}$ est (au facteur $\frac{1}{4}$ près) égal à

$$(\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_1)(\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2)+(\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_2)(\mathcal{A}_1+\mathcal{B}_1)$$

soit encore à la somme

$$(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1)-(\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2+\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1)+(\mathcal{A}_1\mathcal{B}_2-\mathcal{B}_2\mathcal{A}_1)-(\mathcal{B}_1\mathcal{A}_2-\mathcal{A}_2\mathcal{B}_1)$$

où toutes les parenthèses sont nulles d'après (V). Le théorème est ainsi démontré et la compatibilité des 32 relations entre les 16 Φ_{ik} en résulte.

Nous démontrerons aussi le théorème suivant : toute solution des équations (III) qui ne contient pas dans son développement en série de Fourier de termes indépendants du temps (termes statiques) satisfait aux équations (IV). Ce théorème est encore analogue à un théorème que l'on peut démontrer pour les équations de l'électromagnétisme. Soit :

$$(10) \qquad \Phi_{ik}=\sum_n c_n a_n(x, y, z)e^{2\pi i\nu_n t}$$

le développement de Fourier de la composante Φ_{ik} d'une solution des équations (III). Notre hypothèse est que tous les ν_n sont différents de zéro. Alors l'expression

$$\left(\frac{\mathcal{A}_1-\mathcal{B}_1}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\mathcal{A}_2-\mathcal{B}_2}{2}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathcal{A}_3-\mathcal{B}_3}{2}\frac{\partial}{\partial z}+\varkappa\mu_0 c\frac{\mathcal{A}_4-\mathcal{B}_4}{2}\right)\Phi_{ik}$$

à un développement de Fourier de la forme :

$$\sum_u d_n b_n(x, y, z,) e^{2\pi i \nu_n t} \qquad (\nu_n \neq 0)$$

et la dérivée de cette quantité par rapport au temps est proportionnelle à :

$$\sum_n d_n \nu_n b_n(x, y, z) e^{2\pi i \nu_n t}$$

Or le théorème précédemment démontré nous a appris qu'en vertu des équations (III), cette dérivée est constamment nulle. Pour que cela ait lieu, aucun des ν_n n'étant nuls par hypothèse, il faut que tous les d_n soient nuls et alors tous les premiers membres des équations (IV) sont constamment nuls. Donc pour toute solution non statique des équations (III), les équations (IV) sont automatiquement vérifiées et peuvent être laissées de côté.

Ce théorème permet de ne considérer seulement comme équations fondamentales du photon que les équations (III) comme nous l'avons fait dans nos exposés antérieurs. Chaque fois que nous considérons un état du photon d'énergie non nulle, les équations (III) prises comme bases de la théorie entraîneront les équations (IV) et par suite les équations (I) et (II) par addition et soustraction. Nous nous servirons souvent des équations (I) et (II) dans les démonstrations parce que cela simplifie le raisonnement.

L'opération par laquelle nous avons plus haut des équations (1) aux équations du photon correspond à une sorte de « fusion » des deux corpuscules composant le photon. La formation des matrices $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_i$ à partir des opérateurs figurant dans les équations (1) (c'est à dire α_1, α_2, α_3, α_4 pour le premier corpuscule et α_1, $-\alpha_2$, α_3, $-\alpha_4$ pour le second) est précisément celle que les mathématiciens désignent sous le nom de « fusion » (en allemand Verschmelzung) [1].

Il est très intéressant de remarquer que l'un et l'autre des systèmes (I) et (II) a pour conséquence, si l'on tient compte de (V), que :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi_{ik}}{\partial t^2} - \Delta \Phi_{ik} = \varkappa^2 \mu_0{}^2 c^2 \Phi_{ik} \tag{11}$$

[1] Voir le livre de MM. Born et Jordan, *Elementare quantenmechanik*, Springer 1930, p. 75. Je remercie M. Jacques Winter de m'avoir fait remarquer que les matrices $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_i$ sont formées par fusion.

Donc si Φ est une solution des équations (I) et (II) ou, ce qui revient au même, des équations (III) et (IV), chaque Φ_{ik} obéit à l'équation de propagation du second ordre que l'on retrouve dans toutes les théories de Mécanique ondulatoire relativiste. Si l'on suppose μ_0 nulle, on obtient pour tous les Φ_{ik} l'équation habituelle des ondes lumineuses.

La fonction Φ a seize composantes Φ_{ik}. Lorsque nous étudierons plus loin le spin du photon, nous serons amenés à classer les seize Φ_{ik} par rapport aux valeurs possibles du spin. Il nous sera utile de connaître par avance le résultat de ce classement qui répartit les Φ_{ik} suivant les caractères de parité de leurs indices. Il y a d'abord les huit Φ_{ik}, dont les indices ont la même parité (Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{33}, Φ_{44}, Φ_{13}, Φ_{31}, Φ_{24}, Φ_{42}) : ces huit composantes correspondent à la valeur zéro du spin le long de oz. Puis il y a les quatre Φ_{ik} dont les indices sont de parités différentes, le premier étant pair (Φ_{21}, Φ_{23}, Φ_{41}, Φ_{43}) : ils correspondent à la valeur $-\frac{h}{2\pi}$ du spin suivant oz. Enfin, il y a encore les quatre composantes Φ_{ik} dont les indices sont de parités différentes, le premier étant impair (Φ_{12}, Φ_{14}, Φ_{32}, Φ_{34}) : ils correspondent à la valeur $\frac{h}{2\pi}$ du spin le long de oz.

Nous obtenons ainsi un classement des Φ_{ik} qui dépend du caractère de parité de leurs indices. Nous allons voir dans le prochain paragraphe une autre manière de classer les Φ_{ik}.

Les solutions d'annihilation :

Les équations (III) possèdent la propriété intéressante d'admettre des solutions indépendantes de x, y, z, t. Ces solutions doivent satisfaire aux équations :

$$(\mathcal{A}_4+\mathcal{B}_4)\Phi_{ik} = 0 \tag{12}$$

ce qui donne aisément en explicitant $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{B}_4$:

$$[(\alpha_4)_{ii} - (\alpha_4)_{kk}]\Phi_{ik} = 0. \tag{13}$$

La résolution de cette équation conduit à répartir les seize Φ_{ik} en deux catégories de la manière suivante : nous dirons que les indices i et k sont de la même « paire » s'ils appartiennent tous deux soit au groupe 1, 2, soit au groupe 3, 4 ; nous aurons huit

Φ_{ik} dont les indices seront de même paire et huit Φ_{ik} dont les indices seront de paires différentes. En vertu de la valeur des termes diagonaux de α_4, nous voyons alors que d'après l'équation (13) tous les Φ_{ik} dont les indices sont de paires différentes doivent être nuls. Au contraire, les Φ_{ik} dont les indices sont de la même paire peuvent être différents de zéro. Nous obtenons donc une solution de (III), indépendante des coordonnées, en prenant pour Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{33}, Φ_{44}, Φ_{12}, Φ_{21}, Φ_{34}, Φ_{43} des constantes quelconques et en prenant les autres Φ_{ik} égaux à zéro.

Il est naturel de chercher à représenter à l'aide d'une solution de cette forme l'état d'annihilation du photon dont l'énergie et la quantité de mouvement doivent évidemment être nulles. Mais dans l'état d'annihilation, le spin doit être nul et ceci nous conduit, d'après ce que nous avons dit plus haut sur la correspondance entre les valeurs du spin et les composantes de Φ, à poser $\Phi_{12} = \Phi_{21} = \Phi_{34} = \Phi_{43} = 0$. Nous devons donc prendre comme solution d'annihilation une solution où seuls les Φ_{ii} (termes diagonaux du tableau des Φ_{ik}) soient différents de zéro et d'ailleurs constants. La solution la plus symétrique, celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, est celle qu'on obtient en prenant les quatre Φ_{ii} égaux entre eux, par exemple égaux à 1. On a alors la solution.:

$$\Phi^0_{ik} = \delta_{ik}. \tag{14}$$

Nous avons, dans nos travaux antérieurs, admis que cette solution remarquable représente l'état d'annihilation du photon et montré qu'elle conduit à construire d'une façon satisfaisante les grandeurs électromagnétiques. Nous allons conserver provisoirement cette hypothèse, mais nous insisterons sur le caractère un peu arbitraire qu'elle présente. Nous aurions, en effet, pu prendre à la place de (14) : $\Phi^0_{ik} = C_i\delta_{ik}$ avec des valeurs différentes pour les quatre constantes C_i. Cette hypothèse nous conduirait à des difficultés dans la construction des champs électromagnétiques, mais nous n'avons pas de bonnes raisons pour l'écarter *a priori.* D'autre part, notre solution (14) satisfait au système (III), mais pas au système (IV), du moins si μ_0 est différent de zéro. Nous pourrions dire que nous prenons le système (III) comme base de la théorie, le système (IV) en dérivant pour les solutions qui dépendent du temps mais devant être laissé de côté pour les solutions indépendantes du temps ; ce point de vue n'est pas entièrement satisfaisant car une étude d'ensemble que nous ferons plus loin des équations (III) et (IV) nous montrera qu'elles sont intimement liées quant à leur variance relativiste (tout comme le sont les équations d'évolution et les équations en divergence dans la théorie électromagnétique). On pourrait lever autrement la difficulté en posant $\mu_0 = 0$ car alors (14) serait solution à la fois de (III) et de (IV) ; mais alors l'ensemble des équations (III) ne contenant plus que les dérivées des Φ_{ik} n'impose plus la nullité des Φ_{ik} dont les indices sont de même paire pour les solutions indépendantes des coordonnées d'espace-temps.

Malgré ces difficultés, nous adopterons pour l'instant la solution (14) comme solution d'annihilation. Nous verrons ultérieurement qu'il est possible de définir une solution d'annihilation différente de (14), mais pouvant rendre les mêmes services qui est définie sans ambiguité, par la condition d'être invariante pour les transformations de Lorentz.

Grandeurs électromagnétiques attachées au photon :

Nous avons précédemment expliqué [1] pourquoi nous croyons devoir définir les grandeurs électromagnétiques attachées au photon par des densités d'éléments de matrice correspondant à la transition d'un état initial Φ à un état final d'annihilation Φ^o. La fonction Φ est une solution non statique quelconque des équations (III) et (IV) ou, si l'on préfère des équations (I) et (II) ; elle représente l'état initial, supposé donné, du photon. La fonction Φ^o représentant l'état d'annihilation, sera par définition, la fonction (14).

Nous désignerons par $\vec{\mathcal{A}}$ la matrice vectorielle dont les trois composantes spatiales sont les matrices $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$; de même nous désignerons par $\vec{\mathcal{B}}$ la matrice vectorielle dont les trois composantes spatiales sont $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$. De plus nous désignerons par $\vec{s}^{(\mathcal{A})}$ et $\vec{s}^{(\mathcal{B})}$ les matrices vectorielles dont les composantes spatiales sont respectivement $i\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$, $i\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1$, $i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$ et $i\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$, $i\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1$, $i\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$. Enfin il nous arrivera de désigner par $s_4^{(\mathcal{A})}$ et $s_4^{(\mathcal{B})}$ les matrices $i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$ et $i\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3$.

---

[1] Voir *Une nouvelle théorie de la Lumière*, p. 25.

qui correspondent aux composantes de temps des vecteurs d'Univers dont $\vec{s}^{(\mathcal{A})}$ et $\vec{s}^{(\mathcal{B})}$ sont les parties d'espace.

Ces définitions posées, nous faisons correspondre aux potentiels électromagnétiques les opérateurs suivants :

$$(15) \qquad \vec{a} = -\mathrm{K}\frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2} \qquad \mathcal{V} = \mathrm{K}\frac{1+1}{2} = \mathrm{K}.$$

Puis nous définissons les opérateurs correspondants aux champs électromagnétiques par les formules de type classique :

$$\vec{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}.\,\vec{a} = -\mathrm{K}\ \mathrm{rot}.\frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2}$$

$$(16) \qquad \vec{\mathcal{E}} = -\,\mathrm{grad}.\mathcal{V} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.\vec{a} = \mathrm{K}\left[-\,\mathrm{grad} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2}\right].$$

A l'aide de ces opérateurs, on peut alors définir les grandeurs électromagnétiques attachées au photon par les formules ;

$$(17) \qquad \begin{cases} \vec{\mathrm{A}} = \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\,\vec{a}\,\Phi_{ik}\ ; & \mathrm{V} = \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\Phi_{ik} \\ \vec{\mathrm{E}} = \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\,\vec{\mathcal{E}}\,\Phi_{ik}\ ; & \vec{\mathrm{H}} = \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\,\vec{\mathcal{H}}\,\Phi_{ik} \end{cases}$$

Ces formules définissent complètement les potentiels et les champs électromagnétiques du photon à partir de son onde Φ. Mais la forme particulière des matrices $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_i$ (construites à partir des α_i de Dirac) permet de substituer à la définition des champs donnée par (17) une autre définition qui lui est équivalente.

Pour parvenir à cette deuxième définition des champs, il faut faire appel à des identités remarquables qui résultent de la forme des $\mathcal{A}_i$ et des $\mathcal{B}_i$. Ces identités sont les suivantes :

$$(18) \qquad \begin{cases} \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\dfrac{\vec{s^{(\mathcal{A})}} + \vec{s^{(\mathcal{B})}}}{2}\Phi_{ik} \equiv 0\ ; & \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\dfrac{s_4^{(\mathcal{A})} + s_4^{(\mathcal{B})}}{2}\Phi_{ik} \equiv 0 \\ \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\dfrac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\Phi_{ik} \equiv 0\ ; & \sum_{ik} \Phi^0_{ik}.\dfrac{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3\mathcal{B}_4}{2}\Phi_{ik} \equiv 0 \end{cases}$$

Ce sont là des identités vérifiées quelle que soit la fonction Φ.

Maintenant si nous multiplions par exemple l'équation (I) par $\mathcal{A}_1$, en avant et l'équation (II) par $\mathcal{B}_1$, en avant, si nous multiplions ensuite les équations obtenues par $\mathrm{K}\Phi^0_{ik}$, sommons sur i et k et ajoutons, nous obtenons finalement en tenant compte des définitions, (15), (16) et (17) et des identités (18) :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} = \sum_{ik} \Phi^0_{ik} \cdot \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \cdot a_x - \frac{\partial}{\partial x} \cdot v\right)\Phi_{ik} \\ &= \mathrm{K}\varkappa\mu_0 c \cdot \sum_{ik} \Phi^0_{ik} \cdot \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_1\mathcal{B}_4}{2}\Phi_{ik}. \end{aligned}\right.$$

Comme on obtient aisément un résultat analogue (avec permutation circulaire des indices 1, 2, 3) pour E_y et E_z, on obtient finalement la formule vectorielle :

$$(20)\qquad \vec{E} = \mathrm{K}\varkappa\mu_0 c \cdot \sum_{ik} \Phi^0_{ik} \cdot \frac{\vec{\mathcal{A}}\mathcal{A}_4 + \vec{\mathcal{B}}\mathcal{B}_4}{2}\Phi_{ik}.$$

C'est une deuxième définition du champ $\vec{E}$ équivalente à celle de (17). On trouve de même pour le champ magnétique :

$$(21)\qquad \vec{H} = -\mathrm{K}\varkappa\mu_0 c \cdot \sum_{ik} \Phi^0_{ik} \cdot \frac{\vec{s(\mathcal{A})}\mathcal{A}_4 + \vec{s(\mathcal{B})}\mathcal{B}_4}{2}\Phi_{ik}.$$

Il faut remarquer que l'équivalence des définitions (20) et (21) avec les définitions (17) dépend essentiellement des identités (18) et disparaitrait si on altérait la forme des $\mathcal{A}_i$ et des $\mathcal{B}_i$.

Equations Maxwelliennes :

La théorie électromagnétique classique repose sur un ensemble de 15 équations, du moins pour le cas du vide. Ce sont :

les 6 équations d'évolution :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{E}\,; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H}$$

les 2 équations de condition :

$$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0\,; \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

les 6 équations définissant les champs à l'aide des potentiels :

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}\,; \qquad \vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

l'équation de Lorentz entre les potentiels :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A} = 0.$$

Nous allons examiner si, avec nos définitions, nous retrouvons ces 15 équations. Pour cela nous procéderons comme nous l'avons fait pour obtenir l'équation (19) : autrement dit, nous partirons des équations (I) et (II), nous les multiplierons respectivement par un opérateur formé à l'aide des $\mathcal{A}_i$ et l'opérateur correspondant formé à l'aide des $\mathcal{B}_i$ et nous les ajouterons après avoir multiplié par $K\Phi^0_{ik}$ ou $K\varkappa\mu_0 c\Phi^0_{ik}$ suivant les cas et avoir sommé sur i et sur k. En procédant de cette façon, nous retrouvons exactement, outre les définitions des champs à l'aide des potentiels, l'équation de Lorentz entre potentiels et les équations du premier groupe de Maxwell. Pour les équations du second groupe nous trouvons en plus des termes classiques des termes de l'ordre du carré de la masse propre μ_0 qui sont proportionnels aux composantes du potentiel-vecteur et au potentiel scalaire. L'ensemble des résultats obtenus s'exprime par le tableau suivant d'équations :

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{E} \qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\vec{H} - \varkappa^2\mu_0^2c^2\vec{A}\,; \qquad \operatorname{div}\vec{E} = \varkappa^2\mu_0^2c^2V \\ \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}\,; \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad}V - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0. \end{array}\right.$$

De ces équations, on déduit aisément que chacune des grandeurs $\vec{A}$, V, $\vec{E}$, $\vec{H}$ satisfait à une équation de la forme $\Box F = \varkappa^2\mu^2_0c^2F$. Il suffit pour cela de substituer dans les équations du second groupe les définitions des champs par les potentiels et de tenir compte de l'équation de Lorentz : on obtient ainsi les équations de propagation des potentiels $\vec{A}$ et V et les équations de propagation des champs en résultent parce que les champs se déduisent des potentiels par des opérations linéaires.

Si l'on pose $\mu_0 = 0$, le système (22) se réduit au système des 15 équations de la théorie électromagnétique classique. Plus précisément, on retrouve ces équations classiques chaque fois qu'on considère comme négligeables les termes en μ_0^2.

L'onde Φ plane et monochromatique :

Nous allons étudier les solutions planes et monochromatiques des équations du photon. Nous chercherons donc les solutions de la forme :

$$\Phi_{ik} = a_{ik} e^{\frac{2\pi i}{h}[Wt - p_x x - p_y y - p_z z]} \quad (23)$$

Si l'on substitue cette forme des Φ_{ik} dans les 16 équations (III), on obtient 16 relations linéaires et homogènes entre les 16 a_{ik} et pour que ces relations admettent pour solution un ensemble de a_{ik} non tous nuls, il faut que le déterminant des 16 équations soit nul. Un calcul assez long montre que cette condition entraîne soit W = 0, soit la relation suivante :

$$\frac{W^2}{c^2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \mu_0^2 c^2 = p^2 + \mu_0^2 c^2 \quad (24)$$

p désignant la longueur du vecteur de composantes $p_x p_y p_z$. Si nous écartons le cas des solutions statiques d'énergie nulle, il faut donc que W et p soient reliées par la relation (24) pour qu'il existe une onde plane monochromatique du type (23). Or la relation (24) est la relation relativiste bien connue entre l'énergie et la quantité de mouvement d'un corpuscule de masse μ_0. Nous voyons ainsi que dans cette théorie du photon comme dans la théorie de l'électron magnétique de Dirac, les mouvements rectilignes et uniformes définis par les ondes planes monochromatiques satisfont à la relation relativiste (24).

Il est d'ailleurs facile, de donner une démonstration très rapide de l'équation (24). En effet, si nous considérons une solution des équations (III) du type (23) et si nous supposons que cette solution n'est pas statique (c'est-à-dire que W n'est pas nul), nous savons, en vertu d'un théorème précédemment démontré, qu'elle satisfait aussi aux équations (IV) et par suite à l'ensemble des équations (I) et (II). De là résulte, nous l'avons vu, que Φ_{ik} satisfait à l'équation (11). Or, si nous substituons la forme (23) dans l'équation (11), nous obtenons immédiatement la relation (24) à laquelle doit donc bien satisfaire toute solution plane et monochromatique non statique des équations (III).

Si nous supposons la relation (24) réalisée, il est possible de trouver des solutions du type (23) avec des a_{ik} non tous nuls.

Pour étudier la forme d'une quelconque de ces solutions, supposons que nous prenions la direction de propagation de cette onde (direction du vecteur $\overrightarrow{p}$) comme axe des z, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité. L'onde cherchée sera alors de la forme

$$\Phi_{ik} = a_{ik} e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathrm{W}t - pz)} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\mathrm{W}^2}{c^2} = p^2 + \mu_0{}^2 c^2.$$

Les équations satisfaites par les Φ_{ik} sont maintenant faciles à écrire car les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ y disparaissent. On trouve aisément que 4 seulement des a_{ik} sont arbitraires, les autres s'exprimant à l'aide de ceux-là. Pour écrire la solution, nous poserons par abréviation :

$$\text{(25)} \qquad \mathrm{P} = e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathrm{W}t - pz)} \qquad \Delta = \frac{\mathrm{W}}{c} + \mu_0 c.$$

Les seize Φ_{ik} de l'onde plane monochromatique s'expriment alors à l'aide de 4 constantes arbitraires C_0, C'_0, C_1 et C_2 de la manière qui suit [1] :

$$\text{(26)} \left\{ \begin{array}{ll} \left. \begin{array}{l} \Phi_{11} = \Phi_{33} = \frac{p\mathrm{C}_0}{\Delta}\mathrm{P} \; ; \; \Phi_{22} = \Phi_{44} = \frac{p\mathrm{C}'_0}{\Delta}\mathrm{P} \\ \Phi_{31} = -\mathrm{C}_0\mathrm{P} ; \Phi_{13} = -\frac{p_2}{\Delta^2}\mathrm{C}_0\mathrm{P} ; \Phi_{42} = \mathrm{C}'_0\mathrm{P} ; \Phi_{24} = \frac{p_2}{\Delta^2}\mathrm{C}'_0\mathrm{P} \end{array} \right\} & \begin{array}{c}\text{Composantes}\\ \text{de spin nul}\end{array} \\ \Phi_{41} = -\mathrm{C}_2\mathrm{P} \; ; \; \Phi_{23} = \frac{p^2}{\Delta^2}\mathrm{C}_2\mathrm{P} ; \Phi_{43} = -\Phi_{21} = \frac{p}{\Delta}\mathrm{C}_2\mathrm{P} & \left\} \begin{array}{c}\text{Composantes}\\ \text{de spin} - \frac{h}{2\pi}\end{array} \right. \\ \Phi_{32} = \mathrm{C}_1\mathrm{P} \; ; \; \Phi_{14} = -\frac{p^2}{\Delta^2}\mathrm{C}_1\mathrm{P} \; ; \; \Phi_{34} = -\Phi_{12} = \frac{p}{\Delta}\mathrm{C}_1\mathrm{P} & \left\} \begin{array}{c}\text{Composante}\\ \text{de spin } \frac{h}{2\pi}\end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le fait qu'il y ait 2 constantes arbitraires pour les composantes de spin nul s'interprète en remarquant qu'il y a deux manières d'obtenir un spin nul en composant les spins $\frac{h}{4\pi}$ de deux corpuscules complémentaires : soit en associant un spin $+\frac{h}{4\pi}$ du premier corpuscule avec un spin $-\frac{h}{4\pi}$ du second, soit en associant un spin $-\frac{h}{4\pi}$ du premier corpuscule avec un spin $+\frac{h}{4\pi}$ du se-

[1] Dans *Une nouvelle théorie de la Lumière*, nous avons, par inadvertance, posé $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}'_0$, relation qui n'est pas imposée par les équations et restreint la généralité.

cond. Ainsi s'explique qu'il y ait 8 composantes du Φ correspondant à l'hypothèse du spin nul alors qu'il n'y a que 4 pour chacune des hypothèses $+\frac{h}{2\pi}$ et $-\frac{h}{2\pi}$.

L'onde Φ donnée par les formules (26) peut d'ailleurs être regardée comme la superposition de 4 ondes planes monochromatiques correspondant à des « cas purs » pour le spin. On obtient ces 4 ondes en faisant successivement dans les formules (26) $C'_0 = C_1 = C_2 = 0$; $C_0 = C_1 = C_2 = 0$; $C_0 = C'_0 = C_1 = 0$; $C_0 = C'_0 = C_2 = 0$.

Les deux dernières ondes ainsi obtenues sont les ondes lévogyres et dextrogyres correspondant aux valeurs $\frac{h}{2\pi}$ et $-\frac{h}{2\pi}$ du spin le long de oz. Les deux premières ondes, par contre, sont des ondes isotropes dans leurs plans d'onde : elles appartiennent au type longitudinal et n'avaient pas d'analogues en théorie de Dirac : elles sont liés à la compensation l'un par l'autre des spins des deux corpuscules complémentaires réunis dans le photon.

Potentiels et champs électromagnétiques liés à l'onde plane monochromatique :

Connaissant la forme des ondes planes monochromatiques solutions de l'équation (III), il est aisé d'en déduire, à l'aide des définitions (17), (20) et (21), les potentiels et les champs liés par la présente théorie à une telle onde plane. Nous allons trouver des valeurs fonctions linéaires des coefficients C en accord avec les exigences du principe de superposition.

Voici le résultat du calcul des grandeurs électromagnétiques liées à l'onde (26) :

1° Potentiels

$$(27)\left\{\begin{aligned}
A_x &= -K[\Phi_{41} + \Phi_{32} + \Phi_{23} + \Phi_{14}] = K(C_2 - C_1)\frac{2\mu_0 c}{\Delta}\cdot P \\
A_y &= -Ki[\Phi_{41} - \Phi_{32} + \Phi_{24} - \Phi_{14}] = Ki(C_2 + C_1)\frac{2\mu_0 c}{\Delta}\cdot P \\
A_z &= -K[\Phi_{31} - \Phi_{42} + \Phi_{13} - \Phi_{24}] = K(C_0 + C'_0)\frac{2\frac{W}{c}}{\Delta}\cdot P \\
V &= K[\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} + \Phi_{44}] = K(C_0 + C'_0)\frac{2p}{\Delta}\cdot P
\end{aligned}\right.$$

$$
(27)\left\{
\begin{aligned}
&2^{\circ}\ \text{Champs}\\
&E_x = K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{41}-\Phi_{32}+\Phi_{23}+\Phi_{14}] = -2K\varkappa\frac{\mu_0 W}{\Delta}(C_2-C_1)\cdot P\\
&E_y = K\varkappa\mu_0 ci[-\Phi_{41}+\Phi_{32}+\Phi_{23}-\Phi_{14}] = -2K\varkappa\frac{\mu_0 W}{\Delta}(C_2+C_1)\cdot P\\
&E_z = K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{31}+\Phi_{42}+\Phi_{13}-\Phi_{24}] = -2K\varkappa\frac{\mu_0{}^2 c^2}{\Delta}(C_0+C'_0)\cdot P\\
&H_x = -K\varkappa\mu_0 ci[-\Phi_{21}-\Phi_{12}+\Phi_{43}+\Phi_{34}] = 2K\varkappa\frac{\mu_0 cp}{\Delta}i(C_2+C_1)\cdot P\\
&H_y = -K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{21}+\Phi_{12}+\Phi_{43}-\Phi_{34}] = -2K\varkappa\frac{\mu_0 cp}{\Delta}(C_2-C_1)\cdot P\\
&H_z = -K\varkappa\mu_0 ci[-\Phi_{11}+\Phi_{22}+\Phi_{33}-\Phi_{44}] = 0.
\end{aligned}\right.
$$

On vérifie aisément avec ces valeurs que les relations entre potentiels et champs et l'équation de Lorentz sont satisfaites ainsi que les équations de Maxwell complétées par les termes en μ_0 (voir équations (22)).

Les valeurs (27) montrent que le champ magnétique est transversal ce qui est exigé d'ailleurs par l'équation Maxwellienne $\operatorname{div}\vec{H} = 0$. Par contre, E_z n'étant pas nul, le champ électrique n'est pas transversal : ceci s'explique car nous avons ici $\operatorname{div}\vec{E} = \varkappa^2\mu^2_0 c^2 V$ et non $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. Mais la composante E_z est de l'ordre de μ^2_0 alors que les composantes E_x et E_y sont de l'ordre de μ_0. Comme μ_0 est sûrement très petit, le champ électrique est presque transversal et dans l'hypothèse-limite $\mu_0 = 0$, il est rigoureusement tranversal. En d'autres termes, les composantes Φ_{ik} de spin nul caractérisées par les constantes C_0 et C'_0 (qui d'ailleurs n'interviennent ici que par leur somme) donnent naissance à une onde électrique longitudinale qui est évanouissante si $\mu_0 c^2 \leqslant W$.

Les composantes Φ_{ik} correspondant aux valeurs $\pm\frac{h}{2\pi}$ du spin le long de *oz* donnent naissance à l'onde électromagnétique transversale qui, pour μ_0 très petit, est absolument prépondérante et qui subsiste seule pour $\mu_0 = 0$. Cette onde transversale a tous les caractères de l'onde lumineuse de Maxwell. Son état de polarisation dépend de la valeur des constantes C_1 et C_2. Si C_1 est nulle, l'onde Φ correspond (en supposant $C_0 = C'_0 = 0$) au spin $+\frac{h}{2\pi}$ le long de *oz* : à ce spin est associée une rotation lévogyre dans le plan d'onde (voir fig. 1, *a*). Il est facile de vérifier sur les valeurs (27) que l'onde électromagnétique est alors circulaire gauche.

Si au contraire C_2 est nulle, l'onde Φ initiale correspond au spin $-\frac{h}{2\pi}$ le long de oz et à ce spin est associée une rotation dextrogyre dans le plan d'onde (voir fig. 1, *b*). Les valeurs (27) montrent alors que l'onde électromagnétique est circulaire droite :

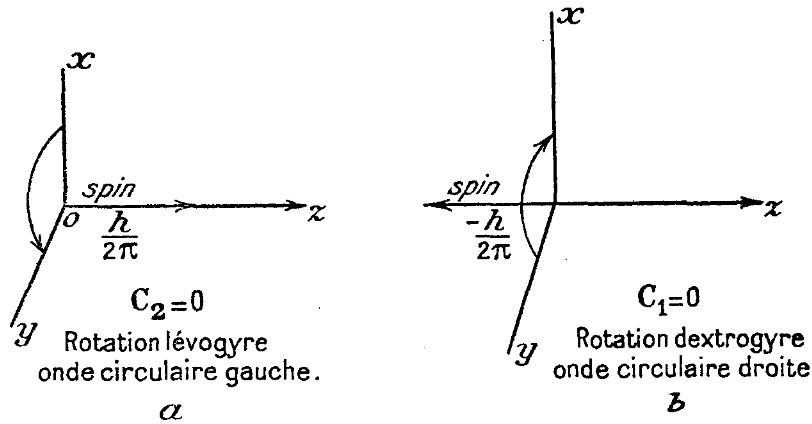

Fig. 1

Dans le cas général où les deux constantes C_1 et C_2 de l'onde Φ sont toutes deux différentes de zéro, la polarisation est elliptique. Quand les constantes C_1 et C_2 ont le même module, l'ellipse se réduit à une droite et l'on a la polarisation rectiligne. L'azimut de la polarisation rectiligne est alors déterminé par la différence des arguments des constantes complexes C_1 et C_2. En désignant par α_1 et α_2 ces arguments, on trouve en effet pour l'angle θ de la vibration rectiligne du champ électrique avec l'axe des x la formule :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \tag{28}$$

L'égalité des modules de C_1 et de C_2 dans le cas de la polarisation rectiligne permet de dire que la polarisation rectiligne s'obtient en superposant en proportion égale une onde Φ lévogyre et une onde Φ dextrogyre.

Dans l'ensemble, la théorie met ainsi parfaitement en évidence la relation existant entre la polarisation circulaire et le spin du photon. Elle précise donc la parenté profonde de la notion de spin avec celle de polarisation et c'est là certainement un de ses résultats les plus importants.

ETUDE DES ÉTATS DU PHOTON : ET DES GRANDEURS QUADRATIQUES QUI Y SONT ATTACHÉES

Objet du paragraphe :

Jusqu'ici, nous nous sommes bornés à étudier l'équation d'ondes du photon et à examiner certaines transitions d'un état initial donné à un état d'annihilation, qui nous ont permis de parvenir à une définition satisfaisante des grandeurs électromagnétiques liées au photon. Ces grandeurs correspondent, en somme, à des transitions dans lesquelles le photon se détruit et, en raison de la forme particulière adoptée pour la solution d'annihilation, elles s'expriment linéairement à l'aide des Φ_{ik}. Mais dans toutes les formes de la Mécanique ondulatoire, y compris la théorie de l'électron de Dirac, on peut attacher à chaque état d'un corpuscule des grandeurs, fonctions quadratiques de l'onde Ψ, représentant cet état, qui fournissent des valeurs moyennes et ont une interprétation physique simple. La définition de ces grandeurs moyennes se rattache d'ailleurs à une théorie quantique générale des grandeurs physiques observables et de leurs valeurs possibles. Supposant ces théories connues du lecteur (1), nous allons dans les pages suivantes chercher à retrouver des définitions analogues, se rattachant aussi à un schéma général, dans le cas du photon dont les états sont définis par l'ensemble des équations (III) et (IV) ou, si l'on préfère, des équations (I) et (II).

Il faut le dire franchement, le résultat de l'enquête que nous allons entreprendre ne sera pas entièrement satisfaisant. Nous retrouverons bien des résultats analogues à ceux des formes antérieures de la Mécanique ondulatoire, mais nous rencontrerons

(1) Voir, par exemple, le livre de l'auteur *L'électron magnétique*, chapitres V, VI et XVI.

aussi beaucoup de difficultés que nous ne pourrons pas résoudre. Néanmoins cette étude est certainement instructive, car on y retrouve sous une forme parfois nouvelle bien des remarques profondes faites par divers théoriciens, et tout particulièrement M. Pauli, au cours de recherches sur la théorie quantique de la lumière. De plus, c'est souvent en constatant nettement les difficultés qu'on en prépare la solution. Enfin, certains des résultats que nous allons exposer présentent en eux-mêmes un intérêt réel.

Le quadrivecteur Densité-Courant :

Nous allons d'abord chercher, à l'instar de la théorie de Dirac, à trouver des expressions, quadratiques en les Φ_{ik} et satisfaisant à une équation de continuité, qui nous permettent de définir un quadrivecteur Densité-Courant dans l'espace-temps.

Par analogie avec la théorie de Dirac, on pourrait être tenté de définir la composante de temps et les composantes d'espace de ce quadrivecteur par les formules :

$$(29) \qquad \rho = \sum_{ik} \Phi^*_{ik} \Phi_{ik} ; \qquad \rho \vec{u} = -c \sum_{ik} \Phi^*_{ik} \cdot \frac{\vec{\mathcal{A}} + \vec{\mathcal{B}}}{2} \Phi_{ik}$$

mais ces définitions ne seraient pas satisfaisantes parce qu'elles n'auraient pas la variance relativiste nécessaire. Il est aisé de voir que l'on obtient au contraire des définitions acceptables en posant :

$$(30) \; \rho = \sum_{ik} \Phi^*_{ik} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} \Phi_{ik} ; \qquad \rho \vec{u} = -c \sum_{ik} \Phi^*_{ik} \cdot \frac{\mathcal{B}_4 \vec{\mathcal{A}} + \mathcal{A}_4 \vec{\mathcal{B}}}{2} \Phi_{ik}$$

Tout d'abord, la variance relativiste de ces expressions est correcte. Ensuite elles satisfont à une équation de continuité hydrodynamique qui permet de les considérer comme une densité et un flux.

Pour démontrer cette équation de continuité, remarquons d'abord que, si l'on désigne symboliquement par $\Phi^*_{ik} \mathcal{A}_1$ la quantité $\sum_{lm} \Phi^*_{lm} (\mathcal{A}_1)_{lm,ik}$ cette quantité est complexe conjuguée de $\mathcal{A}_1 \Phi_{ik}$ en vertu de l'hermiticité de $\mathcal{A}_1$, hermiticité exprimée par $(\mathcal{A}_1)_{lm,\,ik} = (\mathcal{A}_1)^*_{ik,lm}$. La même remarque s'applique aux autres $\mathcal{A}$ et aux $\mathcal{B}$. Dès lors, la fonction d'onde Φ du photon satisfaisant aux équations (I) et (II), la fonction conjuguée Φ^* satisfait aux équations (I′) et (II′) conjuguées de (I) et de (II) :

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi^*_{ik}}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi^*_{ik}\mathcal{A}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Phi^*_{ik}\mathcal{A}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\Phi^*_{ik}\mathcal{A}_3 - \varkappa\mu_0 c\Phi^*_{ik}\mathcal{A}_4\right]$$

$$(\mathrm{II}') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi^*_{ik}}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi^*_{ik}\mathcal{B}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Phi^*_{ik}\mathcal{B}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\Phi^*_{ik}\mathcal{B}_3 - \varkappa\mu_0 c\Phi^*_{ik}\mathcal{B}_4\right]$$

Si nous multiplions alors (I) par $\Phi^*_{ik}\mathcal{B}_4$ en avant, (II) par $\Phi^*\mathcal{A}_4$ en avant, (I′) par $\mathcal{B}_4\Phi_{ik}$ en arrière et (II′) par $\mathcal{A}_4\Phi_{ik}$ en arrière, si nous sommons sur les indices i et k, additionnons les 4 équations et divisons par 2, il vient en tenant compte des définitions (30) :

$$(31) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0$$

C'est bien l'équation de continuité annoncée.

Pour bien nous convaincre que les définitions (30) sont acceptables, nous allons considérer le cas de l'onde Φ plane et monochromatique. En ce cas en effet, dans toutes les formes de la Mécanique ondulatoire, nous pouvons définir à partir de la fréquence $\frac{W}{h}$ et de la longueur d'onde $\frac{h}{p}$ une vitesse corpusculaire. Dans une Mécanique ondulatoire relativiste comme celle du photon, la vitesse corpusculaire sera définie par la relation qui en Dynamique relativiste donne la vitesse en fonction de l'énergie W et de la quantité de mouvement p, relation qui est la suivante :

$$(32) \qquad v = \frac{pc^2}{W}$$

Or il est certain que la vitesse $\vec{u}$ figurant dans le vecteur densité-flux doit pour l'onde plane monochromatique être égale à la vitesse $\vec{v}$. Il nous faut vérifier qu'il en est bien ainsi ici. Pour cela, nous allons commencer par le calcul de ρ. Nous avons en vertu de (30) :

$$(33) \quad \rho = \sum_{i,k,l,m,} \Phi^*_{ik}\cdot\frac{[(\alpha_4)_{il}\delta_{km} - (\alpha_4)_{km}\delta_{il}]}{2}\Phi_{lm} = \sum_{ik}\Phi^*_{ik}\cdot\frac{(\alpha_4)_{ii} - (\alpha_4)_{kk}}{2}\Phi_{ik}$$

Des valeurs de $(\alpha_4)_{ii}$ résulte alors que ρ ne contient que le carré des modules des composantes Φ_{ik} dont les indices sont de paires différentes, avec le signe $+$ si le premier indice est de la seconde paire et le signe — dans le cas contraire. On a donc la formule générale.

$$(34)\ \rho = |\Phi_{31}|^2 + |\Phi_{32}|^2 + |\Phi_{41}|^2 + |\Phi_{42}|^2 - |\Phi_{13}|^2 - |\Phi_{14}|^2 - |\Phi_{23}|^2 - |\Phi_{24}|^2$$

En substituant dans (34) les valeurs (26) des Φ_{ik} pour l'onde plane monochromatique, on trouve aisément :

$$(35)\quad \begin{cases} \rho = [|C_0|^2 + |C_0'|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2]\left(1 - \frac{p^4}{\Delta^4}\right) \\ \quad = [|C_0|^2 + |C_0'|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2]\frac{4W\mu_0}{\Delta^2}. \end{cases}$$

En calculant de même ρu_x et ρu_y pour l'onde plane (26), on trouve que ces quantités sont nulles, ce qui est naturel puisque les expressions (26) supposent l'axe des z dans la direction du mouvement. Enfin le calcul de ρu_z donne :

$$(36)\qquad \rho u_z = c^2 [|C_0|^2 + |C_0'|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2]\frac{4\mu_0 p}{\Delta^2}$$

dont on tire par comparaison avec (35) :

$$(37)\qquad \rho u_z = \rho \cdot \frac{pc^2}{W}.$$

On voit alors que u_z, seule composante non nulle de $\vec{u}$, a bien la valeur (32) ; d'où découle l'égalité de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ puisque le mouvement s'effectue suivant oz. Ainsi la vérification souhaitée est bien effectuée.

Le choix de la définition (30) pour la densité ρ nous oblige à adopter pour formule de normalisation des ondes Φ la relation :

$$(38)\qquad \int_v \sum_{ik} \Phi_{ik}^* \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} \Phi_{ik} d\tau = 1$$

v étant le volume du domaine occupé par les ondes Φ. En vertu de l'équation de continuité (31), la normalisation ainsi réalisée persiste constamment. Nous aurons à examiner les conséquences de la formule (38) et les difficultés qu'elle soulève.

Remarques sur la définition de la quantité ρ :

Toutes les formes de la Mécanique ondulatoire développées jusqu'ici introduisent une densité ρ qui y joue, nous allons le rappeler, un double rôle très remarquable. En Mécanique ondulatoire non relativiste, on donne à ρ la valeur $\Psi\Psi^* = |\Psi|^2$ et, dans la théorie de l'électron magnétique de Dirac, on généralise cette définition, pour tenir compte de l'existence des composantes qu'y possède la fonction d'onde Ψ_k, en posant

$$\rho = \sum_{1}^{4}{}_k \Psi_k^* \Psi_k = \sum_{1}^{4}{}_k |\Psi_k|^2.$$

Puis, dans un cas comme dans l'autre, on démontre qu'il existe une quantité vectorielle $\rho\vec{u}$ telle qu'entre ρ et $\rho\vec{u}$ existe une relation de la forme (31) et cette relation de continuité assure la constance dans le temps de la quantité $\int \rho d\tau$ et permet de lui attribuer une valeur constante quelconque, par exemple la valeur 1 (normalisation de la fonction d'onde). Cela étant, on attribue à la grandeur ρ une double signification que nous devons maintenant bien préciser.

D'une part la grandeur ρ est considérée comme la « densité de normalisation », c'est-à-dire comme la quantité qu'il faut intégrer dans tout l'espace pour obtenir la condition de normalisation $\int \rho d\tau = 1$. Cette signification de la grandeur ρ est rendue légitime par l'existence d'une équation de continuité de la forme (31) qui assure la constance dans le temps de $\int \rho d\tau$.

D'autre part, en Mécanique ondulatoire et en théorie de Dirac, on attribue à la grandeur ρ une autre signification qui lui confère une sorte de sens physique. On y admet, en effet, que le produit $\rho d\tau$ mesure la probabilité pour qu'une expérience permette de localiser le corpuscule dans l'élément de volume $d\tau$. Cette interprétation résulte d'un raisonnement, d'ailleurs assez délicat, qui conduit à évaluer les probabilités respectives des diverses valeurs possibles d'une des coordonnées d'un corpuscule. Cette deuxième signification ainsi donnée à ρ est beaucoup plus précise que la première et beaucoup plus exigeante car elle exige non seulement que $\int \rho d\tau$ soit égale à l'unité, mais que chacun des éléments $\rho d\tau$ de l'intégrale soit réel et positif : la validité de l'équation de continuité suffit pour que la première condition soit remplie, mais la seconde ne l'est qu'en vertu des formes particulières (définies positives) adoptées pour l'expression de ρ.

Nous devons maintenant examiner si la définition de ρ adoptée dans les formules (30) nous permet de maintenir pour cette grandeur, dans notre théorie du photon, les deux significations que nous venons de préciser.

En ce qui concerne la seconde signification, nous sommes amenés à reconnaître qu'on ne peut plus la conserver. En effet, la grandeur ρ donnée par la formule (30) n'est pas définie positive et par suite rien n'assure qu'elle soit toujours positive. Dès lors, il ne paraît plus possible de considérer $\rho d\tau$ comme la probabilité de présence du photon dans l'élément de volume $d\tau$. Ceci conduit à penser que, pour le photon, la localisation ne doit pas être une « observable » au sens de Dirac. La détermination des coordonnées du photon ne serait pas, même en principe, physiquement possible. C'est d'ailleurs une idée sur laquelle M. Pauli a depuis longtemps attiré l'attention. Il convient d'ailleurs de remarquer à ce sujet que dans le champ d'interférences des ondes du photon, c'est la valeur locale du champ électrique, et non celle de la quantité ρ, qui doit donner la probabilité d'interaction du photon avec la matière.

Si l'on doit rejeter pour la grandeur ρ définie par (30) la seconde signification attribuée à cette grandeur, peut-on lui maintenir la première et considérer ρ comme la quantité qu'il faut intégrer pour normer la fonction Φ ? Ici il faut distinguer le cas des ondes Φ à énergie W positive que nous avons toujours considérées jusqu'ici et celui des ondes Φ à énergie W négative. Dans le premier cas, il n'y a aucune difficulté : une onde Φ plane et monochromatique à énergie positive ou, plus généralement, une onde Φ formée par une superposition d'ondes planes et monochromatiques à énergie positive se laisse normer par la condition (38) sans difficultés et l'équation de continuité (31) assure la permanence de cette normalisation. Mais, en vertu du caractère quadratique de la relation (24) entre l'énergie et la quantité de mouvement d'une onde Φ monochromatique, il peut en théorie du photon, tout comme en théorie de Dirac, exister des ondes Φ monochromatiques à énergie W négative. Or la formule (35) nous montre que pour ces ondes à énergie négative, ρ sera négatif et la normalisation par la formule (38) n'est plus possible puisque le premier membre est négatif. On peut être tenté de se dégager de cette nouvelle difficulté en disant qu'on se limitera aux ondes Φ formées d'ondes planes à énergie positive et pratiquement il est en effet souvent possible de ne considérer que celles-là. Mais il y a ici, tout comme en théorie de Dirac, une raison de ne pouvoir exclure systématiquement les ondes planes à énergie négative : c'est que, si l'on veut avoir un système *complet* de fonctions d'ondes planes permettant de représenter n'importe quel état initial de la fonction Φ, il faut comprendre dans ce système, à côté de l'ensemble des ondes planes à énergie positive, l'ensemble des ondes planes à énergie négative. Ceci se voit facilement par des raisonnements analogues à ceux que l'on fait sur le même sujet en théorie de Dirac [1]. Il est très curieux de remarquer, nous aurons plus loin l'occasion de le préciser, que, si ρ peut être négatif, la quantité ρW pour une onde monochromatique est toujours positive puisque ρ et W sont toujours de même signe : on peut donc toujours normer une onde plane monochromatique, même d'énergie négative, par la formule

$$\int \rho W d\tau = h\nu \qquad \text{avec} \qquad h\nu = |W|,$$

formule qui se réduit à (38) pour une onde à énergie positive. Cette remarque pourrait peut-être conduire à lever la difficulté rencontrée. Sans insister ici sur ce problème assez délicat soulevé par l'existence d'ondes Φ à énergie négative, nous ferons abstraction de cette sorte d'ondes et nous admettrons que la quantité ρ a pour rôle de nous servir à normer la fonction Φ par la formule (38).

Nous noterons enfin que si on désigne par $\Phi^{(i)}$ les différentes ondes planes monochromatiques à énergie positive du photon et si Φ, fonction d'onde associée à un certain photon, a la forme :

$$\Phi = \sum_i c_i \Phi^{(i)}, \tag{39}$$

la normalisation de Φ par la formule (38) donne :

$$\left\{ \begin{aligned} \int \rho d\tau &= \int \sum_i c_i^* \Phi^{(i*)} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} \sum_j c_j \Phi^{(j)} d\tau = \sum_{i,j} c_i^* c_j \delta_{ij} \\ &= \sum_i |c_i|^2 = 1 \end{aligned} \right. \tag{40}$$

La normalisation par (38) de toutes les fonctions d'onde entraîne donc que la somme des carrés des coefficients c_i du développement (39) soit égale à l'unité.

---

[1] Voir *Electron magnétique*, chapitre XX.

Formalisme de la théorie du photon :

On sait que la Mécanique ondulatoire permet de construire un formalisme général permettant de prévoir dans chaque cas particulier les valeurs possibles des grandeurs physiques mesurables et leurs probabilités respectives. Ce formalisme général repose essentiellement sur la forme adoptée par la grandeur ρ qui sert à la normalisation. Comme nous adoptons ici une forme de ρ assez différente des formes adoptées antérieurement, il est nécessaire de reconstruire tout le formalisme sur cette base nouvelle, ce qui n'est pas d'ailleurs exempt de difficultés.

Nous remarquerons d'abord que tous les opérateurs rencontrés jusqu'ici en théorie du photon sont de la forme : $F^{(a)} + F^{(b)}$, les opérateurs $F^{(a)}$ et $F^{(b)}$ étant linéaires et hermitiques et agissant de la même façon sur les coordonnées xyz. Ce qui distingue $F^{(a)}$ de $F^{(b)}$, c'est que $F^{(a)}$ agit exclusivement sur les premiers indices des fonctions Φ_{ik} et $F^{(b)}$ exclusivement sur les seconds. Un exemple éclairera cette remarque : l'opérateur Hamiltonien H du photon peut s'écrire :

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} H = H^{(a)} + H^{(b)} &= \frac{c}{2\varkappa}\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} + \varkappa\mu_0 c \mathcal{A}_4\right) \\ &+ \frac{c}{2\varkappa}\left(\mathcal{B}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{B}_3 \frac{\partial}{\partial z} + \varkappa\mu_0 c \mathcal{B}_4\right) \end{aligned} \right.$$

comme cela résulte facilement de l'équation (III). Nous admettrons alors que ce fait est général et qu'à toute grandeur physique observable de la théorie du photon, correspond un opérateur linéaire et hermitique de la forme $F^{(a)} + F^{(b)}$, $F^{(a)}$ et $F^{(b)}$ différant seulement par le fait que $F^{(a)}$ agit sur les premiers indices des fonctions Φ et $F^{(b)}$ sur les seconds indices.

Nous définirons ensuite les valeurs propres et les fonctions propres des opérateurs $F^{(a)}$ et $F^{(b)}$ par les équations *simultanées* :

$$(42) \qquad F^{(a)}\varphi^{(i)} = f^{(a)}_{(i)}\varphi^{(i)} \; ; \qquad F^{(b)}\varphi^{(i)} = f^{(b)}_{(i)}\varphi^{(i)}$$

$\varphi^{(i)}$ étant la fonction propre qui correspond aux valeurs propres simultanées $f_i^{(a)}$ et $f_i^{(b)}$. Appliquées au cas de l'opérateur Hamiltonien, les équations (42) sont équivalentes à celles qu'on obtient à partir de (I) et de (II) pour les ondes monochromatiques. De ces équations (42), on tire aisément :

$$(43) \qquad F\varphi^{(i)} = \left(f_i^{(a)} + f_i^{(b)}\right)\varphi^{(i)} = f_i\varphi^{(i)} \quad \text{avec} \quad f_i = f_i^{(a)} + f_i^{(b)}$$

équation qui pour l'Hamiltonien donne l'équation (III) appliquée à une onde monochromatique. Les f_i sont les valeurs propres de F et les $\varphi^{(i)}$ en sont les fonctions propres (à seize composantes)

Conformément aux principes généraux de la Mécanique ondulatoire, nous admettrons : 1° que les valeurs propres f_i (qui sont toujours réelles puisque F est hermitique) sont les valeurs possibles de la grandeur F ; 2° que, si le développement du Φ suivant les $\varphi^{(i)}$ est $\Phi = \sum_i c_i\varphi^{(i)}$, la quantité $|c_i|^2$ donne la probabilité de la valeur f_i.

On peut aisément démontrer que, si l'on a $f_i^{(a)} \neq f_j^{(a)}$ et $f_i^{(b)} \neq f_j^{(b)}$, la relation d'orthogonalité :

$$(44) \qquad \int \sum_{lm} \varphi_{lm}^{(i)*} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} \varphi_{lm}^{(j)} d\tau = 0$$

est valable. D'autre part, nous normaliserons les $\varphi^{(i)}$ par la formule :

$$(45) \qquad \int \sum_{lm} \varphi_{lm}^{(i)*} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} \varphi_{lm}^{(i)} d\tau = 1$$

en supposant que la chose soit possible, c'est-à-dire que le premier membre de (45) soit positif. Nous savons qu'il n'en est pas nécessairement ainsi, mais nous ferons ici abstraction de cette difficulté qui ne paraît pas devoir intervenir d'une façon essentielle si l'on se borne à étudier les ondes Φ à énergie positive.

Les formules (44) et (45) montrent que l'on doit prendre comme expression de la valeur moyenne d'une grandeur physique observable F :

$$(46) \qquad \overline{F} = \int \sum_{lm} \Phi_{lm}^* \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} F(\Phi_{lm})\, d\tau$$

car on a, avec cette définition :

$$(47) \quad \overline{F} = \sum_{ij} c_i^* c_j \int \sum_{lm} \varphi_{lm}^{(i)*} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} F\left(\varphi_{lm}^{(j)}\right) d\tau = \sum_{ij} c_i^* c_j f_j \delta_{ij} = \sum_i |c_i|^2 f_i$$

et c'est bien là la valeur moyenne de F résultant des principes admis plus haut.

On peut remplacer la définition (46) par la définition suivante qui lui est équivalente et qui met mieux en évidence le caractère hermitique de l'opérateur sous le signe $\int$:

$$\overline{\mathrm{F}} = \int \sum_{lm} \Phi^*_{lm} \cdot (\mathcal{A}_4 \mathrm{F}^{(b)} + \mathcal{B}_4 \mathrm{F}^{(a)}) \Phi_{lm}\, d\tau \tag{48}$$

Pour démontrer l'équivalence des définitions (46) et (48), on remarque que la différence des seconds membres de ces expressions est égale à :

$$\int \sum_{lm} \Phi^*_{lm} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 - \mathcal{B}_4}{2} (\mathrm{F}^{(a)} - \mathrm{F}^{(b)}) \Phi_{lm} d\tau$$

$$= \sum_{ij} c^*_i c_j \left(f^{(a)}_j - f^{(b)}_j\right) \int \sum_{lm} \varphi^{(i)*}_{lm} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 - \mathcal{B}_4}{2} \varphi^{lm}_{(j)} d\tau$$

En développant alors les $\varphi^{(i)}$ suivant le système complet des ondes planes monochromatiques $\Phi^{(i)}$, on obtient pour cette différence une somme de termes dont chacun contient en facteur une intégrale de la forme

$$\int \sum_{lm} \Phi^{(i)*}_{lm} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 - \mathcal{B}_4}{2} \Phi^{(j)}_{lm} d\tau,$$

où $\Phi^{(i)}$ et $\Phi^{(j)}$ sont des ondes planes monochromatiques. Or il est facile de voir qu'en raison des valeurs de $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{B}_4$, toutes les intégrales de cette forme sont nulles.

Les expressions (46) et (48) de la valeur moyenne d'une grandeur F conduisent tout naturellement à définir les éléments de matrice correspondant à l'opérateur F par l'une des formules équivalentes :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{F}_{ij} &= \int \sum_{lm} \Phi^{(i)*}_{lm} \cdot \frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2} \mathrm{F}\left(\Phi^{(j)}_{lm}\right) d\tau \\ \mathrm{F}_{ij} &= \int \sum_{lm} \Phi^{(i)*}_{lm} (\mathcal{A}_4 \mathrm{F}^{(b)} + \mathcal{B}_4 \mathrm{F}^{(a)}) \Phi^{(j)}_{lm} d\tau \end{aligned}\right. \tag{49}$$

$\Phi^{(i)}$ étant la i^e fonction de l'opérateur H (onde plane monochromatique). Grâce aux définitions (49), on retrouve ici le théorème bien connu de Mécanique ondulatoire : l'élément diagonal F_{ii} de la matrice correspondant à la grandeur F est égal à la valeur moyenne de F dans l'état stationnaire caractérisé par la fonction $\Phi^{(i)}$.

Intégrales premières en théorie du photon :

En Mécanique ondulatoire ordinaire, on peut définir les intégrales premières de la manière suivante : l'opérateur F correspondant à une grandeur physique observable est intégrale première dans un problème déterminé si, $\Phi^{(i)}$ étant une fonction propre *quelconque* de l'Hamiltonien H du problème pour la valeur propre E_i, la fonction $F\Phi^{(i)}$ est également fonction propre de H pour la même valeur propre E_i. Du moins cette définition est-elle valable quand l'opérateur F ne dépend pas explicitement du temps, ce qui est le cas usuel. Il est facile de trouver la condition exprimant qu'un tel opérateur F est intégrale première dans un problème où l'Hamiltonien a une certaine forme H. En effet, d'après la définition adoptée, pour que F soit intégrale première, il faut que la relation :

$$H\Phi^{(i)} = E_i\Phi^{(i)} \tag{50}$$

entraîne la relation :

$$HF\Phi^{(i)} = E_iF\Phi^{(i)} \tag{51}$$

pour toute fonction propre $\Phi^{(i)}$ de l'opérateur H. En appliquant l'opérateur F à l'équation (50) et en retranchant l'équation ainsi obtenue de (51), il vient :

$$(HF - FH)\Phi_i = 0 \tag{52}$$

pour toute fonction propre Φ_i. Comme les Φ_i forment un système complet de fonctions de base, l'égalité (52) entraîne la relation opératorielle :

$$HF \equiv FH. \tag{53}$$

Pour que l'opérateur F (indépendant du temps) soit intégrale première dans un problème où l'Hamiltonien est H, il faut que cet opérateur commute avec H. Cette condition est d'ailleurs aussi évidemment suffisante.

La définition des intégrales premières entraîne en Mécanique ondulatoire ordinaire que tous les éléments de la matrice engendrée par un opérateur intégrale première F dans le système des fonctions propres $\Phi^{(i)}$ de l'opérateur Hamiltonien sont constants dans le temps. Il est facile de le vérifier en partant de la définition des éléments de matrice et en tenant compte de l'orthogonalité des $\Phi^{(i)}$.

Ayant rappelé ces divers points de la Mécanique ondulatoire ordinaire, revenons à la théorie des photons. Rien ne nous empêche d'y adopter, pour définir les intégrales premières, le même énoncé que précédemment. Un opérateur indépendant du temps F correspondant à une grandeur physique sera donc intégrale première en théorie du photon si, $\Phi^{(i)}$ étant une fonction propre *quelconque* de l'Hamiltonien (41) du photon, la fonction $F\Phi^{(i)}$ est également fonction propre de l'Hamiltonien pour la même valeur propre. Comme ici encore les équations (50) et (51) doivent être valables avec la valeur (41) de H, le raisonnement fait plus haut nous conduit encore aux relations (52) et (53). Donc, pour qu'un opérateur F indépendant du temps soit intégrale première en théorie du photon, il faut et suffit que F commute avec l'Hamiltonien (41). De la première définition (49), il résulte alors aisément, en tenant de l'orthogonalité et de la normalisation des $\Phi^{(i)}$ en $\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4$, que tous les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur F dans le système des $\Phi^{(i)}$ sont constants dans le temps.

Comme application de la formule (53) qui définit les intégrales premières, nous allons étudier de plus près le « spin » du photon.

Le spin du photon :

Pour définir le spin du photon, nous procéderons comme en théorie de Dirac [1], c'est -à-dire que nous chercherons à adjoindre aux opérateurs M_x, M_y et M_z correspondant au moment cinétique orbital des opérateurs N_x, N_y, N_z tels que $M_x + N_x$, $M_y + N_y$ et $M_z + N_z$ soient des intégrales premières. Les opérateurs N_x, N_y et N_z seront alors considérés comme correspondant aux trois composantes restangulaires du spin du photon.

Nous allons commencer par le calcul de N_z. D'après (53), nous devons avoir :

$$(54) \qquad H(M_z + N_z) \equiv (M_z + N_z)H \qquad \text{avec} \qquad M_z = \frac{1}{\varkappa}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

comme d'habitude et avec la valeur (41) de H.

(1) Voir *Electron magnétique*, page 201.

On trouve aisément :

$$\text{(55)} \qquad HM_z - M_zH = -\frac{c}{\varkappa^2}\left[\frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

et N_z doit être tel que $HN_z - N_zH$ soit égal et opposé au second membre de (55). Il en sera ainsi si nous posons

$$N_z = \frac{1}{2\varkappa}(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2).$$

comme on le vérifie en tenant compte des relations de commutation entre les $\mathcal{A}$ et les $\mathcal{B}$. Comme on peut faire un calcul analogue pour N_x et pour N_y, on obtient finalement par permutation circulaire les valeurs suivantes :

$$\text{(56)} \qquad \begin{cases} N_x = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{i\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3 + i\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}{2} \\ N_y = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{i\mathcal{A}_3\mathcal{A}_1 + i\mathcal{B}_3\mathcal{B}_1}{2} \\ N_z = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + i\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}{2} \end{cases}$$

Les N sont bien de la forme générale $F^{(a)} + F^{(b)}$. Il y a comme une addition des spins des deux constituants du photon.

Pour trouver les valeurs possibles de la composante du spin le long de *oz*, nous devons chercher les valeurs propres de l'opérateur N_z. Pour cela, remarquons qu'en raison des valeurs des $\mathcal{A}$ et des $\mathcal{B}$, on a :

$$\text{(57)} \qquad (i\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)_{ik,lm} = (i\alpha_1\alpha_2)_{il}\delta_{km}\,; \qquad (i\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2)_{ik,lm} = -(i\alpha_1\alpha_2)_{km}\delta_{il}.$$

Or l'opérateur $i\alpha_1\alpha_2$, qui est l'opérateur N_z de l'électron de Dirac, est représenté par la matrice :

$$\text{(58)} \qquad i\alpha_1\alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Cette matrice est diagonale et l'on a :

$$\text{(59)} \qquad (i\alpha_1\alpha_2)_{il} = -(-1)^i\delta_{il}.$$

Donc, nous avons

$$\text{(60)} \quad (N_z)_{ik,lm} = \frac{h}{2\pi}\frac{-(-1)^i\delta_{il}\delta_{km} + (-1)^k\delta_{km}\delta_{il}}{2} = \frac{h}{4\pi}[(-1)^k - (-1)^i]\delta_{il}\delta_{km}.$$

N_z est une matrice diagonale dont tous les éléments pour lesquels on n'a pas à la fois $i = l$ et $k = m$ sont nuls. On trouve ainsi :

$$(61) \qquad N_z\Phi_{ik} = \sum_{lm} (N_z)_{ik,lm}\Phi_{lm} = \frac{h}{4\pi}[(-1)^k - (-1)^i]\Phi_{ik} = \alpha\Phi_{ik}$$

la constante α étant nulle pour i et k de même parité, égale $-\frac{h}{2\pi}$ pour i et k de parité différente le premier étant pair, égale enfin à $+\frac{h}{2\pi}$ pour i et k de parité différente le premier étant impair. Nous voyons bien ainsi que la composante du spin du photon le long de oz a trois valeurs possibles o et $\pm\frac{h}{2\pi}$, la correspondance entre ces trois valeurs et les diverses composantes de Φ étant précisément celle que nous avions admise dès les premiers paragraphes de ce fascicule. Naturellement la valeur moyenne de N_z est d'après la définition (48) égale à :

$$(62) \qquad \overline{N_z} = \frac{h}{2\pi}\int \Phi^* . \frac{i\mathcal{B}_4\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 + i\mathcal{A}_4\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}{2}\Phi d\tau.$$

Tenseur de Maxwell :

Il est facile de former, dans la présente théorie, un tenseur symétrique de rang deux jouissant des propriétés du tenseur classique de Maxwell, c'est-à-dire représentant la densité de l'énergie et les flux d'énergie et de quantité de mouvement.

Pour cela, nous ferons d'abord correspondre au vecteur Impulsion d'Univers du photon un quadrivecteur-opérateur défini par les formules :

$$(63) \qquad \mathcal{J}^1 = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial x}; \qquad \mathcal{J}^2 = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial y}; \qquad \mathcal{J}^3 = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial z}; \qquad \mathcal{J}^4 = \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

puis au quadrivecteur densité-flux précédemment défini, nous ferons correspondre le quadrivecteur-opérateur $\vec{U}$ de composantes :

$$(64) \qquad \begin{cases} U^1 = -c\dfrac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1}{2}; & U^2 = -c\dfrac{\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2}{2}; \\ U^3 = -c\dfrac{\mathcal{A}_3 + \mathcal{B}_3}{2}; & U^4 = c \cdot 1. \end{cases}$$

De ces deux quadrivecteurs-opérateurs, nous pouvons déduire un tenseur-opérateur symétrique de rang deux, $\vec{\vec{\mathcal{T}}}$, en posant :

$$(65) \qquad \mathcal{T}^{ik} = \frac{\mathcal{J}^i u^k + \mathcal{J}^k u^i}{2} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Les dix opérateurs distincts ainsi obtenus sont bien de la forme $F^{(a)} + F^{(b)}$ et nous pouvons former les densités de moyenne correspondantes $\mathcal{A}_4 F^{(b)} + \mathcal{B}_4 F^{(a)}$. Nous obtenons ainsi les composantes d'un tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ symétrique de rang deux auquel nous pouvons faire jouer le rôle de tenseur de Maxwell pour le photon.

Pour ne pas trop allonger, nous écrirons seulement les expressions des composantes T^{i4} qui représentent la densité et le flux de l'énergie dans la théorie classique :

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
T^{14} &= \sum_{lm} \Phi^*_{lm} \cdot \left[-\frac{c}{\varkappa}\left(\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathcal{A}_1\mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_1\mathcal{A}_4}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\Phi_{lm} \\
T^{24} &= \sum_{lm} \Phi^*_{lm} \cdot \left[-\frac{c}{\varkappa}\left(\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathcal{A}_2\mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_2\mathcal{A}_4}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\Phi_{lm} \\
T^{34} &= \sum_{lm} \Phi^*_{lm} \cdot \left[-\frac{c}{\varkappa}\left(\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mathcal{A}_3\mathcal{B}_4 + \mathcal{B}_3\mathcal{A}_4}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\Phi_{lm} \\
T^{44} &= \sum_{lm} \Phi^*_{lm} \cdot \left[-\frac{c}{\varkappa}\frac{\mathcal{A}_4 + \mathcal{B}_4}{2}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Phi_{lm} = \sum_{lm} \Phi^*_{lm}(\mathcal{B}_4 H^{(a)} + \mathcal{A}_4 H^{(b)})\Phi_{lm}
\end{aligned}\right.$$

Il est visible que T^{44} est bien la densité de valeur moyenne de l'énergie. De plus, il est aisé de se rendre compte que T^{14}, T^{24} et T^{34} correspondent aux composantes du flux de l'énergie divisé par c, c'est-à-dire correspondent, au facteur $\frac{1}{c}$ près, aux composantes du vecteur classique de Poynting. Pour le voir, il suffit de considérer le cas d'une onde plane monochromatique : le premier terme dans l'expression de T^{14}, qui est égal à la densité de valeur moyenne de p_x multiplié par c, est alors égal à $\rho c p_x$ et le second terme de cette expression est égal au produit de $\frac{W}{c}$ par la composante $\rho u_x = \rho v_x$ du flux de photons. On a donc pour l'onde monochromatique :

$$(67)\qquad T^{14} = \frac{\rho c p_x + \rho \frac{W}{c} v_x}{2} = \frac{1}{c}\rho W v_x = c\rho p_x$$

car on a $p_x = \frac{W}{c^2} v_x$ d'après la dynamique relativiste dont les relations sont valables pour l'onde plane. D'après (67), T^{14} est bien la composante x du flux de l'énergie divisée par c ou le produit par c de la composante x de la densité de quantité de mouvement. On peut voir de même que les neuf quantités T^{ij}, avec i et $j \neq 4$, représentent les composantes du tenseur d'espace « flux de quantité de mouvement ». Ainsi, pour une onde plane monochromatique on obtient pour T^{12} l'expression :

$$T^{12} = \frac{1}{2}\left[\rho v_y p_x + \rho v_x p_y\right] = \rho \frac{W}{c^2} v_x v_y \tag{68}$$

et c'est bien ce que l'on devait s'attendre à trouver.

On peut démontrer que les quantités T^{ik} obéissent aux équations

$$\sum_i \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i} = 0 \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3, 4 \tag{69}$$

x^i désignant les variables d'espace-temps. Ces équations sont celles qui, dans la théorie classique du tenseur de Maxwell, expriment la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Il est intéressant de considérer la « trace » de notre tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$. Cette grandeur doit être définie à l'aide des g_{ik} usuels de l'espace Euclidien par la formule :

$$\text{trace de } \overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \sum_{ik} g_{ik}\, T^{ik} = T^{44} - T^{11} - T^{22} - T^{33} \tag{70}$$

Le tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$ qui représente les flux d'énergie et de quantité de mouvement dans un milieu fluide a pour composantes diagonales.

$$T^{11} = \rho p_x v_x \,;\; T^{22} = \rho p_y v_y \,;\; T^{33} = \rho p_z v_z \,;\; T^{44} = \rho W \tag{71}$$

on trouve alors :

$$\text{trace de } \overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \rho \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(c^2 - v^2) = \rho\sqrt{1-\beta^2}\, m_0 c^2 = \rho_0 m_0 c^2 \tag{72}$$

en désignant par ρ_0 la densité mesurée par un observateur qui est entraîné par le mouvement du fluide au point considéré. Nous devons nous attendre à trouver quelque chose d'analogue pour notre tenseur $\overrightarrow{\overrightarrow{T}}$, tout au moins dans le cas de l'onde plane monochromatique qui est celui où, en Mécanique ondulatoire, on rejoint le plus aisément les résultats classiques. En utilisant les définitions (65) et (70), on trouve en effet :

$$\text{trace de } \overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \mu_0 c^2 \sum_{lm} \Phi_{lm}^* \cdot A_4 \mathcal{B}_4 \Phi_{lm} \tag{73}$$

Pour une onde plane monochromatique, on trouve aisément que :

$$\sum_{lm} \Phi_{lm}^{*} \cdot \mathcal{A}_4 \mathcal{B}_4 \Phi_{lm} = \rho \frac{\mu_0 c^2}{W}, \tag{74}$$

ρ étant la densité donnée par l'expression (35). En portant dans (73) la valeur (74), on obtient pour le cas de l'onde plane monochromatique :

$$\text{Trace de } \vec{\vec{T}} = \rho \frac{\mu_0 c^2}{W} \mu_0 c^2 = \rho \sqrt{1-\beta^2} \mu_0 c^2 = \rho_0 \mu_0 c^2, \tag{75}$$

en accord avec (72). Dans la théorie de Maxwell, la trace du tenseur $\vec{\vec{T}}$ est nulle : ceci nous montre une fois de plus que la théorie de Maxwell correspond à notre point de vue au cas limite $\mu_0 = 0$.

Comparaison de la densité ρ et de la densité d'énergie T^{44} pour une onde plane :

Nous avons déjà fait le calcul de la densité ρ pour une onde Φ monochromatique plane de la forme (26). Le résultat de ce calcul est donné par la formule (35). D'après la dernière équation (66), il suffit pour obtenir le T^{44} de l'onde plane de multiplier sa densité ρ par l'énergie W du photon. Il vient ainsi.

$$T^{44} = \rho W = (|C_1|^2 + |C_2|^2 + |C_0|^2 + |C_0'|^2) \cdot \frac{4\mu_0 W^2}{\Delta^2}. \tag{76}$$

Il est visible sur cette expression que T^{44} est essentiellement positif, même si W est négatif. Il en résulte, à cause de l'orthogonalité des ondes planes, que pour toute onde Φ, même comportant des composantes à énergie négative, la valeur moyenne de l'énergie $\int T^{44} d\tau$ est toujours positive. Ceci tient à ce que la densité ρ d'une onde plane a toujours le même signe que l'énergie W du photon. Nous avons déjà signalé plus haut cette circonstance qui pourrait avoir beaucoup d'importance pour lever les difficultés relatives aux ondes Φ à énergie négative.

On peut retrouver l'expression (74) sous une forme particulièrement intéressante en calculant pour l'onde plane (26) la quantité $\sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2$ qui est analogue à la forme usuelle de la densité en Mécanique ondulatoire, mais qui, nous l'avons vu, ne peut convenir pour des raisons de variance comme expression de la densité en théorie du photon. Pour l'onde plane (26), on trouve aisément :

$$(77)\quad \sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2 = (|C_0|^2 + |C_0'|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2)\left(1 + \frac{p^2}{\Delta^2}\right)^2,$$

d'où, en comparant avec la première expression (35) de ρ :

$$(78)\quad \rho = \frac{1 - \frac{p^4}{\Delta^4}}{\left(1 + \frac{p^2}{\Delta^2}\right)^2} \cdot \sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2 = \frac{1 - \frac{p^2}{\Delta^2}}{1 + \frac{p^2}{\Delta^2}} \cdot \sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2 = \frac{\mu_0 c^2}{W} \cdot \sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2$$

on en tire

$$(79)\quad T^{44} = \rho W = \mu_0 c^2 \cdot \sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2,$$

formule équivalente à (76) et montrant bien le caractère positif de T^{44}. Il est curieux de remarquer que, d'après (78), le ρ de la théorie du photon diffère de $\sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2$ par le facteur $\frac{\mu_0 c^2}{W}$ égal au facteur $\sqrt{1 - \beta^2}$ de la contraction de Lorentz. Il paraît possible que la modification dans la définition usuelle de ρ, dont nous avons vu la nécessité en théorie du photon, soit reliée au fait que le photon est un corpuscule complexe subissant dans sa structure interne la contraction de Lorentz.

Comparaison entre la densité d'énergie T^{44} et la densité d'énergie électromagnétique :

Nous voulons maintenant comparer notre expression de T^{44} avec la densité d'énergie électromagnétique de la théorie de Maxwell ou plus exactement avec la valeur moyenne dans l'espace de cette densité que nous écrirons en unités de Lorentz-Heaviside :

$$(80)\quad \overline{T^{44}_{el}} = \frac{1}{2}(\overline{E^2} + \overline{H^2}),$$

les barres indiquant des moyennes dans l'espace.

Nous commencerons par considérer le cas d'une onde plane monochromatique en supposant nuls ou négligeables les champs longitudinaux, c'est-à-dire que nous prendrons une onde plane du type (26) avec $C_0 = C'_0 = 0$. Les composantes du champ électromagnétique attaché au photon seront alors données par les formules (27) avec $E_z = H_z = 0$. Si avec ces expressions, nous formions la quantité $E^2 + H^2$, nous obtiendrions une expression en P^2 qui serait complexe et oscillerait avec la fréquence 2ν. Il est évidemment plus indiqué de considérer la quantité $|E|^2 + |H|^2$ qui est réelle et indépendante du temps et de la comparer à la quantité réelle et indépendante du temps (80). Or il est évident qu'on doit faire correspondre $|E|^2$ à la quantité $2\overline{E^2}$ de la théorie classique comme on le voit en tenant compte du facteur $\frac{1}{2}$ qui s'introduit quand on prend la moyenne dans l'espace de E^2. La quantité classique (80) correspond donc dans notre théorie à $\frac{1}{4}[|E|^2 + |H|^2]$. Or, si l'on calcule cette dernière quantité à l'aide des expressions (27) en tenant compte de ce que, pour le photon, on peut pratiquement toujours confondre p *et* Δ avec $\frac{W}{c}$:

$$\frac{1}{4}[|E|^2 + |H|^2] = 4K^2 |\varkappa|^2 \mu_0^2 c^2 [|C_1|^2 + |C_2|^2]. \tag{81}$$

En comparant avec (77) où nous devons faire $C_0 = C'_0 = 0$ et confondre $1 + \frac{p^2}{\Delta^2}$ avec 2, nous obtenons :

$$\frac{1}{4}[|E|^2 + |H|^2] = K^2 |\varkappa|^2 \mu_0^2 c^2 \cdot \sum_{lm} |\Phi_{lm}|^2, \tag{82}$$

Comme nous devons faire correspondre cette quantité à la quantité classique (80), un coup d'œil sur la formule (79) nous donne :

$$T^{44}_{el} = K^2 |\varkappa|^2 \mu_0 \cdot T^{44}. \tag{83}$$

La constante K, qui jusqu'à présent était restée indéterminée, peut donc être choisie de façon à identifier $\overline{T^{44}_{el}}$ avec T^{44} : il suffit de la prendre égale à :

$$K = \frac{1}{|\varkappa| \sqrt{\mu_0}}. \tag{84}$$

Naturellement cette valeur de K est seulement exacte quand on exprime les champs électromagnétiques en unités de Lorentz-Heaviside. Si l'on choisissait d'autres unités, il s'introduirait un facteur constant dans l'expression de K, mais quel que soit le système d'unités choisi, on trouvera toujours K proportionnel à $\mu_0^{-\frac{1}{2}}$: c'est là un point important sur lequel nous reviendrons.

Nous avons considéré le cas d'une onde plane monochromatique. Passons maintenant au cas général d'une onde Φ formée par une superposition quelconque d'ondes planes monochromatiques. Les deux quantités $\overline{T^{44}_{el}}$ et T^{44} ne seront plus alors égales en chaque point, mais si on les intègre dans tout l'espace, on obtiendra le même résultat, c'est-à-dire que :

$$\int \frac{1}{4}[|E|^2 + |H|^2]d\tau = \int T^{44} d\tau. \tag{85}$$

Ceci résulte du fait que tout terme sous l'un des signes $\int$ provenant de la combinaison de deux ondes planes différentes est périodique et disparaît par intégration : il ne subsiste donc que les termes provenant de la combinaison de chaque onde plane avec elle-même et, en vertu du résultat obtenu par une seule onde plane, la formule (85) se trouve établie.

Ainsi, il n'y a pas en général égalité *locale* des densités définies par la formule électromagnétique d'une part et par la théorie des photons d'autre part. Pour le calcul de l'énergie totale, elles sont équivalentes, mais elles ne coïncident pas en chaque point. Même dans le cas de l'onde plane, nous avons dû prendre la moyenne dans l'espace de l'expression électromagnétique classique pour obtenir une concordance. A cette constatation, on peut rattacher la remarque suivante. Dans les théories quantiques, la notion de densité d'énergie ne peut guère avoir un sens physique précis puisqu'il y est impossible d'attribuer simultanément à un corpuscule une énergie et une localisation bien déterminées. D'ailleurs, notre densité d'énergie T^{44} se présente, dans le formalisme quantique, comme une densité de valeur moyenne : or dans les théories quantiques, ce sont les valeurs moyennes qui ont véritablement un sens physique et les densités de valeur moyenne sont seulement les quantités qu'il faut intégrer dans l'espace pour obtenir les valeurs moyennes. La théorie électromagnétique est probablement trop exigeante en voulant attribuer une valeur locale à la densité de l'énergie et la divergence des deux théories est peut-être plus apparente que réelle puisque l'intégration des densités d'énergie fournit toujours le même résultat.

COMPLÉMENTS ET REMARQUES

La solution invariante d'annihilation :

Nous avons adopté comme solution représentant le photon annihilé et servant à construire les champs électromagnétiques la fonction Φ^0 définie par la formule (14), que nous pouvons aussi écrire symboliquement, en désignant par 1 la matrice « unité » à quatre lignes et quatre colonnes :

$$\Phi^0 = 1. \tag{86}$$

Ce choix de Φ^0 nous a permis d'obtenir pour les grandeurs électromagnétiques des valeurs satisfaisantes, mais il est un peu arbitraire car on obtiendrait une solution « diagonale » (1) des équations (III) en posant plus généralement

$$\Phi_{ik}{}^0 = C_i\, \delta_{ik},$$

avec des valeurs différentes pour les quatre C_i, ce qui d'ailleurs ne fournirait plus des valeurs satisfaisantes pour les champs et les potentiels. Nous avons aussi admis implicitement, pour avoir des grandeurs électromagnétiques ayant la variance voulue, que l'on doit toujours prendre le même Φ^0 égal à (86) dans tous les systèmes de référence galiléens, ce qui revient à attribuer un peu artificiellement une sorte d'invariance à cette fonction Φ^0.

Pour obtenir une solution d'annihilation qui ne soit pas affectée d'indétermination et qu'il soit logique de considérer comme invariante, il paraît naturel d'imposer à la solution de l'équation (III) correspondant à l'état d'annihilation la condition suivante : elle doit rester invariante si on la soumet à l'une quelconque des

(1) Nous appelons solution ou fonction « diagonale » une fonction Φ dont toutes les composantes Φ_{ik} avec $i \neq k$ sont nulles.

transformations que subissent les fonctions Φ quand on effectue une transformation de Lorentz sur les coordonnées d'espace-temps. Si l'on impose cette condition à la solution d'annihilation, on s'aperçoit qu'il existe une seule fonction diagonale Φ^{00} remplissant la condition imposée. Cette solution que nous désignerons par Φ^{00} est distincte de Φ^0 : elle a pour composantes non nulles :

$$(87) \qquad \Phi^{00}_{33} = \Phi^{00}_{44} = C \qquad \Phi^{00}_{11} = \Phi^{00}_{22} = -C$$

C étant une constante complexe quelconque. On peut d'ailleurs poser $C = 1$ car, dans l'expression des grandeurs électromagnétiques, on a toujours le produit de la fonction d'annihilation par K et prendre $C = 1$ revient à multiplier K par une constante. On peut donc écrire :

$$(88) \qquad \Phi^{00}_{ik} = (\alpha_4)_{ik} \qquad \text{ou symboliquement} \qquad \Phi^{00} = \alpha_4$$

La nouvelle solution d'annihilation est ainsi déterminée sans ambiguïté par la condition d'invariance.

Pour démontrer les relations (87), on peut remarquer qu'en raison même de la façon dont les équations du photon ont été obtenues, les Φ_{ik} du photon se transforment lors d'une transformation de Lorentz comme les produits $\Psi_i\Psi^*_k$ en théorie de Dirac. On peut alors écrire explicitement les formules de transformation des Φ_{ik} pour un changement de système de référence galiléen et montrer que la seule fonction diagonale qui reste diagonale pour toutes ces transformations est la fonction définie par (87). Mais il existe un procédé de démonstration plus élégant et plus instructif et c'est lui que nous allons développer.

Soit une certaine solution Φ des équations du photon définie par ses 16 composantes Φ_{ik}. Au lieu de nous donner les seize Φ_{ik}, il revient au même de nous donner les seize grandeurs dont le tableau suit :

$$
(89)\quad \left\{\begin{array}{ll}
I_1 = -\Phi_{11} - \Phi_{22} + \Phi_{33} + \Phi_{44} & \text{Invariant} \\
\left.\begin{array}{l}
A_x = -K[\Phi_{41} + \Phi_{32} + \Phi_{23} + \Phi_{14}] \\
A_y = -Ki[\Phi_{41} - \Phi_{32} + \Phi_{23} - \Phi_{14}] \\
A_z = -K[\Phi_{31} - \Phi_{42} + \Phi_{13} - \Phi_{24}] \\
A_t = V = K[\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} + \Phi_{44}]
\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\vec{A} \text{ quadrivecteur} \\ \text{d'univers}\end{array} \\
\left.\begin{array}{l}
E_x = K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{41} - \Phi_{32} + \Phi_{23} + \Phi_{14}] \\
E_y = K\varkappa\mu_0 ci[-\Phi_{41} + \Phi_{32} + \Phi_{23} - \Phi_{14}] \\
E_z = K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{31} + \Phi_{42} + \Phi_{13} - \Phi_{24}] \\
H_x = K\varkappa\mu_0 ci[-\Phi_{21} - \Phi_{12} + \Phi_{34} + \Phi_{43}] \\
H_y = K\varkappa\mu_0 c[-\Phi_{21} + \Phi_{12} + \Phi_{43} - \Phi_{34}] \\
H_z = -K\varkappa\mu_0 ci[-\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44}]
\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\vec{\vec{F}} \text{ tenseur} \\ \text{symétrique} \\ \text{de rang 2}\end{array} \\
\left.\begin{array}{l}
\sigma_x = i(\Phi_{12} + \Phi_{21} + \Phi_{34} + \Phi_{43}) \\
\sigma_y = \Phi_{12} - \Phi_{21} + \Phi_{34} - \Phi_{43} \\
\sigma_z = i[\Phi_{11} - \Phi_{22} + \Phi_{33} - \Phi_{44}) \\
\sigma_t = -i(\Phi_{13} + \Phi_{24} + \Phi_{31} + \Phi_{42})
\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\vec{\sigma} \text{ quadrivecteur} \\ \text{d'Univers}\end{array} \\
I_2 = i(\Phi_{13} + \Phi_{24} - \Phi_{31} - \Phi_{42}) & \text{Invariant}
\end{array}\right.
$$

Ces 16 combinaisons linéaires des Φ_{ik} ont un déterminant non nul de sorte que, si l'on se donne les valeurs des 16 grandeurs I_1, $A_x \cdots \sigma_t$, I_2, on peut en déduire les valeurs des 16 Φ_{ik}. Les grandeurs A_x, A_y, A_z V, E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z sont évidemment les champs et les potentiels précédemment définis. Nous avons d'ailleurs indiqué à droite sur le tableau (89) les variances des diverses grandeurs.

Pour faire la démonstration que nous avons en vue, considérons une solution Φ^{00} des équations (III) indépendante de *xyzt* qui soit diagonale dans un certain système de référence galiléen. En formant les 16 grandeurs (89) à l'aide de Φ^{00}, nous trouverons en général :

$$I_1 \neq 0\,; \qquad V \neq 0\,; \qquad H_z \neq 0\,; \qquad \sigma_z \neq 0.$$

tandis que les 12 autres grandeurs (89) seront nulles parce qu'elles s'expriment à l'aide des composants non diagonales du Φ considéré. Quand nous aurons effectué une transformation *quelconque* de Lorentz, si notre Φ^{00} est resté diagonal, nous devons avoir les mêmes relations. Mais, comme les grandeurs V, H_z et σ_z sont des parties de vecteur ou de tenseur, une transformation quelconque de Lorentz fera en général apparaître d'autres composantes de ces vecteurs ou tenseurs. Si donc nous voulons que la solution Φ^{00} reste diagonale pour toute transformation de Lorentz quand on la soumet à la transformation des Φ, il faut que cette solution soit telle que, dans le système de référence initial, nous ayons $V = H_z = \sigma_z = 0$. Alors les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{\sigma}$ d'espace-temps ainsi que le tenseur $\vec{\vec{F}}$ sont nuls et dans tout système de référence, toutes leurs composantes seront nulles. Dans tous les systèmes de référence, les 16 grandeurs (89) formées à l'aide de Φ^{00} seront nulles à l'exception de I_1 qui, étant invariant, aura la même valeur dans tous les systèmes. Les valeurs de 16 grandeurs (89) seront les mêmes dans tous les systèmes : il en sera de même des 16 composantes de Φ^{00} qui sera donc une solution diagonale invariante.

Bref, pour avoir une solution diagonale et invariante, pouvant jouer le rôle de solution invariante d'annihilation, il faut et suffit d'avoir dans le système de référence initiale (et par suite dans un système quelconque) les équations :

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \Phi_{11}^{00} + \Phi_{22}^{00} + \Phi_{33}^{00} + \Phi_{44}^{00} = 0 \\ H_z = -\Phi_{11}^{00} + \Phi_{22}^{00} + \Phi_{33}^{00} - \Phi_{44}^{00} = 0 \\ \sigma_z = \Phi_{11}^{00} - \Phi_{22}^{00} + \Phi_{33}^{00} - \Phi_{44}^{00} = 0 \end{array} \right.$$

avec $I_1 \neq 0$. On vérifie facilement que les équations (90) imposent les relations (87) entre Φ_{ii}^{00}, ce qui conduit bien à la solution (88). D'ailleurs pour (88), I_1 est égal à 4. Ce mode de démonstration de l'invariance et de l'unicité de la solution (87-88) a l'avantage de bien montrer pourquoi la solution invariante est intimement liée à l'opération α_4, c'est-à-dire à l'invariant I_1. Nous remarquerons que la solution Φ^{00} des équations (III) du photon, tout comme la solution Φ^0, ne satisfait à l'équation (IV) que pour $\mu_0 = 0$. Nous reviendrons sur ce point au prochain paragraphe.

Nous sommes ainsi amenés à abandonner la solution Φ^0 qui n'est ni univoquement déterminée, ni invariante, pour lui substituer la solution Φ^{00} invariante et unique. Mais, si nous nous reportons aux formules (17), (20) et (21) qui nous ont servi à définir les grandeurs électromagnétiques attachées au photon, nous voyons facilement que nous ne pouvons pas y remplacer Φ^0 par Φ^{00} car nous n'aurions plus pour ces grandeurs les valeurs satisfaisantes que nous avions obtenues. En somme, par suite du changement de solution d'annihilation, nous devons modifier les définitions des potentiels et des champs de façon à leur conserver leurs anciennes valeurs, c'est-à-dire celles qui figurent dans le tableau (89). Ceci est d'ailleurs très aisé à faire. Prenons par exemple la grandeur A_x. Son ancienne définition (17) nous donnait :

$$(91) \qquad A_x = -K \sum_{lm} \Phi^0_{lm} \cdot \frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1}{2} \Phi_{lm}.$$

Or il est facile de vérifier qu'on obtiendra la même valeur de A_x en posant :

$$(92) \qquad A_x = -K \sum_{lm} \Phi^{00}_{lm} \cdot \frac{\mathcal{B}_1\mathcal{A}_4 - \mathcal{A}_1\mathcal{B}_4}{2} \Phi_{lm}.$$

Une modification du même genre permet de retrouver pour toutes les grandeurs électromagnétiques les mêmes valeurs que précédemment, en employant Φ^{00} comme solution d'annihilation à la place de Φ^0.

Il est intéressant de remarquer que les nouvelles définitions des grandeurs électromagnétiques, dont (92) nous donne un exemple, sont du type canonique des densités d'éléments de matrice dans notre théorie, comme cela résulte de la seconde formule (49).

Nouvelle forme des équations générales de la théorie du photon :

Nous avons adopté comme équations de la théorie du photon les équations (III) et (IV) du premier paragraphe de ce fascicule. Ce sont là 32 équations entre les 16 composantes Φ_{ik} de la fonction d'onde Φ. Nous avons d'ailleurs démontré que ces 32 équations sont compatibles.

D'autre part, en étudiant dans le dernier paragraphe la solution invariante d'annihilation Φ^{00}, nous avons vu que l'on peut introduire 16 grandeurs linéairement indépendantes qui sont des combinaisons linéaires des Φ_{ik} et dont la connaissance est équivalente à celle des Φ_{ik}. Nous avons donné le tableau (89) de ces 16 grandeurs et dans ce tableau, nous avons reconnu les 10 grandeurs électromagnétiques dont nous avions précédemment formé les expressions.

La question se pose alors de savoir s'il n'est pas intéressant de former un système d'équations obtenues par les combinaisons linéaires de (III) et de (IV), système qui serait équivalent au système (III, IV), mais où figureraient à la place des 16 Φ_{ik} les 16 grandeurs (89).

Pour écrire ce nouveau système d'équation, il est utile de remarquer que le vecteur d'Univers $\vec{\sigma}$ du tableau (89) peut jouer le rôle d'un anti-potentiel électromagnétique auquel correspondrait un antichamp magnétique $\vec{H}$ et un antichamp électrique $\vec{E}$ définis par les formules :

$$\text{(93)} \qquad \vec{H'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\sigma_e}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}\ \sigma_t} \qquad \vec{E'} = \text{rot}\ \vec{\sigma_e}$$

$\vec{\sigma_e}$ désignant le vecteur d'espace dont σ_x, σ_y et σ_z sont les composantes. Nous allons voir d'ailleurs que $\vec{H'}$ et $\vec{E'}$ sont nuls.

Prenons les 16 équations d'évolution (III). En les combinant linéairement, nous obtenons les 16 équations suivantes entre les grandeurs (89) :

1° 10 équations entre les 10 grandeurs électromagnétiques $A_x \cdots H_z$, savoir :

6 équations d'évolution Maxwelliennes :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}\ \vec{E}\ ; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\ \vec{H} - \varkappa^2\mu_0^2c^2\vec{A}$$

3 équations de définition du champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}\ V}$$

1 équation de Lorentz entre potentiel :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}\ \vec{A} = 0.$$

2° 6 relations entre les six grandeurs I_1, σ_x, σ_y, σ_z, σ_t, I_2, savoir :

3 équations exprimant la nullité des antichamps magnétiques :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\sigma_e}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}\ \sigma_t} = 0$$

1 équation d'Uhlenbeck et Laporte entre antipotentiels [1] :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \text{div}\ \vec{\sigma_e} = \varkappa c\mu_0 I_2$$

---

[1] Nous appellons cette équation « équation d'Uhlenbeck et Laporte » parce qu'elle est analogue à la relation qui porte ce nom en théorie de Dirac.

2 équations d'évolution des invariants :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_1}{\partial t} = 0\,; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial I_2}{\partial t} = \varkappa c\mu_0\sigma_t + \operatorname{div} H.$$

Dans la dernière équation, nous pouvons barrer div H qui est nul comme on le verra plus loin. Toutes les 16 équations, qui viennent d'être énumérées, contiennent la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ parce qu'elles proviennent des équations (III) qui sont des équations d'évolution. De plus, 8 de ces équations ne contiennent que des termes où figurent des dérivées car elles proviennent de combinaisons entre les 8 équations (III) où manque le terme en μ_0.: Ce sont les 3 équations du premier groupe de Maxwell, l'équation de Lorentz entre potentiels, les 3 équations exprimant la nullité des antichamps magnétiques et l'équation $\frac{1}{c}\frac{\partial I_1}{\partial t} = 0$. Au contraire, 8 autres équations, provenant des équations (III) où figure μ_0, contiennent des termes ne contenant pas de dérivées : ce sont les 3 équations du second groupe de Maxwell, les 3 équations définissant les champs électriques à partir des potentiels, l'équation d'Uhlenbeck et Laporte et l'équation.

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_2}{\partial t} = \varkappa c\mu_0\sigma_t.$$

Passons maintenant aux équations (IV) et cherchons à les combiner linéairement de façon à obtenir 16 relations entre les grandeurs (89). Nous constatons alors qu'il existe une relation identiquement vérifiée entre les équations (IV) de sorte que nous pouvons seulement en tirer 15 équations différentes entre les 16 grandeurs (89). Nous pouvons classer ces équations comme il suit :

1° *10* équations entre les I_1, σ_x, σ_y, σ_z, σ_t, I_2, savoir :

3 équations exprimant la nullité des antichamps électriques :

$$\operatorname{rot} \vec{\sigma} = 0$$

3 équations de la forme :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} I_1} = 0$$

3 équations de la forme :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} I_2} = -\varkappa c\mu_0\vec{\sigma_e}$$

1 équation :

$$\mu_0 I_1 = 0$$

2° *5* équations entre les grandeurs électromagnétiques $A_x \cdots H_z$

3 équations de définition des champs magnétiques.

$$\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A}$$

1 équation de divergence du champ électrique.

$$\text{div}\,\vec{E} = \varkappa^2 \mu_0^2 c^2 V$$

1 équation de divergence du champ magnétique.

$$\text{div}\,\vec{H} = 0$$

(+ 1 identité).

Nous avons indiqué pour mémoire dans le groupe 2° l'identité dont nous avons parlé plus haut : en effet, si cette relation n'était pas une identité, elle lierait les grandeurs électromagnétiques, ce qui la rattache au groupe 2°.

Les 15 équations obtenues ne contiennent pas la dérivée $\frac{\partial}{\partial t}$ parce qu'elles proviennent des équations (IV) qui sont des équations de condition à un instant donné. Sur ces 15 équations, 8 contiennent des termes où ne figure aucune dérivée. Ce sont : les 3 équations donnant grad I_1, l'équation $\mu_0 I_1 = 0$, les 3 équations de définition du champ magnétique et l'équation en div $\vec{E}$. Les 7 autres équations ne contiennent que des termes où figure une dévivée car elles proviennent de celles des équations (IV) où μ_0 n'apparaît pas. Ce sont : les 3 équations exprimant la nullité des antichamps électriques, les 3 équations grad $I_1 = 0$ et l'équation div $\vec{H} = 0$.

En résumé, les 32 équations (III) et (IV) conduisent à 31 équations + 1 identité. Les 31 équations peuvent être classées de la manière qui suit :

I : *15* équations entre les grandeurs électromagnétiques $A_x \cdots H_z$, savoir :

4 équations du 1^{er} groupe de Maxwell :

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}\,\vec{E}\,; \qquad \text{div}\,\vec{H} = 0$$

4 équations du deuxième groupe de Maxwell :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\,\vec{H} - \varkappa^2 \mu_0^2 c^2 \vec{A}\,; \qquad \text{div}\,\vec{E} = \varkappa^2 \mu_0^2 c^2 V$$

1 équation de Lorentz entre potentiel :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

3 équations définissant le champ électrique :

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\operatorname{grad} V}$$

3 équations définissant le champ magnétique :

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

II : *16* équations entre les 6 grandeurs non électromagnétiques I_1, $\vec{\sigma_e}$, σ_t, I_2 :

$$\mu_0 I_1 = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_1}{\partial t} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{grad} I_1} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_2}{\partial t} = \varkappa\mu_0 c\sigma_t\,; \qquad \overrightarrow{\operatorname{grad} I_2} = -\varkappa\mu_0 c\vec{\sigma_e}$$

$$\operatorname{rot} \vec{\sigma_e} = 0 \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\sigma_e}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad} \sigma_t} = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma_e} = \varkappa\mu_0 c I_2$$

Le groupe I contient les équations électromagnétiques de notre théorie qui se réduisent pour $\mu_0 = 0$ aux 15 équations fondamentales de la théorie de Maxwell-Lorentz pour le vide. Comme c'est à ce groupe I qu'il faudrait rattacher l'identité plusieurs fois mentionnée, on voit pourquoi il y a 15 et non 16 équations de l'électromagnétisme.

Le groupe II porte sur les grandeurs I_1, $\vec{\sigma_e}$, σ_t, et I_2 qui n'ont pas de signification électromagnétique connue. Si, dans les équations, de ce groupe, nous faisons $\mu_0 = 0$, la première équation est identiquement satisfaite et les seconds membres disparaissent dans les équations de la troisième ligne de sorte qu'on doit avoir à la fois $I_1 = C^{te}$ et $I_2 = C^{te}$ pour satisfaire aux équations de la seconde et de la troisième ligne.

En regardant l'ensemble des 31 équations pour le cas où $\mu_0 = 0$, on voit qu'on en obtient une solution remarquable en posant

(94) $\qquad I_1 = C^{te} \neq 0 \qquad$ les 15 autres grandeurs (89) $= 0$.

Cette solution est la solution invariante d'annihilation Φ^{00} étudiée au précédent paragraphe. On voit alors bien que Φ^{00} n'est solution de l'ensemble des 31 équations que pour $\mu_0 = 0$ car pour $\mu_0 \neq 0$ l'équation $\mu_0 I_1 = 0$, qui provient des équations (IV), exigerait $I_1 = 0$. Comme la considération des variances relativistes ne permet guère de dissocier les 31 équations plus haut, ni par suite de dissocier les équations (III) des équations (IV), et comme la solution d'annihilation invariante paraît par suite devoir être solution de l'ensemble des équations (III) et (IV), il paraît y avoir dans le fait que nous venons de constater une forte raison de poser $\mu_0 = 0$.

Il est très intéressant de remarquer que nous avons finalement obtenu deux systèmes d'équations (I et II) tout à fait indépendants portant l'un sur les grandeurs électromagnétiques et l'autre sur les grandeurs I_1, $\vec{\sigma_e}$, σ_t et I_2. La théorie électromagnétique paraît ainsi n'utiliser qu'une partie des ressources de la théorie du photon puisque, sur 16 grandeurs fournies par cette théorie, elle n'en utilise que 10 et sur 31 équations que 15. La forme des équations que nous avons mises à la base de la théorie du photon est telle que les 10 grandeurs électromagnétiques font en quelque sorte bande à part et sont indépendantes des 6 autres dont le rôle physique reste obscur. Mais cette séparation est due à la forme particulière des matrices $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_i$, c'est-à-dire en somme des matrices α de Dirac. Ces matrices α ne contiennent comme éléments non nuls que des éléments de module 1 et correspondent à la forme particulièrement simple des g_{ik} dans l'univers Euclidien. Si l'on prenait des valeurs moins simples pour les α de Dirac, le système des 31 équations ne se décomposerait plus et l'on pourrait peut-être utiliser plus pleinement les ressources de la théorie du photon. En particulier, si l'on admettait que l'écart des valeurs réelles des α et leurs valeurs « euclidiennes » dépend en chaque point de l'espace-temps de la valeur du Φ en ce point, les équations du photon cesseraient d'être linéaires et il en serait de même des équations électromagnétiques. Peut-être, par cette voie, pourrait-on se rapprocher de la théorie de l'électromagnétisme non linéaire proposée par MM. Born et Infeld et qui a si justement retenu l'attention des théoriciens dans ces dernières années.

Pour terminer ce paragraphe, nous indiquerons, à titre documentaire, les valeurs des 6 grandeurs I_1 σ_x, σ_y, σ_z, σ_t, et I_2 pour une onde Φ plane et monochromatique du type (26). On trouve aisément :

$$(95) \quad \begin{cases} I_1 = \sigma_x = \sigma_y = 0 \\ \sigma_z = 2i\,\dfrac{p}{\Delta}\,(C_0 - C_0')\,P\,; \qquad \sigma_t = 2i\,\dfrac{\frac{W}{c}}{\Delta}\,(C_0 - C_0')\,P \\ I_2 = 2i\,\dfrac{\mu^0{}_c}{\Delta}\,(C_0 - C_0')\,P \end{cases}$$

valeurs entre lesquelles on vérifie aisément les 16 relations du groupe II. On voit ainsi que les grandeurs sans signification électromagnétiques sont reliées aux coefficients C_0 et C'_0, c'est-à-dire aux ondes longitudinales. Elles ne dépendent d'ailleurs que de la différence $C_0 - C_0'$, alors que, d'après (27), les grandeurs électromagnétiques à caractère longitudinal ne dépendent au contraire que de la somme $C_0 + C'_0$. Les grandeurs (95) s'annulent pour $C_0 = C'_0$. Pour $C_0 \neq C'_0$ et $\mu_0 = 0$, I_2 est nul tandis que σ_z et σ_t sont différents de 0 et égaux entre eux.

Remarques sur la masse propre μ_0 et la nature des demi-photons :

Nous avons trouvé au dernier paragraphe une forte raison d'admettre que la masse propre du photon est nulle : la solution invariante d'annihilation n'est solution de l'ensemble des équations (III) et (IV) que pour $\mu_0 = 0$. Or dans l'exposé général de la théorie, nous avons toujours admis que μ_0 n'était pas nulle, tout en admettant aussi que, pour la lumière, on a $\mu_0 c^2 \ll W = h\nu$, ce qui conduit à négliger les ondes longitudinales et à simplifier les formules. Comme μ_0 figure explicitement dans beaucoup de formules, on peut se demander s'il est possible, sans tomber sur des difficultés, de passer à la limite $\mu_0 = 0$. Il ne semble pas qu'il y ait d'obstacle absolu à ce passage à la limite. Considérons par exemple l'expression des champs électromagnétiques dans notre théorie : elles contiennent uniquement des termes où figure la combinaison $K\mu_0\Phi_{ik}$. Or nous avons vu qu'il y a des raisons de supposer K proportionnel à $\mu_0^{-\frac{1}{2}}$. De plus, on doit effectuer la normalisation en écrivant $\int \rho d\tau = 1$ et la formule (78) montre alors que, par suite de la normalisation, les $|\Phi_{ik}^2|$ sont proportionnels à μ_0^{-1} et par conséquent les Φ_{ik} à $\mu_0^{-\frac{1}{2}}$. Finalement les termes $K\mu_0\Phi_{ik}$ sont indépendants de μ_0 et rien n'empêche de leur attribuer une valeur finie pour $\mu_0 = 0$. Le passage à la limite $\mu_0 = 0$ ne conduit donc pas, semble-t-il, à des difficultés essentielles. Néanmoins, il paraît préférable, pour bien faire ressortir la liaison entre la théorie de Dirac et celle du photon, de faire tous nos raisonnements, comme nous les avons faits, en conservant une valeur finie à la constante μ_0 et de passer ensuite à la limite $\mu_0 = 0$.

Pour terminer nous dirons encore quelques mots sur la nature physique du photon. Dans notre théorie, le photon apparaît comme une unité physique formée par la réunion de deux constituants ne différant que par leur symétrie. Nous avons suggéré précédemment que les demi-photons pourraient être des neutrinos. S'inspirant de nos idées, mais les développant dans une direction assez différente, M. Jordan (1) a supposé depuis que les photons sont des « apparences » résultant des apparitions et disparitions par paires et d'une sorte d'effet Raman dans un champ de neutrinos entièrement indépendants les uns des autres. Cette théorie, qui a été récemment développée avec succès par M. de R. L. Kronig (2), présente plusieurs aspects intéressants et doit être suivie avec attention. Néanmoins, nous nous en tiendrons ici au point de vue qui a toujours été le nôtre, suivant lequel le photon est une unité physique formée par deux constituants et un peu analogue à une molécule biatomique.

Au premier abord, si l'on admet que les deux demi-photons sont liés entre eux pour former une unité physique, il semble que l'on soit en contradiction avec la façon dont l'équation du photon a été obtenue, façon qui est rappelée tout au début de ce fascicule. En effet, nous avons alors implicitement admis que le photon a une masse propre exactement double de celle du demi-photon, ce qui implique l'absence de toute énergie de liaison entre les demi-photons. Mais, en réalité, la difficulté n'est pas si grande qu'on pourrait le croire car on peut très bien prendre par postulat l'ensemble des équations (III) et (IV) comme base de la théorie du photon. Les équations (I) et (II) se déduisent alors par

---

(1) *Zeitschrift für Physik*, t. 93 (1935), p. 464.

(2) *Physica*, II, 5, p. 491 ; II, 8, p. 854 ; II, 9, p. 968.

addition et soustraction des équations (III) et (IV). Or, dans les équations (III) et (IV) prises comme postulat, la constante μ_0 représente évidemment la masse propre du photon une fois formé et il en est par suite de même dans les équations (I) et (II) considérées comme conséquences de (III) et (IV). Nous pouvons alors développer tous les calculs contenus dans ce fascicule sans avoir jamais à supposer que le demi-photon, si on parvenait à l'isoler, devrait avoir la masse $\frac{\mu_0}{2}$. Il en résulte que nous pouvons sans contradiction admettre qu'il existe une énergie de liaison entre les deux demi-photons : la masse propre μ_0 du photon devrait alors être plus petite que le double de la masse propre du demi-photon en vertu du principe de l'inertie de l'énergie. Il se pourrait même que $\frac{\mu_0}{2}$ soit beaucoup plus petit que la masse du demi-photon si la liaison des demi-photons était très étroite.

La masse μ_0 du photon étant vraisemblablement nulle ou tout au moins extraordinairement petite par rapport à celle de l'électron, l'hypothèse la plus naturelle est alors de supposer que le demi-photon est lui-même un corpuscule de masse nulle ou extrêmement petite devant celle de l'électron. On est ainsi amené à l'idée d'identifier le demi-photon avec le neutrino dont l'existence n'est pas expérimentalement établie d'une façon certaine, mais qui, s'il existe, paraît devoir posséder une masse nulle ou extrêmement petite. Nous avons déjà insisté plus d'une fois sur l'intérêt de cette hypothèse. Nénamoins elle ne s'impose pas absolûment et l'on pourrait fort bien, par exemple, admettre que le photon est formé par la fusion d'un électron négatif et d'un électron positif avec perte totale ou presque totale de leurs masses. Cette dernière supposition aurait évidemment l'avantage de donner une image intuitive de la dématérialisation d'une paire d'électrons, avec émission de rayonnement et d'autres phénomènes de ce genre. Aussi convient-il de ne pas trop la perdre de vue.

Si l'on connaissait la Mécanique ondulatoire relativiste des systèmes de corpuscules de Dirac, on pourrait tenter de soumettre complètement au calcul un modèle de photon formé de deux corpuscules complémentaires en interaction. M. Jean-Louis Destouches a émis l'idée intéressante que l'équation (III) apparaîtrait alors comme donnant le mouvement du centre de gravité du photon. Ceci paraît, en un sens, assez naturel puisqu'en Mécanique ondulatoire usuelle, on peut trouver une équation d'ondes représentant le mouvement du centre de gravité d'une molécule biatomique ou polyatomique. Mais, en théorie du photon, la question est beaucoup plus difficile qu'en Mécanique ondulatoire usuelle parce qu'il y faut nécessairement tenir compte de la Relativité (à cause de la vitesse égale à c ou voisine de c des photons) et qu'il n'existe pas encore de forme satisfaisante pour la Mécanique relativiste des systèmes.

Enfin, il convient de remarquer que tous les raisonnements développés dans ce fascicule reposent uniquement sur la validité des équations (III) et (IV) et sont par suite indépendants de toute hypothèse particulière sur la nature physique des demi-photons [1].

---

[1] *Note ajoutée à la correction des épreuves :* On trouvera quelques nouveaux résultats relatifs au photon, qui paraissent confirmer l'hypothèse de M. Jean-Louis Destouches signalée dans le texte et éclairer certaines des difficultés rencontrées en théorie du photon, dans une note des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (séance du 31 Août 1936).

TABLE DES MATIÈRES

Saint-Amand (Cher). — Imp. R. BUSSIÈRE — 25-11-1936