

COLLECTION DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE
FASCICULE V

LA
MÉCANIQUE ONDULATOIRE
DES
SYSTÈMES DE CORPUSCULES

OUVRAGES DE LA MÊME COLLECTION

Déjà parus :

- FASC. 1. — **BROGLIE (Louis de)**, Docteur ès sciences. — Ondes et mouvements. Un volume in-8 (25-16) de 133 pages.
- FASC. 2. — **CHAZY (Jean)**, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — La théorie de la relativité et la mécanique céleste, tome I. Un volume in-8 (25-16) de 261 pages.
- FASC. 3. — **CHAZY (Jean)**. — La théorie de la relativité et la mécanique céleste, tome II. Un volume in-8 (25-16) de 258 pages.
- FASC. 4. — **VOLTERRA (V.)**. — Conférences sur quelques questions de mécanique et de physique mathématique.
- I. — *Rotation des corps dans lesquels existent des mouvements internes*. Un volume in-8 (25-16) de 84 pages.
-

COLLECTION DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

DIRECTEUR : ÉMILE BOREL

FASCICULE V



LA

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

DES

SYSTÈMES DE CORPUSCULES

PAR

Louis de BROGLIE

Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Deuxième Édition



ASSOCIATION DE GESTION
DE LA (401)
FONDATION LOUIS DE BROGLIE
23, Quai de Conti, 75006 PARIS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1930

UNIVERSITY OF MONTANA
LIBRARY
MONTANA STATE UNIVERSITY
MONTANA

Copyright by Gauthier-Villars, 1949.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE

Dans cet Ouvrage, nous nous proposons de donner un tableau d'ensemble de la Mécanique ondulatoire des corpuscules matériels, telle qu'elle se présente actuellement, quand on laisse de côté les effets de Relativité. Comme dans d'autres livres, nous avons principalement développé la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique placé dans un champ donné qui est l'analogue de la Mécanique classique du point matériel, nous avons au contraire voulu dans le présent exposé nous placer dès le début dans le cas général de la Mécanique ondulatoire des ensembles de corpuscules en interaction qui est l'analogue de la Mécanique classique des systèmes de points matériels et qui contient naturellement la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique comme cas particulier.

Dans l'exposé des principes généraux de la Mécanique ondulatoire des systèmes, nous avons cru devoir insister assez longuement sur la question des intégrales premières ou « constantes du mouvement » dont l'intérêt est considérable. Nous avons cru aussi devoir consacrer un chapitre à la théorie du centre de gravité en Mécanique ondulatoire, théorie qui, dans beaucoup d'Ouvrages, est passée sous silence ou seulement effleurée.

Une étude complète des méthodes de perturbation qui

jouent un si grand rôle dans la nouvelle Mécanique nous aurait entraîné trop loin. Nous nous sommes contenté d'en faire une esquisse nous permettant d'établir les formules dont nous avons besoin pour les développements ultérieurs.

Dans les trois derniers chapitres, nous avons étudié les systèmes contenant des particules de même nature physique. Pour étudier ces systèmes, la Mécanique ondulatoire a été amenée à introduire des principes nouveaux dont il est plus facile de donner un énoncé mathématique précis que de comprendre le sens physique profond. Tel est le mystérieux et fondamental principe d'exclusion dû à M. Pauli.

La validité de ces principes ne fait aucun doute, car une grande partie des succès de la Mécanique ondulatoire, succès dont nous avons donné quelques exemples, est due à leur mise en œuvre.

Parmi les questions qui sont traitées dans le dernier chapitre, quelques-unes concernent le noyau des atomes. On est ainsi amené aux confins de cette « Physique du Noyau » qui, à l'heure actuelle, se place au premier plan des préoccupations des physiciens : nos connaissances expérimentales commencent à y être nombreuses, mais nos interprétations théoriques y sont encore partielles et mal assurées. Nous n'avons pas cru devoir en aborder ici l'étude (1).

Nous espérons que ce livre donnera à ses lecteurs une idée d'ensemble du vaste édifice que constitue aujourd'hui la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules.

LOUIS DE BROGLIE.

(1) On trouvera cette étude dans le livre suivant de l'auteur : *De la Mécanique ondulatoire à la théorie du Noyau*. Paris, Hermann, 1943.



LA

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

DES

SYSTÈMES DE CORPUSCULES

CHAPITRE I.

RAPPEL DE RÉSULTATS CLASSIQUES
DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE.

1. **La Dynamique classique des systèmes de points matériels.** — Nous voulons commencer par donner un aperçu sommaire des grandes lignes de la Dynamique des systèmes de points matériels. Nous considérerons pour cela un ensemble de N points matériels ou corpuscules. Chacun de ces points matériels est caractérisé par sa masse. En Mécanique classique, il importe peu que les points matériels du système soient de même nature et aient par suite la même masse ou qu'ils soient de nature différente et aient par suite, en général, des masses différentes.

La Dynamique classique détermine le mouvement des N points matériels du système en appliquant à chacun d'eux l'équation fondamentale de Newton

$$(1) \quad \vec{F} = m \vec{\gamma}$$

et en supposant, bien entendu, que, pour repérer la configuration de l'ensemble des points matériels, on a choisi un système de référence galiléen (c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à l'ensemble des étoiles fixes). Ceci

donne pour chacun des N corpuscules trois équations différentielles

$$(2) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i,$$

et le problème consiste à trouver l'ensemble des $3N$ fonctions $x_i(t)$, $y_i(t)$ et $z_i(t)$ de la variable « temps » qui satisfont aux $3N$ équations (2) et qui correspondent à des positions et des vitesses initiales données des N particules.

Les équations (2) étant du second ordre par rapport au temps, il faut se donner les valeurs $x_i(0)$, $y_i(0)$, $z_i(0)$, $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy_i}{dt}\right)_0$ et $\left(\frac{dz_i}{dt}\right)_0$ des coordonnées et des composantes de vitesse à un instant initial pris pour origine des temps afin que la solution soit déterminée d'une façon univoque. Le fait que la donnée des positions et des vitesses initiales détermine entièrement l'évolution du système quand les forces $(X_i Y_i Z_i)$ sont connues, constitue le « déterminisme mécanique » de la Dynamique classique.

Maintenant, pour préciser le problème ainsi posé, il faut étudier les formes possibles des fonctions X_i , Y_i , Z_i qui donnent les composantes des forces agissant à chaque instant sur les N constituants du système. *A priori*, on pourrait prendre pour ces grandeurs des fonctions quelconques de l'ensemble des $3N$ coordonnées $x_1 \dots x_N$ des N points matériels et du temps. Mais des considérations physiques simples permettent de diminuer cette généralité excessive qui serait gênante. Du point de vue physique, on peut supposer que chaque point matériel est soumis à deux catégories de forces :

1° les forces extérieures qui peuvent s'exercer sur le système; pour chacun des N points matériels, la force de cette nature qui agit sur lui est une certaine fonction vectorielle de ses coordonnées $x_i y_i z_i$ et du temps;

2° les forces d'interaction, d'actions mutuelles, des N points matériels les uns sur les autres; il est naturel d'admettre que, pour chaque point matériel, ces forces s'expriment par des fonctions vectorielles dépendant de la distance de ce point aux autres points matériels, chacune de ces forces étant ainsi une fonction *symétrique* des positions de deux des points matériels.

Ces premières hypothèses très naturelles du point de vue physique étant admises, nous en introduisons ici une troisième qui est plus particulière et qu'on n'introduit pas d'une façon générale dans les exposés classiques : nous admettons que toutes les forces dérivent d'un potentiel. Non seulement cette hypothèse ne s'impose pas, mais il y a des cas physiques bien connus où elle n'est pas vérifiée, celui par exemple de points matériels chargés électriquement qui exercent en raison de leur mouvement des actions magnétiques les uns sur les autres. Nous admettons néanmoins cette hypothèse parce que nous n'aurons pas à étudier dans cet exposé de cas où elle n'est pas valable.

Avec les trois hypothèses que nous venons de faire, on voit que pour tout point matériel du système, par exemple, pour le $i^{\text{ième}}$, les forces appliquées dérivent d'une fonction potentiel de la forme suivante :

$$(3) \quad U_i(x_1, \dots, z_N; t) = \mathfrak{V}_i(x_i, y_i, z_i, t) + \sum_j \mathfrak{V}_{ij}(r_{ij}),$$

r_{ij} étant la distance du $i^{\text{ième}}$ point matériel au $j^{\text{ième}}$ et \mathfrak{V}_{ii} étant nul par définition. Le premier terme du second membre de (3) est le potentiel de la force extérieure agissant sur le $i^{\text{ième}}$ corpuscule, tandis que le second terme est le potentiel des forces d'actions mutuelles. Comme on le voit, le temps ne peut intervenir explicitement dans l'expression du potentiel que par intermédiaire des forces extérieures.

Il nous faut encore ici introduire une hypothèse supplémentaire qui est bien connue en Mécanique rationnelle sous le nom de « principe de l'égalité de l'action et de la réaction ». Avec notre système de postulats, ce principe a pour expression mathématique l'égalité

$$(4) \quad \mathfrak{V}_{ij}(r_{ij}) = \mathfrak{V}_{ji}(r_{ij}).$$

Elle signifie que la force exercée par le $i^{\text{ième}}$ point matériel sur le $j^{\text{ième}}$ point matériel est égale à la force exercée par le $j^{\text{ième}}$ point matériel sur le $i^{\text{ième}}$ point matériel.

Avec tout cet ensemble d'hypothèses, on peut écrire les équations

tions (1) sous la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial y_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial y_i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = - \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial z_i} - \sum_j \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial z_i}, \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

et il va nous être maintenant facile de tirer de ces équations les théorèmes classiques de conservation. Ce sont des théorèmes qui fournissent des intégrales premières des équations du mouvement, c'est-à-dire des expressions ne contenant que des dérivées premières par rapport au temps qui restent constantes en vertu des équations du mouvement.

Par exemple, pour trouver la conservation de l'énergie, on multipliera les équations relatives au $i^{\text{ième}}$ corpuscule par $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$ et $\frac{dz_i}{dt}$ respectivement, on ajoutera et l'on sommera sur i . En remarquant que l'on a

$$(6) \quad \sum_i \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\mathcal{V}_i}{dt} - \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial t}, \quad \sum_{ij} \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{ij} \mathcal{V}_{ij},$$

on obtient facilement

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i \mathcal{V}_i + \sum_{ij} \frac{1}{2} \mathcal{V}_{ij} \right] = \frac{d}{dt} \sum_{ij} \mathcal{V}_{ij}.$$

Si le potentiel est indépendant du temps (cas du champ extérieur statique, ou *a fortiori* nul), on a

$$(8) \quad \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i \mathcal{V}_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{V}_{ij} = \text{const.}$$

ou encore

$$(9) \quad T + U = \text{const.},$$

T désignant l'énergie cinétique $\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ du système et U l'énergie

potentielle $U = \sum_i \mathcal{V}_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{V}_{ij}$. L'énergie potentielle comprend donc la somme des \mathcal{V}_i individuels et la *demi-somme* des \mathcal{V}_{ij} d'interactions, c'est-à-dire que chaque terme d'interaction figure une seule fois dans l'énergie potentielle.

Les \mathcal{V}_{ij} ne peuvent être attribués ni au $i^{\text{ième}}$, ni au $j^{\text{ième}}$ corpuscule : il y a comme une mise en commun d'une partie de l'énergie qui est caractéristique des systèmes de points matériels en interaction.

Le théorème de la conservation de l'impulsion est tout aussi facile à démontrer.

En sommant sur i la première équation (5), on obtient

$$(10) \quad \sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \frac{dx_i}{dt} \right) = \sum_i \left(-\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i} \right),$$

car $\sum \frac{\partial \mathcal{V}_{ij}}{\partial x_i} = 0$ en vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction.

Si donc la somme des forces extérieures dans la direction des x est nulle, on a

$$(11) \quad \sum_i m_i \frac{dx_i}{dt} = \text{const.}$$

Il y a conservation de la composante x de l'impulsion totale du système. De même pour les composantes y et z . Il en résulte que si les forces extérieures appliquées au système ont une somme géométrique nulle, l'impulsion totale du système est constante.

A la conservation de l'impulsion, se rattache étroitement l'utilité de la notion de centre de gravité. Par définition, le centre de gravité d'un système de points matériels est le point géométrique dont les coordonnées sont les moyennes pondérées des coordonnées correspondantes des constituants du système, les masses servant de facteurs de poids. On a donc pour les coordonnées du centre de gravité les définitions

$$(12) \quad X = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad Y = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad Z = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}.$$

Ce qui rend cette notion de centre de gravité utile pour l'application du théorème de la conservation de l'impulsion, c'est que l'impulsion totale du système est égale à l'impulsion d'un point matériel fictif dont la masse serait égale à la masse totale du système et qui coïnciderait constamment avec son centre de gravité. C'est ce que montre immédiatement les équations

$$(13) \quad \left(\sum_i m_i \right) \frac{dX}{dt} = \sum m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \dots,$$

conséquences évidentes de (12).

Si l'on désigne alors par M la masse totale $\sum_i m_i$ du système et par \vec{F} la somme géométrique des forces extérieures agissant sur le système (la somme géométrique des forces intérieures étant d'ailleurs nulle d'après le principe de l'action et de la réaction), les équations (10) peuvent s'écrire

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \left(M \frac{dX}{dt} \right) = F_x \quad \text{ou vectoriellement} \quad \frac{d}{dt} M \vec{V} = \vec{F},$$

\vec{V} étant la vitesse du centre de gravité. Ainsi le système se meut de telle sorte que son centre de gravité se déplace comme un point matériel de masse M qui serait soumis à la résultante de toutes les forces extérieures. Si la composante x de \vec{F} est nulle, la composante x de l'impulsion du centre de gravité est constante : le mouvement du centre de gravité le long de l'axe x est donc alors rectiligne et uniforme. De même pour les directions y et z . Donc si $\vec{F} \equiv 0$, l'impulsion du centre de gravité est constante, son mouvement est rectiligne et uniforme dans l'espace. Il en résulte qu'un système isolé (c'est-à-dire un système qui, par hypothèse, n'est soumis à aucune force extérieure) peut être étudié à l'aide des équations (2) de Newton dans un système de référence lié rigidement au centre de gravité, puisque ce système, en raison du mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité, se trouve être un système galiléen. Même dans le cas général où les forces extérieures ne sont pas nulles, il est souvent utile de décomposer le mouvement du système en mouvement du centre de gravité et

mouvement autour du centre de gravité. Le premier est défini par l'équation (14) : si les forces extérieures varient très peu dans le domaine occupé par le système, ce mouvement du centre de gravité pourra être déterminé sans se préoccuper du mouvement autour du centre de gravité. L'étude du mouvement autour du centre de gravité pourra être abordée ensuite, mais elle est en général compliquée par l'intervention de forces d'inertie, centrifuges ou centrifuges composées, dues au mouvement non uniforme du centre de gravité. La séparation du mouvement du centre de gravité et du mouvement autour du centre de gravité est d'ailleurs facilitée par les théorèmes dits de Kœnig dont nous parlerons tout à l'heure.

Disons enfin un mot de la conservation du moment d'impulsion. A partir des équations (2) de Newton, on obtient facilement

$$(15) \quad \sum_i \left(y_i m_i \frac{dx_i}{dt} - x_i m_i \frac{dy_i}{dt} \right) \\ = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \left(y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \sum_i (y_i F_{xi} - x_i F_{yi}).$$

Les forces intérieures, étant deux à deux égales et opposées, ont un moment total nul par rapport à l'origine. En désignant par \vec{L} le moment total des forces extérieures par rapport à l'origine, on aura donc

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i \left(y_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dy_i}{dt} \right) \right] = L_z, \quad \dots$$

Si donc une des composantes de \vec{L} est nulle, la composante correspondante du moment d'impulsion est constante. Si $\vec{L} \equiv 0$, le moment d'impulsion est constant.

2. Théorèmes de Kœnig. — Nous allons nous arrêter un instant sur les théorèmes de Kœnig qui aident à séparer le mouvement du centre de gravité du mouvement autour du centre de gravité, et dont nous retrouverons l'analogie en Mécanique ondulatoire.

L'impulsion totale d'un système se réduit, nous l'avons vu, à

cellé de son centre de gravité supposé doué de la masse totale. Il n'en est pas de même de l'énergie cinétique totale du système, ni de son moment d'impulsion total. Cependant, il est possible de décomposer ces quantités en deux parties, dont l'une est rattachée au mouvement du centre de gravité, tandis que l'autre est rattachée au mouvement du système autour de son centre de gravité. C'est là l'objet des théorèmes de Kœnig.

Voici d'abord le théorème de Kœnig relatif à l'énergie cinétique totale. Cette énergie est égale à

$$(17) \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right].$$

Or, en introduisant les coordonnées du centre de gravité, nous pouvons poser

$$(18) \quad x_i = X + \xi_i, \quad y_i = Y + \eta_i, \quad z_i = Z + \zeta_i,$$

ξ_i , η_i et ζ_i étant les coordonnées relatives du $i^{\text{ème}}$ point matériel par rapport au centre de gravité. En multipliant les équations précédentes par m_i et en sommant sur i , on obtient, d'après la définition des coordonnées du centre de gravité,

$$(19) \quad \sum_i m_i \xi_i = 0, \quad \sum_i m_i \eta_i = 0, \quad \sum_i m_i \zeta_i = 0,$$

d'où l'on tire évidemment,

$$(20) \quad \sum_i m_i \frac{d\xi_i}{dt} = 0, \quad \sum_i m_i \frac{d\eta_i}{dt} = 0, \quad \sum_i m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = 0.$$

Or, on a

$$(21) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{d\xi_i}{dt}, \quad \dots,$$

ét, par suite,

$$(22) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\left(\frac{dX}{dt} + \frac{d\xi_i}{dt} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} MV^2 + \sum_i m_i \left(\frac{dX}{dt} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{dY}{dt} \frac{d\eta_i}{dt} + \frac{dZ}{dt} \frac{d\zeta_i}{dt} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\left(\frac{d\xi_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Le second terme est nul en vertu de (20), et il reste

$$(23) \quad T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{(r)2},$$

$v_i^{(r)}$ étant la vitesse du $i^{\text{ème}}$ point matériel dans un système de référence ayant son origine au centre de gravité et ses axes parallèles aux axes galiléens avec lesquels on fait le calcul, ce système de référence n'étant pas lui-même en général galiléen. Ainsi, la force vive totale d'un système est la somme de la force vive du centre de gravité et de la force vive dans le mouvement autour du centre de gravité. C'est là le premier théorème de Kœnig.

Le second théorème est relatif au moment d'impulsion et se démontre de même.

On a, par exemple, pour la composante x du moment d'impulsion total \vec{M} du système,

$$(24) \quad \begin{aligned} M_x &= \sum_i m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) \\ &= \sum_i m_i \left[(Y + r_i) \left(\frac{dZ}{dt} + \frac{dz_i}{dt} \right) - (Z + z_i) \left(\frac{dY}{dt} + \frac{d\eta_i}{dt} \right) \right] \\ &= M \left(Y \frac{dZ}{dt} - Z \frac{dY}{dt} \right) + \sum_i m_i \left(r_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{d\eta_i}{dt} \right), \end{aligned}$$

compte tenu de (19) et (20). On a des formules analogues pour M_y et M_z . Donc le moment total d'impulsion du système est la somme géométrique du moment d'impulsion du centre de gravité et du moment d'impulsion du système dans son mouvement autour du centre de gravité (c'est-à-dire dans un système d'axes ayant constamment leur origine au centre de gravité et parallèles aux axes fixes). C'est là le second théorème de Kœnig.

3. Principe d'action stationnaire de Hamilton. Équations de Lagrange. — Toute la dynamique des systèmes de points matériels peut être ramenée à un principe d'action stationnaire. Pour énoncer ce principe, on commence par définir une « fonction de Lagrange » pour le système, c'est-à-dire une fonction de la position des points matériels, de leurs vitesses et éventuellement du

temps, donnée par

$$(25) \quad \mathcal{L}(x_1, \dots, z_N; t) = T - U(x_1, \dots, z_N; t),$$

T étant toujours l'énergie cinétique du système et U son énergie potentielle égale à $\sum_i \mathcal{V}_i + \sum_{ij} \frac{1}{2} \mathcal{V}_{ij}$. Il est facile de constater que les équations newtoniennes précédemment utilisées peuvent être écrites sous la forme

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \dots \quad \left(i = 1, 2, \dots, N; \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \right).$$

Or, ces équations expriment précisément, comme il est bien connu, que l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(x_1 \dots z_N; t) dt$, prise le long de la courbe définie par les équations (26), est stationnaire, c'est-à-dire a une variation du premier ordre nulle, quand on fait varier infiniment peu la courbe d'intégration en laissant fixes les extrémités ainsi que les limites t_0 et t_1 de l'intégrale.

On peut préciser ceci en introduisant « l'espace de configuration » du système dont nous aurons à nous servir en Mécanique ondulatoire. L'ensemble des $3N$ coordonnées des N points matériels du système $x_1 \dots z_N$, peut, en effet, nous servir à constituer un espace euclidien à $3N$ dimensions dans lequel ces $3N$ coordonnées définissent $3N$ axes de coordonnées mutuellement perpendiculaires. Un point de cet espace correspond à une certaine valeur de chacune des $3N$ coordonnées $x_1 \dots z_N$, et par suite, à une certaine « configuration » du système. L'état instantané du système peut donc toujours être représenté par un point figuratif dans l'espace de configuration. Au cours du temps, le point figuratif décrit une courbe ou trajectoire dans l'espace de configuration : cette trajectoire est définie par les $3N$ fonctions du temps $x_1(t), \dots, z_N(t)$. Supposons alors que le point est figuratif soit à un instant t_0 en un point A de l'espace de configuration et qu'à un instant postérieur t_1 , il se trouve en un autre point B de l'espace de configuration. Dans l'intervalle de temps $t_0 \rightarrow t_1$, le point figuratif s'est donc rendu de A en B en suivant une certaine courbe C correspondant à certaines formes de fonctions

$$x_1(t), \dots, z_N(t).$$

L'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ prise le long de la courbe C est une intégrale curviligne bien définie. Le principe d'action stationnaire ou principe d'Hamilton affirme alors que le mouvement réel qui amène le système de la configuration représentée par A à l'instant t_0 à la configuration représentée par B à l'instant t_1 , correspond à une courbe C telle que l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ prise le long de C ne varie pas au premier ordre quand on fait varier infiniment peu la forme de la courbe C sans faire varier les instants t_0 et t_1 , ni les configurations A et B.

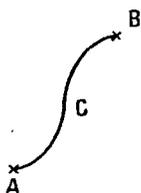


Fig. 1.

Le principe d'action stationnaire et les équations de Lagrange qui en sont l'expression ont une signification intrinsèque invariante. Si, au lieu de définir la configuration du système à l'aide des $3N$ variables $x_1 \dots x_N$, nous la définissons par $3N$ variables $q_1 \dots q_{3N}$ telles que $x_1 \dots x_N$ s'expriment univoquement à l'aide des q_i et inversement, on aura comme expression du principe de l'action stationnaire

$$(27) \quad \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N}; t) dt = 0,$$

la variation étant définie comme nous l'avons vu, et l'on en tirera

$$(28) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 3N).$$

Il arrive fréquemment dans les problèmes de Mécanique rationnelle que le mouvement des points matériels composant le système soit soumis à des liaisons. Dans le cas le plus simple (liaisons holo-

nomes indépendantes du temps), ces liaisons peuvent se représenter par des équations liant entre elles certaines des $3N$ coordonnées des N points matériels, et représentant dans l'espace de configuration des surfaces sur lesquelles le point figuratif est assujéti à se déplacer. Physiquement, on doit considérer les coordonnées des points matériels comme pouvant en principe varier librement, mais dès que leurs valeurs cessent de vérifier les équations exprimant les liaisons, il s'exerce sur ces points matériels des forces très intenses qui tendent à faire reprendre à leurs coordonnées des valeurs satisfaisant aux équations de liaison. Parlant le langage de l'espace de configuration, on peut dire que, dès que le point figuratif du système s'écarte d'une des surfaces représentant les liaisons, il se produit dans le système des forces intenses qui tendent à ramener le point figuratif sur cette surface. Il est donc naturel de schématiser la liaison en disant que les coordonnées ne peuvent prendre que des valeurs en accord avec les équations de liaison. Le problème mathématique se trouve ainsi simplifié par une réduction du nombre des variables indépendantes. Il suffit pour caractériser la configuration du système de connaître les valeurs de n variables q_1, \dots, q_n avec $n < 3N$, et l'on peut écrire encore les équations du mouvement sous la forme lagrangienne :

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \left(i = 1, 2, \dots, n; \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \right).$$

Toutefois, il est bon de retenir que c'est là une schématisation correspondant à des forces de liaison infiniment grandes et qu'en réalité celles-ci ne peuvent être qu'extrêmement grandes. Cette remarque a une certaine importance pour comprendre le rôle des liaisons en Mécanique ondulatoire.

Nous n'insisterons pas ici sur les questions assez délicates qui peuvent se présenter quand on considère des liaisons dépendant du temps et surtout des liaisons non holonomes. Ce genre de questions ne se présente pratiquement pas en Mécanique ondulatoire, où pour cette raison on ne paraît pas les avoir approfondies.

4. Équations d'Hamilton. Principe de moindre action de Maupertuis. — À côté des équations de Lagrange dont nous venons de parler, la Mécanique analytique classique utilise fréquemment les

équations d'Hamilton. Pour écrire les équations d'Hamilton, on doit introduire la notion de « variables canoniques ». Si la configuration du système est définie à chaque instant par les valeurs de n coordonnées q_1, \dots, q_n , on peut définir les « moments de Lagrange conjugués de ces coordonnées » par les relations

$$(30) \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ étant la fonction de Lagrange du problème, qui s'obtient à partir de la définition (25) en exprimant T et U à l'aide des q_i et des \dot{q}_i . Les équations (29) de Lagrange prennent alors la forme

$$(31) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Avec ces notations, l'énergie du système peut s'écrire

$$(32) \quad E = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

En effet, U ne dépend pas des vitesses et T est une fonction quadratique homogène des \dot{q}_i , du moins pour les systèmes à liaisons indépendantes du temps auxquels nous nous bornons ici. On a alors, d'après le théorème d'Euler,

$$(33) \quad 2T = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i p_i \dot{q}_i$$

et, par suite,

$$(34) \quad \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U = E.$$

D'ailleurs, le théorème de la conservation de l'énergie se démontre aisément à partir de (32), car on a

$$(35) \quad \frac{dE}{dt} = \sum_i p_i \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \sum_i \dot{q}_i \frac{dp_i}{dt} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

D'après la définition des p_i le premier terme détruit le quatrième et d'après les équations de Lagrange le second détruit le troisième.

\mathcal{L} ne pouvant dépendre explicitement du temps que par U , il reste

$$(36) \quad \frac{dE}{dt} = - \frac{dU}{dt},$$

et si les forces extérieures sont constantes ou nulles, $E = \text{const.}$

La nouvelle définition (32) de E nous permet d'écrire

$$(37) \quad \mathcal{L} dt = \sum_i p_i dq_i - E dt.$$

Considérons alors un espace de configuration-temps obtenu en adjoignant à l'espace de configuration une dimension représentant le temps. Soit P le point de cet espace qui représente l'instant t_0 et l'état du système à cet instant, et soit Q le point qui représente l'instant t_1 et l'état du système à cet instant t_1 .

L'intégrale d'action d'Hamilton s'écrit maintenant

$$(38) \quad \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_P^Q \left(\sum_i p_i dq_i - E dt \right).$$

Le principe d'action stationnaire affirme, nous l'avons vu, que cette intégrale curviligne prise de P à Q le long de la courbe de l'espace de configuration-temps qui représente le mouvement réel, est stationnaire : on a

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = 0.$$

Le principe de l'action stationnaire d'Hamilton étant ainsi énoncé, on peut passer dans le cas important des champs extérieurs constants ou nuls (qui comprend le cas des systèmes pratiquement isolés) au principe de moindre action de Maupertuis.

Pour opérer ce passage, il convient de démontrer d'abord une formule qui généralise un peu celle d'Hamilton et qui est valable dans le cas général. Cette formule est souvent appelée « le principe de l'action variée ». Pour la trouver, considérons l'intégrale d'Hamilton $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$ et supposons que l'on fasse varier très légèrement non seulement le mouvement entre l'état initial et l'état final (ou si l'on veut la forme de la courbe qui joint les points P et Q de

l'espace de configuration-temps), mais aussi les valeurs du temps et des coordonnées, qui caractérisent l'état initial et l'état final (ou si l'on préfère les points P et Q eux-mêmes). On a alors

$$(39) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt + \left[\sum_i p_i dq_i - E \delta t \right]_0^1.$$

L'intégrale du second membre représente la variation due à la variation du mouvement : elle est nulle en vertu du principe d'Hamilton. Le crochet du second membre donne la variation d'intégrale d'action due aux variations des valeurs des q_i et du temps aux deux extrémités de la ligne d'intégration, c'est-à-dire aux déplacements infinitésimaux des points P et Q dans l'espace de configuration-temps. On obtient ainsi la formule exprimant le principe de l'action variée, savoir

$$(40) \quad \boxed{\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \left[\sum_i p_i \delta q_i - E \delta t \right]_0^1.}$$

Revenons maintenant à l'espace de configuration sans le temps. On peut y considérer l'intégrale

$$(41) \quad S_1 = \int_A^B \sum_i p_i dq_i,$$

dite « intégrale d'action de Maupertuis ». Elle est prise du point A représentant la configuration initiale au point B représentant la configuration finale le long de la courbe qui figure le mouvement (voir *fig. 1*). Dans le cas où les actions extérieures sont constantes ou nulles, l'énergie E du système est une constante et l'intégrale S_1 est indépendante du temps. Si l'on pose

$$(42) \quad -S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_P^Q \left(\sum_i p_i dq_i - E dt \right) = S_1 - \int_{t_0}^{t_1} E dt,$$

on a

$$(43) \quad -\delta S = \delta S_1 - \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt - (E \delta t)_0^1,$$

d'où, par comparaison avec la formule (40) de l'action variée,

$$(44) \quad \delta S_1 = \left(\sum_i p_i \delta q_i \right)_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt.$$

Donc si nous maintenons fixes dans la variation les configurations extrêmes (c'est-à-dire les points A et B) et si nous nous astreignons également dans cette variation à ne pas faire varier l'énergie E, nous aurons

$$(45) \quad \delta S_1 = 0.$$

L'intégrale S_1 ou action de Maupertuis est donc stationnaire pour les variations qui ne modifient ni les configurations extrêmes, ni l'énergie totale du système. C'est là le « principe de la moindre action » applicable seulement, rappelons-le, aux systèmes conservatifs.

Dans le cas de N points matériels sans liaisons, les p_i en coordonnées rectangulaires sont les composantes des quantités de mouvement, et l'on a

$$(46) \quad S_1 = \sum_i p_i dq_i = \sum_k^N m_k (v_{x_k} dx_k + v_{y_k} dy_k + v_{z_k} dz_k).$$

Arrivons maintenant aux équations d'Hamilton. Elles se présentent quand on prend comme variables dynamiques non plus les q_i et les \dot{q}_i , mais les q_i et les p_i . Les équations (30) permettent en effet d'exprimer les \dot{q}_i à l'aide des q_i et des p_i et éventuellement du temps sous la forme

$$(47) \quad \dot{q}_i = f_i(q, p, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

L'énergie E doit alors être considérée comme une fonction des $2n$ variables canoniques q_1, \dots, p_n et du temps exprimée par la « fonction hamiltonienne »

$$(48) \quad H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t),$$

où à droite les \dot{q}_i sont exprimées en fonction des q , des p et de t . On a donc

$$(49) \quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_i p_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt}$$

et

$$(50) \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i p_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \frac{dp_k}{dt}.$$

On a donc le système des équations d'Hamilton

$$(51) \quad \boxed{\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

On en tire aisément

$$(52) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) = \frac{\partial H}{\partial t},$$

d'où encore la conservation de l'énergie quand les actions extérieures sont constantes ou nulles.

5. Théorie de Jacobi. Analogie optique. — On démontre dans le traité de Mécanique rationnelle un important théorème dû à Jacobi qu'on peut énoncer comme il suit :

« Prenons l'expression hamiltonienne de l'énergie en fonction des variables canoniques q_i et p_i et du temps, puis remplaçons-y les p_i par les dérivées $-\frac{\partial S}{\partial q_i}$ d'une fonction S ; enfin posons

$$(53) \quad H\left(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Si nous parvenons à trouver une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire une solution de cette équation dépendant de n constantes arbitraires non additives $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, nous obtiendrons un des mouvements possibles en écrivant

$$(54) \quad p_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial x_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les β_i sont n nouvelles constantes.

Les n premières équations nous donneront les moments de Lagrange correspondant dans ce mouvement au passage du point figuratif au point q_1, \dots, q_n de l'espace de configuration. Les n équations du second système nous donneront n relations entre les q_i et le temps qui détermineront entièrement le mouvement du système au cours du temps ».

Sans donner la démonstration de ce théorème, nous voulons en montrer la signification. Le mouvement du système dont la confi-

guration est caractérisée par les n variables q_1, \dots, q_n obéit aux n équations du second ordre de Lagrange ou aux $2n$ équations du premier ordre d'Hamilton et dépend de $2n$ constantes arbitraires. Le théorème de Jacobi permet de diviser ces $2n$ constantes en deux groupes de n constantes, les α_i et les β_i . Si l'on se donne les valeurs des constantes α_i du premier groupe, il reste les n constantes β_i arbitraires, c'est-à-dire qu'à des valeurs données des α_i correspondent ∞^n mouvements possibles. Chaque intégrale complète de l'équation (53) de Jacobi, quand on y a fixé les valeurs des n constantes α_i , correspond donc encore à ∞^n mouvements différents caractérisés chacun par un jeu de valeurs des β_i . Le théorème de Jacobi fournit ainsi une manière de classer les divers mouvements possibles de façon à les grouper en mouvements correspondants associés à une même intégrale particulière de l'équation (53) obtenue en particularisant dans l'intégrale complète la valeur des constantes α_i .

Dans le cas important où les champs extérieurs ne dépendent pas du temps, on peut trouver des intégrales premières de la forme

$$(55) \quad S = Et - S_1(q_i),$$

S_1 ne dépendant plus que des q_i et non du temps. L'équation de Jacobi prend alors la forme

$$(56) \quad H\left(q_i, \frac{\partial S_1}{\partial q_i}\right) = E.$$

Si l'on parvient à trouver une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles dépendant de la constante E et de $n-1$ autres constantes arbitraires non additives $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, soit $S_1(q_1, \dots, q_n, E, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, on obtiendra un des mouvements possibles du système en posant

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad \frac{\partial S_1}{\partial x_i} = \beta_i \quad (i=2, \dots, n-1); \\ \frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0. \end{array} \right.$$

Les $n-1$ équations $\frac{\partial S_1}{\partial x_i} = \beta_i$ déterminent la trajectoire du point figuratif dans l'espace de configuration et l'équation $\frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0$

détermine le mouvement du point figuratif sur sa trajectoire. Il y a ainsi séparation entre l'étude de la trajectoire du point figuratif et celle de son mouvement, circonstance qui caractérise le cas des champs extérieurs constants.

Nous allons maintenant nous borner jusqu'à nouvel ordre au cas où il n'y a pas de liaisons. On supposera alors que les q_i sont les $3N$ coordonnées x_1, \dots, z_N des N points matériels du système. Avec un champ extérieur constant (ou nul), on a alors l'équation de Jacobi

$$(58) \quad \sum_1^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z_i} \right)^2 \right] + U(x_1, \dots, z_N) = E.$$

Il va nous être commode de remplacer ici l'espace de configuration par un « espace de configuration pondéré » défini à l'aide des $3N$ variables

$$(59) \quad u_i = \sqrt{m_i} x_i, \quad v_i = \sqrt{m_i} y_i, \quad w_i = \sqrt{m_i} z_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

On a alors

$$(60) \quad \frac{1}{2} \sum_1^N \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial v_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial w_i} \right)^2 \right] + U(u_i, v_i, w_i) = E.$$

Les équations $\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = p_i$ deviennent $\frac{\partial S_1}{\partial u_i} = \frac{du_i}{dt}, \dots$. La vitesse du point figuratif dans l'espace de configuration pondéré est donc dirigée suivant la normale à la surface $S_1 = \text{const.}$ passant au point qu'il occupe. Si donc on trace l'ensemble des surfaces $S_1 = \text{const.}$ correspondant à des valeurs fixes des constantes $E, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ et l'ensemble des trajectoires correspondantes dans l'espace de configuration pondéré, on voit que ces surfaces et ces courbes sont disposées comme les surfaces d'ondes et les rayons dans une propagation d'ondes de l'optique géométrique. Le principe de la moindre action de Maupertuis (qui est ici valable) correspond exactement au principe de Fermat. Il y a là une analogie entre la dynamique classique et l'optique géométrique qui avait été aperçue, il y a un siècle, par Hamilton et que nous devons maintenant étudier.

Une propagation d'ondes dans l'espace des u_i, v_i, w_i est par

définition déterminée par l'équation de propagation

$$(61) \quad \frac{1}{V_u^2} \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial t^2} = \sum \left(\frac{\partial^2 \Psi'}{\partial u_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial v_i^2} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial w_i^2} \right);$$

V_u peut être appelée la « vitesse de propagation », elle est variable d'un point à un autre, mais indépendante du temps. Il faut d'ailleurs remarquer qu'en raison de la définition des u_i , v_i , w_i , V_u n'a pas les dimensions physiques d'une vitesse. On obtiendra des ondes monochromatiques en posant

$$(62) \quad \Psi'(u_i, v_i, w_i; t) = a(u_i, v_i, w_i) e^{2\pi i[\nu t - \varphi_1(u_i, v_i, w_i)]}.$$

L'optique géométrique de cette propagation d'ondes s'obtient en supposant que la fonction a varie assez lentement dans l'espace des u_i, v_i, w_i , pour qu'on puisse négliger les dérivées de a devant celles de φ_1 et les dérivées secondes de φ_1 devant ses dérivées premières. En substituant la forme (62) de l'onde monochromatique dans l'équation (61), on obtient aisément alors

$$(63) \quad \sum \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial w_i} \right)^2 \right] = \frac{\nu^2}{V_u^2} = \frac{1}{\lambda_u^2},$$

en désignant par λ_u la longueur d'onde locale dans l'espace de configuration pondéré, longueur d'onde qui d'ailleurs n'a pas ici les dimensions physiques d'une longueur. L'équation (63) est l'équation de l'optique géométrique dans l'espace de configuration pondéré, et l'on peut montrer qu'elle est valable chaque fois que V varie assez lentement dans l'espace des u_i, v_i, w_i . Une intégrale complète de l'équation (63), c'est-à-dire une solution de cette équation dépendant de la constante ν et de $n-1$ autres constantes arbitraires non additives, $\varphi_1(u_1, \dots, w_n, \nu, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ déterminera une propagation d'ondes (à l'approximation de l'optique géométrique) dans l'espace de configuration pondéré. Les surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$ sont les surfaces d'ondes de cette propagation et leurs courbes orthogonales en sont les rayons. Ces rayons sont déterminés par le principe de Fermat

$$(64) \quad \delta \int_A^B \frac{dl}{V_u} = 0 \quad \left[dl^2 = \sum_i (du_i^2 + dv_i^2 + dw_i^2) \right].$$

Pour assimiler la Dynamique des systèmes représentée dans l'espace des u_i, v_i, w_i à une optique géométrique, il faut comparer l'équation (63) à l'équation (60) de Jacobi. On voit que pour identifier ces deux équations, il suffit de poser

$$(65) \quad S_1 = k\varphi_1, \quad \frac{k^2 v^2}{V_u^2} = \frac{k^2}{\lambda_u^2} = 2(E - U).$$

k étant une constante actuellement indéterminée. Si nous désignons par φ la phase $v t - \varphi_1$ de l'onde (62), comme nous avons $S = Et - S_1$, il est naturel, ayant posé la première équation (65), de poser plus généralement

$$(66) \quad S = k\varphi, \quad \text{d'où} \quad E = kv.$$

On a alors, d'après la seconde équation (65),

$$(67) \quad \frac{1}{V_u} = \frac{\sqrt{2(E - U)}}{E},$$

équation qui établit une relation entre V_u et U en chaque point de l'espace des u_i, v_i, w_i . En prenant comme espace de référence l'espace de configuration pondéré avec $U \equiv 0$, on peut caractériser chaque champ de force par un indice de réfraction

$$(68) \quad n = \frac{(V_u)_{U=0}}{V_u(U)} = \frac{\sqrt{2(E - U)}}{E} \frac{E}{\sqrt{2}E} = \sqrt{1 - \frac{U}{E}},$$

qui sera en général variable d'un point à un autre de l'espace u, v, w . La longueur d'onde sera

$$(69) \quad \lambda_u = \frac{V_u}{v} = \frac{kV_u}{E} = \frac{k}{\sqrt{2(E - U)}}.$$

Les surfaces $S_1 = \text{const.}$ sont les surfaces d'ondé de cette propagation. Les rayons, courbes orthogonales de ces surfaces, représentent les trajectoires possibles du point figuratif correspondant à l'intégrale complète considérée S_1 de l'équation de Jacobi. La forme de ces rayons est donnée par le principe de Fermat qui nous apprend que le rayon passant par deux points A et B de l'espace des u, v, w est tel que l'intégrale $\int_A^B \frac{dl}{V_u}$ soit stationnaire pour toute variation infiniment petite de la

forme du rayon respectant la fixité des points A et B et la valeur de la fréquence ν . Or, on a

$$(70) \quad \frac{1}{\bar{V}_u} = \frac{1}{\bar{E}} \sqrt{2(E-U)} = \frac{1}{\bar{E}} \sqrt{\sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)} \\ = \frac{1}{\bar{E}} \sqrt{\sum_i (\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2)}.$$

Or, ν étant fixe, E l'est aussi et si nous désignons par \vec{v} la vitesse du point figuratif dans l'espace de configuration pondéré, on aura $\frac{1}{\bar{V}_u} = \text{const. } \vec{v}$ et par suite

$$(71) \quad \int_A^B \frac{dl}{\bar{V}_u} \sim \int_A^B \vec{v} dl = \int_A^B \left(\sum_i \dot{u}_i du_i + \dot{v}_i dv_i + \dot{w}_i dw_i \right) \\ = \int_A^B \sum_i m_i (\dot{x}_i dx_i + \dot{y}_i dy_i + \dot{z}_i dz_i).$$

Le principe de Fermat est donc équivalent au principe de Maupertuis $\delta \int_A^B dS_1 = 0$.

Nous terminerons l'étude de cette analogie dynamico-optique par la considération des groupes d'ondes et de la vitesse de groupe. Nous pouvons considérer dans l'espace des u, v, w un groupe d'ondes formé par la superposition d'ondes monochromatiques correspondant à un très petit intervalle de fréquence $\Delta\nu$, soit

$$(72) \quad \Psi(u_i, v_i, w_i; t) = \int_{\Delta\nu} a(\nu) e^{2\pi i[\nu t - \varphi_1(\nu; u, v, w)]} d\nu.$$

Soit ν_0 la fréquence qui occupe le milieu de l'intervalle $\Delta\nu$. Nous pouvons écrire

$$(73) \quad \Psi = \int_{-\frac{\Delta\nu}{2}}^{+\frac{\Delta\nu}{2}} a(\varepsilon) e^{2\pi i[(\nu_0 + \varepsilon)t - \varphi_1(\nu_0 + \varepsilon, \dots)]} d\varepsilon.$$

Or, dans tout l'intervalle très petit $\Delta\nu$, on peut poser

$$\varphi_1(\nu_0 + \varepsilon) = \varphi_1(\nu_0) + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} \varepsilon.$$

D'où

$$(74) \quad \Psi \cong \int_{-\frac{\Delta\nu}{2}}^{+\frac{\Delta\nu}{2}} \alpha(\varepsilon) e^{2\pi i \varepsilon \left[t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_{\nu_0} \right]} d\varepsilon \cdot e^{2\pi i [\nu_0 t - \varphi_1(\nu_0, \dots)]}.$$

On peut donc considérer le groupe d'ondes comme une onde monochromatique de fréquence ν_0 dont l'amplitude ne serait pas constante, mais serait donnée à chaque instant et à chaque point par l'intégrale de la dernière formule. Or cette intégrale définie est évidemment une certaine fonction de la variable $t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_{\nu_0}$ qui dépend du temps et des variables u_i, v_i, w_i contenues dans φ_1 . Désignons par dl une longueur infinitésimale prise le long d'un des rayons de l'onde monochromatique de fréquence ν_0 . En nous déplaçant le long de ce rayon de la longueur dl dans le temps dt , nous suivons une valeur déterminée de l'amplitude du groupe d'ondes si nous avons la relation

$$(75) \quad dt = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu \partial t} \right)_{\nu_0} dl,$$

c'est-à-dire si nous nous déplaçons avec une vitesse \mathfrak{V} telle que

$$(76) \quad \frac{1}{\mathfrak{V}} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu \partial t} \right)_{\nu_0}.$$

C'est la célèbre formule de lord Rayleigh donnant la « vitesse du groupe ». Maintenant, l'équation (63) de l'optique géométrique nous donne, puisque l'élément dl du rayon est orthogonal à la surface $\varphi_1 = \text{const.}$,

$$(77) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\nu}{V_u}.$$

Donc par (76) et (67)

$$(78) \quad \frac{1}{\mathfrak{V}} = \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\nu}{V_u} \right) \right]_{\nu=\nu_0} = \left[\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{E}{V_u} \right) \right]_{E=k\nu_0} = \left[\frac{1}{\sqrt{2(E-U)}} \right]_{E=k\nu_0}.$$

Pour l'énergie $E = k\nu_0$ correspond à la fréquence centrale du groupe, la quantité $\sqrt{2(E-U)}$ est égale à $\sqrt{2T} = |\vec{v}|$, \vec{v} étant la vitesse du point figuratif dans l'espace u, v, w correspondant à l'énergie $k\nu_0$. On a donc

$$(79) \quad \mathfrak{V} = |\vec{v}|.$$

D'où le théorème: « La vitesse du groupe d'ondes dans l'espace de configuration pondéré est égale à la vitesse du point figuratif correspondant à l'onde centrale du groupe d'ondes. »

6. Extension de l'analogie optique au cas où il existe des liaisons.

— Nous avons développé l'analogie optique dans le cas où les points matériels du système ne sont soumis à aucune liaison. Étudions maintenant le cas plus général des liaisons holonomes indépendantes du temps en développant des formules qui contiennent comme cas particulier celui étudié directement plus haut de l'absence de liaisons.

Nous savons que, si la configuration d'un système à liaisons holonomes, indépendantes du temps, est entièrement définie par n variables q_1, \dots, q_n , l'énergie cinétique est une fonction homogène du second degré des vitesses \dot{q} . On a donc

$$(80) \quad 2T = \sum_{kl}^n m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

où l'on suppose (ce qui est toujours possible) $m_{kl} = m_{lk}$. Les m sont des fonctions des q_i seulement et non des \dot{q}_i . On trouve

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} = T - U = \frac{1}{2} \sum_{kl}^n m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l - U, \\ E = \frac{1}{2} \sum_{kl}^n m_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l + U. \end{array} \right.$$

Par la définition des moments de Lagrange, nous avons

$$(82) \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k^m m_{ki} \dot{q}_k \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Désignons par \mathfrak{N} le déterminant des m_{kl} que nous supposons différent de zéro et par M_{kl} le mineur de ce déterminant relatif à l'élément m_{kl} . Nous pouvons résoudre les équations (82) par rapport aux \dot{q} sous la forme

$$(83) \quad \dot{q}_i = \sum_k^n \frac{M_{ki}}{\mathfrak{N}} p_k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ou en introduisant la notation

$$(84) \quad m^{ki} = \frac{M^{ki}}{\partial U},$$

$$(85) \quad \dot{q}_i = \sum_k^n m^{ki} p_k.$$

Portons cette expression des \dot{q}_i dans l'expression de T. Nous obtenons, en tenant compte de propriétés bien connues des déterminants,

$$(86) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{klr} m_{kl} m^{kn} p_n m^{lr} p_r = \frac{1}{2} \sum_{lr} m^{lr} p_l p_r.$$

La fonction hamiltonienne du système donnant son énergie en fonction des p_i et des q_i est donc

$$(87) \quad H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \sum_{lr} m^{lr} p_l p_r + U(q_i, t),$$

et l'équation de Jacobi prend ici la forme

$$(88) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum m^{lr} \frac{\partial S}{\partial q^l} \frac{\partial S}{\partial q^r} + U(q_i) = E.$$

Si les actions extérieures sont indépendantes du temps, on peut employer l'équation de Jacobi raccourcie

$$(89) \quad \frac{1}{2} \sum m^{lr} \frac{\partial S_l}{\partial q^l} \frac{\partial S_l}{\partial q^r} + U(q_i) = E.$$

Si maintenant dans ce cas général nous voulons assimiler la théorie de Jacobi à une théorie de propagation d'ondes, il nous faut former un espace de configuration avec les n variables q_1, \dots, q_n , mais de plus il faut attribuer à cet espace une métrique riemannienne définie par un ds^2 de la forme $\sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j$. Cette métrique doit

être choisie en relation avec la forme de l'expression de T en fonction des \dot{q} , c'est-à-dire définie à l'aide des m_{kl} . De plus, dans le cas de l'absence de liaison où les q_i sont les $3n$ coordonnées des N points matériels du système, on doit retomber sur l'espace de configuration pondéré avec sa métrique euclidienne. On y

parvient aisément en posant

$$(90) \quad ds^2 = \sum_{i,j}^n m_{ij} dq_i dq_j,$$

de sorte que l'on a pour un mouvement donné du point figuratif

$$(91) \quad 2T = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T}.$$

La vitesse \vec{v} du point figuratif dans notre espace de configuration doué de la métrique (90) est égale à $\sqrt{2T}$, résultat déjà rencontré dans le cas particulier traité au paragraphe précédent.

Il est bien connu que dans un espace dont l'élément métrique est

$$ds^2 = \sum g_{ij} dq_i dq_j,$$

l'élément de volume correspondant aux variations dq_1, \dots, dq_n des coordonnées est

$$(92) \quad d\tau = \sqrt{|g|} dq_1 \dots dq_n,$$

g étant le déterminant des g_{ij} . Dans notre espace de configuration nous aurons donc

$$(93) \quad d\tau = \sqrt{|\mathfrak{M}|} dq_1 \dots dq_n \quad (\mathfrak{M} = |m_{ij}|).$$

Pour étudier la propagation d'une onde dans l'espace de configuration que nous avons défini, il faut connaître la forme du Laplacien dans un espace riemannien où le ds^2 a la forme (90). Ce Laplacien est le suivant

$$(94) \quad \Delta = \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{M}|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\mathfrak{M}|} m^{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \quad \left(m^{ik} = \frac{M_{ik}}{\mathfrak{M}} \right).$$

Je ne donnerai pas la démonstration de cette formule qui se trouve dans tous les livres sur le Calcul tensoriel (1). L'équation des

(1) Nous donnerons plus loin incidemment une justification de cette formule. Voir note p. 43.

ondes dans l'espace de configuration sera donc

$$(95) \quad \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{|\partial \mathfrak{R}|}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{|\partial \mathfrak{R}|} m^{ik} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \Psi,$$

où V est la vitesse de propagation, fonction du point considéré de l'espace de configuration et éventuellement du temps. Si nous considérons toujours le cas des champs extérieurs constants, l'analogie ondulatoire sera le cas où V est indépendant du temps et l'équation de propagation admettra des solutions monochromatiques de la forme

$$(96) \quad \Psi(q_i, t) = a(q_i) e^{2\pi i[\nu t - \varphi_i(q_i)]} = a(q_i) e^{2\pi i\varphi_i(q_i, t)}.$$

Lorsque V ne varie pas trop rapidement dans l'espace de configuration, on pourra considérer a comme sensiblement constant et négliger les $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_i^2}$ devant les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}$ (approximation de l'optique géométrique). Nous supposons aussi ici que les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}$ sont beaucoup plus grands que les $\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_i}$, c'est-à-dire que la phase de l'onde varie beaucoup plus rapidement que les éléments de la métrique. On obtiendra dans ces conditions, en substituant (96) dans (95), l'équation de l'optique géométrique

$$(97) \quad \sum_{ik} m^{ik} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} = \frac{\nu^2}{V^2}.$$

Si l'on parvient alors à trouver une intégrale complète de cette équation dépendant de la constante ν et de $n - 1$ autres constantes non additives arbitraires, on aura défini une propagation d'ondes à l'approximation de l'optique géométrique dans l'espace de configuration. Les rayons de cette propagation d'ondes sont par définition les courbes orthogonales de surfaces $\varphi_i = \text{const.}$ Ces rayons seront déterminés par le principe de Fermat suivant lequel le rayon passant par les points A et B est tel que l'intégrale $\int_A^B \frac{ds}{V}$ prise le long du rayon soit stationnaire pour toute variation de la forme du rayon qui n'affecte ni la valeur de la fréquence ν , ni la position des points extrêmes A et B .

Comparons maintenant ces propagations d'ondes avec les mou-

vements possibles du système groupés suivant la théorie de Jacobi. Nous avons trouvé, en supposant \bar{U} et \bar{H} indépendants du temps,

$$(98) \quad H(q_i, p_i) = \sum_{ik} \frac{1}{2} m^{ik} p_i p_k + U(q_i)$$

et nous en avons tiré l'équation de Jacobi

$$(99) \quad \sum_{ik} m^{ik} \frac{\partial S_1}{\partial q_i} \frac{\partial S_1}{\partial q_k} = 2(E - U).$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (97), nous poserons

$$(100) \quad S = k\varphi, \quad S_1 = k\varphi_1, \quad E = k\nu, \quad \frac{k^2\nu^2}{V^2} = \frac{k^2}{\lambda^2} = 2(E - U),$$

k étant la même constante que précédemment (page 66). Il vient encore

$$(101) \quad \frac{1}{V} = \frac{\sqrt{2(E - U)}}{E}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}, \quad \lambda = \frac{k}{\sqrt{2(E - U)}};$$

S_1 correspond donc à une propagation d'ondes dans l'espace de configuration. Les surfaces $S_1 = \text{const.}$ sont les surfaces d'onde : les rayons sont les courbes orthogonales.

Nous voulons montrer que ces rayons coïncident avec les trajectoires du point figuratif. Les composantes (contrevariantes) d'un petit élément de trajectoire en un point de l'espace de configuration sont évidemment proportionnelles aux valeurs des \dot{q}_i en ce point. Il nous faut donc montrer que le vecteur dont les composantes sont $\dot{q}_i = \sum_k m^{ik} p_k$ est orthogonal à la surface $S_1 = \text{const.}$

Or, dans l'espace où le ds^2 a la forme (90), deux vecteurs, dont les composantes (contrevariantes) sont $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_n$, sont orthogonaux quand on a

$$(102) \quad \sum_{ik} m_{ik} a_i a'_k = 0.$$

Prenons pour vecteur a_1, \dots, a_n un vecteur de longueur infinitésimale sur la surface $S_1 = \text{const.}$ passant au point considéré et pour vecteur a' le vecteur de composantes $a'_k = \dot{q}_k$. Nous voulons

démontrer la relation

$$(103) \quad \sum_{ik} m_{ik} a_i \dot{q}_k = \sum_{ik} m_{ik} a_i \sum_j m^{kj} p_j = 0.$$

Mais, d'après leur définition, les m obéissent à la relation

$$(104) \quad \sum_k m_{ik} m^{kj} = \delta_{ij},$$

δ_{ij} étant le symbole bien connu de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et à 0 si $i \neq j$.

La formule (103) à démontrer se réduit donc à

$$(105) \quad \sum_i a_i p_i = \sum_i \frac{\partial S_1}{\partial q_i} a_i = 0.$$

Elle est évidemment vérifiée d'après la définition des a_i . Les trajectoires du point figuratif dans l'espace de configuration coïncident donc bien avec les rayons de la propagation d'ondes associée.

Le principe de Fermat $\delta \int_A^B \frac{ds}{V}$, transcrit en notation dynamique, donne en vertu de (101) et de (91)

$$(106) \quad \delta \int_A^B \sqrt{2(E - U)} ds = \delta \int_A^B 2T dt = 0.$$

On obtient ainsi une forme bien connue du principe de Maupertuis et l'on peut écrire aussi

$$(107) \quad \delta \int_A^B dS_1 \equiv \delta \int_A^B \sum_k p_k dq_k = 0.$$

Reste encore à étudier la question de la vitesse de groupe. Elle est toujours définie par la formule (76), où ν_0 est la fréquence centrale du groupe. Comme les $\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}$ sont les composantes covariantes de grad $\varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$, l'équation de l'optique géométrique (97) peut s'écrire

$$(108) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\nu}{V},$$

et l'on a

$$(109) \quad \frac{1}{\mathfrak{V}^2} = \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{V} \right) \right]_{v_0} = \left[\frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{E}{V} \right) \right]_{E=k v_0} = \frac{1}{\sqrt{2(E_0 - U)}} = \frac{1}{\sqrt{2T_0}},$$

T_0 étant l'énergie cinétique correspondant à l'onde centrale du groupe. Or la formule (80) montre que $2T$ est le carré du vecteur dont les composantes contrevariantes sont les \dot{q}_i , c'est-à-dire du vecteur « vitesse » du point figuratif dans l'espace de configuration.

Si \vec{v} désigne cette vitesse, on a donc finalement

$$(110) \quad \mathfrak{V} = \sqrt{2T_0} = \left| \vec{v} \right|.$$

Nous retrouvons bien ainsi le théorème : « La vitesse de groupe d'un groupe d'ondes dans l'espace de configuration avec la métrique (90) est égale à la vitesse du point figuratif dans le mouvement correspondant à l'onde centrale du groupe ».