PROBLÈMES

DE

PROPAGATIONS GUIDÉES

DES

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Ondes et mouvements (*Collection de Physique Mathématique*). In-8 de 132 pages; 1926. . . . . (*Épuisé.*)

La Mécanique ondulatoire (*Mémorial des Sciences physiques*, fascicule 1). In-8. . . . . (*Épuisé.*)

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*). In-8 de VI-224 pages; 1950.

Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion. In-8 (16-25) de 210 pages; 1943.

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs. In-8 (16-25) de VI-208 pages; 1949.

EN COLLABORATION AVEC MAURICE DE BROGLIE :

Introduction à la physique des rayons X et des rayons gamma. In-8 (16-25) de 201 pages, avec 27 figures et 11 planches. (*Sous presse.*)

PROBLÈMES

DE

PROPAGATIONS GUIDÉES

DES

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

PAR

Louis de BROGLIE
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

DEUXIÈME ÉDITION

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1951

PRÉFACE

La question de l'emploi des ondes électromagnétiques très courtes, ayant une longueur d'onde de l'ordre du décimètre, est aujourd'hui tout à fait à l'ordre du jour. L'une des circonstances qui rendent ces ondes particulièrement intéressantes pour la radiotechnique est la possibilité de les guider ou de les diriger à l'aide de dispositifs tels que guides, cornets ou miroirs permettant d'obtenir des faisceaux dirigés analogues à des faisceaux lumineux. Comme il est bien connu, de semblables dispositifs doivent avoir des dimensions supérieures à la longueur d'onde : tandis que pour les ondes ayant des longueurs d'onde de l'ordre de l'hectomètre ou même du mètre, on serait obligé d'employer des appareils ayant des dimensions trop considérables, des appareils d'un encombrement très acceptable suffiront pour les ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre du décimètre. Les problèmes relatifs à la propagation des ondes électromagnétiques dans des tuyaux ou cornets, ainsi que la détermination des ondes électromagnétiques stationnaires dont des enceintes à parois métalliques peuvent être le siège, présentent donc aujourd'hui un grand intérêt tant au point de vue pratique qu'au point de vue théorique.

Il est curieux de remarquer que des problèmes de ce type avaient déjà attiré les chercheurs aux environs de 1900 et il est souvent utile actuellement de se reporter à des Mémoires écrits à cette époque et qui avaient été un peu oubliés depuis. La raison en est la suivante : au début de l'étude expérimentale des ondes électromagnétiques par Hertz et ses continuateurs, on avait surtout employé des ondes produites par des oscillateurs de petites dimensions et possédant par suite des longueurs d'onde de l'ordre du mètre ou du décimètre. L'attention s'était donc portée tout naturellement sur les propriétés des ondes de cette catégorie.

Mais le développement ultérieur de la Radiotélégraphie s'est effectué, on le sait, dans le sens de l'emploi de plus en plus exclusif d'ondes de grandes longueurs d'onde dépassant souvent de beaucoup le kilomètre pour lesquelles les problèmes de guidage ne présentent plus aucun intérêt pratique; on avait donc presque complètement perdu de vue ces problèmes. Depuis une vingtaine d'années, par contre, la technique radiotélégraphique s'est orientée à nouveau vers l'emploi des ondes courtes et les longueurs d'onde de l'ordre de l'hectomètre ou du mètre sont celles qu'on utilise le plus fréquemment aujourd'hui.

Dans ces dernières années, continuant à descendre l'échelle des longueurs d'onde, l'attention des radioélectriciens s'est portée sur les ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre du décimètre, et de nombreux travaux ont été consacrés non seulement aux moyens de produire et de recevoir de telles ondes, mais aussi à l'étude des procédés permettant de diriger leur propagation.

Mon attention ayant été récemment attirée sur ces problèmes de propagation guidée, j'ai étudié les principaux travaux qui y ont été consacrés dans ces dernières années, notamment les beaux Mémoires publiés en France par MM. Clavier et Léon Brillouin.

C'est un résumé de ces travaux que je présente dans ce livre. Je n'y prétends nullement à l'originalité car je me suis simplement proposé de donner une vue d'ensemble de la question : tout au plus, ai-je sur quelques points précisé certaines démonstrations ou certaines idées. Mais j'ai l'espoir que, même sous cette forme modeste, cet Ouvrage pourra rendre quelques services aux physiciens et aux radioélectriciens qui voudront aborder l'examen de problèmes dont l'importance et l'intérêt sont maintenant très considérables tant au point de vue scientifique qu'au point de vue technique.

Octobre 1940.

LOUIS DE BROGLIE.

PRÉFACE

DE LA SECONDE ÉDITION

Quand la première édition de cet Ouvrage a été publiée en 1941, la technique des ondes ultra-courtes était déjà très développée aux États-Unis, mais en France elle n'avait pas encore fait l'objet de beaucoup de travaux et les conditions où nous nous trouvions alors placés ne permettaient d'ailleurs que des recherches clandestines tout au moins dans le domaine expérimental. Depuis lors, l'étude des hyperfréquences s'est beaucoup développée dans notre pays, notamment dans les laboratoires du Centre national d'Études des Télécommunications (C. N. E. T.) et dans ceux de certaines sociétés industrielles. La publication du présent Ouvrage, qui apportait une vue d'ensemble sur la théorie des guides d'ondes et sur des questions voisines alors peu connues chez nous, a pu rendre quelques services aux radioélectriciens qui travaillaient dans ce domaine.

Aujourd'hui, la première édition étant épuisée, nous en donnons une deuxième édition. Mais, absorbé par d'autres occupations, nous n'avons pas pu voir en détail l'ensemble des innombrables travaux qui ont paru à l'étranger sur les sujets traités dans ce livre. Aussi nous sommes-nous borné, après avoir rectifié ou amélioré divers passage de la rédaction primitive, à donner des indications bibliographiques sur quelques travaux parus *en France* dans ces dernières années, ce qui permettra au lecteur de se renseigner davantage et de compléter sur divers points les développements contenus dans le texte.

Septembre 1949.

Louis de BROGLIE.

PROBLÈMES DE PROPAGATIONS GUIDÉES

DES

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DE MAXWELL.

1. Les équations de Maxwell en coordonnées rectangulaires cartésiennes. — Le champ électromagnétique est, on le sait, caractérisé par les deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{H}$, champ électrique et champ magnétique, et par les deux autres vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{B}$, induction électrique et induction magnétique, dont les définitions sont bien connues. D'autre part, la présence et le mouvement de l'électricité sont caractérisés par la densité d'électricité ρ et la densité de courant électrique $\vec{i}$.

Ceci rappelé, nous écrirons les équations de Maxwell qui lient ces différentes grandeurs sous la forme

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{E}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi\frac{\vec{i}}{c}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho. \tag{4}$$

Ces équations sont écrites en exprimant les grandeurs électriques $\vec{E}$ et $\vec{D}$

en unités électrostatiques ainsi que les charges et les courants tandis que les grandeurs magnétiques $\vec{H}$ et $\vec{B}$ sont exprimées en unités électromagnétiques. La constante c est le rapport de l'unité électromagnétique de charge électrique à l'unité électrostatique.

Les équations (1) et (3) constituent le premier groupe des équations de Maxwell (groupe sans second membre), les équations (2) et (4) constituent le deuxième groupe (groupe avec second membre). Les équations (1)-(4) sont compatibles parce que l'on a entre ρ et $\vec{i}$, la relation

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{i} = 0 \tag{5}$$

exprimant la conservation de l'électricité.

Dans ce qui suit, nous admettrons toujours que le milieu où nous étudions les phénomènes électromagnétiques possède une constante diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ telles que l'on ait

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}, \tag{6}$$

ε et μ étant des constantes caractéristiques de ce milieu qui est ainsi supposé homogène et isotrope au point de vue électromagnétique. En particulier, nous considérerons souvent le cas du vide où $\varepsilon = \mu = 1$.

Très fréquemment, nous supposerons que le milieu considéré ne contient ni charges, ni courants [1], ce qui nous conduira à poser $\rho = \vec{i} = 0$. De plus, nous envisagerons habituellement des phénomènes électromagnétiques harmoniques par rapport au temps, c'est-à-dire où toutes les grandeurs de champ varient comme $\frac{\sin}{\cos} kct$ (ou en notation complexe comme e^{ikct}), donc avec une fréquence $\nu = \frac{kc}{2\pi}$.

En résumé, nous aurons habituellement à utiliser les équations (1)-(4) sous la forme suivante :

$$ik\mu\vec{H} = -\operatorname{rot}\vec{E}, \tag{1'}$$

$$ik\varepsilon\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{H}, \tag{2'}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \tag{3'}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0. \tag{4'}$$

---

[1] C'est-à-dire qu'il est isolant et ne contient pas de charges.

Comme on le vérifie facilement, les équations de Maxwell entraînent les relations

$$(7) \qquad \Delta\vec{E} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \qquad \Delta\vec{H} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \qquad \left(V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right),$$

où Δ est le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Les équations (7) expriment que les champs électromagnétiques se propagent dans le milieu caractérisé par les constantes ε et μ avec la vitesse V et en particulier avec la vitesse c dans le vide. C'est là, on le sait, la base de la théorie électromagnétique de la lumière.

Pour les phénomènes harmoniques dans le temps, les équations (7) prennent la forme

$$(8) \qquad \Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0, \qquad \Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = 0.$$

En particulier, on trouve aisément comme solutions des équations (1')-(4') et des équations (8) qui en dérivent « les ondes planes monochromatiques » définies par les formules

$$(9) \qquad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left[2\pi\nu\left(t - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) + \varphi\right], \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left[2\pi\nu\left(t - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V}\right) + \varphi\right], \end{cases}$$

où ν est la fréquence $\left(\text{égale à } \frac{kc}{2\pi}\right)$ et où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la direction de propagation normale aux plans d'onde et peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur unité $\vec{n}$ définissant cette direction de propagation. Les vecteurs amplitudes $\vec{E_0}$ et $\vec{H_0}$ sont liés par les relations

$$(10) \qquad (\vec{n}.\vec{E}_0) = 0, \qquad (\vec{n}.\vec{H}_0) = 0, \qquad \sqrt{\mu}\vec{H}_0 = [\vec{n}.\sqrt{\varepsilon}\vec{E}_0].$$

Les champs sont transverseaux, c'est-à-dire tous deux perpendiculaires à la direction de propagation; ils sont perpendiculaires entre eux et, même, dans le vide ils sont, avec les unités choisies, égaux en grandeur.

Naturellement les ondes planes monochromatiques sont des solutions d'un type très particulier et il existe une infinité d'autres types de solutions. Néanmoins, il résulte des théorèmes de Fourier que toutes les solutions sans singularité des équations (1')-(4') peuvent être représentées comme une « superposition » d'un nombre fini ou infini d'ondes planes monochromatiques.

Nous allons faire maintenant une très importante remarque qui nous servira souvent dans la suite. Reportons-nons aux équations (1′)-(4′) et posons-y

$$\vec{E}' = \sqrt{\varepsilon}\,\vec{E}, \qquad \vec{H}' = \sqrt{\mu}\,\vec{H}, \qquad k' = k\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{11}$$

Nous pourrons écrire les équations (1′)-(4′) sous la forme

$$ik'\vec{H}' = -\operatorname{rot}\vec{E}', \tag{1''}$$

$$ik'\vec{E}' = \operatorname{rot}\vec{H}', \tag{2''}$$

$$\operatorname{div}\vec{H}' = 0, \tag{3''}$$

$$\operatorname{div}\vec{E}' = 0. \tag{4''}$$

Ces équations ont la même forme qu'auraient *dans le vide* les équations de Maxwell pour un champ électromagnétique harmonique de fréquence $\frac{k'c}{2\pi}$. D'où cette conclusion dont nous aurons souvent à faire usage :

Si, pour une certaine enceinte vide de matière, on a trouvé une certaine solution harmonique des équations de Maxwell correspondant à une certaine valeur de k, on obtiendra une solution valable pour la même enceinte remplie d'une matière de constante diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ en remplaçant [1] *dans la première solution k par $k\sqrt{\varepsilon\mu}$, $\vec{E}$ par $\sqrt{\varepsilon}\,\vec{E}$ et $\vec{H}$ par $\sqrt{\mu}\,\vec{H}$.*

Grâce à ce résultat, nous pourrons, quand nous aurons résolu un problème de vibrations propres ou de propagation guidée pour une certaine enceinte vide de matière, trouver automatiquement et sans calculs nouveaux les solutions valables pour la même enceinte quand elle est remplie d'une substance pour laquelle ε et μ sont différents de 1.

Pour terminer ce paragraphe, nous rappellerons la définition de la densité d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting.

Dans un espace où règne un champ électromagnétique, chaque élément $\rho\,d\tau$ de charge électrique est soumis à une force électrique égale à $\rho E\,d\tau$ et à une force électromagnétique proportionnelle au produit vectoriel de la vitesse locale du déplacement de l'électricité par le champ magnétique en ce point. Cette dernière force étant perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas, et le travail accompli par le champ

---

[1] Toutefois ce changement ne doit pas être fait dans l'exponentielle e^{ikct}.

électromagnétique sur la matière électrisée pendant le temps *dt* se réduit à

$$d\mathfrak{T} = dt \int \left(\vec{\mathrm{E}}.\vec{v}\right) \rho \, d\tau = dt \int \left(\vec{\mathrm{E}}.\vec{i}\right) d\tau. \tag{12}$$

En supposant le champ électromagnétique nul à l'infini et en remplaçant $\vec{i}$ par son expression tirée de (2), puis tenant compte de (1), on trouve pour ce travail élémentaire

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T} &= \frac{dt}{4\pi} \int \left[\vec{\mathrm{E}}.\left(c \operatorname{rot} \vec{\mathrm{H}} - \frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial t} \right) \right] d\tau \\ &= \frac{dt}{4\pi} \int \left[\left(\vec{\mathrm{E}}.\frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial t} \right) - c \left(\vec{\mathrm{H}}.\operatorname{rot} \vec{\mathrm{E}} \right) \right] d\tau \\ &= -\frac{dt}{4\pi} \int \left[\left(\vec{\mathrm{E}}.\frac{\partial \vec{\mathrm{D}}}{\partial t} \right) + \left(\vec{\mathrm{H}}.\frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial t} \right) \right] d\tau. \end{aligned} \tag{13}$$

Si l'on admet la validité des relations (6) entre champs et inductions, il vient

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\left(\vec{\mathrm{E}}.\vec{\mathrm{D}}\right) + \left(\vec{\mathrm{H}}.\vec{\mathrm{B}}\right)}{8\pi} d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{k\mathrm{E}^2 + \mu \mathrm{H}^2}{8\pi} d\tau. \tag{14}$$

La quantité

$$\mathrm{W} = \frac{k\mathrm{E}^2 + \mu \mathrm{H}^2}{8\pi} = \frac{\left(\vec{\mathrm{E}}.\vec{\mathrm{D}}\right) + \left(\vec{\mathrm{H}}.\vec{\mathrm{B}}\right)}{8\pi} \tag{15}$$

peut donc être considérée comme la densité de l'énergie électromagnétique dans le champ.

Si maintenant on considère une région de l'espace du volume fini $\mathcal{V}$ limitée par une surface fermée S sur laquelle le champ électromagnétique ne s'annule pas, on trouve

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \frac{\left(\vec{\mathrm{E}}.\vec{\mathrm{D}}\right) + \left(\vec{\mathrm{H}}.\vec{\mathrm{B}}\right)}{8\pi} d\tau = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t} + \int_{\mathrm{S}} \frac{c}{4\pi} \left[\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}\right]_n d\sigma, \tag{16}$$

où $\left[\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}\right]_n$ désigne la composante suivant la normale à S du produit vectoriel de $\vec{\mathrm{E}}$ par $\vec{\mathrm{H}}$. L'on voit alors que le vecteur

$$\vec{\mathrm{S}} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{\mathrm{E}} \times \vec{\mathrm{H}}\right] \tag{17}$$

doit être interprété comme étant le flux de l'énergie électromagnétique par unité de surface : c'est le vecteur radiant de Poynting.

2. Représentation complexe des grandeurs électromagnétiques. — Pour faciliter les calculs en Optique et en Électricité, il est très souvent commode de remplacer les grandeurs réelles par les grandeurs complexes dont elles sont la partie réelle : c'est là un artifice bien connu dont le succès provient des propriétés analytiques très simples de la fonction exponentielle.

Considérons par exemple une onde électromagnétique plane et monochromatique et soit E_x l'une des composantes de son champ électromagnétique. Comme nous l'avons vu plus haut, nous pouvons poser

$$E_x = |E_x^0| \cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right) + \varphi\right] \tag{18}$$

ou en prenant l'axe des z dans la direction de propagation

$$E_x = |E_x^0| \cos[k(ct - z) + \varphi]; \tag{19}$$

où $|E_x^0|$ est une constante réelle ainsi que φ. L'artifice de calcul indiqué plus haut consiste à remplacer la grandeur réelle (19) par la grandeur complexe

$$E_x = E_x^0 \, e^{ik(ct-z)} \qquad \text{avec} \qquad E_x^0 = |E_x^0| \, e^{i\varphi}. \tag{20}$$

E_x^0 est l'amplitude complexe qui contient à la fois l'amplitude réelle $|E_x^0|$ et la constante de phase φ. La fonction $k(ct - z)$ qui figure dans l'exposant de l'exponentielle représente la propagation de l'onde dans le sens positif de l'axe des z. Si dans (20), on remplace z par $-z$, on obtient l'expression complexe d'une onde de même fréquence et de même amplitude complexe se propageant dans le sens négatif de l'axe des z. En superposant deux telles ondes se propageant en sens contraire, on obtiendra des ondes stationnaires où E_x sera proportionnelle à $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} kz\, e^{ikct}$.

Tant qu'on n'emploie que des opérations ou des équations *linéaires*, l'usage de la représentation complexe des champs électromagnétiques ne peut conduire à aucune erreur et elle est très commode. Mais quand on considère des expressions non linéaires, par exemple des expressions (15) et (17) de W et de $\vec{S}$, l'emploi de la représentation complexe ne conduit pas aux mêmes résultats que celui de la représentation réelle et l'on admet toujours qu'il faut alors en revenir à la représentation réelle. Néanmoins quand il s'agit (ce qui est le cas dans cet exposé) des ondes électromagnétiques de haute fréquence, l'emploi de la représentation complexe des champs reste très utile pour le calcul rapide des valeurs moyennes des expressions quadratiques telles que (15) et (17). C'est ce que nous allons montrer.

Soit un champ électromagnétique harmonique. Nous pouvons toujours avec la représentation *réelle* des champs, le mettre sous la forme ([1])

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0(x, y, z)\cos(kct+\varphi),\\ \vec{H} &= \vec{H}_0(x, y, z)\cos(kct+\varphi),\end{aligned}\right.$$

où $\vec{E}_0$ et $\vec{H}_0$ sont des fonctions vectorielles réelles de x, y, z. Si nous calculons W et S en substituant les formes (21) dans les formules (15) et (17), nous trouvons

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} W &= \frac{k\,|E_0|^2\cos^2(kct+\varphi)+\mu\,|H_0|^2\cos^2(kct+\varphi)}{8\pi},\\ \vec{S} &= \frac{c}{4\pi}\left[\left|\vec{E}_0\right|.\left|\vec{H}_0\right|\right]\cos^2(kct+\varphi).\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons au contraire tenter d'employer la représentation complexe des champs en remplaçant (21) par

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\vec{E} = \vec{E}_0(x, y, z)\,e^{ikct}, \qquad \vec{H} = \vec{H}_0(x, y, z)\,e^{ikct}\\ &\qquad \left(\vec{E}_0 = \left|\vec{E}_0\right| e^{i\varphi},\ \vec{H}_0 = \left|\vec{H}_0\right| e^{i\varphi}\right).\end{aligned}\right.$$

Remplaçons alors les formules (15) et (17) par

$$(24)\qquad W = \frac{1}{16\pi}[k\,|E|^2+\mu\,|H|^2], \qquad \vec{S} = \frac{c}{16\pi}\left\{\left[\vec{E}^\star\times\vec{H}\right]+\left[\vec{E}\times\vec{H}^\star\right]\right\},$$

où l'astérisque indique la quantité complexe conjuguée. Voici pour quelle raison nous adoptons ces formules (24) : pour les ondes électromagnétiques de fréquences élevées, seule la grandeur moyenne dans le temps des grandeurs W et $\vec{S}$ est réellement observable; or si l'on calcule ces valeurs moyennes d'après (22), ont trouve

$$(25)\qquad \overline{W} = \frac{1}{16\pi}[k\,|E_0|^2+\mu\,|H_0|^2], \qquad \overline{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi}\left[\left|\vec{E}_0\right|\times\left|\vec{H}_0\right|\right]$$

et ces valeurs sont précisément celles que l'on obtient en substituant (23) dans (24).

Nous voyons ainsi que si nous employons la représentation complexe des champs, les formules (24) nous fourniront directement les valeurs moyennes, seules intéressantes, des grandeurs W et $\vec{S}$; c'est pourquoi

([1]) φ peut être une constante réelle ou une fonction réelle de x, y, z.

ces formules (24) sont aujourd'hui couramment employées par certains auteurs.

Il est intéressant de remarquer ici que les théories quantiques les plus récentes du champ électromagnétique conduisent à considérer la représentation complexe des champs comme étant beaucoup plus qu'un artifice mathématique et comme ayant une signification physique profonde. Les formules du type (24) jouent dans ces théories un rôle essentiel.

3. Les équations de Maxwell en coordonnées curvilignes rectangulaires. — Nous allons avoir constamment à employer, dans la suite, des coordonnées curvilignes, mais dans tous les cas étudiés, ce seront toujours des coordonnées curvilignes rectangulaires. Il est donc nécessaire que nous sachions écrire les équations de Maxwell avec de telles coordonnées.

En coordonnées curvilignes rectangulaires, le carré d'un élément de longueur peut s'écrire sous la forme

$$ds^2 = e_1^2\,dx_1^2 + e_2^2\,dx_2^2 + e_3^2\,dx_3^2, \tag{26}$$

x_1, x_2, x_3 étant les trois coordonnées curvilignes; e_1, e_2, e_3 trois fonctions de x_1, x_2, x_3.

En considérant une petite surface située dans l'un des plans de coordonnées et en lui appliquant le théorème de Stokes, on démontre aisément que la relation vectorielle

$$\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{B} \tag{27}$$

peut se traduire, avec les coordonnées curvilignes envisagées, par les relations en composantes

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} e_3 A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 A_2\right), \\ A_2 &= \frac{1}{e_3 e_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} e_1 A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 A_3\right), \\ A_3 &= \frac{1}{e_1 e_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} e_2 A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 A_1\right). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

D'autre part, en appliquant à un parallélépipède infiniment petit construit sur trois éléments $dx_1\,dx_2\,dx_3$ concourants le théorème de Green, on voit de même que l'on doit poser ici

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 A_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 A_3\right]. \tag{29}$$

Dès lors, les équations de Maxwell s'écriront en coordonnées curvilignes rectangulaires

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}
-\frac{\mu}{c}\,e_2e_3\,\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3\,\mathrm{E}_3-\frac{\partial}{\partial x_3}\,e_2\,\mathrm{E}_2,\\
+\frac{\varepsilon}{c}\,e_2e_3\,\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3\,\mathrm{H}_3-\frac{\partial}{\partial x_3}\,e_2\,\mathrm{H}_2;\\
-\frac{\mu}{c}\,e_3e_1\,\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\,e_1\,\mathrm{E}_1-\frac{\partial}{\partial x_1}\,e_3\,\mathrm{E}_3,\\
\frac{\varepsilon}{c}\,e_3e_1\,\frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\,e_1\,\mathrm{H}_1-\frac{\partial}{\partial x_1}\,e_3\,\mathrm{H}_3;\\
-\frac{\mu}{c}\,e_1e_2\,\frac{\partial \mathrm{H}_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2\,\mathrm{E}_2-\frac{\partial}{\partial x_2}\,e_1\,\mathrm{E}_1,\\
\frac{\varepsilon}{c}\,e_1e_2\,\frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2\,\mathrm{H}_2-\frac{\partial}{\partial x_2}\,e_1\,\mathrm{H}_1;\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2e_3\,\mathrm{H}_1&+\frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3e_1\,\mathrm{H}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\,e_1e_2\,\mathrm{H}_3=0;\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2e_3\,\mathrm{E}_1&+\frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3e_1\,\mathrm{E}_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\,e_1e_2\,\mathrm{E}_3=0.
\end{aligned}\right.$$

Nous avons généralement à appliquer ces équations à des champs harmoniques par rapport au temps, c'est-à-dire à les écrire en remplaçant $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ par ik.

4. Potentiels et vecteurs de Hertz. — On sait que l'on peut faire dériver les champs électromagnétiques de deux potentiels, l'un $\vec{\mathrm{A}}$ à caractère vectoriel, le potentiel vecteur, l'autre V à caractère scalaire, le potentiel scalaire. Les champs se calculent à partir de ces potentiels par les relations (en supposant $\varepsilon=\mu=1$)

$$(31)\qquad \vec{\mathrm{H}}=\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}},\qquad \vec{\mathrm{E}}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}\,\mathrm{V}}-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial t}.$$

Les équations de Maxwell sans second membre se trouvent automatiquement vérifiées par ces définitions. Quant aux équations avec second membre, elles fournissent, quand on y introduit (31), des relations permettant de calculer $\vec{\mathrm{A}}$ et V à partir de la distribution et du mouvement de l'électricité représentés par les grandeurs ρ et $\vec{i}$. Voici ces relations :

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial t^2}-\Delta\mathrm{V} &= 4\pi\rho+\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}\right),\\
\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial t^2}-\vec{\Delta\mathrm{A}} &= 4\pi\rho\,\frac{\vec{v}}{c}-\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}}+\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}\right).
\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on admet que les champs ont seuls le sens physique, les potentiels n'étant que des intermédiaires de calcul, ceux-ci sont affectés d'une assez large indétermination.

En effet, si l'on suppose connus les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ et si $\vec{A}$ et V sont des potentiels dont ces champs dérivent par les formules (31), on obtiendra des potentiels tout aussi acceptables en posant

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad} F}, \qquad V' = V - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{33}$$

où F est une fonction dérivable quelconque de $xyzt$. Cette indétermination des potentiels permet de leur imposer une condition supplémentaire. On choisit, depuis Lorentz, la condition suivante :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0, \tag{34}$$

qui donne aux équations (32) la forme simplifiée

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 4\pi\rho, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta\vec{A} = 4\pi\frac{\rho\vec{v}}{c}. \tag{35}$$

On voit que les potentiels, s'ils satisfont à la condition (34) de Lorentz, se propage dans le vide $\left(\rho = \vec{i} = 0\right)$ avec la vitesse c. La condition de Lorentz ne détermine pas d'ailleurs complètement les potentiels qui restent encore arbitraires dans une assez large mesure.

Lorsqu'il n'y a, dans le domaine considéré, ni courant, ni charges, le second membre disparaît dans les équations du second groupe de Maxwell, ce qui fait disparaître la dissymétrie entre les deux groupes, et l'on peut *alors* employer à la place des potentiels des *antipotentiels* que nous allons maintenant définir.

Plaçons-nous encore dans le cas du vide ($\varepsilon = \mu = 1$). Nous satisferons aux équations du second groupe de Maxwell, supposées dépourvues de second membre, en introduisant un antipotentiel-vecteur $\vec{A}'$ et un antipotentiel-scalaire $\vec{V}'$ et en posant

$$\vec{E} = \operatorname{rot}\vec{A}', \qquad \vec{H} = \overrightarrow{\operatorname{grad} V'} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}. \tag{36}$$

Le changement de signe dans la définition de $\vec{H}$ provient de la différence de signe entre les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ dans les deux groupes de Maxwell.

Si l'on admet entre les antipotentiels la relation de Lorentz

$$\frac{1}{c}\frac{\partial V'}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}' = 0, \tag{37}$$

on voit, en substituant (36) dans le premier groupe de Maxwell, que l'on a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} - \Delta V' = 0, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} - \Delta\vec{A}' = 0, \tag{38}$$

c'est-à-dire que les antipotentiels se propagent avec la vitesse c.

Il nous est maintenant utile de définir les vecteurs de Hertz. Considérons les potentiels $\vec{A}$ et V satisfaisant aux équations (34) et (35) et définissons le vecteur de Hertz électrique (ou vecteur de Hertz tout court) $\vec{\Pi}$ par les formules

$$\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}, \qquad V = -\operatorname{div}\vec{\Pi}, \tag{39}$$

grâce auxquelles la relation (34) est satisfaite. Il est visible que dans le vide

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = \Delta\vec{\Pi}, \tag{40}$$

de sorte que $\vec{\Pi}$ s'y propage avec la vitesse c. Les formules (31) nous donnent

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}, \qquad \vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}, \tag{41}$$

relations qui expriment les champs à l'aide du vecteur $\vec{\Pi}$. On sait que l'emploi du vecteur $\vec{\Pi}$ est très utile pour le calcul du rayonnement d'une antenne rectiligne et plus généralement pour l'étude des champs électromagnétiques où l'une des coordonnées est rectiligne. Nous en verrons plus tard des exemples.

De même qu'aux potentiels on peut faire correspondre le vecteur de Hertz électrique, aux antipotentiels on fera correspondre un vecteur de Hertz magnétique $\vec{\Pi}'$ en posant

$$\vec{A}' = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}'}{\partial t}, \qquad V' = -\operatorname{div}\vec{\Pi}', \tag{42}$$

ce qui satisfait à la relation de Lorentz (37). D'après (38) on voit que $\vec{\Pi}'$ se propage dans le vide avec la vitesse c, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}'}{\partial t^2} - \Delta\vec{\Pi}' = 0. \tag{43}$$

Enfin, d'après (36), les champs seront définis à partir du vecteur $\vec{\Pi}'$ par les formules

$$\vec{E}' = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}'}{\partial t}, \qquad \vec{H}' = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}'. \tag{44}$$

Les équations de propagation (40) et (43) étant de même forme, chaque fois qu'on aura trouvé une solution de l'une de ces équations, cette solution pourra servir dans le vide de vecteur $\vec{\Pi}$ ou de vecteur $\vec{\Pi}'$. Si on l'emploie comme vecteur $\vec{\Pi}$, les formules (41) nous fourniront un champ électromagnétique $\vec{E}$, $\vec{H}$, solution des équations de Maxwell : on dira que cette solution est du type électrique. Si au contraire on emploie la même solution de l'équation (40)-(43) comme vecteur $\vec{\Pi}'$, on en déduira par (44) un champ électromagnétique $\vec{E}'$, $\vec{H}'$ solution des équations de Maxwell et cette solution sera dite du type magnétique. Ces notions reviendront constamment dans la suite.

Nous avons, dans ce paragraphe, défini les potentiels et les vecteurs de Hertz dans le cas du vide, c'est-dire pour $\varepsilon = \mu = 1$, mais, d'après un résultat démontré au paragraphe 1, il nous sera possible, dans tous les cas que nous aurons à étudier, de déduire les solutions valables pour ε, $\mu \neq 1$ des solutions obtenues pour le cas du vide.

Il est facile d'écrire les formules précédentes sous une forme tensorielle. On pose

$$A_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik},$$

avec

$$\Pi_{14} = \Pi_x, \quad \Pi_{24} = \Pi_y, \quad \Pi_{34} = \Pi_z, \quad \Pi_{23} = -\Pi'_x, \quad \Pi_{31} = -\Pi'_y, \quad \Pi_{12} = -\Pi'_z,$$

et l'on trouve

$$\vec{A} = -\operatorname{rot}\vec{\Pi}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}, \qquad V = -\operatorname{div}\vec{\Pi}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} = 0,$$

puis

$$\vec{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}'}{\partial t},$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}'}{\partial t^2},$$

équations qui résument les équations (39) à (44).

5. **Les fonctions U de Bromwich-Borgnis.** — Nous aurons à utiliser constamment une méthode de dérivation des champs qui a été notamment développée par M. Borgnis [1]. Elle s'applique au cas où les coordonnées curvilignes rectangulaires employées sont telles que : 1° l'on ait $e_1 = 1$; 2° le rapport $\frac{e_2}{e_3}$ soit indépendant de la variable x_1. Ces hypothèses sont très souvent vérifiées dans les problèmes usuels.

Pour exposer la méthode, nous supposerons $\varepsilon = \mu = 1$ puisque nous savons toujours ramener le cas $\varepsilon, \mu \neq 1$ au cas $\varepsilon = \mu = 1$. Les équations de Maxwell s'écriront alors pour une onde harmonique avec l'hypothèse $e_1 = 1$,

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
-ike_2e_3\,\mathrm{H}_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3\,\mathrm{E}_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\,e_2\,\mathrm{E}_2,\\
ike_2e_3\,\mathrm{E}_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3\,\mathrm{H}_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\,e_2\,\mathrm{H}_2;\\
-ike_3\,\mathrm{H}_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3}\,\mathrm{E}_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\,e_3\,\mathrm{E}_3,\\
ike_3\,\mathrm{E}_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3}\,\mathrm{H}_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\,e_3\,\mathrm{H}_3;\\
-ike_2\,\mathrm{H}_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2\,\mathrm{E}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{E}_1,\\
ike_2\,\mathrm{E}_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2\,\mathrm{H}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\,\mathrm{H}_1;\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2e_3\,\mathrm{H}_1 &+ \frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3\,\mathrm{H}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\,e_2\,\mathrm{H}_3 = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x_1}\,e_2e_3\,\mathrm{E}_1 &+ \frac{\partial}{\partial x_2}\,e_3\,\mathrm{E}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\,e_2\,\mathrm{E}_3 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Nous allons tenter de trouver une solution que nous appellerons *solution du type électrique* avec $\mathrm{H}_1 = 0$ en posant

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\mathrm{E}_1 = k^2\mathrm{U} + \dfrac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x_1^2}, & \mathrm{E}_2 = \dfrac{1}{e_2}\,\dfrac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x_1\,\partial x_2}, & \mathrm{E}_3 = \dfrac{1}{e_3}\,\dfrac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x_1\,\partial x_3},\\
\mathrm{H}_1 = 0, & \mathrm{H}_2 = +\dfrac{ki}{e_3}\,\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial x_3}, & \mathrm{H}_3 = -\dfrac{ik}{e_2}\,\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial x_2}.
\end{array}\right.$$

Avec ces définitions, on constate que les équations (45) de Maxwell sont satisfaites si U satisfait à l'équation du second ordre

$$(47)\quad \frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\,\frac{e_3}{e_2}\,\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\,\frac{e_2}{e_3}\,\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x_3}\right] + k^2\mathrm{U} = 0.$$

---

[1] *Voir* bibliographie [6]. Le principe de cette méthode est dû à M. Bromwich.

De même, si l'on cherche une solution avec $E_1 = 0$, on posera

$$(48)\quad \begin{cases} E'_1 = 0, & E'_2 = \dfrac{ik}{e_3}\dfrac{\partial U'}{\partial x_3}, & E'_3 = -\dfrac{ik}{e_2}\dfrac{\partial U'}{\partial x_2}, \\ H'_1 = -k^2 U' - \dfrac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2}, & H'_2 = -\dfrac{1}{e_2}\dfrac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_2}, & H'_3 = -\dfrac{1}{e_3}\dfrac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_3}, \end{cases}$$

en intervertissant dans (46) le rôle du champ électrique et du champ magnétique. On constate que (48) est bien une solution de (45) si U est solution de l'équation du second ordre (47) et l'on aura alors obtenu une *solution du type magnétique*.

Bref, chaque fois que l'on aura trouvé une intégrale de l'équation (47) on obtiendra par les équations (46) une solution du type électrique et par (48) une solution du type magnétique.

Si l'on compare les équations (46) et (48) respectivement avec les équations (41) et (44) du précédent paragraphe, on voit qu'elles présentent une parenté évidente si l'on identifie la fonction U avec la composante Π_1 d'un vecteur de Hertz électrique et la fonction U' avec la composante Π'_1 d'un vecteur de Hertz magnétique, ces deux vecteurs de Hertz étant supposés n'avoir comme composante non nulle que leur composante d'indice 1. Cependant l'identification des fonctions U de Bromwich-Borgnis avec la composante d'indice 1 d'un vecteur de Hertz, dont les deux autres composantes sont nulles, doit dans certains cas être effectuée avec précaution comme nous le montrerons à propos des coordonnées sphériques.