

PROBLÈMES
DE
PROPAGATIONS GUIDÉES
DES
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Ondes et mouvements (*Collection de Physique Mathématique*).

In-8 de 132 pages; 1926. (Épuisé.)

La Mécanique ondulatoire (*Mémorial des Sciences physiques*,

fascicule 1). In-8. (Épuisé.)

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules

(*Collection de Physique mathématique*). In-8 de vi-224 pages;
1950.

Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion. In-8

(16-25) de 210 pages; 1943.

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des

champs. In-8 (16-25) de vi-208 pages; 1949.

EN COLLABORATION AVEC MAURICE DE BROGLIE :

Introduction à la physique des rayons X et des rayons

gamma. In-8 (16-25) de 201 pages, avec 27 figures et 11 planches.

(*Sous presse.*)

PROBLÈMES
DE
PROPAGATIONS GUIDÉES
DES
ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

PAR



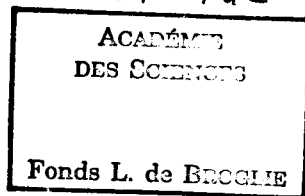
Louis de BROGLIE

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

DEUXIÈME ÉDITION



Inv. n° 762



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1951

Copyright by Gauthier-Villars, 1951.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE

La question de l'emploi des ondes électromagnétiques très courtes, ayant une longueur d'onde de l'ordre du décimètre, est aujourd'hui tout à fait à l'ordre du jour. L'une des circonstances qui rendent ces ondes particulièrement intéressantes pour la radiotechnique est la possibilité de les guider ou de les diriger à l'aide de dispositifs tels que guides, cornets ou miroirs permettant d'obtenir des faisceaux dirigés analogues à des faisceaux lumineux. Comme il est bien connu, de semblables dispositifs doivent avoir des dimensions supérieures à la longueur d'onde : tandis que pour les ondes ayant des longueurs d'onde de l'ordre de l'hectomètre ou même du mètre, on serait obligé d'employer des appareils ayant des dimensions trop considérables, des appareils d'un encombrement très acceptable suffiront pour les ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre du décimètre. Les problèmes relatifs à la propagation des ondes électromagnétiques dans des tuyaux ou cornets, ainsi que la détermination des ondes électromagnétiques stationnaires dans des enceintes à parois métalliques peuvent être le siège, présentent donc aujourd'hui un grand intérêt tant au point de vue pratique qu'au point de vue théorique.

Il est curieux de remarquer que des problèmes de ce type avaient déjà attiré les chercheurs aux environs de 1900 et il est souvent utile actuellement de se reporter à des Mémoires écrits à cette époque et qui avaient été un peu oubliés depuis. La raison en est la suivante : au début de l'étude expérimentale des ondes électromagnétiques par Hertz et ses continuateurs, on avait surtout employé des ondes produites par des oscillateurs de petites dimensions et possédant par suite des longueurs d'onde de l'ordre du mètre ou du décimètre. L'attention s'était donc portée tout naturellement sur les propriétés des ondes de cette catégorie.

Mais le développement ultérieur de la Radiotélégraphie s'est effectué, on le sait, dans le sens de l'emploi de plus en plus exclusif d'ondes de grandes longueurs d'onde dépassant souvent de beaucoup le kilomètre pour lesquelles les problèmes de guidage ne présentent plus aucun intérêt pratique; on avait donc presque complètement perdu de vue ces problèmes. Depuis une vingtaine d'années, par contre, la technique radiotélégraphique s'est orientée à nouveau vers l'emploi des ondes courtes et les longueurs d'onde de l'ordre de l'hectomètre ou du mètre sont celles qu'on utilise le plus fréquemment aujourd'hui.

Dans ces dernières années, continuant à descendre l'échelle des longueurs d'onde, l'attention des radioélectriciens s'est portée sur les ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre du décimètre, et de nombreux travaux ont été consacrés non seulement aux moyens de produire et de recevoir de telles ondes, mais aussi à l'étude des procédés permettant de diriger leur propagation.

Mon attention ayant été récemment attirée sur ces problèmes de propagation guidée, j'ai étudié les principaux travaux qui y ont été consacrés dans ces dernières années, notamment les beaux Mémoires publiés en France par MM. Clavier et Léon Brillouin.

C'est un résumé de ces travaux que je présente dans ce livre. Je n'y prétends nullement à l'originalité car je me suis simplement proposé de donner une vue d'ensemble de la question : tout au plus, ai-je sur quelques points précisé certaines démonstrations ou certaines idées. Mais j'ai l'espoir que, même sous cette forme modeste, cet Ouvrage pourra rendre quelques services aux physiciens et aux radioélectriciens qui voudront aborder l'examen de problèmes dont l'importance et l'intérêt sont maintenant très considérables tant au point de vue scientifique qu'au point de vue technique.

Octobre 1940.

LOUIS DE BROGLIE.



PRÉFACE

DE LA SECONDE ÉDITION

Quand la première édition de cet Ouvrage a été publiée en 1941, la technique des ondes ultra-courtes était déjà très développée aux États-Unis, mais en France elle n'avait pas encore fait l'objet de beaucoup de travaux et les conditions où nous nous trouvions alors placés ne permettaient d'ailleurs que des recherches clandestines tout au moins dans le domaine expérimental. Depuis lors, l'étude des hyperfréquences s'est beaucoup développée dans notre pays, notamment dans les laboratoires du Centre national d'Études des Télécommunications (C. N. E. T.) et dans ceux de certaines sociétés industrielles. La publication du présent Ouvrage, qui apportait une vue d'ensemble sur la théorie des guides d'ondes et sur des questions voisines alors peu connues chez nous, a pu rendre quelques services aux radioélectriciens qui travaillaient dans ce domaine.

Aujourd'hui, la première édition étant épuisée, nous en donnons une deuxième édition. Mais, absorbé par d'autres occupations, nous n'avons pas pu voir en détail l'ensemble des innombrables travaux qui ont paru à l'étranger sur les sujets traités dans ce livre. Aussi nous sommes-nous borné, après avoir rectifié ou amélioré divers passages de la rédaction primitive, à donner des indications bibliographiques sur quelques travaux parus *en France* dans ces dernières années, ce qui permettra au lecteur de se renseigner davantage et de compléter sur divers points les développements contenus dans le texte.

Septembre 1949.

LOUIS DE BROGLIE.

PROBLÈMES DE PROPAGATIONS GUIDÉES

DES

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DE MAXWELL.

1. Les équations de Maxwell en coordonnées rectangulaires cartésiennes. — Le champ électromagnétique est, on le sait, caractérisé par les deux vecteurs \vec{E} et \vec{H} , champ électrique et champ magnétique, et par les deux autres vecteurs \vec{D} et \vec{B} , induction électrique et induction magnétique, dont les définitions sont bien connues. D'autre part, la présence et le mouvement de l'électricité sont caractérisés par la densité d'électricité ρ et la densité de courant électrique \vec{i} .

Ceci rappelé, nous écrirons les équations de Maxwell qui lient ces différentes grandeurs sous la forme

$$(1) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E},$$

$$(2) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} - 4\pi \frac{\vec{i}}{c},$$

$$(3) \quad \text{div } \vec{B} = 0,$$

$$(4) \quad \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho.$$

Ces équations sont écrites en exprimant les grandeurs électriques \vec{E} et \vec{D}

en unités électrostatiques ainsi que les charges et les courants tandis que les grandeurs magnétiques \vec{H} et \vec{B} sont exprimées en unités électromagnétiques. La constante c est le rapport de l'unité électromagnétique de charge électrique à l'unité électrostatique.

Les équations (1) et (3) constituent le premier groupe des équations de Maxwell (groupe sans second membre), les équations (2) et (4) constituent le deuxième groupe (groupe avec second membre). Les équations (1)-(4) sont compatibles parce que l'on a entre ρ et \vec{i} , la relation

$$(5) \quad \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{i} = 0$$

exprimant la conservation de l'électricité.

Dans ce qui suit, nous admettrons toujours que le milieu où nous étudions les phénomènes électromagnétiques possède une constante diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ telles que l'on ait

$$(6) \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

ε et μ étant des constantes caractéristiques de ce milieu qui est ainsi supposé homogène et isotrope au point de vue électromagnétique. En particulier, nous considérerons souvent le cas du vide où $\varepsilon = \mu = 1$.

Très fréquemment, nous supposerons que le milieu considéré ne contient ni charges, ni courants ⁽¹⁾, ce qui nous conduira à poser $\rho = \vec{i} = 0$. De plus, nous envisagerons habituellement des phénomènes électromagnétiques harmoniques par rapport au temps, c'est-à-dire où toutes les grandeurs de champ varient comme $\frac{\sin}{\cos} ket$ (ou en notation complexe comme e^{iket}), donc avec une fréquence $\nu = \frac{kc}{2\pi}$.

En résumé, nous aurons habituellement à utiliser les équations (1)-(4) sous la forme suivante :

$$(1') \quad ik\mu \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{E},$$

$$(2') \quad ik\varepsilon \vec{E} = \operatorname{rot} \vec{H},$$

$$(3') \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$(4') \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0.$$

(1) C'est-à-dire qu'il est isolant et ne contient pas de charges.

Comme on le vérifie facilement, les équations de Maxwell entraînent les relations

$$(7) \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \left(V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \right),$$

où Δ est le Laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Les équations (7) expriment que les champs électromagnétiques se propagent dans le milieu caractérisé par les constantes ε et μ avec la vitesse V et en particulier avec la vitesse c dans le vide. C'est là, on le sait, la base de la théorie électromagnétique de la lumière.

Pour les phénomènes harmoniques dans le temps, les équations (7) prennent la forme

$$(8) \quad \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0.$$

En particulier, on trouve aisément comme solutions des équations (1')-(4') et des équations (8) qui en dérivent « les ondes planes monochromatiques » définies par les formules

$$(9) \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \frac{\sin}{\cos} \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) + \varphi \right], \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \frac{\sin}{\cos} \left[2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) + \varphi \right], \end{cases}$$

où ν est la fréquence (égale à $\frac{kc}{2\pi}$) et où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la direction de propagation normale aux plans d'onde et peuvent être considérés comme les composantes d'un vecteur unité \vec{n} définissant cette direction de propagation. Les vecteurs amplitudes \vec{E}_0 et \vec{H}_0 sont liés par les relations

$$(10) \quad (\vec{n}, \vec{E}_0) = 0, \quad (\vec{n}, \vec{H}_0) = 0, \quad \sqrt{\mu} \vec{H}_0 = [\vec{n}, \sqrt{\varepsilon} \vec{E}_0].$$

Les champs sont transverseaux, c'est-à-dire tous deux perpendiculaires à la direction de propagation; ils sont perpendiculaires entre eux et, même, dans le vide ils sont, avec les unités choisies, égaux en grandeur.

Naturellement les ondes planes monochromatiques sont des solutions d'un type très particulier et il existe une infinité d'autres types de solutions. Néanmoins, il résulte des théorèmes de Fourier que toutes les solutions sans singularité des équations (1')-(4') peuvent être représentées comme une « superposition » d'un nombre fini ou infini d'ondes planes monochromatiques.

Nous allons faire maintenant une très importante remarque qui nous servira souvent dans la suite. Reportons-nous aux équations (1')-(4') et posons-y

$$(11) \quad \vec{E}' = \sqrt{\varepsilon} \vec{E}, \quad \vec{H}' = \sqrt{\mu} \vec{H}, \quad k' = k \sqrt{\varepsilon \mu}.$$

Nous pourrions écrire les équations (1')-(4') sous la forme

$$(1'') \quad ik' \vec{H}' = - \text{rot} \vec{E}',$$

$$(2'') \quad ik' \vec{E}' = \text{rot} \vec{H}',$$

$$(3'') \quad \text{div} \vec{H}' = 0,$$

$$(4'') \quad \text{div} \vec{E}' = 0.$$

Ces équations ont la même forme qu'auraient *dans le vide* les équations de Maxwell pour un champ électromagnétique harmonique de fréquence $\frac{k'c}{2\pi}$. D'où cette conclusion dont nous aurons souvent à faire usage :

Si, pour une certaine enceinte vide de matière, on a trouvé une certaine solution harmonique des équations de Maxwell correspondant à une certaine valeur de k , on obtiendra une solution valable pour la même enceinte remplie d'une matière de constante diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ en remplaçant (1) dans la première solution k par $k\sqrt{\varepsilon\mu}$, \vec{E} par $\sqrt{\varepsilon} \vec{E}$ et \vec{H} par $\sqrt{\mu} \vec{H}$.

Grâce à ce résultat, nous pourrions, quand nous aurons résolu un problème de vibrations propres ou de propagation guidée pour une certaine enceinte vide de matière, trouver automatiquement et sans calculs nouveaux les solutions valables pour la même enceinte quand elle est remplie d'une substance pour laquelle ε et μ sont différents de 1.

Pour terminer ce paragraphe, nous rappellerons la définition de la densité d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting.

Dans un espace où règne un champ électromagnétique, chaque élément $\rho d\tau$ de charge électrique est soumis à une force électrique égale à $\rho E d\tau$ et à une force électromagnétique proportionnelle au produit vectoriel de la vitesse locale du déplacement de l'électricité par le champ magnétique en ce point. Cette dernière force étant perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas, et le travail accompli par le champ

(1) Toutefois ce changement ne doit pas être fait dans l'exponentielle e^{ikt} .

électromagnétique sur la matière électrisée pendant le temps dt se réduit à

$$(12) \quad d\mathfrak{E} = dt \int (\vec{E}, \vec{v})_v d\tau = dt \int (\vec{E}, \vec{i}) d\tau.$$

En supposant le champ électromagnétique nul à l'infini et en remplaçant \vec{i} par son expression tirée de (2), puis tenant compte de (1), on trouve pour ce travail élémentaire

$$(13) \quad \begin{aligned} d\mathfrak{E} &= \frac{dt}{4\pi} \int \left[\vec{E}, \left(c \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right] d\tau \\ &= - \frac{dt}{4\pi} \int \left[\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) - c (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) \right] d\tau \\ &= - \frac{dt}{4\pi} \int \left[\left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \left(\vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Si l'on admet la validité des relations (6) entre champs et inductions, il vient

$$(14) \quad \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{8\pi} d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{kE^2 + \mu H^2}{8\pi} d\tau.$$

La quantité

$$(15) \quad W = \frac{kE^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{8\pi}$$

peut donc être considérée comme la densité de l'énergie électromagnétique dans le champ.

Si maintenant on considère une région de l'espace du volume fini \mathfrak{V} limitée par une surface fermée S sur laquelle le champ électromagnétique ne s'annule pas, on trouve

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathfrak{V}} \frac{(\vec{E}, \vec{D}) + (\vec{H}, \vec{B})}{8\pi} d\tau = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \int_S \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]_n d\sigma,$$

où $[\vec{E} \times \vec{H}]_n$ désigne la composante suivant la normale à S du produit vectoriel de \vec{E} par \vec{H} . L'on voit alors que le vecteur

$$(17) \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}]$$

doit être interprété comme étant le flux de l'énergie électromagnétique par unité de surface : c'est le vecteur radiant de Poynting.

2. Représentation complexe des grandeurs électromagnétiques. — Pour faciliter les calculs en Optique et en Électricité, il est très souvent commode de remplacer les grandeurs réelles par les grandeurs complexes dont elles sont la partie réelle : c'est là un artifice bien connu dont le succès provient des propriétés analytiques très simples de la fonction exponentielle.

Considérons par exemple une onde électromagnétique plane et monochromatique et soit E_x l'une des composantes de son champ électromagnétique. Comme nous l'avons vu plus haut, nous pouvons poser

$$(18) \quad E_x = |E_x^0| \cos \left[2\pi\nu \left(t - \frac{zx + \beta y + \gamma z}{c} \right) + \varphi \right]$$

ou en prenant l'axe des z dans la direction de propagation

$$(19) \quad E_x = |E_x^0| \cos [k(ct - z) + \varphi],$$

où $|E_x^0|$ est une constante réelle ainsi que φ . L'artifice de calcul indiqué plus haut consiste à remplacer la grandeur réelle (19) par la grandeur complexe

$$(20) \quad E_x = E_x^0 e^{ik(ct-z)} \quad \text{avec} \quad E_x^0 = |E_x^0| e^{i\varphi}.$$

E_x^0 est l'amplitude complexe qui contient à la fois l'amplitude réelle $|E_x^0|$ et la constante de phase φ . La fonction $k(ct - z)$ qui figure dans l'exposant de l'exponentielle représente la propagation de l'onde dans le sens positif de l'axe des z . Si dans (20), on remplace z par $-z$, on obtient l'expression complexe d'une onde de même fréquence et de même amplitude complexe se propageant dans le sens négatif de l'axe des z . En superposant deux telles ondes se propageant en sens contraire, on obtiendra des ondes stationnaires où E_x sera proportionnelle à $\frac{\sin}{\cos} k z e^{i h c t}$.

Tant qu'on n'emploie que des opérations ou des équations *linéaires*, l'usage de la représentation complexe des champs électromagnétiques ne peut conduire à aucune erreur et elle est très commode. Mais quand on considère des expressions non linéaires, par exemple des expressions (15) et (17) de W et de \vec{S} , l'emploi de la représentation complexe ne conduit pas aux mêmes résultats que celui de la représentation réelle et l'on admet toujours qu'il faut alors en revenir à la représentation réelle. Néanmoins quand il s'agit (ce qui est le cas dans cet exposé) des ondes électromagnétiques de haute fréquence, l'emploi de la représentation complexe des champs reste très utile pour le calcul rapide des valeurs moyennes des expressions quadratiques telles que (15) et (17). C'est ce que nous allons montrer.

Soit un champ électromagnétique harmonique. Nous pouvons toujours avec la représentation *réelle* des champs, le mettre sous la forme ⁽¹⁾

$$(21) \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(x, y, z) \cos(kct + \varphi), \\ \vec{H} = \vec{H}_0(x, y, z) \cos(kct + \varphi), \end{cases}$$

où \vec{E}_0 et \vec{H}_0 sont des fonctions vectorielles réelles de x, y, z . Si nous calculons W et S en substituant les formes (21) dans les formules (15) et (17), nous trouvons

$$(22) \quad \begin{cases} W = \frac{k \{ |\vec{E}_0|^2 \cos^2(kct + \varphi) + \mu \{ |\vec{H}_0|^2 \cos^2(kct + \varphi) \}}{8\pi}, \\ \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [|\vec{E}_0| \cdot |\vec{H}_0|] \cos^2(kct + \varphi). \end{cases}$$

Nous pouvons au contraire tenter d'employer la représentation complexe des champs en remplaçant (21) par

$$(23) \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0(x, y, z) e^{ikct}, & \vec{H} = \vec{H}_0(x, y, z) e^{ikct} \\ (\vec{E}_0 = |\vec{E}_0| e^{i\varphi}, \vec{H}_0 = |\vec{H}_0| e^{i\varphi}). \end{cases}$$

Remplaçons alors les formules (15) et (17) par

$$(24) \quad W = \frac{1}{16\pi} [k \{ |\vec{E}|^2 + \mu \{ |\vec{H}|^2 \}], \quad \vec{S} = \frac{c}{16\pi} \{ [\vec{E}^* \times \vec{H}] + [\vec{E} \times \vec{H}^*] \},$$

où l'astérisque indique la quantité complexe conjuguée. Voici pour quelle raison nous adoptons ces formules (24) : pour les ondes électromagnétiques de fréquences élevées, seule la grandeur moyenne dans le temps des grandeurs W et \vec{S} est réellement observable; or si l'on calcule ces valeurs moyennes d'après (22), on trouve

$$(25) \quad \bar{W} = \frac{1}{16\pi} [k \{ |\vec{E}_0|^2 + \mu \{ |\vec{H}_0|^2 \}], \quad \bar{\vec{S}} = \frac{c}{8\pi} [|\vec{E}_0| \times |\vec{H}_0|]$$

et ces valeurs sont précisément celles que l'on obtient en substituant (23) dans (24).

Nous voyons ainsi que si nous employons la représentation complexe des champs, les formules (24) nous fourniront directement les valeurs moyennes, seules intéressantes, des grandeurs W et \vec{S} ; c'est pourquoi

(1) φ peut être une constante réelle ou une fonction réelle de x, y, z .

ces formules (24) sont aujourd'hui couramment employées par certains auteurs.

Il est intéressant de remarquer ici que les théories quantiques les plus récentes du champ électromagnétique conduisent à considérer la représentation complexe des champs comme étant beaucoup plus qu'un artifice mathématique et comme ayant une signification physique profonde. Les formules du type (24) jouent dans ces théories un rôle essentiel.

3. Les équations de Maxwell en coordonnées curvilignes rectangulaires. — Nous allons avoir constamment à employer, dans la suite, des coordonnées curvilignes, mais dans tous les cas étudiés, ce seront toujours des coordonnées curvilignes rectangulaires. Il est donc nécessaire que nous sachions écrire les équations de Maxwell avec de telles coordonnées.

En coordonnées curvilignes rectangulaires, le carré d'un élément de longueur peut s'écrire sous la forme

$$(26) \quad ds^2 = e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2 + e_3^2 dx_3^2,$$

x_1, x_2, x_3 étant les trois coordonnées curvilignes; e_1, e_2, e_3 trois fonctions de x_1, x_2, x_3 .

En considérant une petite surface située dans l'un des plans de coordonnées et en lui appliquant le théorème de Stokes, on démontre aisément que la relation vectorielle

$$(27) \quad \vec{\Lambda} = \text{rot } \vec{B}$$

peut se traduire, avec les coordonnées curvilignes envisagées, par les relations en composantes

$$(28) \quad \begin{cases} \Lambda_1 = \frac{1}{e_2 e_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} e_3 \Lambda_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 \Lambda_2 \right), \\ \Lambda_2 = \frac{1}{e_3 e_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} e_1 \Lambda_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 \Lambda_3 \right), \\ \Lambda_3 = \frac{1}{e_1 e_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} e_2 \Lambda_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 \Lambda_1 \right). \end{cases}$$

D'autre part, en appliquant à un parallélépipède infiniment petit construit sur trois éléments $dx_1 dx_2 dx_3$ concourants le théorème de Green, on voit de même que l'on doit poser ici

$$(29) \quad \text{div } \vec{\Lambda} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 \Lambda_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 \Lambda_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 \Lambda_3 \right].$$

Dès lors, les équations de Maxwell s'écriront en coordonnées curvilignes rectangulaires

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{c} e_2 e_3 \frac{\partial H_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 E_2, \\ -\frac{\varepsilon}{c} e_2 e_3 \frac{\partial E_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 H_2; \\ -\frac{1}{c} e_3 e_1 \frac{\partial H_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 E_3, \\ -\frac{\varepsilon}{c} e_3 e_1 \frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 H_3; \\ -\frac{1}{c} e_1 e_2 \frac{\partial H_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 E_1, \\ -\frac{\varepsilon}{c} e_1 e_2 \frac{\partial E_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} e_1 H_1; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 H_3 &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 E_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 e_1 E_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_1 e_2 E_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Nous avons généralement à appliquer ces équations à des champs harmoniques par rapport au temps, c'est-à-dire à les écrire en remplaçant $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ par ik .

4. **Potentiels et vecteurs de Hertz.** — On sait que l'on peut faire dériver les champs électromagnétiques de deux potentiels, l'un \vec{A} à caractère vectoriel, le potentiel vecteur, l'autre V à caractère scalaire, le potentiel scalaire. Les champs se calculent à partir de ces potentiels par les relations (en supposant $\varepsilon = \mu = 1$)

$$(31) \quad \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Les équations de Maxwell sans second membre se trouvent automatiquement vérifiées par ces définitions. Quant aux équations avec second membre, elles fournissent, quand on y introduit (31), des relations permettant de calculer \vec{A} et V à partir de la distribution et du mouvement de l'électricité représentés par les grandeurs ρ et \vec{i} . Voici ces relations :

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V &= 4\pi\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right), \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} &= 4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c} - \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right). \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on admet que les champs ont seuls le sens physique, les potentiels n'étant que des intermédiaires de calcul, ceux-ci sont affectés d'une assez large indétermination.

En effet, si l'on suppose connus les champs \vec{E} et \vec{H} et si \vec{A} et V sont des potentiels dont ces champs dérivent par les formules (31), on obtiendra des potentiels tout aussi acceptables en posant

$$(33) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad} F}, \quad V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t},$$

où F est une fonction dérivable quelconque de $xyz t$. Cette indétermination des potentiels permet de leur imposer une condition supplémentaire. On choisit, depuis Lorentz, la condition suivante :

$$(34) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0,$$

qui donne aux équations (32) la forme simplifiée

$$(35) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = 4\pi \varphi, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = 4\pi \frac{\vec{\rho}}{c}.$$

On voit que les potentiels, s'ils satisfont à la condition (34) de Lorentz, se propage dans le vide ($\rho = \vec{i} = 0$) avec la vitesse c . La condition de Lorentz ne détermine pas d'ailleurs complètement les potentiels qui restent encore arbitraires dans une assez large mesure.

Lorsqu'il n'y a, dans le domaine considéré, ni courant, ni charges, le second membre disparaît dans les équations du second groupe de Maxwell, ce qui fait disparaître la dissymétrie entre les deux groupes, et l'on peut alors employer à la place des potentiels des *antipotentiel*s que nous allons maintenant définir.

Plaçons-nous encore dans le cas du vide ($\varepsilon = \mu = 1$). Nous satisferons aux équations du second groupe de Maxwell, supposées dépourvues de second membre, en introduisant un antipotentiel-vecteur \vec{A}' et un antipotentiel-scalaire \vec{V}' et en posant

$$(36) \quad \vec{E} = \text{rot} \vec{A}', \quad \vec{H} = \overrightarrow{\text{grad} V'} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}.$$

Le changement de signe dans la définition de \vec{H} provient de la différence de signe entre les termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ dans les deux groupes de Maxwell.

Si l'on admet entre les antipotentiels la relation de Lorentz

$$(37) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}' = 0,$$

on voit, en substituant (36) dans le premier groupe de Maxwell, que l'on a

$$(38) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} - \Delta V' = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}' = 0,$$

c'est-à-dire que les antipotentiels se propagent avec la vitesse c .

Il nous est maintenant utile de définir les vecteurs de Hertz. Considérons les potentiels \vec{A} et V satisfaisant aux équations (34) et (35) et définissons le vecteur de Hertz électrique (ou vecteur de Hertz tout court) \vec{H} par les formules

$$(39) \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad V = -\operatorname{div} \vec{H}.$$

grâce auxquelles la relation (34) est satisfaite. Il est visible que dans le vide

$$(40) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \Delta \vec{H},$$

de sorte que \vec{H} s'y propage avec la vitesse c . Les formules (31) nous donnent

$$(41) \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \quad \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi},$$

relations qui expriment les champs à l'aide du vecteur $\vec{\Pi}$. On sait que l'emploi du vecteur $\vec{\Pi}$ est très utile pour le calcul du rayonnement d'une antenne rectiligne et plus généralement pour l'étude des champs électromagnétiques où l'une des coordonnées est rectiligne. Nous en verrons plus tard des exemples.

De même qu'aux potentiels on peut faire correspondre le vecteur de Hertz électrique, aux antipotentiels on fera correspondre un vecteur de Hertz magnétique \vec{H}' en posant

$$(42) \quad \vec{A}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t}, \quad V' = -\operatorname{div} \vec{H}',$$

ce qui satisfait à la relation de Lorentz (37). D'après (38) on voit

que $\vec{\Pi}'$ se propage dans le vide avec la vitesse c , c'est-à-dire que

$$(43) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}'}{\partial t^2} - \Delta \vec{\Pi}' = 0.$$

Enfin, d'après (36), les champs seront définis à partir du vecteur $\vec{\Pi}'$ par les formules

$$(44) \quad \vec{E}' = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}'}{\partial t}, \quad \vec{H}' = -\text{grad } \text{div } \vec{\Pi}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}'}{\partial t^2} = -\text{rot } \text{rot } \vec{\Pi}'.$$

Les équations de propagation (40) et (43) étant de même forme, chaque fois qu'on aura trouvé une solution de l'une de ces équations, cette solution pourra servir dans le vide de vecteur $\vec{\Pi}$ ou de vecteur $\vec{\Pi}'$. Si on l'emploie comme vecteur $\vec{\Pi}$, les formules (41) nous fourniront un champ électromagnétique \vec{E} , \vec{H} , solution des équations de Maxwell : on dira que cette solution est du type électrique. Si au contraire on emploie la même solution de l'équation (40)-(43) comme vecteur $\vec{\Pi}'$, on en déduira par (44) un champ électromagnétique \vec{E}' , \vec{H}' solution des équations de Maxwell et cette solution sera dite du type magnétique. Ces notions reviendront constamment dans la suite.

Nous avons, dans ce paragraphe, défini les potentiels et les vecteurs de Hertz dans le cas du vide, c'est-à-dire pour $\varepsilon = \mu = 1$, mais, d'après un résultat démontré au paragraphe I, il nous sera possible, dans tous les cas que nous aurons à étudier, de déduire les solutions valables pour $\varepsilon, \mu \neq 1$ des solutions obtenues pour le cas du vide.

Il est facile d'écrire les formules précédentes sous une forme tensorielle. On pose

$$\Lambda_i = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik},$$

avec

$$\Pi_{11} = \Pi_x, \quad \Pi_{21} = \Pi_y, \quad \Pi_{31} = \Pi_z, \quad \Pi_{22} = -\Pi'_x, \quad \Pi_{32} = -\Pi'_y, \quad \Pi_{12} = -\Pi'_z,$$

et l'on trouve

$$\vec{\Lambda} = -\text{rot } \vec{\Pi}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \quad V = -\text{div } \vec{\Pi}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{\Lambda} = 0,$$

puis

$$\vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{\Pi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} - \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}'}{\partial t},$$

$$\vec{H} = \text{rot } \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} - \text{grad } \text{div } \vec{\Pi}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}'}{\partial t^2},$$

équations qui résument les équations (39) à (44).

5. **Les fonctions U de Bromwich-Borgnis.** — Nous aurons à utiliser constamment une méthode de dérivation des champs qui a été notamment développée par M. Borgnis ⁽¹⁾. Elle s'applique au cas où les coordonnées curvilignes rectangulaires employées sont telles que :

1° l'on ait $e_1 = 1$; 2° le rapport $\frac{e_2}{e_3}$ soit indépendant de la variable x_1 . Ces

hypothèses sont très souvent vérifiées dans les problèmes usuels.

Pour exposer la méthode, nous supposons $\varepsilon = \mu = 1$ puisque nous savons toujours ramener le cas $\varepsilon, \mu \neq 1$ au cas $\varepsilon = \mu = 1$. Les équations de Maxwell s'écriront alors pour une onde harmonique avec l'hypothèse $e_1 = 1$,

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} -ike_2 e_3 H_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 E_2, \\ ike_2 e_3 E_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 H_2; \\ -ike_3 H_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 E_3, \\ ike_3 E_2 = \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} e_3 H_3; \\ -ike_2 H_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1, \\ ike_2 E_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1; \\ \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 H_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 H_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 H_3 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} e_2 e_3 E_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_3 E_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 E_3 = 0. \end{array} \right.$$

Nous allons tenter de trouver une solution que nous appellerons *solution du type électrique* avec $H_1 = 0$ en posant

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = k_2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad E_3 = \frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ H_1 = 0, \quad H_2 = + \frac{ki}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad H_3 = - \frac{ik}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{array} \right.$$

Avec ces définitions, on constate que les équations (45) de Maxwell sont satisfaites si U satisfait à l'équation du second ordre

$$(47) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} e_3 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} e_2 \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] + k^2 U = 0.$$

(1) Voir bibliographie [6]. Le principe de cette méthode est dû à M. Bromwich.

De même, si l'on cherche une solution avec $E_1 = 0$, on posera

$$(48) \quad \begin{cases} E_1 = 0, & E_2 = \frac{ik}{e_3} \frac{\partial U'}{\partial x_3}, & E_3 = -\frac{ik}{e_2} \frac{\partial U'}{\partial x_2}, \\ H_1 = -k^2 U' - \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1^2}, & H_2 = -\frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_2}, & H_3 = -\frac{1}{e_3} \frac{\partial^2 U'}{\partial x_1 \partial x_3}, \end{cases}$$

en intervertissant dans (46) le rôle du champ électrique et du champ magnétique. On constate que (48) est bien une solution de (45) si U est solution de l'équation du second ordre (47) et l'on aura alors obtenu une *solution du type magnétique*.

Bref, chaque fois que l'on aura trouvé une intégrale de l'équation (47) on obtiendra par les équations (46) une solution du type électrique et par (48) une solution du type magnétique.

Si l'on compare les équations (46) et (48) respectivement avec les équations (41) et (44) du précédent paragraphe, on voit qu'elles présentent une parenté évidente si l'on identifie la fonction U avec la composante H_1 d'un vecteur de Hertz électrique et la fonction U' avec la composante H_1 d'un vecteur de Hertz magnétique, ces deux vecteurs de Hertz étant supposés n'avoir comme composante non nulle que leur composante d'indice 1. Cependant l'identification des fonctions U de Bromwich-Borgnis avec la composante d'indice 1 d'un vecteur de Hertz, dont les deux autres composantes sont nulles, doit dans certains cas être effectuée avec précaution comme nous le montrerons à propos des coordonnées sphériques.



CHAPITRE II.

PROPAGATION DES ONDES DANS LES GUIDES ÉLECTRIQUES.

1. Définition des guides électriques. — On désigne sous le nom de guides électriques (ou souvent sous le nom assez mal choisi de guides diélectriques) un tuyau rectiligne de section constante à l'intérieur duquel se propage des ondes électromagnétiques. Le plus souvent le guide sera limité par une paroi métallique dont nous supposerons pour l'instant la conductibilité si élevée qu'on puisse sans grande erreur la prendre infinie. Nous admettrons qu'alors le champ électrique de l'onde qui se propage dans le guide doit en tout point de la paroi être normal à cette paroi, sans quoi le champ électrique produirait dans la paroi un courant infini, ce qui est physiquement impossible. Nous avons là une *condition aux limites* pour le champ électromagnétique, condition dont nous discuterons le sens d'une façon plus approfondie au Chapitre IV.

L'étude du champ électromagnétique en propagation dans le tube pourra se faire par la méthode de Bromwich-Bornis exposée au paragraphe précédent. On prendra l'axe rectiligne du tube comme axe des z qui jouera ainsi le rôle de la variable x_1 de l'exposé général; dans les sections droites du tube, les points seront repérés à l'aide de deux variables x_2 et x_3 qu'on choisira de manière qu'elles soient adaptées à la forme de cette section droite. L'onde électromagnétique se propagera le long du tube : comme on peut toujours représenter la phase d'une onde plane en propagation par un facteur $e^{i[kct - \vec{k} \cdot \vec{r}]}$ où \vec{k} est le *vecteur de propagation* dirigé suivant la direction de propagation et égal en longueur à $\frac{2\pi}{\lambda}$ (λ longueur d'onde), on aura ici des champs électromagnétiques proportionnels à $e^{i(kct - k_z z)}$ puisque le vecteur de propagation se réduira évidemment à sa composante z .

La fonction U de Bromwich-Borgnis dépendra donc de z par ce facteur et l'on aura toujours

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial z} = -ik_z U.$$

En portant ceci dans les équations (46) du paragraphe précédent, on voit que, pour les ondes du type électrique en propagation dans un guide à l'intérieur duquel $\varepsilon = \mu = 1$, on a

$$(2) \quad H_2 = -\frac{k}{k_z} E_3, \quad H_3 = \frac{k}{k_z} E_2, \quad H_1 = H_z = 0.$$

Ces relations absolument générales montrent que les champs électrique et magnétique transversaux sont perpendiculaires.

De même pour les ondes du type magnétique en propagation dans un guide où $\varepsilon = \mu = 1$, on a, d'après (48) du précédent paragraphe,

$$(3) \quad E'_2 = +\frac{k}{k_z} H'_3, \quad E'_3 = -\frac{k}{k_z} H'_2, \quad E'_1 = E'_z = 0,$$

ce qui exprime aussi la perpendicularité des champs transversaux.

Dans un guide rempli d'une matière pour laquelle ε et μ sont différentes de 1, on obtient immédiatement à la place de (2) et de (3) par application d'un résultat général obtenu au Chapitre I,

$$(2') \quad H_2 = -\frac{k\varepsilon}{k_z} E_3, \quad H_3 = \frac{k\varepsilon}{k_z} E_2, \quad H_1 = 0;$$

$$(3') \quad E'_2 = +\frac{k\mu}{k_z} H'_3, \quad E'_3 = -\frac{k\mu}{k_z} H'_2, \quad E'_1 = 0.$$

Introduisons la notation

$$(4) \quad x^2 = k^2 - k_z^2.$$

L'équation de propagation (47) du Chapitre I pour U donne, compte tenu de (1),

$$(5) \quad \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] + x^2 U = 0;$$

telle est l'équation dont il nous faudra dans chaque cas particulier chercher des solutions pour pouvoir en déduire les ondes du type électrique et celles du type magnétique. Les solutions obtenues devront satisfaire aux conditions aux limites imposées au champ électrique sur les parois du tube et ceci ne permettra à la constante x que d'avoir certaines valeurs particulières x_n correspondant aux divers modes de propagation possible de l'onde dans le guide. Nous sommes ici en

présence d'un de ces problèmes de valeurs propres qui se rencontrent dans de nombreuses branches de la Physique et qui jouent, on le sait, un rôle tout à fait essentiel, dans les théories quantiques contemporaines.

Ajoutons encore une remarque intéressante due à M. Léon Brillouin. L'équation (5) montre que la constante α^2 a les dimensions de l'inverse d'une surface; comme dans notre problème la seule surface qui intervienne est celle de la section droite du tube, on en déduit la loi de similitude suivante :

Si pour un certain guide électrique dont la section droite a une aire S , on a trouvé pour α une valeur possible (valeur propre) égale à α_n , pour un autre guide géométriquement semblable au premier dont la section droite est S' , on aura une valeur possible α'_n telle que

$$(6) \quad \alpha_n^2 S' = \alpha'^2_n S.$$

2. Étude des guides à section rectangulaire. — Le cas particulier le plus simple que nous ayons à étudier est celui des guides à section rectangulaire. Nous emploierons pour résoudre le problème la méthode

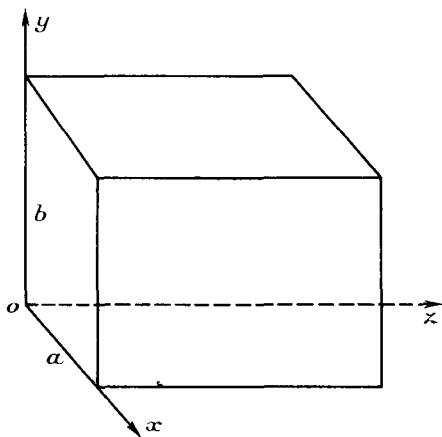


Fig. 1.

du paragraphe 1 en remarquant que dans ce cas, comme dans tous ceux qui seront examinés dans le présent Chapitre, la fonction U peut être immédiatement identifiée avec la composante z suivant l'axe du guide d'un vecteur de Hertz, électrique ou magnétique suivant les cas.

Soit donc un guide dont la section droite est un rectangle de côtés a

et b . Nous repérons les points de la section droite par des coordonnées rectangulaires x et y .

Comme on a ici

$$(7) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad e_1 = e_2 = e_3 = 1.$$

l'équation (5) a la forme

$$(8) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + z^2 U = 0$$

et l'on trouve immédiatement un système complet de solutions en posant

$$(9) \quad U = \frac{\sin lx}{\cos} \frac{\sin my}{\cos} e^{i(kzt - k_z z)}$$

(le dernier facteur représentant la propagation) sous la condition

$$(10) \quad l^2 + m^2 = z^2.$$

De la forme (9) de U , on déduit les solutions suivantes pour le champ électromagnétique :

Type électrique :

$$(11) \quad \begin{cases} E_z = z^2 \frac{\sin lx}{\cos} \frac{\sin my}{\cos} P, & H_z = 0; \\ E_x = -ik_z l \frac{\cos lx}{\sin} \frac{\sin my}{\cos} P, & H_x = -\frac{k}{k_z} E_y; \\ E_y = -ik_z m \frac{\sin lx}{\cos} \frac{\cos my}{\sin} P, & H_y = \frac{k}{k_z} E_x. \end{cases}$$

Type magnétique :

$$(12) \quad \begin{cases} H_z = z^2 \frac{\sin lx}{\cos} \frac{\sin my}{\cos} P, & E_z = 0; \\ H_x = -ik_z l \frac{\cos lx}{\sin} \frac{\sin my}{\cos} P, & E_x = +\frac{k}{k_z} H_y; \\ H_y = -ik_z m \frac{\sin lx}{\cos} \frac{\cos my}{\sin} P, & E_y = -\frac{k}{k_z} H_x. \end{cases}$$

avec l'abréviation

$$(13) \quad P = e^{i(kzt - k_z z)}.$$

Nous devons, maintenant, imposer à nos solutions les conditions aux limites

$$(14) \quad \begin{cases} E_z = E_x = 0, & \text{pour } y = 0 \text{ et } y = b; \\ E_z = E_y = 0, & \text{pour } x = 0 \text{ et } x = a. \end{cases}$$

Ces conditions nous obligent à choisir $\sin lx$ dans l'expression de E_y et $\sin my$ dans celle de E_x . De plus, il faudra avoir

$$(15) \quad l = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad m = \frac{n_2 \pi}{b} \quad (n_1 \text{ et } n_2 \text{ entiers}).$$

Finalement l'expression des champs sera

Type électrique :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_z = x^2 \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, P; & H_z = 0; \\ E_x = -ik_z \frac{n_1 \pi}{a} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, P; & H_x = ik \frac{n_2 \pi}{b} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y, P; \\ E_y = -ik_z \frac{n_2 \pi}{b} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y, P; & H_y = ik \frac{n_1 \pi}{a} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, P. \end{array} \right.$$

Type magnétique :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_z = 0; & H_z = x^2 \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y, P; \\ E_x = +ik \frac{n_2 \pi}{b} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, P; & H_x = +ik_z \frac{n_1 \pi}{a} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y, P; \\ E_y = -ik \frac{n_1 \pi}{a} \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \cos \frac{n_2 \pi}{b} y, P; & H_y = +ik_z \frac{n_2 \pi}{b} \cos \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y, P. \end{array} \right.$$

avec la condition

$$(18) \quad x^2 = k^2 - k_z^2 = \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \pi^2.$$

On peut naturellement multiplier les solutions (16) et (17) par une constante complexe C arbitraire dont la valeur dépendra des conditions de l'excitation.

Nous avons supposé qu'à l'intérieur du guide on pouvait poser $\varepsilon = \mu = 1$, ce qui sera très sensiblement exact si le guide est rempli d'air. Si au contraire le guide était rempli d'une substance telle que ε et μ soient différents de 1, on devrait, dans les formules (16) et (17), remplacer partout ⁽¹⁾ k par $k\sqrt{\varepsilon\mu}$, \vec{E} par $\sqrt{\varepsilon}\vec{E}$ et \vec{H} par $\sqrt{\mu}\vec{H}$. Nous ne prenons pas la peine d'écrire les formules ainsi obtenues. Chaque valeur propre de x dépend de deux nombres entiers n_1 et n_2 . Pour chaque couple de valeurs de ces nombres entiers, il y a une onde du type électrique et une onde du type magnétique ou, comme nous dirons plus brièvement, une onde (E) et une onde (H) pour chaque valeur

(1) Sauf, rappelons-le, dans le facteur P .

de k : ces deux ondes correspondent au même k_z , c'est-à-dire à la même longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k_z}$ et à la même vitesse de propagation de la phase

$$(19) \quad V = c \frac{k}{k_z} > c.$$

Cependant, si l'un des deux nombres n_1 ou n_2 est nul, l'onde (E) n'existe pas : en d'autres termes, les ondes $(n_1, 0)$ et $(0, n_2)$ sont uniquement du type magnétique.

Les formules précédentes permettent d'étudier en détails les diverses sortes de propagations possibles dans le tube. M. Léon Brillouin a montré que ces ondes peuvent être représentées par des superpositions convenables d'ondes planes. Il a aussi montré que la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique le long du tube a pour valeur

$$(20) \quad v = c \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{V} < c.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce résultat dont nous donnerons une démonstration générale pour tous les guides électriques.

La formule (18) nous montre que le guide ne peut pas transmettre toutes les fréquences. Il faut, en effet, que k_z soit réel sans quoi la propagation s'accompagnerait d'un amortissement et l'onde s'évanouirait progressivement. Il y a donc pour chaque type d'ondes caractérisé par 2 nombres entiers n_1 et n_2 une valeur minimum de k compatible avec une propagation sans amortissement. Cette valeur définit pour ce type d'ondes la *fréquence de coupure* au-dessous de laquelle il n'y a pratiquement plus de propagation. Si $a \geq b$, la plus petite de ces fréquences de coupure correspond à

$$(21) \quad k_{\min} = \frac{\pi}{a}.$$

Elle est égale à

$$(22) \quad v_{\min} = \frac{c}{2a}.$$

Cette fréquence minimum correspond *dans le vide* à la longueur d'onde

$$(23) \quad \lambda_{\max} = 2a,$$

mais *dans le guide* la longueur d'onde correspondant à v_{\min} est infinie comme le montrent (18) et (19).

MM. Leigh Page et Adams (1) ont étudié la propagation des ondes

(1) Bibliographie [12].

dans des guides à section polygonale régulière et montré que les ondes du type (E) ne peuvent pas, en général, s'y propager et que les ondes du type (H) elles-mêmes n'existent que dans des cas exceptionnels (section triangulaire ou hexagonale). Ces formes de guides ne paraissent pas avoir beaucoup d'importance au point de vue pratique, la forme de beaucoup la plus employée en dehors de la forme rectangulaire étant celle du tube cylindrique que nous allons maintenant étudier à la suite de nombreux auteurs.

3. Étude des guides à section circulaire. — Nous allons étudier le cas d'un guide ayant la forme d'un cylindre à section circulaire de rayon R. Nous compterons la variable z le long de l'axe du cylindre

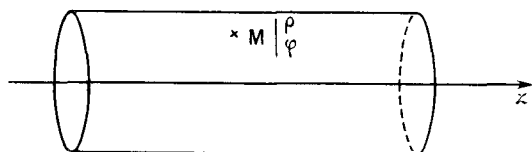


Fig. 2.

et nous compléterons le système de coordonnées cylindriques par les coordonnées ρ et φ dans le plan de la section droite.

Avec ces coordonnées cylindriques, on a

$$(24) \quad ds^2 = dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2, \quad e_1 = e_2 = 1, \quad e_3 = \rho$$

et, par suite, l'équation de la propagation de la fonction U est ici

$$(25) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + k^2 U = 0.$$

et, quand on aura trouvé une solution de (25), on en déduira une onde du type électrique par les formules

$$(26) \quad \begin{cases} E_z = -k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & E_\rho = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \rho}, & E_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}; \\ H_z = 0, & H_\rho = \frac{ik}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & H_\varphi = -ik \frac{\partial U}{\partial \rho} \end{cases}$$

et une onde du type magnétique par les formules

$$(27) \quad \begin{cases} E_z = 0, & E_\rho = \frac{ik}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E_\varphi = -ik \frac{\partial U}{\partial \rho}; \\ H_z = -k^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & H_\rho = -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \rho}, & H_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}. \end{cases}$$

Nous supposerons toujours que U dépend de z et de t par le facteur de propagation $e^{i(kct - k_z z)}$ et, suivant un procédé très usité en Physique mathématique, on obtiendra un système complet de solutions de (25), en posant

$$(28) \quad U(z, \rho, \varphi, t) = F(\rho) \Phi(\varphi) e^{i(kct - k_z z)}.$$

En introduisant (28) dans (25), on voit que (25) exprime qu'une certaine fonction de ρ est égale à une certaine fonction de φ : ceci n'est possible que si ces deux fonctions sont égales à une même constante. Pour que cela soit réalisé, il faut d'abord avoir $\Phi = \frac{\sin}{\cos} m\varphi$, où m est une constante; il faut ensuite que

$$(29) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) F = 0 \quad \text{avec } \rho_1 = \sqrt{k^2 - k_z^2} \rho = \alpha \rho.$$

Quelles sont maintenant les conditions que la fonction U doit satisfaire? Elle doit être évidemment une fonction uniforme et régulière de ρ, φ, z à l'intérieur du guide. Or, pour qu'elle soit uniforme, il faudra prendre pour la constante m un nombre entier positif ou nul. Il faudra ensuite, pour assurer la régularité, choisir une solution de (29) qui soit partout régulière à l'intérieur du cylindre. Or l'équation (29) est une équation de Bessel dont toutes les solutions, sauf une seule, présentent une singularité pour $\rho = 0$, c'est-à-dire sur l'axe du cylindre : la seule solution qui soit régulière partout même sur l'axe est la fonction de Bessel d'ordre m , $J_m(\rho_1) = J_m(\alpha \rho)$. Finalement nous trouvons pour U les solutions acceptables suivantes :

$$(30) \quad U = J_m(\alpha \rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(kct - k_z z)}, \quad \text{avec } \alpha = \sqrt{k^2 - k_z^2}.$$

De la solution (30), nous déduisons par les formules (26) et (27), les deux formes d'ondes suivantes (à un facteur constant arbitraire près) :

Type électrique :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = \alpha^2 J_m(\alpha \rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(kct - k_z z)}, \quad H_z = 0; \\ E_\rho = -ik_z \alpha J'_m(\alpha \rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot P, \quad H_\rho = -\frac{k}{k_z} E_\varphi = -ik \frac{m}{\rho} J_m(\alpha \rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi; \\ E_\varphi = -ik_z \frac{m}{\rho} J_m(\alpha \rho) \frac{\cos}{\sin} m\varphi \cdot P, \quad H_\varphi = \frac{k}{k_z} E_\rho = -ik \alpha J'_m(\alpha \rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi. \end{array} \right.$$

et

Type magnétique.

$$(32) \quad \begin{cases} H'_z = \alpha^2 J_m(\alpha \varphi) \frac{\sin m \varphi}{\cos m \varphi} P, & E_z = 0; \\ H'_\varphi = -ik_z \alpha J'_m(\alpha \varphi) \frac{\sin m \varphi}{\cos m \varphi} P, & E'_\varphi = \frac{k}{k_z} H'_\varphi = -ik \frac{m}{\varphi} J_m(\alpha \varphi) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} P; \\ H'_\varphi = -ik_z \frac{m}{\varphi} J_m(\alpha \varphi) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} P, & E'_\varphi = -\frac{k}{k_z} H'_\varphi = ik \alpha J'_m(\alpha \varphi) \frac{\sin m \varphi}{\cos m \varphi} P. \end{cases}$$

Dans ces formules, P désigne toujours le facteur de phase et $J'_m(u)$ la dérivée de $J_m(u)$ par rapport à l'argument u .

Il nous faut maintenant introduire les conditions aux limites pour le champ électrique sur la paroi du guide, conditions qui sont ici

$$(33) \quad E_z = E_\varphi = 0, \quad \text{pour } \varphi = R.$$

Ces conditions nous donnent pour les ondes du type électrique (E_m)

$$(34) \quad J_m(\alpha R) = 0.$$

et, pour les ondes du type magnétique (H_m)

$$(35) \quad J'_m(\alpha R) = 0.$$

Désignons par $\mu_1^{(m)}, \mu_2^{(m)}, \dots, \mu_i^{(m)}, \dots$ les zéros non nuls successifs de la fonction $J_m(u)$ et de même par $\nu_1^{(m)}, \dots, \nu_i^{(m)}, \dots$ les zéros non nuls successifs de $J'_m(u)$. Alors la condition (34) pour les ondes (E_m), nous donne

$$(36) \quad \alpha = \frac{\mu_i^{(m)}}{R} = \alpha_{mi}.$$

et la condition (35), pour les ondes (H_m), nous donne de même

$$(37) \quad \alpha = \frac{\nu_i^{(m)}}{R} = \alpha'_{mi}.$$

On voit que, dans un cas comme dans l'autre, il existe une série doublement infinie de valeurs de α , chacune caractérisée par deux nombres entiers, pour lesquelles il y a propagation possible dans le guide. Donc pour une valeur donnée de k , c'est-à-dire pour une fréquence donnée, il existe toute une série de valeurs de k_z possibles telles que

$$(38) \quad k_z^2 = k^2 - \alpha_{mi}^2 \quad \text{ou} \quad k_z^2 = k^2 - \alpha'_{mi}{}^2.$$

suivant que l'on considère les ondes (E) ou les ondes (H). A chaque valeur de k_z , correspond une longueur d'onde et une vitesse de propagation de la phase dans le guide données par

$$(39) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_z}, \quad v = c \frac{k}{k_z} > c.$$

On peut encore vérifier ici que la vitesse moyenne de propagation de l'énergie électromagnétique le long du guide est égale à

$$(40) \quad v = c \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{v} < c.$$

Les relations (38) montrent que, pour chaque type d'ondes, il existe une valeur minima de k au-dessous de laquelle aucune propagation n'est plus possible le long du guide qui se comporte ainsi comme un filtre passe-haut. Pour les ondes (E_m), la valeur minima de k est égale à

$$(41) \quad k_{\min} = \frac{\mu_1^{(0)}}{R} = \frac{2,4}{R}$$

correspondant à une fréquence et à une longueur d'onde *dans le vide* égales à

$$(42) \quad \nu_{\min} = \frac{2,4c}{2\pi R}, \quad \lambda_{\max} = \frac{2\pi R}{2,4},$$

mais naturellement *dans le guide*, la longueur d'onde correspondant à ν_{\min} est infinie d'après (38) et (39).

Pour les ondes du type (H_m), la valeur de k_{\min} est

$$(43) \quad k_{\min} = \frac{n}{R},$$

où désignant par n le plus petit des $\nu_i^{(m)}$. Mais ici, contrairement à ce qui se passe pour les $\mu_i^{(m)}$, le plus petit des $\nu_i^{(m)}$ n'est pas $\nu_1^{(0)}$. En effet, on sait que l'on a

$$(44) \quad \frac{dJ_0(u)}{du} = -J_1(u),$$

et, d'autre part, tous les $J_m(u)$ sont nuls pour $u = 0$, sauf $J_0(0)$ qui est égal à 1. Il en résulte que les courbes représentant $J_0(u)$, $J_1(u) = -J'_0(u)$ et $J'_1(u)$ sont disposées comme l'indique la figure 3.

Il en résulte que $n = \nu_1^{(1)}$. En d'autres termes, et contrairement à l'attente, tandis que pour les ondes (E_m) l'onde de plus basse fréquence pouvant se propager dans le guide est l'onde (E₀), pour les (H_m) c'est l'onde (H₁) et non l'onde (H₀). Ce résultat met en évidence le caractère

un peu singulier de l'onde (H_0) , caractère sur lequel nous aurons à revenir.

M. Léon Brillouin a fait d'intéressantes remarques sur le fait que la fréquence de coupure ν_{\min} est plus basse pour (H_1) que pour (H_0) . Il a, en effet, comparé le problème du guide électrique cylindrique avec celui des vibrations sonores dans un tuyau cylindrique rempli d'air. Si l'on assimile la vitesse des molécules d'air au champ magnétique, les vibrations dans le tuyau sonore sont tout à fait assimilables aux ondes du type magnétique obtenues ci-dessus, les équations de propagation et les conditions aux limites étant les mêmes dans les deux cas. Mais, dans le problème acoustique, il n'y a pas de conditions de divergence nulle

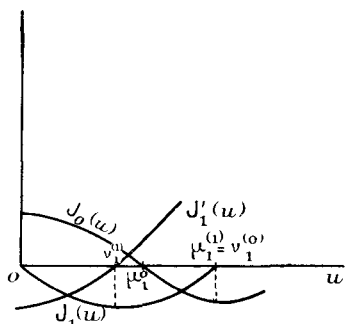


Fig. 3.

analogues à celles qui existent en électromagnétisme, et ceci permet de prendre en acoustique des solutions avec $\alpha = 0$, donc $k = k_z$. On aura donc des solutions possibles avec par exemple pour la vitesse, des molécules

$$(45) \quad v_z = J_m(0) \frac{\sin m \varphi}{\cos m \varphi} e^{i k_z c t - z}, \quad \dots,$$

où c est ici bien entendu la vitesse du son dans l'air. Mais les valeurs des $J_m(0)$ et des $J'_m(0)$ montre alors que la seule solution de ce type non nulle et compatible avec les conditions aux limites s'obtient en faisant $m = 0$, ce qui donne

$$(46) \quad v_z = \text{const.} e^{i k_z c t - z}, \quad v_x = v_y = 0.$$

C'est là la solution habituellement considérée dans la théorie des tuyaux sonores cylindriques : c'est en quelque sorte la solution fondamentale, mais il existe une infinité d'autres solutions rentrant dans le type général (32). Or dans le problème électromagnétique, les relations de

divergence nulle ne permettent pas de prendre $z = 0$ et par suite la solution fondamentale analogue à (46) n'existe pas. On voit donc que pour les ondes (H_m) , l'onde (H_0) n'est pas la véritable solution fondamentale, laquelle se trouve exclue par les relations de divergence nulle. On comprend mieux ainsi pourquoi (H_0) ne joue pas tout à fait le rôle qu'on attendait.

Pour préciser les idées sur la structure des ondes (31) et (32), étudions celle de (E_0) et de (H_0) . Pour l'onde (E_0) , on trouve

$$(E_0) \quad \begin{cases} E_z = \alpha^2 J_0(\alpha \rho), P, & E_\rho = + ik_z \alpha J_1(\alpha \rho), P, & H_\varphi = ik \alpha J_1(\alpha \rho), P, \\ H_z = E_\varphi = H_\rho = 0. \end{cases}$$

Le champ électrique dans la section droite est radial; le champ magnétique y est circulaire. Pour le champ (H_0) , on trouve la disposition inverse, car on a

$$(H_0) \quad \begin{cases} H_z = \alpha^2 J_0(\alpha \rho), P, & H_\rho = ik_z \alpha J_1(\alpha \rho), P, & E_\varphi = - ik \alpha J_1(\alpha \rho), P, \\ H_z = E_\varphi = H_\rho = 0. \end{cases}$$

Dans la section droite, le champ magnétique est radial et le champ électrique circulaire. Les ondes (E_m) et (H_m) pour $m > 0$ ont une structure plus compliquée.

Toutes les formules de ce paragraphe ont été obtenues en supposant qu'à l'intérieur du guide cylindrique $\varepsilon = \mu = 1$. Si le guide est rempli d'une substance de constante diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ , on devra remplacer dans les formules (31) et (32) k par $k\sqrt{\varepsilon\mu}$, \vec{E} par $\sqrt{\varepsilon} \vec{E}$ et \vec{H} par $\sqrt{\mu} \vec{H}$. Nous ne développerons pas l'étude aisée des formules ainsi obtenues.

Pour terminer, nous allons montrer que les ondes susceptibles de se propager dans le guide cylindrique peuvent être représentées comme une superposition d'ondes planes monochromatiques ordinaires. Pour cela, il nous suffira de prouver que l'expression

$$(47) \quad J_m(\alpha \rho) e^{\pm i L m \varphi} e^{i(k_z z - k t)} e^{i k_z z}$$

peut s'obtenir par une telle superposition. Or considérons la direction définie par l'azimut φ_0 et par l'angle θ_0 qu'elle fait avec l'axe Oz du guide. En un point de coordonnées $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ et z , l'onde plane ayant cette direction comme direction de propagation pourra s'écrire

$$e^{i k [z - z \cos \theta_0 - x \sin \theta_0 \cos \varphi_0 - y \sin \theta_0 \sin \varphi_0]}$$

ou

$$e^{i k [z - z \cos \theta_0]} e^{-i k \sin \theta_0 [\rho \cos \varphi \cos \varphi_0 + \rho \sin \varphi \sin \varphi_0]}.$$

Envisageons maintenant toutes les ondes planes de ce type dont les directions de propagation sont situées sur un cône d'axe Oz et d'angle au sommet θ_0 ; en les superposant, nous obtiendrons l'intégrale de Fourier

$$\int_0^{2\pi} A(\varphi_0) e^{-ik\rho \sin\theta_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)} d\varphi_0 e^{ik(\rho t - z \cos\theta_0)}.$$

Si alors nous posons

$$(48) \quad A(\varphi_0) = e^{+im\varphi_0} = e^{\pm im\varphi} e^{\mp im\omega} \quad (\omega = \varphi_0 - \varphi)$$

avec m entier positif ou nul, on aura l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} e^{-i[k\rho \sin\theta_0 \cos(\omega - m\omega)]} d\omega e^{\pm im\varphi} e^{i[k(\rho t - z \cos\theta_0)]}$$

ou encore

$$\int_0^{2\pi} e^{-i[\alpha \rho \cos\omega - m\omega]} d\omega e^{\pm im\varphi} e^{i[k(\rho t - k_z z)]}$$

en posant

$$(49) \quad k_z = k \cos\theta_0, \quad \alpha = k \sin\theta_0 = \sqrt{k^2 - k_z^2}.$$

Il suffit alors de se souvenir que dans la théorie des fonctions de Bessel on démontre l'importante formule

$$(50) \quad (z/i)^{-m} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\alpha z \cos\omega} e^{\pm im\omega} d\omega = J_m(x)$$

pour voir que la dernière intégrale est bien égale, à une constante près, à l'expression (47). Il en résulte bien que les ondes susceptibles de se propager dans les guides cylindriques sont représentables par une superposition convenable d'ondes planes monochromatiques homogènes du type usuel.

4. Étude du câble coaxial. — On nomme câble coaxial le dispositif formé par deux cylindres métalliques coaxiaux de rayons R_1 et R_2 servant à guider une onde électromagnétique qui se propage dans l'espace annulaire compris entre les cylindres.

Nous prendrons bien entendu des coordonnées cylindriques z, ρ, φ . La fonction U devra donc encore être solution de (25) et de chaque solution acceptable de (25), nous déduirons encore une onde du type électrique et une onde du type magnétique par les formules (26) et (27). Les solutions uniformes de (25) seront de la forme

$$(51) \quad U(z, \rho, \varphi, t) = F(\rho) \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i[k(\rho t - k_z z)]},$$

$F(\rho)$ devant satisfaire à l'équation (29). Mais c'est ici que le problème diffère du précédent. En effet, ici, l'axe des z n'est plus compris dans le domaine de propagation de l'onde, de sorte que nous n'avons plus à imposer à $F(\rho)$ d'être régulière pour $\rho = 0$, mais seulement d'être régulière pour $R_1 \leq \rho \leq R_2$. Or le point $\rho = 0$ étant le seul pôle des coefficients de (29), toute solution de (29) est régulière pour $\rho \neq 0$ et nous pouvons prendre pour $F(\rho)$ une solution quelconque de (29). On obtient une telle solution en formant une combinaison linéaire de la fonction de Bessel $J_m(\rho_1)$ et d'une autre solution de (29) linéairement indépendante de J_m , par exemple la fonction dite de Neumann $K_m(\rho_1)$.

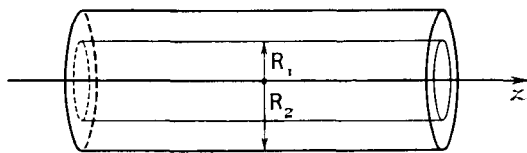


Fig. 4.

Naturellement la fonction K_m a une singularité sur Oz , mais cette circonstance n'importe pas ici. Finalement on obtient pour U les solutions uniformes et régulières dans le domaine de propagation

$$(52) \quad U = [A J_m(z\rho) + B K_m(z\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(k_1 t - k_z z)} \quad (z^2 = k^2 - k_z^2),$$

A et B étant deux constantes complexes arbitraires.

De (52), on déduit les deux types d'ondes suivants :

Type électrique :

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = z^2 [A J_m(z\rho) + B K_m(z\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi e^{i(k_1 t - k_z z)}, \quad H_z = 0; \\ E_\varphi = -ik_z z [A J'_m(z\rho) + B K'_m(z\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi, P, \quad H_\varphi = -\frac{k}{k_z} E_\varphi; \\ E_\varphi = -ik_z \frac{m}{\rho} [A J_m(z\rho) + B K_m(z\rho)] \frac{\cos}{\sin} m\varphi, P, \quad H_\varphi = \frac{k}{k_z} E_\varphi; \end{array} \right.$$

et

Type magnétique :

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_z = z^2 [A J_m(z\rho) + B K_m(z\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi, P, \quad E_z = 0; \\ H_\varphi = -ik_z z [A J'_m(z\rho) + B K'_m(z\rho)] \frac{\sin}{\cos} m\varphi, P, \quad E_\varphi = \frac{k}{k_z} H_\varphi; \\ H_\varphi = -ik_z \frac{m}{\rho} [A J_m(z\rho) + B K_m(z\rho)] \frac{\cos}{\sin} m\varphi, P, \quad E_\varphi = -\frac{k}{k_z} H_\varphi; \end{array} \right.$$

$J'_m(u)$ et $K'_m(u)$ étant les dérivées de $J_m(u)$ et $K_m(u)$ par rapport à la variable u .

Il nous faut maintenant introduire les conditions aux limites sur les parois supposées parfaitement réfléchissantes du câble coaxial

$$(55) \quad E_z = E_\varphi = 0, \quad \text{pour } \varphi = R_1 \quad \text{et pour } \varphi = R_2.$$

Pour les ondes (E_m) du type électrique, elles nous donnent

$$(56) \quad A J_m(\alpha R_1) + B K_m(\alpha R_1) = 0, \quad A J_m(\alpha R_2) + B K_m(\alpha R_2) = 0.$$

Ces deux équations linéaires en A et B n'admettent de solution non nulle que si leur déterminant est nul, ce qui nous fournit la relation

$$(57) \quad J_m(\alpha R_1) K_m(\alpha R_2) = J_m(\alpha R_2) K_m(\alpha R_1).$$

Les valeurs acceptables de α sont les racines $\alpha_1^{(m)}$, $\alpha_2^{(m)}$, ..., $\alpha_i^{(m)}$... de cette équation transcendante. Si $\alpha = \alpha_i^{(m)}$, il suffira de prendre

$$(58) \quad \frac{B}{A} = - \frac{J_m(\alpha_i^{(m)} R_1)}{K_m(\alpha_i^{(m)} R_1)}$$

pour obtenir une solution acceptable du type (53).

De même, pour les ondes (H_m) , les conditions aux limites (55) donneront

$$(59) \quad A J'_m(\alpha R_1) + B K'_m(\alpha R_1) = 0, \quad A J'_m(\alpha R_2) + B K'_m(\alpha R_2) = 0,$$

d'où la condition

$$(60) \quad J'_m(\alpha R_1) K'_m(\alpha R_2) = J'_m(\alpha R_2) K'_m(\alpha R_1)$$

pour déterminer les valeurs acceptables $\beta_1^{(m)}$... $\beta_i^{(m)}$... de α . Si $\alpha = \beta_i^{(m)}$, il suffira de prendre

$$(61) \quad \frac{B}{A} = - \frac{J'_m(\beta_i^{(m)} R_1)}{K'_m(\beta_i^{(m)} R_1)}$$

pour obtenir une solution acceptable du type (54).

En résumé, nous avons ici encore pour chaque valeur de m ($m = 0, 1, 2, \dots$) une suite de valeurs acceptables (ou valeurs propres) de α . Par suite, à chaque valeur de m correspond une valeur de k égale à la plus petite des valeurs propres de α qui est la plus petite des valeurs de k pour laquelle la propagation du type d'ondes considéré est possible. On serait tenté d'en conclure, comme au paragraphe précédent, à l'existence d'une *fréquence de coupure* au-dessous de laquelle toute propagation le long du câble coaxial est impossible; en réalité il n'en est rien car pour le câble coaxial existe encore un mode de propagation

qui n'existait pas dans le cas du guide cylindrique et qui correspond précisément à la vibration fondamentale dont il a été question à la fin du paragraphe précédent.

Nous obtiendrons la solution fondamentale en question en portant la forme (51) dans l'équation (25) et en supposant $z = 0$, ce qui donne pour U

$$(61) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} U = 0,$$

équation dont la solution générale sera

$$(63) \quad U = [A \rho^m + B \rho^{-m}] \frac{\sin}{\cos} m \varphi e^{i k (\rho t - z)}.$$

D'après (26), on déduit de la solution (63) l'onde du type électrique

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = 0, \\ E_\rho = [C \rho^{m-1} + D \rho^{-m-1}] \frac{\sin}{\cos} m \varphi, P; \\ E_\varphi = [C \rho^{m-1} + D \rho^{-m-1}] \frac{\cos}{\sin} m \varphi, P; \\ H_z = 0, \quad H_\rho = -\frac{kz}{k} E_\varphi = -E_\varphi, \quad H_\varphi = \frac{kz}{k} E_\rho = E_\rho. \end{array} \right.$$

Les conditions aux limites (55) obligent à poser $m = 0$ et montrent en plus qu'il n'existe pas d'onde acceptable du type magnétique correspondant à (63). Bref, on obtient ainsi la seule solution acceptable

$$(65) \quad E_z = E_\varphi = 0, \quad E_\rho = \frac{C_0}{\rho} e^{i k (\rho t - z)}, \quad H_z = H_\rho = 0, \quad H_\varphi = E_\rho.$$

On peut d'ailleurs vérifier sans difficulté par un calcul direct l'existence de cette solution des équations de Maxwell. La présence du facteur ρ au dénominateur dans E_ρ explique tout de suite pourquoi la solution (65) n'est pas acceptable dans le cas du guide cylindrique puisqu'elle comporte une singularité sur Oz , mais ici cette singularité ne nous gêne plus. Or toutes les fréquences peuvent se propager dans le câble coaxial sous forme d'onde du type (65), de sorte qu'il n'y a plus ici, à proprement parler, de fréquence minima au-dessous de laquelle la propagation est impossible (¹).

(¹) On trouvera une étude plus complète des ondes guidées dans une ligne coaxiale dans un article de MM. Goudet et Lignon (Bibliographie n° [19]).

5. **Étude des guides à section elliptique et de la stabilité des ondes dans les guides usuels.** — M. Léon Brillouin a étudié la propagation des ondes dans les guides à section elliptique et s'est servi des résultats de cette étude pour aborder l'importante question de la stabilité des propagations dans les guides usuels à section circulaire. Nous allons donner un aperçu de ces problèmes.

Pour étudier les guides à section elliptique, on comptera toujours la coordonnée z suivant l'axe du guide et l'on repérera les points $M(x, y)$ de la section droite par des coordonnées elliptiques x_1 et x_2 définies par les relations

$$(66) \quad x = d \operatorname{ch} x_1 \cos x_2, \quad y = d \operatorname{sh} x_1 \sin x_2.$$

Les lignes $x_1 = \text{const.}$ sont alors données par

$$(67) \quad \left(\frac{x}{d \operatorname{ch} x_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{d \operatorname{sh} x_1} \right)^2 = 1.$$

Ce sont donc des ellipses dont les axes a et b sont égaux à

$$(68) \quad a = d \operatorname{ch} x_1, \quad b = d \operatorname{sh} x_1, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{th} x_1.$$

La distance $2\sqrt{a^2 - b^2}$ des foyers est égale à $2d$.

Les lignes $x_2 = \text{const.}$ sont des hyperboles et le système des coordonnées x_1, x_2 est orthogonal. On trouve

$$(69) \quad ds^2 = d\tau^2 + e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2 \quad \text{avec} \quad e_1 = e_2 = d\sqrt{\operatorname{ch}^2 x_1 - \cos^2 x_2}.$$

La fonction U doit alors être solution de l'équation

$$(70) \quad \frac{1}{d^2(\operatorname{ch}^2 x_1 - \cos^2 x_2)} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right] + \alpha^2 U = 0 \quad (k^2 - k_z^2 = \alpha^2).$$

Si l'on pose comme d'habitude

$$U = \Phi_1(x_1) \cdot \Phi_2(x_2) e^{i(kr - k_z z)},$$

on voit qu'une certaine expression dépendant de x_1 seulement doit être égale à une certaine expression dépendant de x_2 seulement et ceci ne peut avoir lieu que si ces deux expressions sont égales à une même constante R . On obtient ainsi les deux équations

$$(71) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \Phi_1}{dx_1^2} + \left(\frac{\alpha^2 d^2}{2} \operatorname{ch}^2 x_1 - R \right) \Phi_1 = 0, \\ \frac{d^2 \Phi_2}{dx_2^2} + \left(-\frac{\alpha^2 d^2}{2} \cos^2 x_2 + R \right) \Phi_2 = 0. \end{cases}$$

La seconde équation (71) appartient au type des équations de Mathieu et la première se ramène au même type en prenant ix_1 comme variable à la place de x_2 . Les constantes α et R doivent être les mêmes dans les deux équations et la valeur de R doit être choisie en fonction de α de telle manière que la solution soit périodique de période 2π en x_2 . Quand R est choisi de cette façon, la seconde équation (71) admet pour solutions uniformes les fonctions de Mathieu

$$Ce_0(x_2), Ce_1(x_2), Se_1(x_2), \dots, Ce_n(x_2), Se_n(x_2), \dots,$$

dont la forme dépend de la valeur du paramètre α et qui, pour α tendant vers zéro, tendent respectivement vers les fonctions

$$1, \cos x_2, \sin x_2, \dots, \cos nx_2, \sin nx_2, \dots$$

Finalement, on a donc

$$(72) \quad \begin{cases} U(\alpha, x_1, x_2, t) = Ce_n(ix_1) Ce_n(x_2).P \\ \text{ou} \\ U(\alpha, x_1, x_2, t) = Se_n(ix_1) Se_n(x_2).P. \end{cases}$$

M. Brillouin a donné un graphique représentant les variations des valeurs de R en fonction de α_2 correspondant à Ce_n et à Se_n .

La paroi du guide est définie par une certaine valeur X_1 de la variable x_1 . Pour cette valeur de x_1 , les composantes E_z et E_{x_2} du champ électrique doivent être nulles : telles sont les conditions aux limites.

Pour les ondes du type électrique, on a

$$(73) \quad E_z = \alpha^2 U, \quad E_{x_2} = -\frac{ik_z}{e_1} \frac{Ce_n}{Se_n}(ix_1) \frac{Ce'_n}{Se'_n}(x_2).P.$$

Les conditions aux limites conduisent donc à chercher pour quelles valeurs de α les fonctions $Ce_n(iX_1)$ et $Se_n(iX_1)$ sont nulles. On trouve ainsi pour α deux séries de valeurs acceptables $\alpha_{c,n,m}$ et $\alpha_{s,n,m}$ d'où deux séries d'ondes du type électrique qu'on notera $(E_{c,n,m})$ et $(E_{s,n,m})$. A chaque valeur propre de α , correspondra pour k un certain mode de propagation le long du guide et l'on pourra faire à ce sujet des remarques tout à fait analogues à celles qui furent faites aux paragraphes précédents.

Pour les ondes du type magnétique, on a

$$(74) \quad E_z = 0, \quad E_{x_2} = \frac{ik}{e_1} \frac{Ce'_n}{Se'_n}(ix_1) \frac{Ce_n}{Se_n}(x_2).P,$$

et l'on a à chercher les valeurs de α qui annulent soit $Ce'_n(iX_1)$,

soit $Se'_n(iX_1)$. On obtient ainsi deux séries d'ondes du type magnétique qu'on notera $(H_{s,m,n})$ et $(H_{c,m,n})$.

M. Léon Brillouin a calculé la valeur de α^2 en fonction du grand axe de l'ellipse de section quand on déforme cette ellipse en maintenant sa surface constante et ceci pour les diverses ondes E_0 , E_{s_1} , E_{c_1} , H_0 , H_{s_1} , H_{c_1} , H_{s_2} et H_{c_2} . Il s'est servi des résultats de cette étude pour apprécier le degré de stabilité des propagations qui peuvent avoir lieu dans un guide cylindrique. Supposons, en effet, que deux des ondes étudiées plus haut se trouvent avoir la même vitesse de propagation quand la section du guide se réduit à un cercle, mais des vitesses sensiblement différentes dès que la section est une ellipse d'excentricité un peu différente de 1. Alors une des propagations possibles dans le guide circulaire sera instable car, dès qu'en un endroit la section de guide par suite d'un aplatissement accidentel sera devenue légèrement elliptique, l'onde en question pourra se scinder en deux ondes de vitesses différentes. En somme, la stabilité des propagations dans le guide à section circulaire dépend de la manière dont peuvent varier les vitesses de propagation quand on déforme légèrement le tube. Pour résoudre rigoureusement ce problème, il faudrait étudier la variation des valeurs propres de α quand on déforme les frontières du domaine intérieur au guide : c'est là un cas particulier d'un problème général assez difficile dont la solution a été abordée par M. Léon Brillouin et à sa suite par M. Nicolas Cabrera; le développement de leurs méthodes doit permettre de résoudre l'important et difficile problème de la stabilité des propagations possibles dans les guides électriques.

Quoi qu'il en soit, la simple comparaison avec le cas du guide à section elliptique a permis à M. Brillouin de conclure que les ondes (E_0) et (H_0) du guide à section circulaire sont stables et l'onde (H_2) presque stable : au contraire les ondes (E_1) et (H_1) seraient instables et probablement aussi l'onde (H_3) . La stabilité de l'onde (H_0) qui avait été mise en doute peut présenter de l'intérêt pour la radiotechnique car, nous le verrons plus loin, l'onde H_0 possède la propriété remarquable, quand elle se propage dans un guide aux parois imparfaitement conductrices (ce qui est le cas de tous les guides réels), de correspondre à une perte d'énergie dans la paroi qui *diminue* quand la fréquence augmente. Néanmoins l'onde (H_0) , bien qu'étant stable pour une petite déformation de la section du tube, pourrait ne pas être stable pour une courbure latérale du guide, pour un coude de ce tube. En effet, l'onde (H_0) a la même vitesse de propagation que l'onde (E_1) pour une même valeur de k , comme cela résulte de l'égalité de $\mu_1^{(1)}$ et de $\nu_1^{(0)}$

(voir p. 25). Or, à l'endroit où le guide est coudé, la composante E_z d'une onde (A_0) aura une petite composante longitudinale; cette composante sera cependant nulle dans le plan qui contient l'axe légèrement incurvé du guide, elle sera donc identique à la composante électrique longitudinale de l'onde (E_1) ayant une ligne nodale dans le plan en question. Il en résulte que le coude pourra transformer une partie de l'onde (H_0) en onde (E_1) . Si le guide présente plusieurs coudes, les effets de ce genre pourront s'accumuler à cause de l'égalité des vitesses de propagation pour (E_1) et (H_0) , égalité qui maintiendra l'accord des phases nécessaire à l'accumulation. Les coudes peuvent donc être dangereux pour la stabilité de (H_0) .

M. Brillouin a aussi signalé un autre phénomène qui peut être gênant en pratique pour la stabilité des propagations dans les guides. La fréquence de coupure, est, en effet, rapidement variable avec la forme de la section du guide. Une onde de fréquence, très peu supérieure à la fréquence de coupure, peut donc se trouver complètement arrêtée par une portion légèrement déformée de ce guide.

On voit combien des questions intéressantes tant en théorie qu'en pratique sont soulevées par le problème de la stabilité des propagations dans les guides. Elles paraissent encore loin d'être toutes résolues ⁽¹⁾.

6. Vitesse de phase, vitesse de groupe et vitesse moyenne de l'énergie dans les propagations guidées. — Toutes les propagations d'ondes que nous avons étudiées dans le présent chapitre sont toutes représentées par le facteur de propagation

$$(75) \quad P = e^{i(kct - k_z z)} \quad \text{avec} \quad k^2 = k_z^2 + z^2.$$

Chaque propagation possible est caractérisée par une des valeurs propres de la constante α correspondant au type de guide considéré. Pour une valeur possible donnée de z , il correspond à chaque valeur de k une valeur de k_z et une vitesse de propagation de la phase

$$(76) \quad V = c \frac{k}{k_z} > c.$$

Pour deux valeurs très voisines de k , mettons k_0 et $k_0 + dk$, nous aurons

⁽¹⁾ L'influence de la courbure des guides sur la propagation des ondes a fait l'objet des études étendues de M. Marc Jouguet (bibliographie [20]). Sur la théorie de la perturbation des valeurs propres par déformation de la frontière et son application aux guides, on pourra consulter des notes de M. R. Courtel [21]. La thèse de M. Nicolas Cabrera n'a malheureusement pas été publiée.

deux valeurs très voisines de k_z , savoir k_z^0 et sensiblement $k_z^0 + \left(\frac{dk_z}{dk}\right)_{k_0} dk$.

Nous pouvons alors considérer la superposition d'une infinité d'ondes appartenant au très petit intervalle $k^0 \rightarrow k^0 + \delta k$. Cette superposition est nommée un *groupe d'ondes* et est représentée analytiquement par l'intégrale

$$(77) \quad \int_{k_0}^{k_0 + \delta k} a(k) e^{i(kvt - k_z z)} dk = \int_0^{\delta k} a(\varepsilon) e^{i\varepsilon \left[vt - \left(\frac{dk_z}{dk}\right)_{k_0} z \right]} d\varepsilon e^{i(k_0 v t - k_0^2 z)}.$$

Le dernier facteur en dehors de l'intégrale est le facteur de phase correspondant à k_0 . Quant à l'intégrale, elle représente une amplitude fonction de l'argument placé entre crochets dans l'exposant de l'exponentielle : il est évident que les valeurs de cette amplitude se déplacent en bloc le long de l'axe des z avec la vitesse u définie par la formule

$$(78) \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial k_z}{\partial k} \right)_{k_0}.$$

La vitesse u est la *vitesse de groupe* correspondant à la valeur k_0 de k . Or ici nous avons

$$(79) \quad \frac{\partial k_z}{\partial k} = \frac{k}{k_z}$$

et, par suite, la vitesse de groupe correspondant à k est

$$(80) \quad u = c \frac{k_z}{k} = \frac{c^2}{V} < c.$$

Les relations obtenues ainsi sont tout à fait analogues à celles qu'on rencontre en Mécanique ondulatoire. Dans cette théorie, en effet, on représente le mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule de masse propre μ_0 par la propagation d'une onde plane monochromatique, l'onde Ψ du corpuscule. Cette onde peut s'écrire, en choisissant la direction de propagation comme axe des z , sous la forme

$$(81) \quad \Psi = A e^{i(kvt - k_z z)}$$

avec

$$(82) \quad k^2 - k_z^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} \mu_0^2,$$

où h est la constante des quanta de Planck. On trouve alors pour la vitesse de phase V et la vitesse de groupe u de l'onde Ψ précisément les expressions (76) et (80) avec la relation bien connue

$$(83) \quad uV = c^2.$$

Comme on admet que les corpuscules de lumière ou photons ont une masse propre nulle ou évanouissante, l'onde Ψ du photon doit correspondre à $k = k_z$, c'est-à-dire à la propagation avec la vitesse c ; ceci correspond bien à la propagation de l'onde électromagnétique dans le vide indéfini. Mais si l'onde électromagnétique est enfermée dans un guide, nous avons entre k et k_z la relation (75), où α est différent de zéro et doit avoir l'une de ses valeurs propres correspondant à la forme du guide utilisé. Tout se passe alors, au point de vue de la Mécanique ondulatoire, comme si le photon possédait une masse propre déterminée par la forme du guide et le numéro de la valeur propre α_i considérée.

On peut donc dire que dans un guide donné le photon possède toute une série de masses propres possibles et cet énoncé est extrêmement suggestif en ce qui concerne les développements de la théorie de la masse pour les particules matérielles.

Laissant de côté ces considérations qui nous éloigneraient de notre sujet, nous allons définir dans un guide, à côté des vitesses de phase et de groupe, la vitesse moyenne de propagation de l'énergie v . Par définition, cette vitesse sera égale au quotient du flux moyen de l'énergie électromagnétique le long de l'axe du guide à travers sa section droite par la valeur moyenne de l'énergie contenue dans l'unité de longueur du guide : cette définition est toute naturelle. D'après les formules (24) du Chapitre I, nous écrirons donc

$$(81) \quad v = \frac{c \int_S \{ [\vec{E}^* \cdot \vec{H}]_z + [\vec{E} \cdot \vec{H}^*]_z \} d\tau}{\int_V \{ |\vec{E}|^2 + |\vec{H}|^2 \} d\tau},$$

\mathcal{V} étant le volume de l'unité de longueur du guide et S la surface de sa section droite.

Dans un certain nombre de cas simples (guides à section rectangulaire, circulaire, etc.), on peut vérifier que la vitesse v est égale à la vitesse de groupe (80). Nous allons démontrer d'une façon générale que, quelle que soit la forme de la section droite du guide, cette égalité a toujours lieu. Nous développerons la démonstration dans le cas des ondes du type électrique, la démonstration se faisant d'une manière tout à fait semblable dans le cas des ondes du type magnétique.

Pour les ondes du type électrique, nous avons les formules suivantes :

$$(85) \quad \begin{cases} E_z = \alpha^2 U, & E_2 = -\frac{ik_z}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2}, & E_3 = -\frac{ik_z}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3}; \\ H_z = 0, & H_2 = -\frac{k}{k_z} E_3, & H_3 = \frac{k}{k_z} E_2, \end{cases}$$

U étant une solution acceptable de l'équation (5). La relation à démontrer est la suivante

$$(86) \quad \int_Q \left(\left[\vec{E}^* \cdot \vec{H} \right]_z + \left[\vec{E} \cdot \vec{H}^* \right]_z \right) dz = \frac{k_z}{k} \int_Q \left(|E_z|^2 + |H_z|^2 \right) dz,$$

et, en introduisant les valeurs de H_2 et H_3 d'après (85), elle s'écrit encore

$$(87) \quad \frac{k_z}{k} \int_Q \left(|E_2|^2 + |E_3|^2 \right) dz = \int_Q \left[|E_z|^2 + \left(|E_2|^2 + |E_3|^2 \right) \left(1 + \frac{k_z^2}{k^2} \right) \right] dz,$$

ou encore, d'après les valeurs des E_i ,

$$(88) \quad \int_Q z^2 |U|^2 dz = \int_Q \left[\frac{1}{e_2^2} \frac{\partial U^*}{\partial x_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{1}{e_3^2} \frac{\partial U^*}{\partial x_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] dz.$$

Comme on doit avoir $E_z = 0$ sur la paroi du guide, U est nulle partout sur cette paroi d'après la première équation (85). En remarquant que l'on a

$$(89) \quad dz = e_2 e_3 dx_2 dx_3 dz,$$

il vient aisément, en intégrant par parties le second membre de (88),

$$(90) \quad \int_Q U^* \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e_3}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} + e_2 e_3 x^2 U \right] dx_2 dx_3 dz = 0.$$

Telle est la relation à démontrer : or elle est évidente puisque U est solution de l'équation (5). Donc, quelle que soit la forme de la section droite du guide, la vitesse moyenne de propagation de l'énergie dans le guide est égale à la vitesse de groupe.

7. Conditions d'excitation et régimes transitoires. — Nous avons étudié les régimes stables de propagation qui peuvent s'établir à l'intérieur des guides diélectriques, mais sans nous préoccuper de la façon dont ces régimes peuvent s'établir. Il est évident que, pour que de telles propagations puissent s'établir dans un guide, il faut qu'il y ait quelque part dans le guide un émetteur d'ondes électromagnétiques. Ceci revient à dire qu'il doit exister en certains points à l'intérieur du guide des charges et des courants électriques. Nous aurons dans le guide une certaine distribution de charge représentée par la densité $\rho(x, y, z, t)$ et une certaine distribution de courants représentée par la

densité vectorielle $\vec{i}(x, y, z, t)$; les quantités ρ et \vec{i} sont d'ailleurs reliées par la relation de conservation de l'électricité

$$(91) \quad \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{i} = 0.$$

En partant des équations générales

$$(92) \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V, \quad \square V = 4\pi\rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{i} \quad \left(\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right),$$

nous tirons

$$(93) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = -4\pi \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \right] \vec{E}(x, y, z, t),$$

où \vec{E} est une certaine fonction vectorielle supposée connue de x, y, z, t .

Maintenant il est facile de démontrer que si U_m et U_n sont deux solutions acceptables de l'équation (5) correspondant à deux valeurs propres différentes α_m et α_n de α , on a, entre U_m et U_n , la relation d'orthogonalité

$$(94) \quad \int_{\mathfrak{V}} U_m^* U_n d\tau = \int_{\mathfrak{V}} U_m^* U_n e_2 e_3 dx_2 dx_3 dz = 0,$$

où \mathfrak{V} désigne toujours le volume de l'unité de longueur du guide. On démontre la formule (94) en écrivant l'équation (5) pour U_n et l'équation complexe conjuguée par U_m^* , en multipliant la première de ces équations par U_m^* et la seconde par U_n , puis en soustrayant la première relation ainsi obtenue de la seconde et en intégrant dans \mathfrak{V} . Nous admettrons de plus que les fonctions U_m [fonctions propres de l'équation (5)], dont nous avons plus haut calculé la forme exacte dans certains cas particuliers, forment un système complet, c'est-à-dire qu'une solution acceptable quelconque de l'équation (5) peut toujours se représenter comme une somme de fonctions U_m .

Ceci posé, de la fonction U_m , nous pouvons dériver un champ électrique $\vec{E}^{(m)}$ qui appartiendra soit à une onde du type électrique, soit à une onde du type magnétique; désignons par $E_i^{(m)}$ les trois composantes de $\vec{E}^{(m)}$ dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales utilisé. En employant les formules qui permettent de dériver $\vec{E}^{(m)}$ de U_m et en intégrant par parties, on voit aisément que (94) entraîne la relation d'orthogonalité

$$(95) \quad \int_{\mathfrak{V}} \sum_i^3 E_i^{(m)*} E_i^{(n)} d\tau = 0 \quad (n \neq m),$$

valable aussi bien pour les ondes du type magnétique que pour celles du type électrique. De plus, le caractère complet des U_m permet que, pour une onde quelconque se propageant dans le guide, on puisse poser

$$(96) \quad E_i = \sum_m C_m(t) E_i^{(m)},$$

où les $C_m(t)$ représentent les degrés d'excitation des ondes correspondant aux α_m . Les C_m sont indépendantes de l'indice i et sont généralement fonction du temps en raison des phénomènes d'émission (ou d'absorption) qui peuvent se produire dans le guide par suite de la présence de charges et de courants.

Portons (96) dans (93) et tenons compte du fait que l'on a

$$(97) \quad \frac{\partial E_i^{(m)}}{\partial t} = i k c E_i^{(m)}, \quad \Delta E_i^{(m)} = -k^2 E_i^{(m)}.$$

En désignant par un point la dérivation par rapport au temps, nous obtenons

$$(98) \quad \sum_m E_i^{(m)} \left(\ddot{C}_m + \frac{2 i k}{c} \dot{C}_m \right) = F_i.$$

Multiplions cette équation par $E_i^{(n)}$, sommions sur i de 1 à 3 et intégrons, il vient

$$(99) \quad \frac{1}{c^2} \ddot{C}_n + \frac{2 i k}{c} \dot{C}_n = \frac{1}{N_n} \int_{\mathcal{V}} \sum_i E_i^{(n)*} F_i d\tau = \frac{1}{N_n} \int_{\mathcal{V}} (\ddot{\mathbf{E}}^{(n)*} \cdot \mathbf{F}) d\tau$$

avec la notation

$$(100) \quad N_n = \int_{\mathcal{V}} \sum_i |E_i^{(n)}|^2 d\tau.$$

Comme le second membre de (99) est calculable d'après les données, cette équation nous permet de suivre les variations de C_n au cours du temps à partir de conditions initiales données telles que par exemple

$$C_n(0) = \dot{C}_n(0) = 0.$$

L'équation (99), qui s'applique aussi bien aux ondes du type magnétique qu'aux ondes du type électrique, contient toute la théorie des régimes transitoires et permet de voir facilement quel dispositif on doit employer pour exciter telle ou telle onde dont la propagation est possible dans le guide.

Nous allons étudier comme exemple le cas très important où l'émission

des ondes dans le guide est due à un oscillateur harmonique de fréquence ν_0 . Dans ce cas, les fonctions ρ et \vec{t} sont proportionnelles (en notation complexe) à $e^{2\pi i \nu_0 t} = e^{i k_0 c t}$ et l'équation (99) s'écrit alors

$$(101) \quad \frac{1}{c^2} \ddot{C}_n + \frac{2ik}{c} \dot{C}_n = b_n e^{i(k_0 - k)ct},$$

où b_n est une constante calculable à partir des données. L'intégrale de (101) est

$$(102) \quad C_n(t) = K_1 e^{-2ikct} + K_2 - \frac{b_n}{k_0^2 - k^2} e^{i(k_0 - k)ct},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires que nous choisirons de façon à satisfaire aux conditions initiales $C_n(0) = \dot{C}_n(0) = 0$, ce qui donne

$$(103) \quad C_n(t) = \frac{b_n}{k_0^2 - k^2} [1 - e^{i(k_0 - k)ct}] + \frac{b_n}{2k(k_0 + k)} [1 - e^{-2ikct}].$$

Pour k voisin de k_0 , le premier terme est prépondérant : si k tend vers k_0 , ce premier terme devient *séculaire* tandis que le second reste *périodique*.

Pour l'onde caractérisée par l'indice n , la quantité d'énergie électromagnétique est évidemment proportionnelle à $|C_n|^2$. Calculons donc cette quantité en laissant de côté le terme périodique; on trouve

$$(104) \quad |C_n(t)|^2 = \frac{|b_n|^2}{(k_0 + k)^2} \frac{2 - 2\cos(k_0 - k)ct}{(k_0 - k)^2} = \frac{4|b_n|^2}{(k_0 + k)^2} \frac{\sin^2(k_0 - k)ct}{(k_0 - k)^2}.$$

Si $n(k)dk$ désigne le nombre des ondes pouvant se propager dans le guide pour lesquelles k est compris dans un intervalle $k \rightarrow k + dk$, l'énergie totale du champ électromagnétique sera de la forme

$$(105) \quad \begin{aligned} W_n &= \text{const.} \int_0^\infty |C_n(t)|^2 n(k) dk \\ &= \text{const.} \int_0^\infty \frac{\sin^2(k_0 - k)ct}{(k_0 + k)^2 (k_0 - k)^2} |b_n|^2 n(k) dk. \end{aligned}$$

Pour des valeurs croissantes de t , les valeurs de k qui dans l'intégrale contribueront sensiblement au résultat se serreront de plus en plus autour de k_0 . Au bout d'un temps d'excitation égal à Δt , les seules vibrations électromagnétiques réellement excitées seront celles qui seront contenues dans un intervalle spectral :

$$(106) \quad \Delta\nu \equiv \nu - \nu_0 \equiv \frac{c}{2\pi} (k - k_0) \sim \frac{1}{2\pi \Delta t}.$$

Cette formule est analogue à une formule bien connue en Mécanique ondulatoire sous le nom de quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg.

Pour t très grand, on aura donc sensiblement pour l'onde (n) de fréquence k_0

$$(107) \quad W_n(t) = \text{const.} \int_0^\infty \frac{\sin^2(k_0 - k)ct}{(k_0 - k)^2} dk = \text{const.} t \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx,$$

W_n croît donc proportionnellement à t . Comme l'onde émise par l'oscillateur occupe à l'instant t le volume Svt où S est l'aire de la section droite du guide et v la vitesse de groupe avec laquelle se déplace le front d'onde, on voit que la densité de l'énergie électromagnétique pour l'onde n égale à $\frac{W_n}{Svt}$ devient une constante quand l'état de régime est établi.

Au début de l'excitation, les ondes de fréquences sensiblement différentes de k_0 sont aussi excitées. Ceci correspond au fait que l'onde émise dans le guide par un oscillateur a un front d'onde qui se propage en s'éloignant de l'oscillateur avec la vitesse v : une telle onde limitée par un front d'onde ne peut pas être monochromatique, elle doit être formée par une superposition d'ondes monochromatiques telle que si Δt est à l'instant Δt la longueur du train d'ondes, on ait

$$(108) \quad \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Delta t \simeq \frac{1}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial \nu} \Delta \nu \Delta t \simeq \frac{1}{2\pi},$$

où $\Delta \nu$ est la largeur de l'intervalle spectral représenté dans la superposition. Or on a ici

$$(109) \quad \Delta t = v \Delta t, \quad \frac{1}{v} = \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial \nu}$$

et nous sommes ainsi ramenés à la relation (106).

Les formules du présent paragraphe permettent donc, en principe, de suivre en détail les étapes de l'excitation des ondes dans un guide électrique par un oscillateur placé quelque part dans ce guide ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ La propagation d'une perturbation brusque dans un guide a été étudiée par M. Maurice Cotte. MM. Henri Gutton et Jean Ortusi ont fait diverses études sur les ondes électromagnétiques guidées et sur leur filtrage (voir bibliographie [22] à [25]).

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES DE VIBRATIONS PROPRES.

1. **Problèmes de vibrations propres.** — Soit une cavité fermée limitée par une surface métallique parfaitement conductrice. Dans cette cavité peuvent s'établir des états électromagnétiques stationnaires qui constituent les vibrations électromagnétiques propres de cette cavité. Chaque fois que les conditions d'application de la méthode de Bromwich-Bornis seront remplies, on pourra obtenir par son application toute une série de vibrations propres du type électrique et toute une autre série de vibrations propres du type magnétique.

Le problème général de la détermination des vibrations propres est très compliqué dès que la cavité n'a pas une forme simple. Nous n'étudierons ici que quelques exemples particuliers qui présentent un intérêt assez grand pour la radiotechnique des ondes très courtes.

Tout d'abord, nous traiterons quelques problèmes dont la solution s'obtient immédiatement à partir des Calculs du chapitre précédent. Considérons, en effet, un guide électrique et limitons-le par deux parois conductrices perpendiculaires à son axe et situées à une distance l l'une de l'autre, on aura ainsi constitué une cavité fermée dont il est facile de trouver les vibrations propres si l'on a préalablement déterminé les propagations possibles dans le type de guide considéré. Ces propagations sont représentées par le facteur

$$(1) \quad P = e^{i(kct - k_z z)}$$

qui correspond à une propagation dans le sens positif de l'axe des z . En changeant k_z en $-k_z$, on obtient donc une propagation dans le sens négatif de l'axe des z et, en superposant les deux ondes se propageant en sens inverses, on obtient une onde stationnaire dépendant de z par un

facteur de la forme $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. En écrivant que le champ électrique de l'onde est normal aux deux parois extrêmes (dont on peut toujours supposer les abscisses égales à $z = 0$ et à $z = l$), on achèvera de déterminer les ondes stationnaires possibles qui seront les unes du type magnétique, les autres du type électrique.

Après avoir étudié ces problèmes simples, nous étudierons deux problèmes un peu différents.

2. Vibrations propres d'un parallélépipède rectangle. — En opérant sur le guide à section rectangulaire comme cela a été indiqué au paragraphe 1, on obtient une enceinte parallélépipédique d'arêtes a , b , l .

Pour trouver les ondes stationnaires de cette enceinte, on partira des formules (16) et (17) du chapitre précédent que l'on combinera avec les mêmes formules où l'on aura changé k_z en $-k_z$ de façon à faire apparaître les combinaisons $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. Puis on choisira celles de ces solutions qui satisfont aux nouvelles conditions aux limites

$$(2) \quad E_x = E_y = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } z = l.$$

On est ainsi amené à choisir dans les expressions de E_x et de E_y , le facteur $\sin k_z z$ et de plus à poser

$$(3) \quad k_z = \frac{n_3 \pi}{l} \quad (n_3 \text{ entier}).$$

Posons pour plus de symétrie

$$(4) \quad \gamma_1 = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad \gamma_2 = \frac{n_2 \pi}{b}, \quad \gamma_3 = k_z = \frac{n_3 \pi}{l}.$$

Pour les ondes du type *électrique*, nous obtiendrons

$$(5) \quad \begin{cases} E_z = (k^2 - \gamma_3^2) \sin \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{i k c t}, \\ E_x = -\gamma_3 \gamma_1 \cos \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \sin \gamma_3 z e^{i k c t}, \\ E_y = -\gamma_3 \gamma_2 \sin \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \sin \gamma_3 z e^{i k c t}; \\ H_z = 0, \\ H_x = -i k \gamma_2 \sin \gamma_1 x \cos \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{i k c t}, \\ H_y = -i k \gamma_1 \cos \gamma_1 x \sin \gamma_2 y \cos \gamma_3 z e^{i k c t}. \end{cases}$$

Nous voyons aisément que les ondes de ce type correspondant aux ensembles de nombres entiers $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$,

(1, 0, 1) et (0, 1, 1) sont nulles. L'onde stationnaire de plus basse fréquence correspond à (1, 1, 0),

On calculera les fréquences en remarquant qu'en vertu de la formule (18) du Chapitre précédent, nous avons ici

$$(6) \quad k^2 = \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} = x^2 + k_z^2 = \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{l^2} \right) \pi^2.$$

Pour les ondes du type *magnétique*, on trouve de même

$$(7) \quad \begin{cases} E_z = 0, \\ E_x = -ik\gamma_2 \cos\gamma_1 x \sin\gamma_2 y \sin\gamma_3 z e^{ikct}, \\ E_y = ik\gamma_1 \sin\gamma_1 x \cos\gamma_2 y \sin\gamma_3 z e^{ikct}, \\ H_z = (k^2 - \gamma_3^2) \cos\gamma_1 x \cos\gamma_2 y \sin\gamma_3 z e^{ikct}, \\ H_x = -\gamma_3 \gamma_1 \sin\gamma_1 x \cos\gamma_2 y \cos\gamma_3 z e^{ikct}, \\ H_y = -\gamma_3 \gamma_2 \cos\gamma_1 x \sin\gamma_2 y \cos\gamma_3 z e^{ikct}. \end{cases}$$

Ici les ondes de plus basse fréquence correspondent à (1, 0, 1) et à (0, 1, 1), les fréquences étant d'ailleurs toujours données par la formule (6).

On voit d'ailleurs que les ondes (5) et (7) font jouer un rôle particulier à l'axe des z en raison même de la façon dont elles sont obtenues. En raison du rôle symétrique des trois arêtes du parallélépipède, on obtiendra d'autres ondes stationnaires en permutant le rôle des axes x, y, z .

3. Vibrations propres du cylindre circulaire droit. — En limitant un guide à section circulaire comme il a été indiqué au paragraphe 1, on obtient une cavité en forme de cylindre circulaire droit.

Les ondes stationnaires s'obtiennent en partant des équations (31) et (32) du Chapitre précédent que l'on combinera de façon à faire apparaître les facteurs $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. Puis on tiendra compte des nouvelles conditions aux limites

$$(8) \quad E_\varphi = E_r = 0, \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } z = l,$$

ce qui conduit à choisir $\sin k_z z$ dans les expressions de E_φ et de E_r et de plus à poser

$$(8) \quad k_z = \frac{n\pi}{l} \quad (n \text{ entier}).$$

Pour les ondes du type *électrique*, on trouve ainsi

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = x^2 J_m(x_\rho) \frac{\cos m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l}}{\sin} e^{ikct}, \\ E_\rho = -x \frac{n\pi}{l} J'_m(x_\rho) \frac{\cos m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l}}{\sin} e^{ikct}, \\ E_\varphi = -\frac{n m \pi}{l \rho} J_m(x_\rho) \frac{\sin m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l}}{\cos} e^{ikct}, \\ H_z = 0, \\ H_\rho = -\frac{ikm}{\rho} J_m(x_\rho) \frac{\sin m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l}}{\cos} e^{ikct}, \\ H_\varphi = -ikx J'_m(x_\rho) \frac{\cos m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l}}{\sin} e^{ikct}, \end{array} \right.$$

avec

$$(11) \quad x = \frac{\mu_i^{(m)}}{R}, \quad k^2 = x^2 + k_z^2 = \frac{\mu_i^{m^2}}{R^2} - \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

où $\mu_i^{(m)}$ est toujours le $i^{\text{ème}}$ zéro non nul de la fonction J_m .

Chaque onde stationnaire est caractérisée par trois nombres (n, m, i) . L'onde de plus basse fréquence est l'onde $(0, 0, 1)$, cette vibration stationnaire, dont le champ électrique est longitudinal et dont le champ magnétique est circulaire, correspond à une oscillation électrique s'effectuant le long des génératrices du cylindre et peut se comparer à la vibration d'une antenne en demi-onde ou d'un condensateur circulaire. Pour les ondes du type *magnétique*, on trouve de même les formules

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_z = 0, \\ E_\rho = \frac{ikm}{\rho} J_m(x_\rho) \frac{\sin m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l}}{\cos} e^{ikct}, \\ E_\varphi = ikx J'_m(x_\rho) \frac{\cos m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l}}{\sin} e^{ikct}, \\ H_z = x^2 J_m(x_\rho) \frac{\cos m\varphi \sin \frac{n\pi z}{l}}{\sin} e^{ikct}, \\ H_\rho = \frac{n\pi}{l} x^2 J'_m(x_\rho) \frac{\cos m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l}}{\sin} e^{ikct}, \\ H_\varphi = -\frac{n m \pi}{l \rho} J_m(x_\rho) \frac{\sin m\varphi \cos \frac{n\pi z}{l}}{\cos} e^{ikct}, \end{array} \right.$$

avec

$$(13) \quad x = \frac{\nu_i^{(m)}}{R}, \quad k^2 = k_z^2 + x^2 = \frac{\nu_i^{m^2}}{R^2} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2},$$

où $\nu_i^{(m)}$ est toujours le $i^{\text{ème}}$ zéro non nul de la fonction J'_m .

Ici encore chaque onde stationnaire est caractérisée par trois nombres

entiers (n, m, i) . Maintenant l'onde de plus basse fréquence est l'onde $(1, 1, 1)$. L'onde $(1, 0, 1)$ a une fréquence plus élevée (parce que $\nu_1^{(0)} > \nu_1^{(1)}$); elle a son champ électrique circulaire et son champ magnétique longitudinal sur l'axe et elle correspond à un oscillateur électrique s'effectuant le long du contour des sections droites du cylindre; on peut la comparer à la vibration d'un solénoïde à spires jointives.

4. **Vibrations propres du tore à section rectangulaire.** — Nous ne nous attarderons pas à discuter les vibrations propres du cylindre elliptique, que l'on pourrait aisément obtenir à partir de la théorie esquissée au paragraphe 3 du Chapitre II. Par contre, nous appliquerons les considérations du paragraphe 1 du présent Chapitre au cas du câble coaxial. Or, en limitant un câble coaxial aux deux bouts, on obtient un tore à section rectangulaire : nous allons donc chercher maintenant les vibrations propres du tore à section rectangulaire.

Il ne nous est pas nécessaire d'écrire explicitement les formules donnant dans ce cas les champs électromagnétiques des ondes stationnaires pour le type électrique et pour le type magnétique. Il résulte, en effet, de notre étude antérieure du câble coaxial, que l'on passe du cas du cylindre circulaire à celui du câble coaxial en remplaçant dans les formules obtenues pour les champs dans le premier cas la fonction $J_m(x\rho)$ par la combinaison linéaire $AJ_m(x\rho) + BK_m(x\rho)$. Il suffira donc de faire le même changement dans les formules (10) et (12) pour obtenir les ondes stationnaires du tore à section rectangulaire, les côtés du rectangle de section étant l et $R_2 - R_1$ où R_1 et R_2 sont les rayons des deux cylindres du câble coaxial.

Pour les ondes du type *électrique* ainsi obtenues, on devra prendre pour z au lieu de la valeur (11) une des racines de l'équation transcendante

$$(14) \quad J_m(zR_1)K_m(zR_2) = J_m(zR_2)K_m(zR_1),$$

comme cela résulte immédiatement de la théorie du câble coaxial. Si $z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots$ sont ces racines, la fréquence sera donnée par la formule

$$(15) \quad k^2 = k_z^2 + z^2 = z_i^{(m)2} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Ici encore, chaque onde stationnaire sera déterminée par trois nombres entiers (n, m, i) . L'onde de plus basse fréquence sera l'onde $(0, 0, 1)$, elle correspondra à une vibration électrique comparable à l'oscillation d'un condensateur annulaire.

Pour les ondes du type *magnétique*, on devra prendre pour α , au lieu de la valeur (13), une des racines de l'équation transcendante

$$(16) \quad J'_m(\alpha R_1) K'_m(\alpha R_2) = J'_m(\alpha R_2) K'_m(\alpha R_1).$$

Si $\beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \dots$ sont ces racines, les fréquences seront données par

$$(17) \quad k^2 = k_z^2 + \alpha^2 = \beta_l^{(m)2} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Chaque onde stationnaire sera définie par trois nombres entiers (n, m, i) . L'onde de plus basse fréquence sera l'onde $(1, 1, 1)$. L'onde $(1, 0, 1)$ aura une fréquence plus élevée, elle peut se comparer à l'oscillation de deux solénoïdes coaxiaux.

§. Vibrations propres du tore à section circulaire. — L'étude des vibrations propres du tore à section rectangulaire nous amène tout

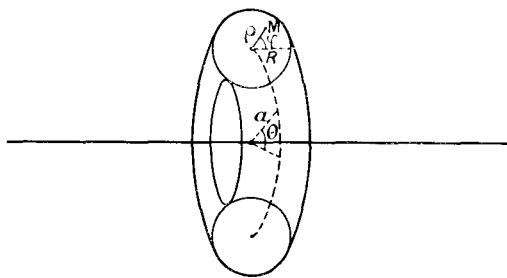


Fig. 5.

naturellement à penser aux vibrations propres du tore à section circulaire. Mais c'est là un problème beaucoup plus compliqué dont nous ignorons si la solution rigoureuse, qui ne peut plus s'obtenir comme pour les problèmes précédents, a pu être calculée.

On obtiendra une solution approximative du problème de la façon suivante : on considérera le tore comme obtenu en incurvant un cylindre droit de façon que son axe prenne la forme d'un cercle et que les deux bouts se rejoignent et l'on tentera d'utiliser les solutions obtenues pour le guide à section circulaire.

Pour appliquer cette méthode, nous repérerons les points des sections méridiennes circulaires de rayon R du tore par des variables polaires ρ et φ . La position d'une de ces sections méridiennes sera repérée par son azimut θ autour de l'axe de révolution du tore. Le lieu des centres des

cercles méridiens est un cercle de rayon a le long duquel nous repérerons les points à l'aide de la variable $z = a\theta$.

Pour appliquer la méthode approximative, nous partirons de l'expression des ondes dont la propagation est possible dans un guide à section circulaire de rayon R en posant dans les formules $z = a\theta$. Nous combinerons ces expressions avec celles qu'on obtient en changeant k_z en $-k_z$ de façon à faire apparaître les ondes stationnaires en $\frac{\sin k_z z}{\cos k_z z} = \frac{\sin k_z a\theta}{\cos k_z a\theta}$. Nous aurons à exprimer que les champs électromagnétiques sont donnés par des fonctions uniformes à l'intérieur du tube, ce qui nous fournit la condition

$$(18) \quad k_z a \cdot 2\pi = n \cdot 2\pi \quad \text{ou} \quad k_z = \frac{n}{a} \quad (n \text{ entiers}).$$

Voici les formules que l'on obtient ainsi pour les ondes du type *électrique* :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_\theta = -\alpha^2 J_m(\alpha\varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} e^{iket}, \\ E_\varphi = -\alpha \frac{n}{a} J'_m(\alpha\varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} - \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} e^{iket}, \\ E_z = \frac{nm}{\alpha\varphi} J_m(\alpha\varphi) - \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} - \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} e^{iket}, \\ H_\theta = 0, \\ H_\varphi = -\frac{ikm}{\varphi} J_m(\alpha\varphi) - \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} e^{iket}, \\ H_z = -ik\alpha J'_m(\alpha\varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} e^{iket}, \end{array} \right.$$

avec

$$(20) \quad \alpha = \frac{\nu_j^{(m)}}{R}, \quad k^2 = \alpha^2 + k_z^2 = \frac{\nu_j^{(m)2}}{R^2} + \frac{n^2}{a^2}.$$

De même on obtient, pour les ondes du type *magnétique*,

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_\theta = 0, \\ E_\varphi = -\frac{ikm}{\varphi} J_m(\alpha\varphi) - \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} e^{iket}, \\ E_z = ik\alpha J'_m(\alpha\varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} e^{iket}, \\ H_\theta = -\alpha^2 J_m(\alpha\varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta} e^{iket}, \\ H_\varphi = -\alpha \frac{n}{a} J'_m(\alpha\varphi) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} - \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} e^{iket}, \\ H_z = \frac{nm}{\alpha\varphi} J_m(\alpha\varphi) - \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi} - \frac{\cos n\theta}{\sin n\theta} e^{iket}, \end{array} \right.$$

avec

$$(22) \quad z = \frac{\nu_j^m}{R}, \quad k^2 = z^2 + k_z^2 = \frac{\nu_j^{m_j}}{R^2} + \frac{n^2}{a^2}.$$

Il importe maintenant de voir dans quelles limites ces solutions approximatives peuvent être utilisées. Or il est évident qu'elles supposent que sur une longueur égale à plusieurs fois la longueur d'onde de la propagation, le tore puisse être confondu avec un cylindre droit; ceci exige que l'on ait

$$(23) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi a}{n} \gg \pi a.$$

Il faut donc que n soit grand par rapport à l'unité. Seules les vibrations d'ordres supérieurs pour lesquels il y a un grand nombre de nœuds et de ventres des champs le long du tore sont correctement représentées par les formules précédentes.

La solution rigoureuse valable pour toutes les valeurs de n , qui pourrait présenter un intérêt pratique en Radiotechnique, exigerait des calculs compliqués et ne sera pas recherchée ici.

6. Vibrations propres de la sphère. — Un problème intéressant est de déterminer les vibrations électromagnétiques propres de la cavité intérieure à une sphère métallique supposée parfaitement conductrice.

La méthode de Borgnis s'appliquera encore ici. On posera

$$(24) \quad x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi, \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

en prenant des coordonnées sphériques autour du centre de la sphère. On aura donc

$$(25) \quad e_1 = 1, \quad e_2 = r, \quad e_3 = r \sin \theta$$

et les conditions nécessaires pour l'application de la méthode de Borgnis seront satisfaites.

L'équation (47) du Chapitre I qui définit la fonction U prend ici la forme

$$(26) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right] + K^2 U = 0.$$

Les ondes du type *électrique* sont définies par les formules

$$(27) \quad \begin{cases} E_r = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, & E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, & E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}; \\ H_r = 0, & H_\theta = i \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & H_\varphi = -i \frac{k}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \end{cases}$$

De même, on a, pour les ondes du type *magnétique*,

$$(28) \quad \begin{cases} E_r = 0, & E_\theta = i \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E_\varphi = -i \frac{k}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \\ H_r = -k^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, & H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, & H_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}. \end{cases}$$

Dans tous les problèmes traités jusqu'ici, la fonction U pouvait considérer comme la composante z d'un vecteur de Hertz [vecteur de Hertz électrique pour les ondes du type (E), magnétique pour les ondes du type (H)]. Ici l'inspection des formules (27) et (28) montrent que U est assimilable à la composante *radiale* d'un vecteur de Hertz dont les autres composantes sont nulles. Toutefois ce vecteur n'est pas, dans le cas actuel, tout à fait défini suivant le schéma développé au paragraphe 3 du Chapitre I. Montrons-le pour le cas des ondes du type électrique, des considérations tout à fait analogues s'appliquant au cas des ondes du type magnétique.

Soit $\vec{\Pi}$ un vecteur de Hertz n'ayant comme composante non nulle que la composante Π_r . D'après le paragraphe 3 du Chapitre I nous devrions poser

$$(29) \quad A_r = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_r}{\partial t}, \quad A_\varphi = A_\theta = 0, \quad V = -\operatorname{div} \vec{\Pi} = -\left[\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \Pi_r \right].$$

Or les formules (27) et (28) correspondent aux définitions suivantes :

$$(30) \quad A_r = \frac{1}{c} \frac{\partial \Pi_r}{\partial t}, \quad A_\varphi = A_\theta = 0, \quad V = -\frac{\partial \Pi_r}{\partial r} \neq -\operatorname{div} \vec{\Pi},$$

et ces définitions, contrairement aux définitions (27), ne satisfont pas à la relation de Lorentz entre les potentiels. Rien n'empêche cependant de les utiliser, mais alors comme cela résulte de la formule (32) du

Chapitre I, on n'aura pas $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Lambda}}{\partial t^2} - \Delta \vec{\Lambda} = 0$ et par suite, on n'aura pas

non plus $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} - \Delta \vec{\Pi} = 0$. Il s'introduira des termes supplémentaires dans l'équation de propagation de $U = \Pi_r$. Or il se trouve qu'avec ces termes supplémentaires l'équation en U prend la forme (26), forme plus simple que celle qu'elle prendrait si ces termes supplémentaires n'existaient pas : il y a donc avantage ici, comme nous l'avons fait implicitement en suivant la méthode de Borgnis, à adopter les définitions (30) plutôt que les définitions habituelles (29).

Cette remarque faite, reprenons l'application de la méthode de Borgnis en cherchant, comme d'usage, une solution de l'équation (26)

qui se présente comme le produit d'une fonction de θ et de φ par une fonction de r et qui soit régulière et uniforme dans toute la sphère. En portant la forme $U = F_1(r) F_2(\theta, \varphi)$ dans l'équation (5), on voit une fois de plus qu'une certaine expression ne dépendant que de r doit être égale à une certaine expression ne dépendant que de θ et φ : ceci n'est possible que si ces deux expressions sont égales à une même constante γ et l'on obtient ainsi

$$(31) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \varphi^2} + \gamma F_2 = 0, \quad r^2 \frac{d^2 F_1}{dr^2} + k^2 r^2 F_1 - \gamma F_1 = 0.$$

Il est bien connu que la première équation n'a de solutions partout régulières en φ et θ que si l'on a

$$(32) \quad \gamma = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et, si γ a l'une de ces valeurs, l'équation a comme solutions régulières et uniformes en θ et φ les fonctions de Laplace $Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ donnée par

$$(33) \quad Y_{n,m}(\theta, \varphi) = \frac{\sin}{\cos} m \varphi P_n^m(\cos \theta) \quad (m \leq n).$$

Les $P_n^m(\cos \theta)$ sont des polynomes associés de Legendre qui se déduisent des polynomes de Legendre ordinaire $P_k(\cos \theta)$ par la formule

$$(34) \quad P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m}.$$

Les fonctions de Laplace forment d'ailleurs un système complet de fonctions orthogonales sur la sphère de rayon 1.

Lorsque γ aura l'une des valeurs propres (32), la seconde équation (31) s'écrira

$$(35) \quad \frac{d^2 F_1}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] F_1 = 0.$$

Posons

$$(36) \quad F_1(r) = \sqrt{r} f(r), \quad u = kr;$$

il vient

$$(37) \quad \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{df}{du} + \left[1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{u^2} \right] f = 0.$$

C'est encore l'équation de Bessel et la seule solution de cette équation qui reste régulière pour $r = 0$ est la fonction de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}(u)$. Finalement

ment nous obtenons comme solutions uniformes et régulières de l'équation (26)

$$(38) \quad U = \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} P_n^m(\cos \theta) e^{iket} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m \leq n).$$

A l'aide des formules (27) et (28), on déduit alors pour les ondes stationnaires possibles à l'intérieur de la sphère les formes suivantes :

Type électrique :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = k^2 \frac{n(n+1)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \\ E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \\ E_\varphi = \frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] - \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{iket}; \\ H_r = 0, \\ H_\theta = -i \frac{k^2 m}{\sqrt{kr} \sin \theta} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) - \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \\ H_\varphi = -i \frac{k^2}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \end{array} \right.$$

Type magnétique :

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_r = 0, \\ E_\theta = -i \frac{k^2 m}{\sqrt{kr} \sin \theta} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) - \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \\ E_\varphi = -i \frac{k^2}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{iket}; \\ H_r = -k^2 \frac{n(n+1)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \\ H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \\ H_\varphi = -\frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] - \sin m\varphi P_n^m(\cos \theta) e^{iket}, \end{array} \right.$$

Nous avons maintenant à introduire les conditions aux limites

$$(41) \quad E_\varphi = E_\theta = 0 \quad \text{pour } r = R.$$

Pour les ondes stationnaires du type *électrique*, les conditions (41) nous donnent

$$(42) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \right\}_{r=R} = 0.$$

Or les fonctions de Bessel vérifient la relation

$$(43) \quad x J_{p-1}(x) = x J'_p(x) + p J_p(x)$$

qui, introduite dans (42), fournit

$$(44) \quad \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kR)}{J_{n-\frac{1}{2}}(kR)} = \frac{kR}{n}.$$

Cette équation transcendante possède en kR une suite de racines que l'on nommera $\gamma_1^{(n+\frac{1}{2})}$, $\gamma_2^{(n+\frac{1}{2})}$, ... et l'on aura pour k les valeurs propres

$$(45) \quad k_{n,i} = \frac{\gamma_i^{(n+\frac{1}{2})}}{R},$$

équation donnant les fréquences propres électromagnétiques pour la cavité sphérique. Chaque onde stationnaire correspond à trois nombres entiers (n, m, i), mais les fréquences propres ne dépendent pas de m .

Les ondes $E_{1,m,1}$ ont la fréquence la plus basse et comme on a $\gamma_1^{(\frac{3}{2})} = 2,74$, on voit aisément que la longueur d'onde dans le vide correspondant à cette fréquence est égale à $\frac{2\pi R}{2,74}$ ou à $2,29 R$.

Pour les ondes stationnaires du type *magnétique*, les conditions (41) donnent

$$(46) \quad J_{n+\frac{1}{2}}(kR) = 0;$$

si l'on désigne toujours par $\mu_i^{(m)}$ le $i^{\text{ième}}$ zéro non nul de J_m , on a ici

$$(47) \quad k_{n,i} = \frac{\mu_i^{(n+\frac{1}{2})}}{R},$$

d'où l'on déduit les fréquences propres qui sont indépendantes de m . Ce sont encore les ondes $(1, m, 1)$ qui ont la plus petite fréquence propre et comme $\mu_1^{(\frac{3}{2})} = 4,49$, cette fréquence propre correspond à la longueur d'onde dans le vide $\lambda = \frac{2\pi R}{4,49} = 1,4 R$.

Il pourrait sembler que les ondes stationnaires (39) et (40) ne sont pas les seules possibles, puisqu'elles dépendent du choix de l'axe polaire, choix qui est arbitraire. Si nous prenions à la place de Oz un autre axe polaire Oz' , nous aurions de nouvelles coordonnées φ' et θ' dans ce nouveau système de repérage et nous obtiendrions d'autres formes

d'ondes stationnaires en remplaçant dans (39) et (40) les lettres φ et θ par les lettres φ' et θ' . Mais en réalité chacune des nouvelles ondes stationnaires ainsi obtenues est une combinaison linéaire des anciennes ondes stationnaires (39) et (40), les coefficients de la combinaison dépendant naturellement de la rotation des axes autour du centre de la sphère qui a fait passer des coordonnées φ et θ aux coordonnées φ' et θ' . Les ondes stationnaires (39) et (40) forment donc un système complet d'ondes stationnaires en ce sens que toute onde stationnaire peut être représentée par une superposition d'ondes stationnaires des types (39) et (40) ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Les oscillations électromagnétiques des cavités ont été étudiées par M. Jean Bernier [26], [27]. Une théorie mathématique générale a été développée par M. P. Nicolas [28]. M. Marc Jouguet a calculé les vibrations des cavités ellipsoïdales [29].

CHAPITRE IV.

CALCUL DES PERTES DANS LES GUIDES ÉLECTRIQUES.

1. Première méthode approximative pour le calcul des pertes. —

Nous avons jusqu'ici supposé que les parois métalliques limitant un guide électrique étaient parfaitement conductrices. Il en résultait que les ondes dont la propagation était possible le long du guide se propageaient sans affaiblissement. En réalité, la conductibilité des parois d'un guide est toujours finie : il en résulte que les ondes électromagnétiques pénètrent légèrement dans ces parois et y provoquent des courants donnant lieu à des pertes d'énergie par effet Joule. Comme ces pertes se renouvellent tout le long du tube, les ondes s'affaiblissent en se propageant; leurs expressions doivent donc contenir des facteurs de la forme $e^{-\gamma z} e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)}$, dont l'un traduit la propagation et l'autre l'affaiblissement. Pour étudier ces propagations avec affaiblissement, on peut employer deux méthodes : la première est moins rigoureuse et conduit à des calculs plus simples que la seconde, mais la seconde a l'avantage d'être rigoureuse et d'analyser de plus près les phénomènes physiques. Nous allons d'abord exposer la première méthode qui est la plus usuellement employée.

Dans cette première méthode, on remarque que γ doit toujours être très petit devant k_z (sans quoi il n'y aurait plus réellement propagation) et l'on garde comme expressions des champs celles qui ont été obtenues en supposant les parois parfaitement réfléchissantes. Il y a là une approximation qui n'est pas absolument logique, car les solutions obtenues précédemment correspondent à la condition que, sur les parois du guide, le champ électrique tangentiel s'annule et alors la composante normale à la paroi du vecteur de Poynting est partout nulle : donc pas de flux d'énergie de l'intérieur du guide vers l'épaisseur de la paroi et par suite pas de pertes par effet Joule dans cette paroi, ce qui est

contraire à l'hypothèse. La deuxième méthode, plus rigoureuse, tiendra compte du fait que les champs n'ont pas exactement la forme étudiée précédemment quand la paroi n'est pas parfaitement conductrice.

Voici maintenant quel est, dans la première méthode présentement étudiée, le principe du calcul des pertes. Désignons par W_m la quantité d'énergie qui passe en moyenne par unité de temps à travers la section droite du guide. Cette quantité s'obtiendra en calculant le flux du vecteur de Poynting à travers cette section droite et comme le vecteur de Poynting est fonction quadratique des champs, W_m dépendra de z par le facteur $e^{-2\gamma z}$. On aura donc

$$(1) \quad \frac{dW_m}{dz} = -2\gamma W_m.$$

Comme la diminution de W_m correspond à une dissipation d'énergie par effet Joule dans les parois, on voit que si $Q_m dz$ représente la valeur moyenne de la chaleur de Joule (exprimée en unités mécaniques) qui se dégage en une unité de temps dans la portion de longueur dz des parois, on aura

$$(2) \quad \gamma = \frac{Q_m}{2W_m}.$$

A parler rigoureusement Q_m et W_m dépendent de z , mais nous admettons qu'elles varient très peu en fonction de z : notre approximation consistera à négliger cette variation et à calculer Q_m et W_m à partir des valeurs des champs calculées pour le cas des parois parfaitement conductrices. Bien qu'il y ait une sorte de cercle vicieux dans ces raisonnements, ils nous conduiront cependant à des résultats exacts.

Le calcul de W_m sera immédiat à partir des valeurs admises pour les champs grâce à l'expression du vecteur de Poynting : il ne pourra être entravé que par des difficultés pratiques d'intégration dans certains cas.

Quant à Q_m , son évaluation exige la connaissance de la théorie de la pénétration des ondes dans les conducteurs. Nous devons donc consacrer un paragraphe à cette théorie.

2. Pénétration des ondes électromagnétiques dans les conducteurs.

— Considérons un métal de perméabilité μ et de conductibilité σ . A l'intérieur de ce métal, sera valable l'équation de Maxwell (1)

$$(3) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} - \frac{4\pi \vec{i}}{c} = \text{rot } \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E};$$

(1) Rappelons que \vec{E} , \vec{i} et par suite σ sont exprimées ici en unités électrostatiques.

si l'on envisage toujours une onde électromagnétique harmonique dont les champs sont proportionnels à e^{ikct} , on peut écrire

$$(4) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\varepsilon} \vec{E}) = \text{rot } \vec{H}.$$

avec la définition

$$(5) \quad \varepsilon = 1 - i \frac{4\pi\sigma}{kc}.$$

Tout se passe donc comme si le métal possédait une constante diélectrique *complexe*, fonction de la fréquence de l'onde.

Supposons le métal limité par une face plane. Une onde électromagnétique plane dont les plans d'onde seront parallèles à la face d'entrée du métal pénétrera en lui suivant l'équation

$$(6) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2},$$

z étant comptée suivant la normale à la face d'entrée. Comme en chaque point, on a $\vec{i} = \sigma \vec{E}$, on a aussi

$$(7) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{i}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{i}}{\partial z^2},$$

et cette équation représente la pénétration du courant provoqué par l'onde dans l'épaisseur du métal.

Nous poserons alors

$$(8) \quad \vec{i} = \vec{i}_0 e^{i(kct - k_z z)},$$

où k_z sera une constante complexe de la forme $k'_z - ik''_z$. En substituant dans (8), on a

$$(9) \quad \mu k^2 = k_z^2$$

et, en séparant le réel et l'imaginaire,

$$(10) \quad \mu k^2 = k_z'^2 - k_z''^2, \quad \mu k_z' k_z'' = \frac{4\pi\mu k\sigma}{c}.$$

Pour les métaux très conducteurs, la pénétration est en fait toujours petite ⁽¹⁾ par rapport à la longueur d'onde dans le vide indéfini $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

⁽¹⁾ Tout au moins ceci est-il vrai pour toutes les ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde dépasse le centimètre.

Si le métal n'est pas très magnétique, cette circonstance permet de négliger μk^2 devant $k_z''^2$ et par suite de poser $k_z' = k_z''$. Il vient alors

$$(11) \quad k_z'' = \sqrt{\frac{2\pi\gamma k\sigma}{c}} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\gamma\sigma}.$$

Considérons alors dans la masse du métal une lame parallèle à la face d'entrée dont la longueur (dans le sens des vecteurs \vec{E} et \vec{i}) soit L , la largeur l et l'épaisseur dz . Sa résistance électrique sera $\frac{L}{\sigma l dz}$. L'énergie consommée en moyenne par unité de temps dans cette lame est

$$(12) \quad \overline{E i L / dz} = \frac{|\dot{i}_0|^2}{2\sigma} l L e^{-2k_z'' z} / dz.$$

Pour toute la profondeur du métal, on trouve, comme énergie consommée en moyenne par unité de temps rapportée à une plaque superficielle de longueur L et de largeur l

$$(13) \quad Q_m = \frac{|\dot{i}_0|^2}{2} \frac{lL}{\sigma} \int_0^{+\infty} e^{-2k_z'' z} dz = \frac{lL}{4\sigma k_z''} |\dot{i}_0|^2.$$

Maintenant l'intensité totale du courant dans la portion du métal correspondant à la plaque étudiée est

$$(14) \quad I = \int_0^{+\infty} i l dz = i_0 l e^{i k_z' z} \int_0^{+\infty} e^{-(1+i)k_z'' z} dz = \frac{i_0 l}{k_z'' (1+i)} e^{i k_z' z},$$

d'où

$$(15) \quad |\dot{i}_0|^2 = \frac{2 k_z''^2}{l^2} |I|^2$$

et par suite

$$(16) \quad Q_m = \frac{L}{2\sigma l} k_z''^2 |I|^2 = \frac{1}{2} \frac{2\pi\gamma L}{c l} \sqrt{\frac{\gamma\sigma}{\pi}} |I|^2 = \frac{1}{2} r |I|^2,$$

avec la définition

$$(17) \quad r = \frac{2\pi\gamma L}{c l} \sqrt{\frac{\gamma\sigma}{\pi}}.$$

La formule (17) est due à lord Kelvin : elle nous permettra de calculer Q_m si nous admettons qu'on peut l'appliquer à la paroi d'un guide, même dans le cas général où cette paroi n'est pas plane, ce qui constitue encore une approximation.

Le calcul des pertes effectuées à l'aide de la formule sera naturellement différent suivant le type de guide que l'on considère. Nous ne

développerons les calculs que dans le cas du guide cylindrique, très important dans la pratique.

3. Calcul de l'affaiblissement pour l'onde (E_0) d'un guide cylindrique.

— Nous supposons toujours que l'on a à l'intérieur du guide $\varepsilon = \mu = 1$. M. Clavier a d'ailleurs montré que, si l'on remplit le guide d'un diélectrique, les pertes par hystérésis diélectrique sont beaucoup plus grandes que les pertes par effet Joule dans la paroi, de sorte que l'on n'a jamais intérêt à mettre un tel diélectrique.

Pour calculer W_m pour l'onde (E_0) , nous nous reporterons aux formules (31) du Chapitre II, que nous multiplierons par une constante $\frac{C_0}{x^2}$ représentant l'intensité d'excitation de l'onde. En prenant alors le flux du vecteur de Poynting à travers une section droite du guide, nous aurons

$$(18) \quad W_m = \frac{16\pi}{c} \int_0^R (E_\varphi H_z - E_z H_\varphi^*) 2\pi \varphi d\varphi = \frac{k k_z}{4x^2} C_0^2 c \int_0^R J_1^2(x\varphi) \varphi d\varphi,$$

en tenant compte de

$$(19) \quad J_1(x) = -\frac{dJ_0}{dx}.$$

Le calcul de l'intégrale de (18) conduit, en tenant compte de la condition à la limite $J_0(xR) = 0$, à la valeur

$$(20) \quad \int_0^R J_1^2(x\varphi) \varphi d\varphi = \frac{R^2}{2} J_1^2(xR),$$

d'où, pour W_m , la valeur

$$(21) \quad W_m = \frac{k k_z c}{8x^2} C_0^2 R^2 J_1^2(xR),$$

x ayant l'une des valeurs quantifiées $\frac{\mu_l^{(m)}}{R}$.

Le courant I a lieu le long des génératrices de la paroi et est donné par la formule

$$(22) \quad \frac{4\pi}{c} I_z = 2\pi R H_\varphi(R),$$

obtenue en considérant la figure 6a suivante et en appliquant la loi d'Ampère au circuit indiqué, le champ \vec{H} étant nul dans la portion située à l'intérieur de la paroi. On a donc

$$(23) \quad I_z = \frac{Rc}{2} H_\varphi(R) = -i \frac{k R c}{2x} C_0 J_1(xR) e^{i(k_z z - k_z z)}.$$

En faisant dans la formule (17) $L=1$ et $l=2\pi R$, on a ⁽¹⁾

$$(24) \quad r = \frac{1}{cR} \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma}}$$

et par suite

$$(25) \quad Q_m = \frac{1}{2} r (I_z)^2 = \frac{Rc}{8} \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma}} \frac{k^2}{x^2} [C_0] J_1^2(xR),$$

d'où enfin

$$(26) \quad \gamma_{E_0} = \frac{Q_m}{2W_m} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma}} \frac{k}{k_z} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{\mu_0 c}{2\pi\sigma}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k^2 - \frac{\mu_0 m^2}{R^2}}}.$$

En annulant $\frac{d\gamma_{E_0}}{dk}$, on trouve des minima de γ_{E_0} pour $k = \sqrt{3} \frac{\mu_0^{(m)}}{R}$ et les

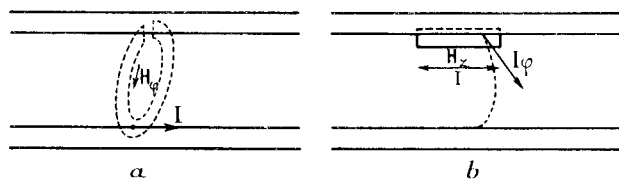


Fig. 6.

valeurs correspondantes de γ_{E_0} sont de la forme $\text{const.} \frac{\sqrt{k}}{R}$. On obtiendra le plus petit minimum de γ_{E_0} en prenant

$$(27) \quad k = \sqrt{3} \frac{\mu_0^{(m)}}{R} = \frac{2,4\sqrt{3}}{R}.$$

A cette fréquence, correspond la longueur d'onde dans le vide indéfini

$$(28) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 1,6R \text{ environ.}$$

4. Calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_0) d'un guide cylindrique.

— Le calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_0) présente un intérêt particulier. Cette onde, dont nous avons déjà noté le caractère un peu singulier, est en effet la seule à posséder la propriété suivante : son affaiblissement diminue quand la fréquence augmente. Cette propriété pourrait avoir des applications techniques intéressantes.

En partant des formules (32) du Chapitre II, on trouve ici la for-

(1) μ est la perméabilité magnétique de la paroi.

mule (18), mais maintenant c'est $J_1(zR) = -J'_0(zR)$ qui est nulle sur la paroi. Le calcul de l'intégrale de (18) conduit alors à la valeur

$$(29) \quad \int_0^R J_1^2(zr) r dr = \frac{R^2}{2} J_0^2(zR)$$

au lieu de (20). D'où, au lieu de (21),

$$(30) \quad W_m = c \frac{k k_z R^2}{8 z^2} C_0^2 J_0^2(zR).$$

Ici, on a dans la paroi un courant circulaire et en appliquant la loi d'Ampère au circuit indiqué sur la figure 6*b*, on trouve

$$(31) \quad I_z = \frac{c}{4\pi} H_z = \frac{c C_0}{4\pi} J_0(zR) e^{i k_z z - k_z z}.$$

Ce courant I_z indépendant de la fréquence, contrairement à ce qui se passait pour le courant I_x du paragraphe précédent.

Nous appliquerons la formule (17) avec $L = 2\pi R$ et $l = 1$, ce qui nous donne

$$(32) \quad r = \frac{4\pi^2}{c} R \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma}},$$

d'où

$$(33) \quad Q_m = \frac{r}{\sigma} I_z^2 = \frac{C_0^2 R c}{8} \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma}} J_0^2(zR)$$

et par suite

$$(34) \quad \gamma_{H_0} = \frac{Q_m}{2 W_m} = \frac{z^2}{2 k k_z} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma}} = \frac{z^2}{2 R} \sqrt{\frac{2 c}{2 \pi \sigma}} \frac{1}{\sqrt{k k_z}} = \frac{\text{const.}}{\sqrt{k(k^2 - z^2)}}.$$

Pour une valeur propre donnée de z , γ_{H_0} décroît donc quand la fréquence croît et c'est là le résultat qui donne à l'onde (H_0) un caractère singulier.

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante, comme l'a fait remarquer Schellkunoff. L'onde (H_0) est la seule qui ait une composante H_z et n'ait pas de composante H_x [voir les formules (32) du Chapitre II]. Elle est la seule pour laquelle il y ait dans la paroi un courant se réduisant à la composante I_z provoquée par l'action de H_z . Or quand k croît, H_z tend toujours vers zéro par rapport aux autres composantes du champ; ceci s'explique aisément puisque, quand λ devient très petit, l'intérieur du guide mesuré à l'échelle de la longueur d'onde devient très grand et l'onde se propageant dans un espace qui pour elle est quasi indéfini, tend à devenir transversale comme dans la propagation libre. Cette décroissance relative de H_z quand k augmente explique

pourquoi, pour (H_0) et pour (H_0) seule, l'affaiblissement diminue quand la fréquence augmente.

5. **Calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_1) dans un guide cylindrique.** — M. Clavier a également indiqué le calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_1) qui est plus compliqué que les précédents.

Tout d'abord, on a

$$(35) \quad \begin{aligned} W_m &= \frac{c}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [E_\varphi H_\varphi^* - E_\varphi H_{\varphi+1}^* \text{ conjuguée}] \varphi d\varphi \\ &= \frac{ck_z}{8\pi k} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [|E_\varphi|^2 + |E_{\varphi+1}|^2] \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Les E_i^2 contiennent en facteur un terme $\frac{\sin^2}{\cos^2} m\varphi$ qui donne $\frac{1}{2}$ en moyenne, d'où

$$(36) \quad W_m = \frac{kk_z c}{8z^2} |G_1|^2 \int_0^R \left[\frac{1}{z^2 \varphi^2} J_1^2(z\varphi) + J_1'^2(z\varphi) \right] \varphi d\varphi.$$

L'intégrale vaut $\frac{R^2}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2 R^2} \right) J_1^2(zR)$ et par suite

$$(36) \quad W_m = \frac{|G_1|^2 J_1^2(zR)}{16} \frac{kk_z c}{z^2} R^2 \left(1 - \frac{1}{z^2 R^2} \right).$$

Ici il y a dans la paroi un courant électrique ayant une composante I_φ et une autre composante I_z . Elle sont données par les formules

$$(38) \quad \begin{cases} I_\varphi = \frac{c}{4\pi} H_z = \frac{G_1 c J_1(zR)}{4\pi} \cos \varphi e^{i(k_z z - k_z z)}, \\ I_z = c \frac{R}{2} H_\varphi = \frac{ik_z G_1}{2z^2} c J_1(zR) \sin \varphi e^{i(k_z z - k_z z)}. \end{cases}$$

Les valeurs moyennes efficaces correspondantes sont

$$(39) \quad \begin{cases} (I_\varphi)_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_\varphi|^2 d\varphi = c^2 \frac{|G_1|^2}{64\pi^2} J_1^2(zR), \\ (I_z)_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |I_z|^2 d\varphi = \frac{c^2 k_z^2 |G_1|^2}{16z^2} J_1^2(zR). \end{cases}$$

La formule (17) donne pour les résistances

$$(40) \quad r_\varphi = \frac{4\pi^2}{c} R \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\sigma}}, \quad r_z = \frac{1}{Rc} \sqrt{\frac{\mu\gamma}{\sigma}},$$

d'où, pour les pertes dans la paroi par unité de longueur,

$$(41) \quad Q_m = r_z (I_\varphi)_{\text{eff}}^2 + r_z (I_z)_{\text{eff}}^2 = \frac{|C_1|^2}{16} J_1^2(zR) \sqrt{\frac{x^2}{\sigma}} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{k_z^2}{z^2 R^2} \right)$$

et, pour le coefficient d'affaiblissement,

$$(42) \quad \gamma_m = \frac{Q_m}{2W_m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{\sigma}} \frac{z^2}{k k_z} \frac{1}{R} \left(\frac{1 + \frac{k_z^2}{z^2 R^2}}{1 - \frac{1}{z^2 R^2}} \right).$$

En remplaçant k_z par $\sqrt{k^2 - z^2}$, où α a une de ses valeurs propres, on obtient

$$(43) \quad \gamma_m = \frac{\Lambda}{\sqrt{k(k^2 - z^2)}} + B \sqrt{\frac{k^2 - z^2}{k}}.$$

Le premier terme qui diminue avec k provient de I_φ et de H_z , le second qui augmente avec k et devient prépondérant pour k très grand provient de I_z et de H_r . C'est à cause de la présence de ce dernier terme que (H_1) ne possède pas la même propriété singulière que (H_0) . Le coefficient γ_m possède en fonction de k un minimum très aplati.

6. Seconde méthode pour le calcul de l'affaiblissement. — La première méthode exposée ci-dessus n'est pas absolument logique, parce qu'elle est en contradiction, comme nous l'avons noté au début de son exposé, avec l'application du théorème de Poynting. Nous allons exposer une seconde méthode plus rigoureuse qui tienne compte de la modification des champs par suite du caractère non parfaitement conducteur de la paroi et qui décrive la pénétration de l'onde dans cette paroi. Pour préciser les idées, nous développerons cette seconde méthode pour le cas du guide cylindrique bien qu'elle soit tout aussi générale en principe que la première.

Nous supposons toujours qu'à l'intérieur du guide, on a $\varepsilon = \mu = 1$. Dans la paroi, μ a une certaine valeur donnée et ε a la valeur (5) où σ est la conductivité du métal constituant la paroi. Par suite des pertes, l'onde en propagation dans le guide contiendra un facteur $e^{-ik_z z}$, mais avec une valeur de k_z différente de la valeur k_z^0 correspondant au cas des parois parfaitement conductrices. On aura

$$(44) \quad k_z = k_z^0 + \delta k_z - i\gamma.$$

Nous supposons que δk_z et γ sont très petits devant k_z . On posera ici

$$(45) \quad z = \sqrt{k^2 - k_z^2}, \quad z_0 = \frac{x^{(m)}}{R} = \sqrt{k^2 - k_z^{(0)2}},$$

d'où approximativement

$$(46) \quad z = z_0 + \delta z \cong z_0 - \frac{k_z^0}{z} (\delta k_z - i\gamma).$$

Dans la paroi, on devra avoir une onde qui, pour pouvoir se raccorder avec l'onde intérieure au guide, devra contenir le facteur

$$(47) \quad e^{\frac{ik_z z}{\mu \varepsilon}} e^{-ik_z z} = e^{-ik_z z} \delta k_z z e^{-\gamma z} e^{ik_z z} \quad \left(k = \frac{k'}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \right).$$

Dans la paroi, l'argument des solutions de l'équation de Bessel figurant dans l'expression des champs doit être $\alpha'\rho$ avec

$$(48) \quad \alpha' = \sqrt{k'^2 - k_z^2} = \sqrt{k^2 \mu \varepsilon - k_z^2} \cong k \sqrt{\frac{-i\pi \mu \sigma}{k\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2\pi k \mu \sigma}{\varepsilon}} (i-1),$$

très approximativement en raison de la grande valeur attribuée à σ et de la valeur (5) de ε .

Maintenant dans la paroi, rien ne nous oblige à prendre pour l'expression des champs [voir formules (31) et (32) du Chapitre II] la fonction de Bessel J_m comme solution de l'équation de Bessel, car les points $\rho = 0$ de l'axe du guide ne sont pas dans la paroi. Physiquement on voit qu'il faut au contraire choisir une solution de l'équation de Bessel susceptible de représenter une onde cylindrique divergente allant s'absorber dans l'épaisseur de la paroi. La solution de l'équation de Bessel qui jouit ici de cette propriété est bien connue : c'est la première fonction de Hankel dont la définition est donnée à l'aide des fonctions de Bessel et de Neumann par la formule

$$(49) \quad H_m^{(1)}(u) = J_m(u) + iK_m(u).$$

Nous aurons donc, pour former l'expression des champs à l'intérieur de la paroi à y faire figurer la fonction $H_m^{(1)}(\alpha'\rho)$. Nous rappellerons que la forme asymptotique de $H_m^{(1)}(\alpha'\rho)$ pour les grandes valeurs de l'argument $\alpha'\rho$ est

$$(50) \quad H_m^{(1)}(\alpha'\rho) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha' \rho}} e^{i\left(\alpha' \rho - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\alpha' \rho \gg 1),$$

formule qui nous sera utile plus loin.

Ayant ainsi formé les expressions des champs électromagnétiques dans le guide et dans la paroi du guide, on aura, suivant un théorème bien connu de la théorie électromagnétique, à exprimer la continuité des composantes tangentielles des champs et des composantes normales des inductions quand on passe de l'intérieur du guide à l'intérieur de sa paroi. On obtient ainsi pour l'intensité de l'onde dans la paroi des valeurs qui ne sont compatibles que si une certaine condition est satisfaite. Cette condition, qui est complexe, permet en principe de déterminer les deux constantes réelles δk_z et γ et par suite détermine l'affaiblissement.

Nous allons faire les calculs pour le cas des ondes (E_0) et (H_0) et montrer qu'on retrouve en première approximation les résultats obtenus par la première méthode. Pour les ondes (E_m) et (H_m) avec $m \geq 1$, la méthode actuelle conduirait à des calculs compliqués que nous ne développerons pas, nous contentant d'en donner une idée au paragraphe 9.

7. Nouveau calcul de l'affaiblissement pour l'onde (E_0) du guide cylindrique. — Pour faire ce calcul, nous poserons d'abord à l'intérieur du guide ($\varepsilon = \mu = 1$)

$$(51) \quad E_z = J_0(z\rho) e^{(i\omega t - k_z z)}, \quad E_\rho = \frac{ik_z}{z} J_1(z\rho) \cdot \rho, \quad H_z = -\frac{k}{k_z} E_\rho,$$

les autres composantes du champ étant toutes nulles.

Dans la paroi, on posera

$$(52) \quad E_z = \Lambda H_0^{(1)}(z'R) \cdot \rho, \quad E_\rho = \frac{ik_z}{z'} \Lambda H_1^{(1)}(z'R) \cdot \rho, \quad H_z = -\varepsilon \frac{k}{k_z} E_\rho = -D_\rho$$

avec les valeurs (46) et (48) de z et z' .

En écrivant la continuité à la surface de la paroi de E_z , H_z et D_ρ , on obtient les deux conditions distinctes

$$(53) \quad J_0(zR) = \Lambda H_0^{(1)}(z'R), \quad \frac{1}{z} J_1(zR) = \frac{\varepsilon}{z'} \Lambda H_1^{(1)}(z'R).$$

Pour que les relations (53) soient compatibles, il faut avoir

$$(54) \quad z \frac{J_0(zR)}{J_1(zR)} = \frac{\varepsilon}{z'} \frac{H_0^{(1)}(z'R)}{H_1^{(1)}(z'R)}.$$

Mais on a, très approximativement,

$$(55) \quad J_0(zR) \cong J_0(z_0R) + \left[\frac{dJ_0(zR)}{dz(zR)} \right]_{z=z_0} (z - z_0)R = J_1(zR) \frac{k_z^0 R}{z} (\delta k_z - i\gamma)$$

et l'équation (54) s'écrit

$$(56) \quad \operatorname{Re} k_z^0 (\delta k_z - i\gamma) = \frac{z'}{\varepsilon} \frac{H_0^{(1)}(z'R)}{H_1^{(1)}(z'R)} \sim \frac{i-1}{-i} \sqrt{\frac{2\pi k_0 z}{e}} \frac{H_0^{(1)}}{H_1^{(1)}}.$$

Or la forme asymptotique de la fonction de Hankel (50) montre qu'on peut poser approximativement (car $z'R \gg 1$)

$$(57) \quad \frac{H_0^{(1)}(z'R)}{H_1^{(1)}(z'R)} = \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = i,$$

d'où

$$(58) \quad \operatorname{Re} k_z^0 (\delta k_z - i\gamma) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma}} (1 - i),$$

d'où encore, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$(59) \quad \delta k_z = \frac{k}{k_z^0} \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma}}, \quad \gamma_{E_0} = \frac{k}{k_z^0} \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{2\gamma}{\sigma}}.$$

On retrouve bien ainsi la valeur de γ_{E_0} obtenue par la méthode précédente [formule (26)].

8. Nouveau calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_0) du guide cylindrique. — Pour ce calcul, on posera dans le guide

$$(60) \quad H_z = J_0(z_\rho) e^{i(kct - k_z z)}, \quad H_\rho = \frac{z}{ik_z} J_1(z_\rho) \cdot P, \quad E_\varphi = \frac{k}{k_z} H_\rho,$$

les autres composantes des champs étant nulles.

Dans la paroi, on devra poser

$$(61) \quad H_z = \Lambda H_0^{(1)}(z'_\rho) \cdot P, \quad H_\rho = \frac{ik_z}{z'} \Lambda H_1^{(1)}(z'_\rho) \cdot P, \quad E_\varphi = \mu \frac{k}{k_z} H_\rho = \frac{k}{k_z} B_\rho.$$

La continuité des composantes H_z , E_φ et B_ρ à la limite de la paroi nous fournit deux conditions distinctes

$$(62) \quad J_0(zR) = \Lambda H_0^{(1)}(z'R), \quad \frac{1}{z} J_1(zR) = \mu \frac{\Lambda}{z'} H_1^{(1)}(z'R),$$

d'où la condition de compatibilité

$$(63) \quad z \frac{J_0(zR)}{J_1(zR)} = \frac{z'}{\mu} \frac{H_0^{(1)}(z'R)}{H_1^{(1)}(z'R)}.$$

Grâce à (48) et (30), on trouve aisément pour le second membre de (63)

la valeur approximative $-\sqrt{\frac{2\pi k\tau}{\mu c}}(1+i)$. Reste à calculer le premier membre de (63), mais ici c'est $J_1(z_0 R)$ qui est nul et non plus $J_0(z_0 R)$. On écrira donc

$$(64) \quad J_1(zR) \sim J_1(z_0 R) + \left[\frac{dJ_1(zR)}{d(zR)} \right]_{z=z_0} R(z-z_0) \\ = -\frac{k_z^0 R}{z} \left[\frac{dJ_1(zR)}{d(zR)} \right]_{z=z_0} (\delta k_z - i\gamma).$$

Or la formule (43) du Chapitre III nous donne, en y faisant $p=1$ et $x=z_0 R$,

$$(65) \quad J_0(z_0 R) = \left[\frac{dJ_1(zR)}{d(zR)} \right]_{z=z_0},$$

donc

$$(66) \quad J_1(zR) \simeq -\frac{k_z^0 R}{z} J_0(z_0 R) (\delta k_z - i\gamma),$$

de sorte que la condition (63) devient

$$(67) \quad \frac{z^2}{k_z^0 R} = \sqrt{\frac{2\pi k\tau}{\mu c}} (1+i) (\delta k_z - i\gamma),$$

d'où aisément

$$(68) \quad \delta k_z = \frac{z^2}{2k_z^0 R} \sqrt{\frac{\mu c}{2\pi k\tau}}, \quad \gamma_{10} = \frac{z^2}{2k_z^0 R} \sqrt{\frac{\mu c}{2\pi k\tau}} = \frac{z^2}{2R} \sqrt{\frac{\mu c}{2\pi\tau}} \frac{1}{\sqrt{k k_z}}.$$

La valeur (68) de γ_{10} coïncide bien avec la valeur (34) que nous avons obtenue par la première méthode et qui montre la diminution des pertes quand la fréquence augmente.

9. Résultats nouveaux pour les ondes d'indices supérieurs à zéro ⁽¹⁾.

— Si nous cherchons à continuer l'application de la seconde méthode pour les ondes d'indices supérieurs à zéro, nous arrivons à une différence un peu inattendue avec les résultats précédents. En effet, pour ces ondes, les composantes E_z et H_z sont toutes deux différentes de zéro, ainsi que l'une des composantes E_z ou H_z . En écrivant la continuité des champs tangentiels, on obtient trois conditions distinctes, la continuité des inductions normales ne donnant, comme précédemment, rien de plus. Mais, pour chaque onde (E_m) ou (H_m), nous ne disposons que d'une constante A analogue à celles employées dans les deux derniers para-

(¹) Les résultats donnés dans ce paragraphe nous ont été signalés par M. Maurice Cotte.

graphes. Cette constante devrait satisfaire à *trois* équations distinctes et l'on ne peut le réaliser par l'introduction d'une condition analogue à (54) ou (63) : le problème paraît donc insoluble.

On peut cependant parvenir à une solution que nous allons exposer en raisonnant sur le cas de l'onde (E_1) . Nous sommes amenés à supposer que la conductibilité imparfaite de la paroi a pour effet de déformer légèrement l'onde (E_1) en y faisant apparaître une petite composante longitudinale H_z ou, si l'on préfère, il faut, pour pouvoir satisfaire aux conditions sur la paroi, considérer la propagation dans le guide d'une onde (E'_1) du type électrique très voisine de (E_1) et d'une faible onde de type magnétique (H'_1) . La superposition des deux ondes (E'_1) et (H'_1) fait intervenir une constante complexe B qui représente la proportion et la différence de phase des deux ondes dans la superposition. L'onde (H'_1) correspond aux mêmes valeurs de z et de k_z que (E'_1) ; elle est donc très différente de (H_1) . L'onde résultante a quatre composantes tangentielles E_z, H_z, E_z et H_z non nulles et la continuité de ces quatre composantes à travers la paroi nous donne quatre conditions. Ces quatre conditions contiennent la constante B et les deux constantes du type A relatives aux deux ondes (E'_1) et (H'_1) , on peut donc les rendre compatibles grâce à une relation analogue à (54), relation qui détermine k_z et par suite le coefficient d'affaiblissement γ . Des considérations semblables sont valables pour toutes les ondes (E_m) [ou (H_m)] d'indices supérieurs à zéro. Sans développer les calculs, nous voyons donc que, par suite de la conductibilité imparfaite de la paroi, ces ondes (E_m) [ou (H_m)] cessent d'appartenir strictement au type électrique (ou au type magnétique), l'effet de la conductibilité imparfaite de la paroi est de créer une sorte de couplage entre les deux types d'ondes, résultat que la première méthode employée pour le calcul des pertes ne pouvait pas faire prévoir ⁽¹⁾.

10. Théorie du câble diélectrique. — Nous allons rattacher aux calculs précédents la théorie du câble diélectrique. Par définition, un câble diélectrique sera un tube cylindrique à section circulaire de rayon R constitué par une substance de constante diélectrique ϵ_1 plongé dans un milieu indéfini de constante diélectrique ϵ_2 . Nous supposerons câble et milieu non magnétiques ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). Souvent le milieu extérieur sera

⁽¹⁾ Sur les pertes dans les guides d'ondes, voir un travail de M. J. Oswald (Bibliographie [30]).

l'air et l'on pourra poser $\varepsilon_2 = 1$, mais, pour plus de généralité, nous ne ferons pas cette hypothèse.

Pour qu'une onde puisse se propager dans le câble diélectrique, il faut pratiquement qu'il y ait réflexion totale à la surface du câble, sans quoi l'affaiblissement par passage partiel de l'onde dans le milieu extérieur serait si fort qu'il n'y aurait plus véritablement propagation. Il faut donc que l'onde électromagnétique pénétrant dans le milieu extérieur soit évanescente.

Nous allons étudier la propagation d'une onde du type (E_0) dans le câble diélectrique en effectuant des calculs assez analogues à ceux des derniers paragraphes, mais avec $\sigma = 0$. Dans le câble, nous poserons

$$(69) \quad E_z = J_0(z_1 \rho) e^{i(kz - t)}, \quad E_\rho = \frac{ikz}{z_1} J_1(z_1 \rho) \cdot P, \quad H_z = -\frac{k\varepsilon_1}{k_z} E_z,$$

avec

$$(70) \quad z_1 = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - k_z^2}.$$

Dans le milieu extérieur, on posera

$$(71) \quad E_z = A H_0^{(2)}(z_2 \rho) \cdot P, \quad E_\rho = \frac{ikz}{z_2} A H_1^{(2)}(z_2 \rho) \cdot P, \quad H_z = -\frac{k\varepsilon_2}{k_z} E_z$$

avec

$$(72) \quad z_2 = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 - k_z^2}.$$

La continuité des composantes E_z , H_z et D_ρ à la surface du câble donne deux conditions distinctes :

$$(73) \quad J_0(z_1 R) = A H_0^{(2)}(z_2 R), \quad \frac{\varepsilon_1}{z_1} J_1(z_1 R) = \frac{\varepsilon_2}{z_2} A H_1^{(2)}(z_2 R),$$

d'où la condition de compatibilité

$$(74) \quad \frac{z_1 J_0(z_1 R)}{J_1(z_1 R)} = \frac{z_2 H_0^{(2)}(z_2 R)}{H_1^{(2)}(z_2 R)}.$$

Pour que l'onde s'échappant dans le milieu extérieur soit évanescente, il faut que l'argument $z_2 R$ des fonctions de Hankel soit purement imaginaire. Soient alors p et iq des valeurs de $z_1 R$ et $z_2 R$ respectivement telles que la condition (74) soit satisfaite, p et q étant des nombres réels. Nous avons

$$(75) \quad k_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_1 - z_1^2} = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 - z_2^2},$$

et ces conditions nous donnent

$$(76) \quad k_z = \sqrt{k^2 \varepsilon_2 + \frac{q^2}{R^2}}, \quad k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}.$$

Comme k est réel, on doit avoir

$$(77) \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2,$$

inégalité toujours vérifiée pour un câble diélectrique plongé dans l'air. La vitesse de propagation de la phase dans le câble est

$$(78) \quad V = c \frac{k}{k_z} = c \sqrt{\frac{p_2 + q^2}{\varepsilon_1 q^2 + \varepsilon_2 p^2}}.$$

Étudions deux cas limites.

Si q est très petit, α_2 est très petit et l'onde évanescence pénètre loin dans le milieu extérieur; la vitesse V est alors sensiblement $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, c'est-à-dire égale à la vitesse de propagation extérieure. Si, au contraire, q est très grand, il en est de même de α_2 et l'onde évanescence pénètre très peu loin dans le milieu extérieur; la vitesse V est alors sensiblement $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, c'est-à-dire égale à la vitesse de propagation dans le câble. Tous ces résultats sont assez intuitifs. L'étude des autres ondes (E_m) ou (H_m) donnerait des résultats analogues.



CHAPITRE V.

PROPAGATION DANS LES CORNETS.

1. **Généralités sur le problème des cornets.** — Nous appellerons *cornets électriques* des tuyaux métalliques à section progressivement croissante dans lesquelles se propagent des ondes électromagnétiques. Le type le plus simple de cornet est le cornet conique analogue à un cornet de phonographe. Nous aurons à étudier d'autres formes plus compliquées de cornets, notamment de cornets biconiques; le miroir en forme de paraboloïde de révolution rentre aussi dans la catégorie des cornets. Nous supposerons dans ce Chapitre les cornets ayant une *extension indéfinie* et nous étudierons les propagations qui peuvent s'établir dans ces cornets indéfinis. Mais bien entendu, les cornets, comme d'ailleurs les guides précédemment étudiés, ne sont en pratique jamais indéfinis : ils se terminent par une embouchure à travers laquelle s'échappent les ondes qui se sont propagées à leur intérieur. Il se produit alors à l'embouchure des phénomènes de diffraction qui sont très importants à évaluer si l'on veut se rendre compte de l'effet directif des diverses sortes de cornets ou de guides sur les ondes électromagnétiques.

Il est utile de bien se rendre compte d'une différence essentielle qui existe entre le problème des cornets et celui des guides. Dans le problème des guides, nous avons pu considérer des ondes se propageant le long d'un guide indéfini en satisfaisant constamment aux conditions aux limites du problème : cette étude a pu se faire tout à fait indépendamment des conditions d'excitation dont nous nous sommes seulement ensuite préoccupés. Pour les cornets, il en est en général tout autrement : on ne peut en général obtenir une propagation possible dans un cornet qu'en supposant l'existence d'une source d'ondes quelque part à l'intérieur du cornet. Ceci est très visible sur l'exemple du cornet

conique : nous ne pouvons pas imaginer des ondes se propageant le long de l'axe d'un tel cornet et s'éloignant de son sommet sans imaginer qu'il y ait quelque part près du sommet, un émetteur d'ondes qui fournisse constamment aux ondes l'énergie qu'elles emportent avec elles. Mathématiquement cette circonstance se traduit par le fait qu'on ne peut plus, en général, trouver des types d'ondes régulières dans tout l'intérieur du cornet et s'y propageant en satisfaisant partout aux conditions aux limites sur les parois.

Pour un cornet, nous pourrions parfois trouver des solutions satisfaisant aux conditions aux limites sur la paroi, mais elles présenteront toujours une singularité à l'intérieur du cornet, singularité qui traduira la présence d'un émetteur d'ondes placé dans le cornet. Nous étudierons des solutions de ce genre dans les prochains paragraphes. Mais ces solutions qu'on ne parvient à former qu'accidentellement ne se trouvent pas correspondre en général à un type d'émetteur donné *a priori*. Si le type d'émetteur placé dans le cornet est connu, l'onde émise par lui est une donnée du problème et constitue l'onde incidente sur les parois du cornet considérées comme des miroirs : à cette onde incidente, on devra superposer une onde réfléchie formée par la superposition d'ondes sans singularités susceptibles de se propager dans le cornet ; la détermination des coefficients du développement de l'onde réfléchie, suivant les divers types d'ondes susceptibles de se propager dans le cornet, se fera en écrivant que les conditions aux limites sont satisfaites sur les parois et ce calcul fournira la forme de l'onde réfléchie provenant de la réflexion de l'onde envoyée par l'émetteur sur les parois du cornet.

On peut, pour les cornets comme pour les guides, calculer les pertes dues aux effets Joule dans les parois, quand on tient compte de la conductibilité finie de ces parois ; les méthodes de calcul utilisables sont tout à fait analogues à celles employées pour les guides et nous n'y reviendrons pas ici. Nous supposons donc dans tout ce Chapitre que les parois des divers types de cornets considérés sont parfaitement conductrices, et nous écrirons toujours comme conditions aux limites que le champ électrique est partout normal à la paroi.

2. Étude des cornets en forme de cônes circulaires droits. — Considérons un cornet en forme de cône circulaire droit.

Nous repérerons les points à l'intérieur du cornet par les coordonnées sphériques r, θ, φ prises autour du sommet O du cône, l'axe Oz de ce cône étant pris comme axe polaire. Nous désignerons par θ_0 le demi-angle d'ouverture du cône. En reprenant les calculs qui ont été faits au

Chapitre III, paragraphe 6, à propos des vibrations propres de la sphère, on voit qu'on obtiendra des solutions représentant des ondes se propa-

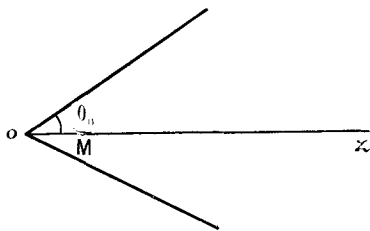


Fig. 7.

geant ou s'éloignant du sommet si l'on remplace dans les formules (39) et (40) la fonction de Bessel $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ par la fonction de Hankel $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$. Mais il est facile de voir que les ondes ainsi obtenues, pour lesquelles le point O est une singularité, ne satisfont pas en général aux conditions aux limites. En effet, ces conditions s'écrivent ici

$$(1) \quad E_r = E_\varphi = 0, \quad \text{pour } \theta = \theta_0,$$

ce qui donne, pour les ondes du type électrique (39),

$$(2) \quad P_n'''(\cos \theta_0) = 0$$

et pour les ondes du type magnétique (40),

$$(3) \quad \left[\frac{\partial}{\partial \theta} P_n'''(\cos \theta) \right]_{\theta = \theta_0} = 0.$$

En général, θ_0 qui est une donnée du problème ne satisfait ni à (2), ni à (3), de sorte que nous n'avons pas ainsi obtenu une véritable solution.

Il y a cependant une solution *asymptotique* qui est physiquement

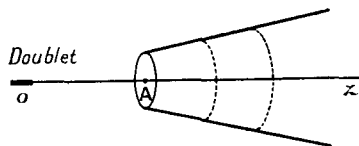


Fig. 8.

très intéressante : c'est la solution bien connue des équations de Maxwell

$$(4) \quad E_\theta = H_\varphi = \frac{e^{ik(r-t-r')}}{r} \sin \theta, \quad H_\theta = E_\varphi = E_r = H_r = 0,$$

qui représente le rayonnement à grande distance d'un dipôle électrique placé en O suivant l'axe Oz. Cette onde satisfait évidemment aux conditions aux limites (1) quel que soit θ_0 : elle glisse sur le miroir sans se réfléchir. Si donc on a la disposition montrée sur la figure 8, avec un cornet en tronc de cône tel que la distance \overline{OA} soit très grande par rapport à la longueur d'onde de la radiation émise par le dipôle placé en O le long de Oz, l'onde (4) se propage dans le cornet sans modification. Mais ce n'est là encore qu'une solution asymptotique obtenue accidentellement. Il suffirait de placer le doublet en O, normalement à Oz, pour voir combien le problème ainsi modifié serait plus difficile à résoudre.

Pour donner un premier exemple de résolution rigoureuse d'un problème de réflexion, supposons qu'en un point M sur l'axe du cornet conique ($\overline{OM} = a > 0$) soit placé le long de l'axe un petit dipôle émetteur (voir fig. 7). Le rayonnement du dipôle étant connu, on peut calculer en tout point intérieur au cornet le champ électrique $E^{(i)}$ rayonné par le dipôle; c'est le champ incident qui va se réfléchir sur la paroi intérieure du cornet considérée comme un miroir parfait : par raison de symétrie ce champ est évidemment indépendant de l'azimut φ et sa composante E_φ est nulle. En tout point de la paroi du cornet, sur laquelle $\theta = \theta_0$, la quantité $r^{\frac{n}{2}} E_r^{(i)}$ est une fonction de la seule variable r et comme $E_r^{(i)}$ reste évidemment finie quand r tend vers zéro, cette fonction tend alors vers zéro, au moins comme $r^{\frac{n}{2}}$. On peut développer cette fonction de r suivant le système complet des fonctions $J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ par la formule

$$(5) \quad r^{\frac{n}{2}} E_r^{(i)} = \sum_0^\infty a_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) e^{ikct} = \sum_1^\infty a_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) e^{ikct},$$

où l'on est passé de la première expression à la seconde en remarquant que a_0 doit être nul parce que $J_{\frac{1}{2}}(kr)$ tend vers zéro comme \sqrt{r} pour r tendant vers zéro.

L'onde réfléchie est caractérisée par un champ électrique \vec{E} qui, lui aussi, doit par raison de symétrie être indépendant de l'azimut φ et dont la composante E_φ est partout nulle. Au contraire, la composante E_r ne doit pas être partout nulle puisque sur la paroi on doit avoir $E_r^{(i)} + E_r = 0$ et que $E_r^{(i)}$ n'est pas nulle en général. Comme \vec{E} doit être une fonction vectorielle régulière dans tout le cornet, elle doit se représenter par une superposition d'onde des types (39) et (40) du Chapitre III et les condi-

tions auxquelles \vec{E} doit satisfaire montre que ce doit être une superposition d'ondes du type électrique (39) avec $m = 0$. On a donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^{\frac{3}{2}} E_r = \sum_n c_n n(n+1) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n(\cos \theta) e^{ikct}, \\ E_\theta = \sum_n c_n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] \frac{\partial P_n}{\partial \theta} e^{ikct}, \\ H_\varphi = \sum_n c_n \frac{-k^2}{\sqrt{kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \frac{\partial P_n}{\partial \theta} e^{ikct}, \\ E_\varphi = H_r = H_\theta = 0. \end{array} \right.$$

D'après les conditions aux limites (1), on doit alors avoir pour toute valeur de r

$$(7) \quad r^{\frac{3}{2}} E_r^{(i)} + r^{\frac{3}{2}} E_r = \sum_n [a_n + n(n+1) c_n P_n(\cos \theta_0)] J_{n+\frac{1}{2}}(kr) = 0,$$

d'où nécessairement

$$(8) \quad a_n = - \frac{1}{n(n+1) P_n(\cos \theta_0)} c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Les a_n étant des données, en substituant (8) dans (6), on obtient l'expression de l'onde réfléchie. On remarquera que les constantes a_n et c_n sont complexes, et c'est cette circonstance qui permet aux expressions (5) et (6) de représenter des ondes en propagation.

Pour traiter le même problème dans toute sa généralité, on imaginera un émetteur quelconque d'ondes électromagnétiques placé quelque part à l'intérieur du cornet conique et l'on supposera que l'on sait calculer l'onde émise par cet émetteur et en particulier son champ électrique $E^{(i)}$. Ici ce champ $E^{(i)}$ peut dépendre de la coordonnée φ et sa composante $E_\varphi^{(i)}$ ne sera pas nulle en général. Sur les parois du cône, où $\theta = \theta_0$, on pourra donc poser

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^{\frac{3}{2}} E_r^{(i)} = \sum_n \sum_m (a_{nm} \sin m\varphi + a'_{nm} \cos m\varphi) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) e^{ikct}, \\ \sqrt{r} E_\varphi^{(i)} = \sum_n \sum_m (b_{nm} \sin m\varphi + b'_{nm} \cos m\varphi) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) e^{ikct}, \end{array} \right.$$

où les a et b sont des constantes complexes qu'on peut considérer comme des données. L'onde réfléchie devant être partout régulière à l'intérieur du cornet s'obtiendra par une superposition d'ondes des types (39) et (40) du Chapitre III, mais ici, pour avoir à notre disposition le nombre

de constantes arbitraires dont nous avons besoin, nous devons faire figurer dans la superposition, à côté des ondes du type électrique (39), les ondes du type magnétique (40). Ceci nous amène à écrire

$$(10) \quad \begin{cases} r^{\frac{3}{2}} E_r = \sum_n \sum_m n(n+1) (c_{nm} \sin m\varphi + c'_{nm} \cos m\varphi) P_n^m(\cos\theta) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) e^{ikct}, \\ \sqrt{r} E_\varphi = \sum_n \sum_m (d_{nm} \sin m\varphi + d'_{nm} \cos m\varphi) P_n^m(\cos\theta) J_{n+\frac{1}{2}}(kr) e^{ikct}. \end{cases}$$

Le premier développement est évident : le second s'obtient en remarquant que, dans les formules (39) et (40) en question, les expressions de E_φ peuvent se développer suivant le système complet des fonctions $P_n^m(\cos\theta) e^{\pm im\varphi} J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$ avec $n, m = 0, 1, 2, \dots$. De plus, comme nous faisons effectivement figurer les ondes du type magnétique (40) à côté des ondes du type électrique (39), les constantes d_{nm} et d'_{nm} sont indépendantes des constantes c_{nm} et c'_{nm} . Les conditions aux limites (1) nous donnent donc ici

$$(11) \quad \begin{cases} \sum_n \sum_m [(a_{nm} \sin m\varphi + a'_{nm} \cos m\varphi) \\ \quad + n(n+1)(c_{nm} \sin m\varphi + c'_{nm} \cos m\varphi) P_n^m(\cos\theta_0)] J_{n+\frac{1}{2}}(kr) = 0, \\ \sum_n \sum_m [(b_{nm} \sin m\varphi + b'_{nm} \cos m\varphi) \\ \quad + (d_{nm} \sin m\varphi + d'_{nm} \cos m\varphi) P_n^m(\cos\theta_0)] J_{n+\frac{1}{2}}(kr) = 0. \end{cases}$$

Ces conditions, devaient être vérifiées quels que soient φ et r , nous donnent

$$(12) \quad \begin{cases} c_{0m} = c'_{0m} = 0, & c_{nm} = -\frac{1}{n(n+1)P_n^m(\cos\theta_0)} a_{nm}, & c'_{nm} = -\frac{1}{n(n+1)P_n^m(\cos\theta_0)} a'_{nm} \\ & (n = 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots); \\ & d_{nm} = -\frac{1}{P_n^m(\cos\theta_0)} b_{nm}, & d'_{nm} = -\frac{1}{P_n^m(\cos\theta_0)} b'_{nm} \\ & (n, m = 0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Grâce aux formules (12), l'onde réfléchie se trouvera déterminée. Les calculs effectifs seront souvent pénibles, mais dans beaucoup de cas, on pourra les simplifier par des considérations de symétrie : ainsi, si l'émetteur est un doublet placé en un point de l'axe du cône perpendiculairement à cet axe, les seules valeurs de m qui interviendront dans les développements précédents seront les valeurs $m = 0, 1$ et 2 .

3. **Étude des cornets biconiques.** — On appelle « cornets biconiques » les dispositifs représentés par la figure 9, où une onde électromagnétique divergente se propage dans l'espace extérieur aux deux nappes d'un cône métallique d'angle au sommet θ_0 .

En somme, un émetteur placé en O rayonne dans la région (D) vers l'extérieur.

Pour traiter le problème, on prendra des coordonnées sphériques autour du point O, l'axe du cône servant d'axe polaire et l'on aura encore à reprendre les calculs faits au paragraphe 6 du Chapitre III.

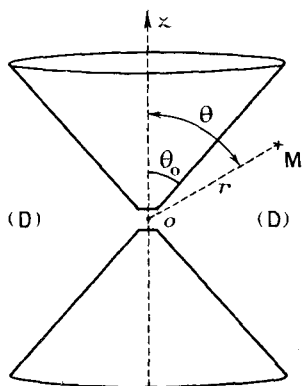


Fig. 9.

Seulement à cet endroit, nous avons dû prendre, comme solution de l'équation (1)

$$(13) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] F_2 = 0,$$

la solution

$$(14) \quad F_2(\theta) = P_n^m(\cos \theta),$$

qui est la seule solution de (13) restant régulière pour $\theta = 0$. Ici cette solution ne s'impose plus parce que l'axe polaire n'est plus compris dans l'espace où les ondes se propagent. Nous pourrions remplacer $P_n^m(\cos \theta)$ par une combinaison linéaire de ce polynôme et d'une autre solution $Q_n^m(\cos \theta)$ de (13) linéairement indépendante de P_n^m . De plus, pour avoir des ondes en propagation divergente, nous devons, dans les formules (39) et (40) du Chapitre III, remplacer les fonctions J de Bessel

(1) Se reporter aux équations (31), (32), (33) du Chapitre III.

par les fonctions $H^{(2)}$ de Hankel, de sorte que finalement nous obtenons les ondes du type *électrique*

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r &= k^2 \frac{n(n+1)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ E_\varphi &= \frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] - \sin m\varphi L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}; \\ H_r &= 0, \\ H_\theta &= i \frac{k^2 m}{\sqrt{kr} \sin \theta} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) - \sin m\varphi L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ H_\varphi &= -i \frac{k^2}{\sqrt{kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n^m(\cos \theta) e^{ikct} \end{aligned} \right.$$

et les ondes du type *magnétique*

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} E_r &= 0, \\ E_\theta &= -i \frac{k^2 m}{\sqrt{kr} \sin \theta} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) - \sin m\varphi L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ E_\varphi &= i \frac{k^2}{\sqrt{kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}; \\ H_r &= k^2 \frac{n(n+1)}{(kr)^{\frac{3}{2}}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ H_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} L_n^m(\cos \theta) e^{ikct}, \\ H_\varphi &= \frac{m}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{kr} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] - \sin m\varphi L_n^m(\cos \theta) e^{ikct} \end{aligned} \right.$$

avec la notation

$$(17) \quad L_n^m(\cos \theta) = AP_n^m(\cos \theta) + BQ_n^m(\cos \theta).$$

Les conditions aux limites sont

$$(18) \quad E_r = E_\varphi = 0, \quad \text{pour } \theta = \theta_0,$$

soit pour les ondes du type électrique

$$(19) \quad AP_n^m(\cos \theta_0) + BQ_n^m(\cos \theta_0) = 0$$

et pour les ondes du type magnétique

$$(20) \quad \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (AP_n^m + BQ_n^m) \right]_{\theta=\theta_0} = 0.$$

Dans un cas comme dans l'autre, nous pouvons satisfaire à ces conditions aux limites par un choix convenable du rapport $\frac{B}{\Lambda}$. Il est donc ici toujours possible de trouver des ondes divergentes des types (15) et (16) obéissant partout sur les parois aux conditions aux limites. Toutefois, ces solutions qui ont une singularité en O correspondant à l'existence en O d'un certain type d'émission et si l'on suppose placé en O un type d'émetteur donné *a priori*, par exemple un certain petit doublet, les solutions (15) et (16) ne représenteront pas l'onde rayonnée dans le cornet biconique. On y parviendra en employant des méthodes analogues à celles qui ont été développées au paragraphe précédent.

Il est intéressant de noter que le problème du cornet biconique admet comme solution l'onde transversale

$$(21) \quad E_\theta = H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} e^{i(kr - t - r^2)}, \quad H_r = E_r = E_\varphi = H_\theta = 0,$$

qui satisfait aux conditions aux limites (18) quel que soit θ_0 et même si le cornet n'était pas symétrique par rapport à son plan équatorial. La solution (21) rentre d'ailleurs comme cas particulier dans les formules (16) en y faisant $n = m = 0$ et en se souvenant que

$$(22) \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}\right)}$$

quel que soit r .

4. Étude du cornet sectoral. — On appelle « cornet sectoral » le dispositif indiqué sur la figure 10.

Il s'agit en somme d'une enceinte métallique ayant la forme d'un secteur découpé dans un cylindre droit et ouverte vers la droite. On considère des propagations d'ondes dans ce cornet qui divergent à partir de l'axe Oz.

Pour étudier les propagations dans ce cornet, on prendra un système de coordonnées cylindriques autour de Oz. Comme on a

$$(23) \quad ds^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad (e_1 = e_2 = 1, e_3 = \rho),$$

on peut faire jouer à ρ le rôle de la variable x_1 dans la méthode générale de Borgnis (voir Chapitre I, paragraphe 4). La fonction U, qui sera la composante H_ρ d'un vecteur de Hertz, obéira à l'équation

$$(24) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - k^2 U = 0,$$

et l'on trouvera la solution

$$(25) \quad U = \sqrt{z\varphi} \, H_q^{(2)}(k\varphi) \frac{\sin p\varphi}{\cos \varphi} \frac{\sin k_z z}{\cos z} e^{ik_r t}$$

avec

$$(26) \quad q^2 = p^2 - \frac{1}{4} \quad z^2 = k^2 - k_z^2.$$

Dans (25), nous avons choisi comme solution de l'équation de Bessel la fonction $H^{(2)}$, de façon à représenter une onde qui diverge à partir de Oz . La constante p n'est pas nécessairement ici un nombre entier car, φ ne variant que de 0 à φ_0 dans le cornet, il n'y a pas de condition

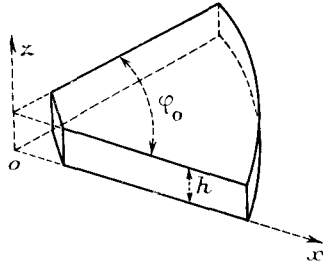


Fig. 10.

d'uniformité en φ . De la condition, on déduira des ondes du type électrique et d'autres du type magnétique; à ces ondes, on devra imposer les conditions aux limites suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} E_\varphi = E_z = 0, & \text{pour } z = 0 \text{ et } z = h. \\ E_\varphi = E_z = 0, & \text{pour } \varphi = 0 \text{ et } \varphi = \varphi_0. \end{cases}$$

Si l'on veut borner son attention aux solutions qui ne dépendent pas de z , on voit aisément que les solutions du type électrique sont à rejeter [car alors la première condition (27) ne peut pas être satisfaite par E_φ]. En tenant compte de la condition $k_z = 0$ que l'on s'impose, on obtient les ondes du type magnétique

$$(28) \quad \begin{cases} H_\varphi = p^2 \varphi^{-\frac{3}{2}} H_q^{(2)}(k\varphi) \cos p\varphi e^{ik_r t}, \\ H_z = -\frac{\partial}{\partial \varphi} [\sqrt{\varphi} H_q^{(2)}(k\varphi)] \frac{p}{\varphi} \sin p\varphi e^{ik_r t}, \\ E_z = ikp \varphi^{-\frac{1}{2}} H_q^{(2)}(k\varphi) \sin p\varphi e^{ik_r t}, \\ E_\varphi = E_z = H_z = 0. \end{cases}$$

Les conditions (27) nous fournissent ici la seule condition

$$(29) \quad p \varphi_0 = n\pi \quad \text{ou} \quad p = n \frac{\pi}{\varphi_0} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Si cette relation est satisfaite, les formules (28) nous donnent des ondes en propagation divergente dans le cornet sectoral qui satisfont partout aux conditions aux limites.

MM. Barrow et Chu ⁽¹⁾ ont remarqué que l'onde du type (28) a une forte composante longitudinale près de Oz , mais que cette composante longitudinale diminue beaucoup plus rapidement que les autres quand ρ augmente, de sorte que dans la partie évasée du cornet l'onde tend à devenir transversale comme elle le serait dans un espace indéfini, ce qui est assez intuitif.

Pour les grandes valeurs de $k\rho$ on voit, en utilisant l'expression asymptotique des fonctions $H^{(2)}$ de Hankel, que dans la région évasée du cornet (région de transmission de Barrow et Chu), les champs ont sensiblement la forme

$$\frac{C}{\rho} e^{ik_z \rho t - \varphi^2}$$

correspondant à une onde cylindrique divergente dont l'amplitude décroît comme ρ^{-1} . Pour les petites valeurs de $k\rho$ (région d'atténuation de Barrow et Chu), la variation des champs est plus compliquée : elle a été analysée par les auteurs que nous venons de citer.

Si l'on ne se borne plus à l'étude des champs indépendants de z , on obtient, à partir de (25), des ondes pour lesquelles les conditions aux limites (27) donnent, en plus de (29), la condition

$$(30) \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{l\pi}{h} \quad (l = 1, 2, \dots),$$

d'où

$$(31) \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \frac{l^2 \pi^2}{h^2}},$$

h étant la hauteur du cornet sectoral. Pour une valeur donnée de l , il y aura une valeur minima de k

$$(32) \quad k_{\min} = \frac{l\pi}{h}$$

au-dessous de laquelle les ondes correspondant au nombre entier l ne

(1) Voir bibliographie [4].

pourront plus se propager dans le cornet : c'est une fréquence de coupure.

5. Étude du miroir parabolique. — Un miroir en forme de paraboloïde de révolution constitue un cornet d'une forme particulière dont nous voulons maintenant faire l'étude.

En prenant comme origine des coordonnées le foyer du paraboloïde, nous repérerons tout point M situé à l'intérieur du miroir soit par ses

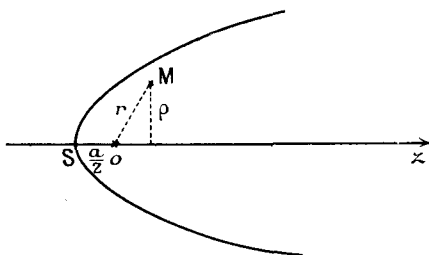


Fig. 11.

coordonnées rectangulaires x, y, z , soit par ses coordonnées cylindriques ρ, φ, z .

On a évidemment les relations suivantes :

$$(33) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho^2 = r^2 - z^2 = x^2 + y^2, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

L'équation de la parabole méridienne est

$$(34) \quad r = a + z,$$

où a est le paramètre de la parabole égal au double de la distance \overline{OS} .

Dans nos calculs, nous allons avoir avantage à nous servir de coordonnées paraboliques ξ_1 et ξ_2 adaptées à la forme du miroir et définies par la formule

$$(35) \quad z + i\rho = \frac{1}{2}(\xi_2 + i\xi_1)^2$$

que nous donne

$$(36) \quad z = \frac{1}{2}(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad \rho = \xi_1 \xi_2, \quad r = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2)$$

ou inversement

$$(37) \quad \xi_1^2 = r - z, \quad \xi_2^2 = r + z.$$

La parabole méridienne est alors simplement définie par

$$(38) \quad \xi_1 = \sqrt{a},$$

de sorte que les points situés sur le miroir sont repérés à l'aide des deux seules variables φ et ξ_2 .

L'axe Oz a pour équation $\xi_2 = 0$ à gauche de O et $\xi_1 = 0$ à droite de O .

Avec les variables ξ_1, ξ_2, φ , le carré de l'élément de longueur est donné par

$$(39) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(d\xi_1^2 + d\xi_2^2) + \xi_1^2 \xi_2^2 d\varphi^2,$$

d'où

$$(40) \quad e_1 = e_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \quad e_3 = \xi_1 \xi_2,$$

et nous avons là un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Avant d'aborder rigoureusement le problème à résoudre, disons un mot de la façon dont l'optique géométrique envisage la réflexion sur un miroir parabolique d'une onde issue de son foyer. L'approximation réalisée par l'optique géométrique consiste essentiellement à négliger le caractère vectoriel du rayonnement et à ne pas tenir compte des variations supposées lentes de l'amplitude dans l'espace en comparaison des variations rapides de la phase. Une source étant placée au foyer O du miroir et émettant une onde de fréquence $\nu = \frac{kc}{2\pi}$, l'onde émise sera simplement représentée par la quantité scalaire $A e^{ik(ct-r)}$. Nous pourrons alors représenter l'onde réfléchie par le miroir à l'aide de la fonction scalaire $B e^{ik(ct-z)}$, car si nous imposons à l'onde résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie de s'annuler sur le miroir, nous aurons à satisfaire une condition aux limites de la forme

$$(41) \quad A e^{-ikr} = -B e^{-ikz}, \quad \text{sur le miroir,}$$

condition qui est réalisable parce que sur le miroir parabolique, on a $r = a + z$ et qu'il suffit par suite de prendre $B = -A e^{-ika}$. On parvient ainsi au résultat suivant bien connu en optique géométrique : *Un miroir parabolique transforme une onde sphérique émise par une source placée à son foyer en une onde plane se propageant le long de son axe.* Mais les solutions de ce genre offertes par l'optique géométrique sont insuffisantes parce qu'elles ne tiennent compte ni du caractère vectoriel de l'onde électromagnétique, ni des variations de son amplitude. C'est pourquoi nous devons aborder ce problème par d'autres méthodes.

Nous allons encore essayer de définir les propagations d'ondes à l'intérieur du miroir à l'aide d'une fonction U qui sera la composante z

d'un vecteur de Hertz dont les autres composantes seront nulles. Cette fonction devra être solution de l'équation de propagation

$$(42) \quad \Delta U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -k^2 U,$$

en considérant toujours des ondes harmoniques de fréquence $\frac{kc}{2\pi}$.

Écrite en coordonnées curvilignes orthogonales, l'équation (42) prend la forme

$$(43) \quad \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right] + k^2 U = 0,$$

d'où, en coordonnées paraboliques d'après (40),

$$(44) \quad \frac{1}{\xi_1 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \xi_1 \xi_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \xi_1 \xi_2 \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\xi_1 \xi_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] + k^2 U = 0.$$

De cette équation, nous allons, comme d'habitude, chercher des solutions de la forme

$$(45) \quad U = F_1(\xi_1) F_2(\xi_2) \frac{\sin}{\cos} m \varphi e^{ikct},$$

où m est un nombre entier. Si nous substituons (45) dans (44), nous voyons qu'une certaine fonction de ξ_1 doit être égale à une certaine fonction de ξ_2 , ce qui ne peut se réaliser qu'en égalant ces deux fonctions à une même constante λ . On obtient ainsi les deux équations

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{d^2 F_1}{d\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_1} \frac{dF_1}{d\xi_1} + \left[k^2 \xi_1^2 - \frac{m^2}{\xi_1^2} + \lambda \right] F_1 = 0, \\ \frac{d^2 F_2}{d\xi_2^2} + \frac{1}{\xi_2} \frac{dF_2}{d\xi_2} + \left[k^2 \xi_2^2 - \frac{m^2}{\xi_2^2} - \lambda \right] F_2 = 0. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$(47) \quad u_1 = \frac{k}{2} \xi_1^2 = \frac{k}{2} (r - z), \quad u_2 = \frac{k}{2} \xi_2^2 = \frac{k}{2} (r + z);$$

il vient, après ce changement de variables,

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{d^2 F_1}{du_1^2} + \frac{1}{u_1} \frac{dF_1}{du_1} + \left[1 - \frac{m^2}{4u_1^2} + \frac{\lambda}{2ku_1} \right] F_1 = 0, \\ \frac{d^2 F_2}{du_2^2} + \frac{1}{u_2} \frac{dF_2}{du_2} + \left[1 - \frac{m^2}{4u_2^2} - \frac{\lambda}{2ku_2} \right] F_2 = 0. \end{cases}$$

En posant dans (48) $\lambda = 0$, $m = 1$, on obtient facilement pour U la solution suivante

$$(49) \quad U = J_{\frac{1}{2}} \left[\frac{k}{2} (r - z) \right] H_{\frac{1}{2}}^{(2)} \left[\frac{k}{2} (r + z) \right] e^{ikct}.$$

Cette solution est singulière tout le long du segment \overline{OS} où $r + z = 0$, mais près de la partie positive de l'axe des z , elle est sensiblement proportionnelle à l'exponentielle $e^{ik \cdot ct - z}$ en vertu de la formule (22) et du fait que près de la partie positive de l'axe Oz , on a $z \simeq r$. Bien qu'elle représente une onde projetée par le miroir, cette solution, avec sa singularité tout le long de OS , correspond à un type d'excitation qui n'est pas réalisée en général, et elle ne pourra pas en général satisfaire aux conditions aux limites sur le miroir. Pour résoudre le problème de la réflexion sur le miroir de l'onde émise par un type donné d'émetteur placé en un point donné, il est nécessaire de considérer la forme la plus générale d'une onde réfléchie par le paraboloïde et de voir comment on peut particulariser cette forme générale de façon à obtenir une onde réfléchie qui se raccorde avec l'onde incidente donnée à la surface du miroir en y satisfaisant aux conditions aux limites. L'onde réfléchie devant être une onde sans singularités, nous sommes donc amenés à étudier les solutions régulières des équations (48).

Si, dans les équations (48), nous posons

$$-\frac{\lambda}{2k} = \alpha i,$$

nous trouvons aisément des solutions intéressantes correspondant à $m = 1$, savoir

$$(50) \quad F_1(u_1) = \sqrt{u_1} e^{iu_1}, \quad F_2(u_2) = \sqrt{u_2} e^{-iu_2},$$

d'où nous tirons

$$(51) \quad u = \sqrt{u_1 u_2} e^{i(u_1 - u_2)} e^{ik \cdot ct} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{const.} \cdot e^{ik(\omega t - z)} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Ce résultat ne peut pas nous suffire, mais il nous invite à considérer pour la constante λ des valeurs purement imaginaires. Posons donc

$$(52) \quad \frac{\lambda}{2k} = -(2\mu + m - 1)i \quad (\mu \text{ réel}).$$

Nous sommes ainsi amenés à étudier les équations

$$(53) \quad \frac{d^2 F_j}{du_j^2} + \frac{1}{u_j} \frac{dF_j}{du_j} + \left[1 - (-1)^j \frac{i(2\mu + m - 1)}{u_j} - \frac{m^2}{4u_j^2} \right] F_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

mais nous pourrions nous borner à considérer la seule équation

$$(54) \quad \frac{d^2 F}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dF}{du} + \left[1 - \frac{i(2\mu + m - 1)}{u} - \frac{1}{m^2} \right] F = 0,$$

car, si nous trouvons une solution sans singularités $F(u)$ de (54), nous poserons

$$(55) \quad F_1(u_1) = F(u_1), \quad F_2(u_2) = F^*(u_2),$$

et nous obtiendrons pour U une solution régulière

$$(56) \quad U = F(u_1)F^*(u_2) \frac{\sin}{\cos} m \varphi e^{i k r t}.$$

Il s'agit donc de trouver une solution régulière de (54). Or la théorie des équations différentielles linéaires nous apprend que les solutions de (54) ont en général une singularité à l'origine, et le théorème de Fuchs précise qu'il existe au plus deux solutions de (54) se comportant près de l'origine comme u^r . Les valeurs possibles de r sont les racines de l'équation déterminante

$$(57) \quad r(r-1) + r - \frac{m^2}{4} = 0.$$

soit $r = \pm \frac{m}{2}$. Il existe donc une seule solution de l'équation (54) qui soit régulière à l'origine et elle se comporte à son voisinage comme $u^{\frac{m}{2}}$. Ceci nous incite à poser

$$(58) \quad F_{\mu, m}(u) = u^{\frac{m}{2}} e^{i u} f_{\mu, m}(u).$$

En substituant (58) dans (54), il vient

$$(59) \quad f_{\mu, m}'' + \left[\frac{m+1}{u} - 2i \right] f_{\mu, m}' - \frac{2\mu i}{u} f_{\mu, m} = 0.$$

Si nous cherchons une solution de (59) sous la forme

$$(60) \quad f_{\mu, m} = \sum_n c_n u^n.$$

nous trouvons aisément pour les c_n la relation de récurrence

$$(61) \quad c_{n+1} = c_n \frac{2i(\mu - n)}{(n+1)(n+m+1)}.$$

Si μ est un nombre entier positif, on obtient ainsi pour $f_{\mu, m}$ un polynôme de degré μ en u . Ce polynôme $P_{\mu, m}(u)$ est donné par la formule

$$(62) \quad P_{\mu, m}(u) = \sum_n \frac{(2i)^n}{n! (\mu - n)! (m + n)!} u^n.$$

avec un choix particulier de la constante arbitraire c_0 ($c_0 = \frac{1}{\mu! m!}$).

Finalement nous parvenons à la solution régulière

$$(63) \quad U = (u_1 u_2)^2 \sum_{\mu} P_{\mu,m}(u_1) P_{\mu,m}^*(u_2) \frac{\sin m\varphi}{\cos} e^{ik(ct-z)},$$

avec μ et m entiers positifs ou nuls.

Nous admettons que l'on a ainsi obtenu un système complet de solutions régulières, c'est-à-dire que la solution régulière la plus générale de l'équation (44) peut s'écrire

$$(64) \quad U = \sum_{\mu} \sum_{m} (a_{\mu,m} \cos m\varphi + a'_{\mu,m} \sin m\varphi) (u_1 u_2)^2 P_{\mu,m}(u_1) P_{\mu,m}^*(u_2) e^{ik(ct-z)}.$$

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que les fonctions

$$(65) \quad F_{\mu,m}(u) = u^{\frac{m}{2}} e^{-iu} P_{\mu,m}(u) \quad (m \text{ fixe; } \mu = 0, 1, \dots)$$

forment un système de fonctions orthogonales pour la variable u . En effet, d'après (54), on a

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{du^2} (\sqrt{u} F_{\mu,m}(u)) + \left[1 - \frac{i(2\mu + m + 1)}{u} - \frac{m^2 - 1}{4u^2} \right] \sqrt{u} F_{\mu,m}(u) = 0, \\ \frac{d^2}{du^2} (\sqrt{u} F_{\mu',m}(u)) + \left[1 - \frac{i(2\mu' + m + 1)}{u} - \frac{m^2 - 1}{4u^2} \right] \sqrt{u} F_{\mu',m}(u) = 0. \end{cases}$$

Multiplions la première équation par $\sqrt{u} F_{\mu',m}$ et la seconde par $\sqrt{u} F_{\mu,m}$; soustrayons les relations obtenues et intégrons sur u de 0 à ∞ . Nous obtenons

$$(67) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty \left[\sqrt{u} F_{\mu',m} \frac{d^2}{du^2} (\sqrt{u} F_{\mu,m}) - \sqrt{u} F_{\mu,m} \frac{d^2}{du^2} (\sqrt{u} F_{\mu',m}) \right] du \\ = 2i(\mu' - \mu) \int_0^\infty F_{\mu',m} F_{\mu,m} du. \end{aligned}$$

On vérifie facilement par intégration par parties que le premier membre est nul, et si les entiers μ et μ' sont différents, on a

$$(68) \quad \int_0^\infty F_{\mu',m} F_{\mu,m} du = 0 \quad (\mu' \neq \mu).$$

Nous admettons que les $F_{\mu,m}$ forment pour un m donné un système complet de fonctions orthogonales pour la variable u , et il en sera de même des $F_{\mu,m}^*$.

De la solution (63), on déduira une onde du type *électrique* par les formules

$$(69) \quad \begin{cases} E_z = k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & E_\varphi = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}, & E_{\bar{\varphi}} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{\varphi}}; \\ H_z = 0, & H_\varphi = \frac{ik}{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}}, & H_{\bar{\varphi}} = -ik \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{cases}$$

et une onde du type *magnétique* par les formules

$$(70) \quad \begin{cases} E_z = 0, & E_\varphi = \frac{ik}{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & E_{\bar{\varphi}} = -ik \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}}; \\ H_z = -k^2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & H_\varphi = -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi}, & H_{\bar{\varphi}} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{\varphi}}, \end{cases}$$

mais il faudra exprimer les dérivées par rapport à φ et à \bar{z} en fonction des dérivées par rapport à u_1 et à u_2 en se servant des formules

$$(71) \quad u_1 = \frac{k}{2}(r - z), \quad u_2 = \frac{k}{2}(r + z), \quad (r = \sqrt{\varphi^2 + \bar{\varphi}^2}),$$

ce qui ne soulève pas de difficultés particulières. L'onde du type électrique et l'onde du type magnétique dérivant de la solution (63) dépendront au total des quatre constantes arbitraires. Sans entrer dans le détail des calculs, on voit qu'une composante quelconque du champ électromagnétique d'une onde régulière, par exemple de l'onde réfléchie, sera développable suivant les fonctions $\frac{\sin}{\cos} m\varphi$ avec des coefficients qui seront eux-mêmes développables suivant les fonctions $F_{p,m}^*(u_2)$. Pour une composante E_q du champ électrique, on aura par exemple

$$(72) \quad E_{ij} = \sum_0^\infty \sum_m^\infty (a_{p,m} \sin m\varphi + a'_{p,m} \cos m\varphi) F_{p,m}^*(u_2) e^{ikct};$$

les coefficients $a_{p,m}$ et $a'_{p,m}$ sont encore des fonctions de la variable u_1 , mais sur le miroir parabolique on a $u_1 = \frac{ka}{2}$ et par suite, sur la surface du miroir parabolique, on a des développements de la forme (72) avec des coefficients a et a' constants.

Supposons maintenant que quelque part à l'intérieur du miroir parabolique soit placé un émetteur d'ondes dont nous savons calculer le rayonnement. Cet émetteur envoie sur le miroir un champ électrique incident $\vec{E}^{(i)}$ qui est une donnée du problème. En chaque point du miroir, chaque champ a une composante d'indice φ tangente au miroir le long d'un parallèle et une composante d'indice t tangente au miroir

le long de la parabole méridienne. En particulier, les composantes E_z^i et $E_r^{(i)}$ de l'onde incidente auront sur tout le miroir des développements de la forme (72)

$$(73) \quad \begin{cases} E_z^i = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (a_{\mu,m} \sin m\varphi + a'_{\mu,m} \cos m\varphi) F_{\mu,m}^*(u_2) e^{ikct}, \\ E_r^{(i)} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (b_{\mu,m} \sin m\varphi + b'_{\mu,m} \cos m\varphi) F_{\mu,m}^*(u_2) e^{ikct}, \end{cases}$$

où les a , a' , b , b' sont des constantes connues. Pour l'onde réfléchie, on aura de même des développements valables à la surface du miroir de la forme

$$(74) \quad \begin{cases} E_z = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (c_{\mu,m} \sin m\varphi + c'_{\mu,m} \cos m\varphi) F_{\mu,m}^*(u_2) e^{ikct}, \\ E_r = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (d_{\mu,m} \sin m\varphi + d'_{\mu,m} \cos m\varphi) F_{\mu,m}^*(u_2) e^{ikct}, \end{cases}$$

où ici les c et d sont des constantes à priori arbitraires au nombre de quatre pour chaque couple de μ , m puisqu'il y a quatre constantes arbitraires pour chaque solution du type (63). Or, sur la surface du miroir parabolique, on a les conditions aux limites

$$(75) \quad E_z^{(i)} + E_z = 0, \quad E_r^{(i)} + E_r = 0,$$

qui doivent être vérifiées pour toutes les valeurs de u_2 et de φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq u_2 \leq \infty$). Nous avons donc

$$(76) \quad c_{\mu,m} = -a_{\mu,m}, \quad c'_{\mu,m} = -a'_{\mu,m}, \quad d_{\mu,m} = -b_{\mu,m}, \quad d'_{\mu,m} = -b'_{\mu,m},$$

et ces formules permettent en principe de trouver la forme de l'onde réfléchie.

Des considérations de symétrie permettent très souvent de limiter le nombre des termes à considérer dans les développements (72) à (74). Néanmoins, même dans les cas les plus simples (doublet placé au foyer O le long de l'axe ou normalement à l'axe), les calculs rigoureux paraissent devoir être pénibles.

Quand le phénomène étudié a la symétrie de révolution (cas du doublet placé en O le long de l'axe par exemple), les composantes E_z doivent être nulles, et ceci conduit à prendre dans l'expression de U uniquement des termes du type (63) avec $m = 0$ et à n'utiliser que les ondes du type électrique. La solution (63) avec $\mu = m = 0$ ne donne

rien d'intéressant parce que les champs sont tous nuls. La solution avec $m = 0$, $\mu = 1$ est au contraire intéressante : en un point situé au voisinage de Oz , mais à une distance très grande par rapport à la longueur d'onde ($kz \gg 1$), on trouve approximativement

$$(77) \quad U \cong (1 - 2ikz + k^2z^2)e^{ik(ct-z)},$$

d'où

$$(78) \quad E_z = -4k^2e^{ik(ct-z)}, \quad E_\rho = -2ik^3\rho e^{ik(ct-z)} = H_\varphi,$$

les autres composantes étant nulles. On voit que le champ longitudinal est constant au voisinage de l'axe, tandis que le champ électrique radial, nul sur l'axe, croît comme ρ à son voisinage. En un point non situé sur l'axe ($\rho \neq 0$), le rapport $\frac{E_z}{E_\rho}$ est proportionnel à k^{-1} , c'est-à-dire à la longueur d'onde dans le vide indéfini; quand cette longueur d'onde tend vers zéro, l'onde tend à devenir transversale.

La solution du type (63) correspondant à $\mu = 0$, $m = 1$, est la solution déjà considérée dans la formule (51). Elle conduit à la solution du type électrique

$$(79) \quad \begin{cases} E_z = 0, & E_\rho = -ik \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} e^{ik(ct-z)}, & E_\varphi = -ik \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} e^{ik(ct-z)}; \\ H_z = 0, & H_\rho = -E_\varphi, & H_\varphi = E_\rho. \end{cases}$$

et à une solution du type magnétique qui n'est pas réellement distincte de la précédente.

L'onde (79) est transversale : on vérifie facilement que sa polarisation est rectiligne, les vecteurs électriques étant partout parallèles. Il est d'ailleurs évident qu'elle ne satisfait pas à elle seule aux conditions aux limites.

CHAPITRE VI.

LE PRINCIPE D'HUYGHENS ET LA DIFFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES À L'EMBOUCHURE D'UN GUIDE OU D'UN CORNET.

1. L'application de la formule de Kirchhoff aux ondes électromagnétiques. — On sait que Kirchhoff a donné un énoncé mathématique précis du principe d'Huyghens et que cet énoncé sert de base dans les traités d'Optique à l'étude des phénomènes de diffraction.

Dans les traités d'Optique, la théorie de Kirchhoff est développée en admettant qu'on peut représenter la lumière à l'aide d'une fonction scalaire $u(x, y, z, t)$. On fait ainsi abstraction du caractère vectoriel et électromagnétique du rayonnement. On part du fait que la fonction u doit satisfaire l'équation de propagation

$$(1) \quad \Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

et si l'onde est monochromatique de fréquence $\frac{kc}{2\pi}$, on pourra écrire

$$(2) \quad \Delta u + k^2 u = 0.$$

La démonstration de la formule de Kirchhoff repose alors sur l'application d'une formule bien connue de Green. Si U et V désignent deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes à l'intérieur d'un domaine D limité par une surface S , cette formule de Green est la suivante

$$(3) \quad \iiint_D (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = \iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma,$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ représente la dérivée prise suivant la normale à S dans le sens qui fait sortir de D . Soit maintenant un point fixe P pris à l'intérieur de D

et un autre point quelconque M ; r désignant la distance de M à P , nous considérerons la fonction $\Psi(M)$ du point M définie par

$$(4) \quad \Psi(M) = \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Cette fonction est continue, ainsi que ses deux premières dérivées, partout excepté au point P ; elle satisfait partout, sauf en P , à l'équation

$$(5) \quad \Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} = -k^2\Psi,$$

comme on le vérifie aisément.

Entourons alors le point P d'une sphère Σ infiniment petite de rayon ε . Les deux fonctions u et Ψ étant continues ainsi que leurs deux premières dérivées dans tout le domaine D limité par S et par Σ , nous pourrions appliquer la formule de Green (3) en y faisant $U = u$ et $V = \Psi$. En vertu de (2) et de (4), l'intégrale triple du premier membre sera nulle et il nous restera

$$(6) \quad \iint_S \left(u \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau + \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau = 0.$$

Il est aisé d'évaluer la valeur que prend la seconde intégrale quand on fait tendre vers zéro le rayon ε de la sphère Σ . En effet, tout d'abord comme $\frac{\partial u}{\partial n}$ est finie au point P , le deuxième terme de l'intégrale tend évidemment vers zéro en même temps que ε ; quant au premier terme, comme

$$(7) \quad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = +\frac{1}{r^2} e^{-ikr} + \frac{ik}{r} e^{-ikr},$$

il est égal à

$$u(P) \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{ik}{\varepsilon} \right) e^{-ik\varepsilon} \cdot 4\pi\varepsilon^2$$

et tend vers $4\pi u(P)$ quand ε tend vers zéro. Finalement, en faisant tendre ε vers zéro, on tire de la formule (6) la célèbre formule de Kirchhoff

$$(8) \quad 4\pi u(P) = -\iint_S \left(u \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\tau.$$

Elle nous donne la valeur de la fonction u en un point P intérieur au domaine D quand on connaît les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$ sur la surface S .

Voici maintenant comment en Optique on applique la formule de Kirchhoff au problème de la diffraction. Considérons un écran percé

d'une ouverture. Sur la face antérieure de cet écran tombe une onde monochromatique correspondant à une fonction u supposée connue. L'onde traverse l'ouverture en se diffractant et il s'agit de calculer la valeur de la fonction u en un point P quelconque de l'espace situé derrière l'écran. On délimite un domaine D contenant le point P en prenant pour surface S la surface de l'ouverture, celle de l'écran supposé indéfini et celle d'une surface quelconque placée infiniment loin, s'appuyant sur l'écran et englobant tout l'espace situé derrière l'écran. A ce domaine D et à cette surface S , on applique la formule (8) qui donne la valeur de $u(P)$ si l'on fait les hypothèses suivantes :

1° u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ ont sur la surface de l'ouverture les valeurs qui se déduisent de la forme connue de u pour l'onde incidente; 2° u et $\frac{\partial u}{\partial n}$ sont supposées nuls sur toute la surface de l'écran et naturellement sur toute la partie de la surface S qui est rejetée à l'infini. Le calcul ainsi effectué donne, on le sait, des résultats qui sont en général vérifiés d'une façon très satisfaisante par l'expérience.

Malgré le succès de ce mode de calcul, il est évident qu'il est sujet à de graves objections. D'abord il n'est nullement certain que, si l'on fait tendre le point P vers un point de l'ouverture, les valeurs obtenues pour $u(P)$ tendront vers celles qu'on a admises a priori comme existant dans l'ouverture : de même il n'y aura pas en général coïncidence entre le $\frac{\partial u}{\partial n}$ ainsi calculé en un point de l'ouverture et la valeur admise pour $\frac{\partial u}{\partial n}$ en ce point. De plus, le calcul conduit à trouver des valeurs non nulles de u pour la face postérieure de l'écran, ce qui est assez naturel puisque, en raison même de la diffraction, il n'y a aucune raison pour que cette face postérieure soit totalement obscure : il est même évident que sur les bords de l'ouverture, la fonction u sera très sensiblement différente de zéro. On a essayé, pour atténuer cette difficulté, de considérer le mode de calcul indiqué plus haut comme une première approximation. Une deuxième approximation consistera alors à refaire le calcul de u à partir de la formule (8), mais en prenant cette fois, comme valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$ dans l'ouverture et sur la face postérieure de l'écran, les valeurs fournies par la première approximation. On pourrait continuer ce calcul d'approximations successives, mais rien ne garantit que ces approximations soient convergentes ⁽¹⁾. C'est là une question qui ne paraît pas

(1) M. E. Durand a signalé que ce procédé d'approximations successives envisagé par

avoir été tirée complètement au clair, et tous les développements exposés dans le présent chapitre laisseront subsister cette première difficulté soulevée par la théorie de la diffraction. Néanmoins, il ne faut pas s'exagérer l'importance de cette difficulté puisque, pratiquement, les résultats obtenus par la méthode usuelle de calcul sont très suffisants.

Il y a deux autres graves objections que l'on peut adresser au mode de calcul usuel de la diffraction. L'une d'elles est relative à la continuité de la fonction u sur la surface S . En admettant que u a dans l'ouverture la valeur correspondant à l'onde incidente et sur la face postérieure de l'écran la valeur 0, on attribue à u une discontinuité tout le long du contour de l'ouverture, et cette discontinuité empêche d'appliquer à la fonction u la formule de Green, ce qui enlève à la formule (8) sa base logique. L'autre objection, à laquelle nous avons fait allusion, se rattache à la nature électromagnétique du rayonnement. Nous savons que les équations de Maxwell entraînent, pour la propagation dans le vide des champs \vec{E} et \vec{H} , les équations

$$(9) \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Chacune des six composantes du champ électromagnétique obéit donc à l'équation (1), et il semble que l'on puisse lui appliquer les raisonnements faits au début du paragraphe et parvenir ainsi à la formule (8) pour chaque composante. On pourrait donc calculer les champs \vec{E} et \vec{H} au point P par application de la formule (8). Mais les champs ainsi obtenus obéiraient-ils aux équations de Maxwell dont les équations (9) dérivent, mais qui sont plus restrictives car elles imposent certaines relations entre les composantes des champs? Quand on a voulu calculer la diffraction des ondes électromagnétiques en appliquant à la manière usuelle la formule (8) de Kirchhoff à chaque composante de champ, on s'est aperçu qu'en fait on obtenait des champs qui ne satisfaisaient pas aux équations de Maxwell, et l'on peut d'ailleurs le vérifier directement. Si la déduction de la formule (8) était rigoureuse dans les conditions où on l'applique, il y aurait là une contradiction puisque chaque composante de champ obéissant à la formule (1) devrait nécessairement être donnée par (8) au point P . Mais nous avons vu qu'il y avait des objections contre la déduction de la formule (8) de

M. Born ne pourrait conduire au résultat cherché car, dès le second stade d'approximation, il fournirait toujours les mêmes valeurs.

Kirchhoff à partir de (1) dans les conditions où l'on applique cette formule.

Pour obtenir des expressions de $\vec{E}(P)$ et de $\vec{H}(P)$ satisfaisant aux équations de Maxwell, on a dû suivre une méthode différente de celle de Kirchhoff et compatible avec l'existence d'une discontinuité des données sur l'écran. Au lieu de considérer l'onde dans l'espace postérieur à l'écran comme déterminée par les *valeurs aux limites* de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$, on la considère comme due à l'existence de sources fictives distribuées sur la partie libre de l'onde incidente dans l'ouverture. Cette méthode est très supérieure à la précédente parce qu'elle fournit des champs satisfaisant aux équations de Maxwell, et parce qu'elle tient compte des discontinuités se produisant sur le contour de l'ouverture. Grâce à cette méthode qui serre de près les idées mises initialement par Huyghens à la base de son célèbre principe, on parvient à lever d'un seul coup les difficultés liées à la discontinuité de u sur le contour de l'ouverture et celle qui provient de la nécessité de satisfaire aux équations de Maxwell.

En liaison avec la question de la diffraction des ondes électromagnétiques à l'embouchure des cornets, ces questions ont été récemment étudiées dans un important Mémoire de MM. Stratton et Chu qui ont retrouvé des formules antérieurement proposées par M. Kottler pour remplacer la formule (8) ⁽¹⁾. Nous allons démontrer ces formules de Kottler dans le prochain paragraphe.

Remarquons que nous avons constamment supposé plus haut avoir affaire à des propagations s'effectuant dans le vide ou tout au moins dans un milieu où l'on peut poser $\epsilon = \mu = 1$. S'il en était autrement, on aurait simplement à remplacer k par $k\sqrt{\epsilon\mu}$ dans les formules (1) à (8). Nous continuerons à raisonner en supposant $\epsilon = \mu = 1$, car c'est là le cas pratiquement le plus important.

2. Démonstration des formules de Kottler. — Pour parvenir à trouver les formules qui, pour les champs électromagnétiques, doivent remplacer la formule (8), nous partirons des équations de Maxwell, mais nous les écrirons en supposant qu'à côté des densités ρ et \vec{i} de charge et de courant électriques existent des densités δ et \vec{j} de charge

⁽¹⁾ Voir bibliographie [13] et [18].

et de courant *magnétiques*. Dans ces conditions, nous aurons les équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{i}, \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \text{div } \vec{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div } \vec{H} = -4\pi \delta; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{i} = 0, \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations de la troisième ligne sont des équations de conservation qui résultent des équations des deux premières lignes. Soient maintenant V et \vec{A} les potentiels, V' et \vec{A}' les antipotentels tels que l'on ait

$$(11) \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V + \text{rot } \vec{A}'; \quad \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \text{grad } V' + \text{rot } \vec{A}$$

avec

$$(12) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V'}{\partial t} + \text{div } \vec{A}' = 0.$$

Par substitution de (11) et (12) dans (10), on obtient aisément

$$(13) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{i}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}' = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Pour une onde monochromatique de fréquence $\frac{kc}{2\pi}$, les formules (11) prennent la forme

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -ik\vec{A} + \frac{1}{ik} \text{grad div } \vec{A} + \text{rot } \vec{A}', \\ \vec{H} = ik\vec{A}' - \frac{1}{ik} \text{grad div } \vec{A}' + \text{rot } \vec{A}. \end{array} \right.$$

Envisageons maintenant une surface S limitée par un contour C . Nous supposons qu'au point M situé au voisinage immédiat d'un des côtés de S , les champs \vec{E} et \vec{H} soient nuls tandis qu'ils auront certaines valeurs non nulles au point M' situé en face de M au voisinage immédiat de l'autre côté de la surface. Prenons en M un axe des z normal à la surface et des axes x et y contenus dans le plan tangent. Nous pouvons écrire

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Or les dérivées par rapport à x et à y sont finies tandis que les dérivées par rapport à z sont extrêmement grandes et, en intégrant sur la normale de M à M' , nous avons

$$(16) \quad \int_M^{M'} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} dz = -[H_y]_M^{M'}, \quad \int_M^{M'} \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} dz = [H_x]_M^{M'}, \quad \int_M^{M'} \operatorname{div} E dz = [E_z]_M^{M'}.$$

En comparant ces formules aux équations générales

$$(17) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \operatorname{rot}_x \vec{H} - \frac{4\pi}{c} i_x, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \operatorname{rot}_y \vec{H} - \frac{4\pi}{c} i_y, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho,$$

on voit que les intégrales des premiers membres de (16) ont les mêmes valeurs que si \vec{H} était continu à travers S et si la surface portait des densités superficielles de courant et de charge électriques égales à

$$(18) \quad \vec{i} = \frac{c}{4\pi} [\vec{n} \times \vec{H}], \quad \rho = \frac{1}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{E}),$$

\vec{n} désignant un vecteur unité porté suivant la normale à S dans la direction de M' vers M et les champs \vec{E} et \vec{H} ayant les valeurs correspondant au point M' .

On montrerait de même que l'intégrale de $-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ et celle de $\operatorname{div} \vec{H}$ prises de M à M' le long de la normale à S ont les mêmes valeurs que si \vec{E} était continue au travers de S et que si cette surface portait des densités superficielles de courant et de charge magnétiques égales à

$$(19) \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} [\vec{n} \times \vec{E}], \quad \delta = -\frac{1}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{H}).$$

Aux densités superficielles de courant \vec{i} et \vec{j} , correspondent des solutions des équations (13) données par les formules de potentiels retardés

$$(20) \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \iint_S \vec{i} \Psi d\sigma, \quad \vec{A}' = \frac{1}{c} \iint_S \vec{j} \Psi d\sigma,$$

où Ψ a la signification (4).

Pour calculer les champs à partir de ces potentiels, nous devons appliquer à ceux-ci des opérateurs tels que grad, rot, etc., qui agissent sur les coordonnées du point P où l'on considère \vec{A} et \vec{A}' . Mais dans l'expression des potentiels, ces variables sont seulement contenues dans l'expression de la distance r du point P au point M centre de l'élément $d\sigma$,

distance qui figure dans la définition de Ψ . Si O_P est un opérateur agissant sur les coordonnées de P et O_M le même opérateur agissant sur les coordonnées de M , on a

$$(21) \quad O_P = -O_M,$$

et finalement on pourra écrire, d'après (14) et (20),

$$(22) \quad \vec{E} = -\frac{ik}{c} \iint_S \vec{i} \Psi' d\sigma + \frac{1}{ikc} \iint_S \text{grad}_\Psi \text{div}_\Psi (\vec{i} \Psi') d\sigma - \frac{1}{c} \iint_S \text{rot}_\Psi (\vec{j} \Psi') d\sigma,$$

et de même

$$(23) \quad \vec{H} = \frac{ik}{c} \iint_S \vec{j} \Psi' d\sigma - \frac{1}{ikc} \iint_S \text{grad}_\Psi \text{div}_\Psi (\vec{j} \Psi') d\sigma - \frac{1}{c} \iint_S \text{rot}_\Psi (\vec{i} \Psi') d\sigma,$$

où l'indice Ψ sert à marquer que les dérivations portent sur les coordonnées du point M centre de l'élément $d\sigma$, mais seulement dans l'expression de Ψ .

En portant dans (22) les expressions (18) et (19) de \vec{i} et de \vec{j} , il vient

$$(24) \quad \begin{aligned} E(P) = & -\frac{ik}{4\pi} \iint_S [\vec{n} \times \vec{H}] \Psi' d\sigma \\ & + \frac{1}{4\pi ik} \iint_S \text{grad}_\Psi \text{div}_\Psi ([\vec{n} \times \vec{H}] \Psi') d\sigma \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_S \text{rot}_\Psi ([\vec{n} \times \vec{E}] \Psi') d\sigma. \end{aligned}$$

Or, il est facile de vérifier que

$$(25) \quad \text{rot}_\Psi ([\vec{n} \times \vec{E}] \Psi') = -[\vec{n} \times \vec{E}] \times \text{grad}_\Psi \Psi'$$

et que

$$(26) \quad \begin{aligned} & \iint_S \text{grad}_\Psi \text{div}_\Psi ([\vec{n} \times \vec{H}] \Psi') d\sigma \\ & = \oint_C \overrightarrow{\text{grad} \Psi'} \cdot (\vec{H} \cdot \vec{ds}) - \iint_S (\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{H}) \overrightarrow{\text{grad} \Psi'} d\sigma \\ & = \oint_C \overrightarrow{\text{grad} \Psi'} \cdot (\vec{H} \cdot \vec{ds}) + ik \iint_S (\vec{n} \cdot \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad} \Psi'} d\sigma, \end{aligned}$$

d'où, en portant dans (24),

$$(27) \quad \begin{aligned} \vec{E}(P) = & \frac{1}{4\pi ik} \oint_C \overrightarrow{\text{grad} \Psi'} \cdot (\vec{H} \cdot \vec{ds}) \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ ik [\vec{n} \times \vec{H}] \Psi' - [[\vec{n} \times \vec{E}] \times \overrightarrow{\text{grad} \Psi'}] - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad} \Psi'} \right\} d\sigma, \end{aligned}$$

et un raisonnement tout à fait analogue donnerait

$$(28) \quad H(P) = -\frac{1}{4\pi ik} \oint_C \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \cdot (\vec{E} \cdot \vec{ds}) \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ ik [\vec{n} \times \vec{E}] \Psi + \left[[\vec{n} \times \vec{H}] \times \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \right] + (\vec{n} \cdot \vec{H}) \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \right\} d\sigma.$$

Telles sont les formules obtenues par Kottler qui doivent donner les champs au point P, même quand il y a sur S des discontinuités pour les champs.

Nous allons enfin transformer les équations (27) et (28) pour montrer leurs relations avec les formules de Kirchhoff. Pour simplifier un peu les calculs, nous supposons que la surface S est plane, ce qui correspond au cas usuel d'une ouverture percée dans un écran plan. Le plan de la surface S sera alors le plan des xy et l'intégrale double de (27) pourra s'écrire facilement après remplacement de $-ik\vec{H}$ par $\text{rot}\vec{E}$: on trouve ainsi par exemple pour E_x

$$(29) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ -[\vec{n} \times \text{rot}\vec{E}]_x \Psi - \left[[\vec{n} \times \vec{E}] \times \overrightarrow{\text{grad}} \Psi \right]_x - (\vec{n} \cdot \vec{E}) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} d\sigma \\ = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \Psi \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + E_x \frac{\partial \Psi}{\partial z} + E_z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} dx dy,$$

car $n_x = n_y = 0$ et $n_z = 1$.

D'où, aisément,

$$(30) \quad 4\pi E_x(P) = \frac{1}{ik} \oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} (\vec{H} \cdot \vec{ds}) + \oint_C \Psi [\vec{E} \times \vec{ds}]_x + \iint_S \left(\Psi \frac{\partial E_x}{\partial n} - E_x \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

avec des expressions analogues pour E_y et E_z , de sorte que l'on peut écrire

$$(31) \quad 4\pi \vec{E}(P) = \frac{1}{ik} \oint_C \overrightarrow{\text{grad}} \Psi (\vec{H} \cdot \vec{ds}) + \oint_C \Psi [\vec{E} \times \vec{ds}] + \iint_S \left(\Psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma$$

et, pour le champ magnétique, l'on trouve de même

$$(32) \quad 4\pi \vec{H}(P) = -\frac{1}{ik} \oint_C \overrightarrow{\text{grad}} \Psi (\vec{E} \cdot \vec{ds}) + \oint_C \Psi [\vec{H} \times \vec{ds}] + \iint_S \left(\Psi \frac{\partial \vec{H}}{\partial n} - \vec{H} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Précisons que dans toutes les formules précédentes l'intégrale \oint_C est une intégrale curviligne prise le long du contour C dans le sens inverse des

aiguilles d'une montre par rapport à un observateur se trouvant du côté de la lumière diffractée. C'est cette convention qui a déterminé les signes que nous avons adoptés pour ces intégrales.

Les formules (31) et (32) montrent que les intégrales doubles de Kirchhoff prises sur la surface de l'ouverture doivent être complétées par des intégrales curvilignes prises le long du contour de l'ouverture si l'on veut tenir compte des discontinuités des données sur ce contour.

Étant donné la façon un peu détournée dont nous avons obtenu les formules (31) et (32), il est important de vérifier directement que les expressions obtenues par \vec{E} et \vec{H} vérifient bien les équations de Maxwell. Nous allons la vérifier en raisonnant sur les expressions (27) et (28) qui sont équivalentes à (31) et (32). Vérifions d'abord que l'on a

$$(33) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -ik \vec{H} = \text{rot } \vec{E}.$$

Désignons par rot_Ψ l'opérateur rotationnel agissant sur la fonction Ψ en un point de l'ouverture; nous trouvons, à partir de (27),

$$(34) \quad 4\pi \text{rot}_\Psi \vec{E} = -4\pi \text{rot}_\Psi E = -\iint_S \left\{ ik \left[[\vec{n} \times \vec{H}] \times \overrightarrow{\text{grad } \Psi} \right] \right. \\ \left. + \text{rot}_\Psi \left[[\vec{n} \times \vec{E}] \times \overrightarrow{\text{grad } \Psi} \right] \right\} d\sigma.$$

Nous allons calculer le rotationnel de la seconde intégrale en prenant encore le plan de l'ouverture comme plan des xy ; pour la composante x de ce rotationnel, nous trouvons

$$[\vec{n} \times \vec{E}]_x \Delta \Psi + E_y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - E_x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y},$$

d'où, en intégrant,

$$(35) \quad \iint_S \left(\text{rot}_\Psi \left[[\vec{n} \times \vec{E}] \times \overrightarrow{\text{grad } \Psi} \right] \right)_x d\sigma \\ = \iint_S \left\{ [\vec{n} \times \vec{E}]_x \Delta \Psi - (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E}) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} d\sigma - \oint_C \frac{\partial \Psi}{\partial x} (\vec{E} \cdot \vec{ds}).$$

En revenant aux formes vectorielles, on voit qu'on peut écrire (34) de la manière suivante

$$(36) \quad 4\pi \text{rot } \vec{E} = -\iint_S \left\{ ik \left[[\vec{n} \times \vec{H}] \times \overrightarrow{\text{grad } \Psi} \right] \right. \\ \left. + [\vec{n} \times \vec{E}] \Delta \Psi - (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{E}) \overrightarrow{\text{grad } \Psi} \right\} d\sigma + \oint_C \overrightarrow{\text{grad } \Psi} (\vec{E} \cdot \vec{ds}).$$

Il suffit maintenant de multiplier l'expression (28) de \vec{H} par $-ik$ pour vérifier que, si l'équation (33) est satisfaite sur l'ouverture par les données, elle est satisfaite partout. Par des calculs tout à fait analogues, on étendra la même conclusion à l'équation

$$(37) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = ik \vec{E} = \text{rot } \vec{H}.$$

Restent à vérifier les équations en divergence. De (27) nous tirons

$$(38) \quad 4\pi \text{div}_V \vec{E} = -4\pi \text{div}_V \vec{E} \\ = -\frac{1}{ik} \oint_C \Delta \Psi (\vec{n} \cdot d\vec{s}) - \iint_S \{ (\vec{n} \cdot \vec{E}) \Delta \Psi - ik ([\vec{n} \times \vec{H}] \cdot \text{grad } \Psi) \} d\sigma,$$

car

$$(39) \quad \text{div}_V [\vec{n} \times \vec{H}] \Psi = ([\vec{n} \times \vec{H}] \cdot \text{grad } \Psi), \quad \text{div}_V [\vec{n} \times \vec{E}] \times \text{grad } \Psi = 0.$$

Mais on a aussi

$$(40) \quad \iint_S ([\vec{n} \times \vec{H}] \cdot \text{grad } \Psi) d\sigma = \iint_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{H}) \Psi d\sigma + \oint_C \Psi (\vec{n} \cdot d\vec{s}).$$

Portons cette valeur dans (38) et tenons compte de (5) et de (37) : nous voyons aisément que le second membre de (38) est nul, de sorte que l'équation $\text{div } \vec{E} = 0$ est satisfaite. On vérifie de même, à partir de (28), que $\text{div } \vec{H}$ est nulle. La présence des intégrales de contour dans les formules de Kottler est essentielle pour que ces vérifications se fassent.

Résumons maintenant en quelques mots la marche du raisonnement que nous avons fait pour parvenir aux formules de Kottler. Nous avons coupé l'onde incidente sur la surface de l'ouverture, introduisant ainsi sur cette surface des discontinuités des champs \vec{E} et \vec{H} , et nous avons compensé les discontinuités ainsi introduites en distribuant des densités de courants magnétiques et électriques sur toute l'ouverture. Puis, conformément à l'esprit du principe d'Huyghens, nous avons considéré ces courants distribués à la surface du front d'onde comme servant de sources pour le rayonnement qui existe du côté postérieur de l'écran, et cette hypothèse nous a permis immédiatement le calcul de ce rayonnement par les formules des potentiels retardés.

Il est encore très intéressant d'analyser l'origine des différents termes dans les expressions (27) et (28). Si l'on compare les termes sous le

signe intégrale double dans ces expressions avec l'expression des densités (18) et (19), on voit que les intégrales doubles représentent les champs créés au point P par les distributions superficielles (18) et (19). Quelle est donc alors l'origine des intégrales simples figurant dans (27) et (28)? Elles sont dues à l'existence sur le contour C d'une charge linéaire fictive équivalente à la brusque discontinuité des champs sur ce contour. Montrons-le pour la formule (27), une explication analogue étant valable pour (28). Désignons par \vec{n}_1 le vecteur unité porté normalement au contour C en un point M de ce contour dans le plan tangent à la surface S en M. Au point M nous pouvons décomposer le vecteur \vec{i} en trois composantes rectangulaires i_n , i_s et i_{n_1} . Considérons le petit élément σ de la surface S collé au contour C au point M, comme l'indique la figure suivante :

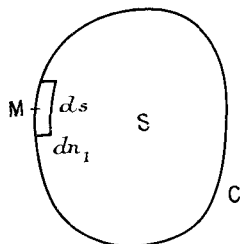


Fig. 12.

La relation de conservation de l'électricité nous permet d'écrire

$$(41) \quad ike \iint_{\sigma} \rho \, ds \, dn_1 = - \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial i_s}{\partial s} + \frac{\partial i_n}{\partial n} + \frac{\partial i_{n_1}}{\partial n_1} \right) dn_1 \, ds.$$

Si nous faisons tendre dn_1 vers zéro, les deux premiers termes du second membre tendront vers zéro, car \vec{i} est continu, d'après son expression, dans le sens s et dans le sens n , mais le troisième terme reste fini à cause de la variation infiniment rapide de \vec{H} et par suite de \vec{i} quand on atteint le contour C dans le sens n_1 . On voit ainsi qu'il faut attribuer à l'élément ds du contour C une charge linéaire ρ_s égale à

$$(42) \quad \rho_s = - \frac{1}{ike} \int \frac{\partial i_{n_1}}{\partial n_1} dn_1 = \frac{1}{i\pi ik} \left(\vec{n}_1 \cdot \left[\vec{n} \times \vec{H} \right] \right) = - \frac{1}{i\pi ik} H_s,$$

car $\left(\vec{n}_1 \cdot \left[\vec{n} \times \vec{H} \right] \right) = \left(\vec{H} \cdot \left[\vec{n}_1 \times \vec{n} \right] \right) = - H_s$, d'après le sens positif choisi sur C.

On vérifie alors immédiatement que l'intégrale simple de (27) représente le champ créé par la distribution électrique fictive (42) distribuée sur le contour C et correspondant à la discontinuité du champ électromagnétique sur ce contour. Interprétation analogue pour l'intégrale simple de (28). Il est remarquable que si dans le calcul de \vec{E} et de \vec{H} nous étions partis non pas des formules (22) et (23), c'est-à-dire des relations (14), en faisant seulement appel aux expressions (18) et (19) de \vec{i} et de \vec{j} , mais bien des relations (11) en calculant les potentiels scalaires V et V' avec emploi des valeurs (18) et (19) de ρ et de ∂ , nous aurions trouvé les expressions (27) et (28) *sans les intégrales de contour*, et les champs ainsi calculés n'auraient pas été solutions des équations de Maxwell. Le calcul précédent est donc, par certains côtés, assez délicat, et ceci explique pourquoi les auteurs qui ont voulu l'effectuer ont pas mal tatonné avant d'arriver aux expressions exactes (28) et (29).

3. Diffraction des ondes à l'embouchure des guides et cornets. —

Les formules de Kottler sont aujourd'hui utilisées en radiotechnique pour le calcul de la diffusion des ondes électromagnétiques à l'embouchure des guides et des cornets, afin d'évaluer l'effet directeur des diverses formes qui peuvent être adoptées pour ces dispositifs. Un émetteur d'ondes placé quelque part dans le guide ou le cornet sert de source à une propagation d'ondes qui se déroule dans le guide ou le cornet suivant les lois précédemment étudiées. A l'embouchure du guide ou cornet se produisent d'importants phénomènes de diffraction qui ont pour effet de diminuer le caractère dirigé de la propagation et qu'il est, par suite, très important de pouvoir évaluer assez exactement. Pour cela, on admet que la propagation d'ondes, calculée dans le guide ou cornet d'après les conditions d'excitation, se maintient jusqu'à l'embouchure, de sorte que les champs aient sur la surface de l'embouchure les mêmes valeurs que si le guide ou cornet était indéfini. Naturellement c'est là une hypothèse ayant le caractère d'une approximation. Ensuite on admet que la diffraction à l'embouchure peut être calculée en assimilant cette embouchure à une ouverture percée dans un écran. On appliquera donc les formules (31) et (32) en admettant pour valeurs des champs sur l'embouchure les valeurs résultant de l'hypothèse précisée plus haut. Rappelons que dans les formules (31) et (32) la variable n est comptée normalement à la surface S de l'embouchure

dans le sens de l'intérieur du guide ou cornet, et que les intégrales \oint_C doivent être prises le long du contour de l'embouchure en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre pour un observateur qui observe cette embouchure de l'extérieur. Les calculs effectués de cette manière ont donné de bons résultats, et les hypothèses qui leur servent de bases paraissent pratiquement satisfaisantes.

Ces calculs de diffraction ont été notamment effectués pour les guides à section rectangulaire par MM. Barrow et Green, pour les cornets sectoriaux par MM. Barrow et Chu, et pour les cornets biconiques par MM. Barrow, Chu et Jansen ⁽¹⁾. Nous nous contenterons ici de reproduire les calculs relatifs à un cas très simple, celui des guides à section rectangulaire parcourus par une onde H_0 .

4. Diffraction à l'embouchure d'un guide à section rectangulaire pour l'onde H_0 . — On se reportera au Chapitre II, paragraphe 2 et à la

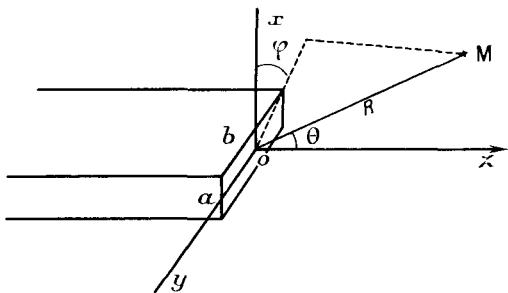


Fig. 13.

figure 1. Nous considérerons l'onde obtenue en faisant $n_2 = 0$ dans les formules (17) du paragraphe en question et nous écrirons simplement m au lieu de n_1 . Mais, comme nous prendrons désormais pour origine le centre de l'embouchure comme l'indique la figure 13, nous écrirons l'expression des composantes non nulles du champ électromagnétique de l'onde considérée sous la forme suivante

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_y = -G \frac{\cos \frac{m\pi}{a}}{\sin \frac{m\pi}{a}} x e^{i(kct - k_z z)}, \quad H_x = -\frac{k_z}{k} E_y, \\ H_z = -\frac{iG}{k} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x e^{i(kct - k_z z)} \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Voir bibliographie [2], [4] et [5].

avec

$$(44) \quad x^2 = k^2 - k_z^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2}.$$

Dans les formules (43), C est une constante complexe arbitraire et l'on doit prendre dans l'expression E_y le cosinus ou le sinus, suivant que l'entier m est impair ou pair, pour que E_y satisfasse aux conditions aux limites.

Nous repérerons la position du point extérieur P par les valeurs du rayon vecteur $R = \overline{OP}$ et par les angles polaires θ et φ .

Nous introduirons les abréviations

$$(45) \quad A = \frac{ka}{2} \sin \theta, \quad B = \frac{kb}{2} \sin \theta, \quad M = \frac{k_z}{k} = \sqrt{1 - \frac{m^2 \pi^2}{a^2}},$$

et nous effectuerons le calcul du champ électrique \vec{E} au point P à l'aide de la formule (31) : le calcul du champ magnétique $H(P)$ se ferait d'une façon tout à fait analogue à l'aide de la formule (32). Nous supposons que le point P est très éloigné de l'embouchure, c'est-à-dire que la distance R est très grande par rapport aux longueurs a , b et λ . Les coordonnées de P étant

$$(46) \quad x_P = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y_P = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z_P = R \cos \theta,$$

la distance r du point P à un point M de coordonnées x , y de l'embouchure à la valeur approximative

$$(47) \quad r = \sqrt{z_P^2 + (x_P - x)^2 + (y_P - y)^2} \cong R - \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

et l'on a ainsi approximativement sur toute l'embouchure

$$(48) \quad \cos \widehat{u, r} \cong \cos \theta.$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale double (intégrale de Kirchhoff) des formules (31). Pour les composantes x et z , nous aurons zéro, d'après (43), et pour la composante y , nous trouvons, en négligeant les termes en R^{-2} ,

$$(49) \quad -\frac{1}{4\pi} \iint_p \left(E_y \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial E_y}{\partial n} \right) d\tau \\ \cong -\frac{ik}{4\pi R} e^{ik(ct-R)} (\cos \theta + M) \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \cos \frac{m\pi}{a} x e^{ik \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)}.$$

L'intégrale double, au second membre de (49), a pour valeur

$$\frac{b \sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{a \sin \left(\Lambda \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{\Lambda \cos \varphi + m\pi} + (-1)^{m+1} \frac{a \sin \left(\Lambda \cos \varphi - \frac{m\pi}{2} \right)}{\Lambda \cos \varphi + m\pi} \right]$$

ou encore

$$(-m\pi ab) \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \frac{\sin \left(\Lambda \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{\Lambda^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2}.$$

On en conclut que l'intégrale double de Kirchhoff conduit à un champ électrique $\vec{E}^{(1)}$ de composantes rectangulaires

$$(50) \quad \begin{cases} E_x^{(1)} = E_z^{(1)} = 0, \\ E_y^{(1)} = \frac{imCabk}{4R} (\cos \theta + M) \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \frac{\sin \left(\Lambda \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{\Lambda^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2} e^{ik(ct-R)}. \end{cases}$$

Passons maintenant au calcul de la première intégrale de contour dans la formule (31). Cette intégrale nous donne un champ $\vec{E}^{(2)}$ purement radial dont la valeur au même degré d'approximation est

$$\begin{aligned} (51) \quad E_r^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi R} \oint_C e^{-ikr} \Pi_x dx \\ &= \frac{Ck_z}{4\pi kR} e^{ik(ct-R)} \oint_C \frac{\cos \frac{m\pi}{a}}{\sin \frac{m\pi}{a}} x e^{ik \sin \theta (c \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx \\ &= \frac{iCk_z}{4\pi kR} 2 \sin(B \sin \varphi) \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \frac{\cos \frac{m\pi}{a}}{\sin \frac{m\pi}{a}} x e^{ik \sin \theta (c \cos \varphi + x \sin \varphi)} dx e^{ik(ct-R)} \\ &= \frac{iCk_z}{2\pi kR} \sin(B \sin \varphi) \frac{\sin \left(\Lambda \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{(\Lambda \cos \varphi)^2 - m^2 \pi^2} (-m\pi a) e^{ik(ct-R)}, \end{aligned}$$

d'où

$$(25) \quad \begin{cases} E_\varphi^{(2)} = E_\theta^{(2)} = 0, \\ E_r^{(2)} = -\frac{imCabk}{4R} \frac{\sin(B \sin \varphi)}{B \sin \varphi} \frac{\sin \left(\Lambda \cos \varphi + \frac{m\pi}{2} \right)}{\Lambda^2 \cos^2 \varphi - m^2 \pi^2} M \sin \theta \sin \varphi e^{ik(ct-R)}. \end{cases}$$

Enfin, il reste à calculer le champ $\vec{E}^{(3)}$ correspondant à la seconde intégrale de contour de la formule (31). Ce champ n'a comme compo-

sante rectangulaire différente de zéro que la composante z qui a pour valeur

$$(53) \quad E_z^{(3)} = -\frac{G}{4\pi R} e^{ik(ct-R)} \oint_C \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{\sin \frac{m\pi}{2}} x e^{ik(\sin\theta, x \cos\varphi + y \sin\varphi)} dx \\ = \frac{iG}{4\pi R} \frac{\sin\left(A \cos\varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{2 \sin(B \sin\varphi) \frac{\sin\left(A \cos\varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2\varphi - m^2\pi^2}} (-m\pi a) e^{ik(ct-R)},$$

d'où

$$(54) \quad \begin{cases} E_x^{(3)} = E_y^{(3)} = 0, \\ E_z^{(3)} = -\frac{imCabk}{4R} \frac{\sin(B \sin\varphi)}{B \sin\varphi} \frac{\sin\left(A \cos\varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2\varphi - m^2\pi^2} \sin\theta \sin\varphi e^{ik(ct-R)}. \end{cases}$$

Munis des résultats (50), (52) et (54), nous sommes en état de calculer le champ résultant E au point P , c'est-à-dire les composantes E_r , E_φ et E_θ de ce champ. Nous partirons des formules

$$(55) \quad \begin{cases} E_r^{(i)} = E_x^{(i)} \cos\varphi \sin\theta + E_y^{(i)} \sin\varphi \sin\theta + E_z^{(i)} \cos\theta, \\ E_\varphi^{(i)} = E_x^{(i)} \cos\varphi - E_y^{(i)} \sin\varphi, \\ E_\theta^{(i)} = E_x^{(i)} \cos\varphi \cos\theta + E_y^{(i)} \cos\theta \sin\varphi - E_z^{(i)} \sin\theta, \end{cases}$$

valables pour $i = 1, 2, 3$. On trouve d'abord

$$(56) \quad E_r = E_y^{(1)} \sin\varphi \sin\theta + E_r^{(2)} + E_z^{(3)} \cos\theta = 0,$$

ce qui établit le caractère transversal de l'onde diffusée, résultat auquel on devait s'attendre puisque les formules de Kottler satisfont à la relation $\text{div} E = 0$. On voit que cette dernière relation ne serait pas satisfaite et que la transversalité n'existerait pas si l'on négligeait les intégrales de contour.

Grâce aux formules (55), on trouve encore

$$(57) \quad \begin{cases} E_\varphi = E_y^{(1)} \cos\varphi \\ = \frac{imCabk}{4R} \cos(\theta + M) \frac{\sin(B \sin\varphi)}{B \sin\varphi} \frac{\sin\left(A \cos\varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2\varphi - m^2\pi^2} \cos\varphi e^{ik(ct-R)}, \\ E_\theta = E_y^{(1)} \cos\theta \sin\varphi - E_z^{(3)} \sin\theta \\ = \frac{imCabk}{4R} (1 + M \cos\theta) \frac{\sin(B \sin\varphi)}{B \sin\varphi} \frac{\sin\left(A \cos\varphi + \frac{m\pi}{2}\right)}{A^2 \cos^2\varphi - m^2\pi^2} \sin\varphi e^{ik(ct-R)}. \end{cases}$$

On trouverait d'une manière analogue

$$(58) \quad H_r = 0, \quad H_\theta = -E_\varphi, \quad H_\varphi = E_\theta.$$

En particulier, dans le plan de symétrie xz où l'on a $\varphi = 0$, il vient

$$(59) \quad E_0 = H_\varphi = 0, \quad E_\varphi = -H_0 = E_y^{(1)}$$

et dans le plan de symétrie yz où $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$(60) \quad E_\varphi = H_0 = 0, \quad E_0 = H_\varphi = E_y^{(4)} \cos \theta - E_z^{(3)} \cos \theta.$$

Sur l'axe des z , les intégrales de contour des formules (31) et (32) ne donnent aucune contribution, ce qui peut se prévoir par des raisons de symétrie.

§. **Démonstration d'une formule due à Darbord.** — Darbord avait étudié, il y a quelques années, le rayonnement projeté par un miroir en forme parabolôide de révolution quand on tient compte de la diffraction ⁽¹⁾.

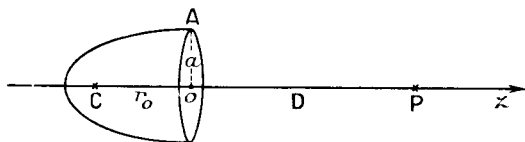


Fig. 14.

Cette étude, qui demanderait à être reprise d'une façon plus rigoureuse, l'avait conduit à une intéressante formule que nous allons démontrer en nous plaçant dans un cas plus général.

Nous considérons un cornet limité ayant une forme de révolution autour d'un axe Oz . L'embouchure de ce cornet sera donc un cercle perpendiculaire à l'axe Oz et de rayon a . Nous voulons calculer le champ électrique envoyé par ce cornet en un point P de l'axe situé à une distance D de l'embouchure très grande par rapport aux dimensions du cornet.

Nous prendrons le centre de l'embouchure pour origine des coordonnées et nous supposons qu'en un point C de l'axe du cornet est placé un émetteur harmonique de fréquence égale à $\frac{kc}{2\pi}$.

Nous ferons alors les trois hypothèses suivantes :

1° Le rapport $\frac{a}{D}$ est très petit devant l'unité ainsi que le rapport $\frac{\lambda}{D}$;

(1) Bibliographie [11].

2° Le rapport $\frac{a}{\lambda}$ (où λ est la longueur d'onde dans le vide correspondant à la fréquence $\frac{kc}{2\pi}$) est assez petit pour que $\frac{a}{\lambda} \frac{a}{D}$ soit très petit devant l'unité;

3° Le rapport $\frac{a}{\lambda}$ est assez grand pour que le champ électrique envoyé en un point M de l'embouchure puisse être représenté aux environs de ce point par

$$(61) \quad \vec{E}(M) = \vec{E}_0(M) e^{ik(vt-z)},$$

\vec{E}_0 variant avec le point considéré de l'embouchure, mais étant indépendant de z . Ces hypothèses sont compatibles et usuellement réalisées. Elles le seront, par exemple, si l'on a

$$a = 1^m, 50, \quad D = 1^{\text{km}}, \quad \lambda = 1^{\text{cm}},$$

car alors

$$\frac{a}{D} = \frac{1,5}{1000}, \quad \frac{a}{\lambda} = 15, \quad \frac{a}{\lambda} \frac{a}{D} = \frac{2,25}{100}.$$

Dans ces conditions, en vertu des hypothèses 1° et 3°, on aura, en un point de l'embouchure,

$$(62) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \simeq \frac{\partial \Psi}{\partial r} \simeq -ik \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} \simeq -\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = ik \vec{E}_0 e^{ikct}.$$

Dans la formule de Kottler donnant le champ \vec{E} au point P, les intégrales de contour donneront une contribution nulle par raison de symétrie dans un très grand nombre de cas, par exemple quand l'émetteur est un doublet placé en C le long de l'axe ou perpendiculairement à l'axe. Nous supposons qu'il en est ainsi et nous écrirons

$$(63) \quad \vec{E}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\vec{E} \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} \right) d\sigma,$$

soit, d'après (62),

$$(64) \quad \vec{E}(P) \simeq \frac{ik}{2\pi} e^{ikct} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{E}_0 d\sigma.$$

En vertu de l'hypothèse 1°, $\frac{1}{r}$ peut être remplacé par $\frac{1}{D}$. D'autre part, sur la surface de l'embouchure, la variable r varie de la valeur D en O à la valeur $\sqrt{D^2 + a^2} \simeq D + \frac{a^2}{2D}$ sur le pourtour : en vertu de l'hypothèse 2°, on peut donc remplacer l'exponentielle e^{-ikr} sur toute l'embou-

chure par sa valeur au centre e^{-ikb} . Si alors nous désignons par \vec{E}_0 la valeur moyenne de \vec{E}_0 sur l'embouchure telle que

$$\vec{E}_0 = \frac{1}{S} \iint_S \vec{E}_0 d\tau,$$

la formule (64) deviendra

$$(65) \quad \vec{E}(P) \cong \frac{ik}{2\pi D} \vec{E}_0 S e^{ik(ct-b)} = \frac{ik a^2}{2D} \vec{E}_0 e^{ik(ct-b)},$$

car $S = \pi a^2$.

La formule (65) correspond au calcul de Darbord pour le paraboloïde. Elle montre que, pour un cornet donné et une forme donnée de l'onde sur l'embouchure, le champ électrique en P sera proportionnel à k , c'est-à-dire en raison inverse de la longueur d'onde λ .

Supposons maintenant que nous enlevions le cornet sans toucher à l'émetteur. Celui-ci enverra directement en P un champ électrique $\vec{E}_d(P)$ dont la valeur sera, bien entendu, différente de $\vec{E}(P)$.

Comme les champs rayonnés diminuent en raison inverse de la distance, on obtiendra une évaluation du champ $\vec{E}_d(P)$ qui sera très souvent exacte, du moins en ordre de grandeur (notamment dans le cas envisagé par Darbord d'un doublet perpendiculaire à l'axe) en posant

$$(66) \quad \vec{E}_d(P) \cong \vec{E}_0 \frac{r_0}{D} e^{ik(ct-b)},$$

r_0 étant la distance de l'émetteur au centre de l'embouchure. En substituant dans (65), on aura alors

$$(67) \quad \vec{E}(P) \cong \frac{ika}{2} \frac{a}{r_0} \vec{E}_d(P).$$

Si l'on pose

$$(68) \quad \frac{a}{r_0} = \alpha,$$

on trouve enfin

$$(69) \quad |\vec{E}(P)| \cong \frac{k\alpha a}{2} |\vec{E}_d(P)| = \frac{\pi\alpha a}{\lambda} |\vec{E}_d(P)|,$$

où le produit $\pi\alpha$ est un nombre de l'ordre de l'unité.

La formule (69) nous montre que le rapport des champs rayonnés avec et sans cornet est proportionnel au rapport du rayon de l'embouchure à la longueur d'onde : pour un cornet donné, il varie en raison inverse de la longueur d'onde.

C'est bien là un des résultats essentiels qu'avait obtenu Darbord. Il est démontré ici d'une façon plus générale, mais sa démonstration est soumise à la réalisation d'assez nombreuses hypothèses.

6. Travaux récents sur le principe d'Huyghens et le théorème de réciprocité ⁽¹⁾. — Le principe d'Huyghens a fait en France l'objet de divers travaux intéressants dans ces dernières années. Nous citerons un article de M. Yves Rocard [31] et surtout trois notes de M. F. Croze faites avec la collaboration respective de MM. E. Durand, P. Boillet et Georges Darmois [32]. Dans la première de ces notes, MM. Croze et Durand, s'appuyant sur les développements du paragraphe 2 du présent chapitre, ont montré qu'on peut obtenir en partant des relations (22) et (23) les formules proposées autrefois par Love, Larmor et Bromwich. Dans la seconde note, MM. Croze et Boillet ont prouvé que les mêmes formules se retrouvent en supposant que chaque élément de la surface d'onde porte un petit doublet électrique et un petit doublet magnétique convenablement choisis. Enfin, faisant la synthèse des résultats précédents, la note de MM. Croze et G. Darmois précise les conditions que doit remplir un énoncé exact du principe d'Huyghens pour les ondes électromagnétiques et montre que toutes les formules exactes sont équivalentes à celles données plus haut, les formules qui ne leur sont pas équivalentes étant inexactes. Cet important ensemble de notes est d'un haut intérêt et, si le lecteur s'y reporte, il y trouvera un complément très instructif des considérations développées dans le présent chapitre.

Nous signalerons encore les travaux de M. G. Goudet [33] qui a notamment donné une forme asymptotique des formules de Kottler très utile pour la pratique et exposé comment le principe des écrans complémentaires de Babinet trouve d'importantes applications pour les ondes centimétriques. Dans le même ordre d'idées, on pourra lire aussi avec profit un article de M. Henri Gutton sur les projecteurs d'ondes centimétriques [34].

Pour terminer, nous noterons l'emploi dans la technique des émissions d'ondes ultra-courtes d'une relation que Lorentz avait obtenue en généralisant le théorème de réciprocité de lord Rayleigh et qui a été utilisée en Radiotélégraphie par MM. Sommerfeld et Carson. La formule de réciprocité de Lorentz s'applique en chaque point de l'espace aux vecteurs électriques et magnétiques de deux champs électromagné-

(1) Paragraphe ajouté à la seconde édition.

tiques de même fréquence distingués par les indices 1 et 2 : elle s'écrit

$$(70) \quad \operatorname{div} [\vec{E}_1 \times \vec{H}_2] = \operatorname{div} [\vec{E}_2 \times \vec{H}_1]$$

et se démontre aisément à partir des équations de Maxwell. Sur l'utilisation de cette relation en Radioélectricité, on pourra consulter un article de MM. H. Gutton et J. Ortusi [35] et un article de M. J. Mailard [36].

Enfin, on trouvera un exposé de différentes questions touchant les ondes centimétriques dans un petit volume publié par les Éditions de la *Revue d'Optique* et contenant des mises au point faites par d'éminents spécialistes [37].



BIBLIOGRAPHIE.

1. W. L. BARROW, *Propagation d'ondes électromagnétiques dans des tubes creux en métal* (*Proceedings of the Institut of Radioengineers*, vol. 24, 1936, p. 1258).
2. BARROW et GRENE, *Rayonnement électromagnétique à l'extrémité d'un tube métallique à section rectangulaire* (*Proc. of the I. R. E.*, décembre 1938, p. 1520 à 1555).
3. BARROW et LEWIS, *Les cornets électromagnétiques en forme de secteur* (*Proc. of the I. R. E.*, vol. 27, janvier 1939, p. 41 à 50).
4. BARROW et CHU, *Théorie des cornets électromagnétiques* (*Proc. of the I. R. E.*, vol. 27, janvier 1939, p. 51-64).
5. BARROW, CHU et JANSEN, *Cornets électromagnétiques biconiques* (*Proc. of the I. R. E.*, vol. 27, décembre 1939, p. 769).
6. BORGNIS, *Vibrations électromagnétiques propres des domaines diélectriques* (*Annalen der Physik*, Band 35, 1933, p. 276).
7. LÉON BRILLOUIN, *Propagation des ondes électromagnétiques dans un tube* (*Revue générale de l'Électricité*, vol. 24, 1936, p. 1298).
8. LÉON BRILLOUIN, *Propagation des ondes dans les câbles diélectriques* (*Bulletin de la Société Française des Électriciens*, t. 8, n° 94, 1938, p. 898).
9. CARRON, MEAD et SCHELKUNOFF, *Guides pour les ondes aux hyperfréquences* (*Bell system technical journal*, t. 15, 1936, p. 310-333).
10. A. G. CLAVIER, *Théorie des câbles diélectriques cylindriques et relation avec la théorie des câbles coaxiaux* (*Bulletin de la Société Française des Électriciens*, t. 8, n° 88, avril 1938, p. 355).
11. DARBORD, *Réflecteurs et lignes de transmission pour ondes ultra-courtes* (*Onde électrique*, vol. 11, février 1932, p. 53-82).
12. LEIGH PAGE et ADAMS, *Ondes électromagnétiques dans les tubes conducteurs* (*Physical Review*, vol. 52, septembre 1937, p. 647).
13. F. KOTTLER, *Théorie électromagnétique de la diffraction sur un écran noir* (*Annalen der Physik*, Band 71, 1923, p. 456 à 508).
14. G. SOUTHWORTH, *Expériences fondamentales sur les guides d'ondes* (*Journal of applied Physics*, vol. 25, juillet 1937, p. 807-822).
15. SOUTHWORTH, *Nouvelles méthodes expérimentales applicables aux ondes ultra-courtes* (*Journal of applied Physics*, vol. 8, octobre 1937, p. 660-665).
16. SOUTHWORTH et KING, *Cornets métalliques utilisés comme récepteurs directifs d'ondes ultra-courtes* (*Proc. of the I. R. E.*, vol. 27, février 1939, p. 95-102).
17. SCHELKUNOFF, *Théorie de la propagation des ondes électromagnétiques planes* (*Proc. of the I. R. E.*, vol. 25, 1937, p. 1457).
18. STRATTON et CHU, *Théorie de la diffraction pour des ondes électromagnétiques* (*Physical Review*, vol. 56, juillet 1933, p. 99-107).
19. GOUDET et LIGNON, *Régimes d'ondes guidées dans une ligne coaxiale* (*Onde électrique*, n° 241, 1947, p. 3).

20. MARC JOUGUET, *Sur la propagation des ondes centimétriques dans les tuyaux* (*Annales des Télécommunications*, I, 1946, p. 1-9).
Les effets de la courbure et des discontinuités de courbure sur la propagation des ondes dans les guides rectangulaires (*Câbles et Transmissions*, 1947, p. 37-60).
Sur les effets de la courbure sur la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides à section circulaire (*Câbles et Transmissions*, 1947, p. 133-153).
21. ROBERT COURTEL, *Sur les perturbations d'un problème de valeurs propres par modification de la frontière. Cas de la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides circulaires* (*C. R. Acad. Sc.*, 217, 1945, p. 261).
22. MAURICE COTTE, *Propagations des perturbations dans un guide diélectrique* (*Annales des Télécommunications*, I, 1946, p. 1-4).
23. HENRI GUTTON et JEAN ORTUSI, *Études sur les ondes électromagnétiques guidées. Application au filtrage des ondes déimétriques* (*Bull. Soc. Fr. des Électriciens*, 6^e série, t. IV, 1946, p. 61).
24. JEAN ORTUSI, *Études sur les ondes électromagnétiques guidées*. Thèse de Doctorat, 1944, éditée par Gauthier-Villars, 1946.
25. JEAN ORTUSI, *Filtrage des ondes guidées* (*Bull. Soc. Fr. des Électriciens*, 6^e série, t. VI, 1946, p. 589).
26. JEAN BERNIER, *Sur la théorie des cavités électromagnétiques*, Thèse de Doctorat, 1944.
27. JEAN BERNIER, *Sur les cavités électromagnétiques* (*Onde électrique*, 1946, p. 233-234).
28. P. NICOLAS, *Oscillations caractéristiques des solides conducteurs et des cavités électromagnétiques* (*Annales de Radioélectricité*, t. I, 1946, p. 1).
29. MARC JOUGUET, *Vibrations électromagnétiques des cavités ellipsoïdales* (*Bull. Soc. Fr. des Électriciens*, 6^e série, t. V, 1945, p. 52).
30. J. OSWALD, *Calcul des pertes par effet Joule dans les guides d'ondes* (*Câbles et Transmissions*, 1^{re} année, 1947, p. 205).
31. YVES ROCARD, *Sur le principe de Huyghens* (*Onde électrique*, juillet 1946, p. 228).
32. F. CROZE et E. DURAND, *C. R. Acad. Sc.*, 228, 1949, p. 236.
F. CROZE et P. BOILLET, *C. R. Acad. Sc.*, 228, 1949, p. 305.
F. CROZE et G. DARNOIS, *C. R. Acad. Sc.*, 228, 1949, p. 824.
33. G. GOUDET, *Une formule de rayonnement électromagnétique* (*Onde électrique*, 1947, p. 316).
Dispositifs rayonnants pour ondes centimétriques (Éditions de la *Revue d'Optique*, 1948).
34. HENRI GUTTON, *Les projecteurs d'ondes centimétriques* (*Onde électrique*, décembre 1946, p. 459).
35. H. GUTTON et J. ORTUSI, *Sur le théorème de réciprocité des ondes hertziennes* (*C. R. Acad. Sc.*, 217, 1943, p. 677).
36. J. MAILLARD, *Note sur la théorie de la réciprocité de Carson* (*Onde électrique*, 1948, p. 77).
37. *Les ondes électromagnétiques centimétriques. Réunion d'études et de mises au point tenues sous la présidence de M. Louis de Broglie, mai 1947* (Éditions de la *Revue d'Optique*, 1948).



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	V

CHAPITRE I. — Généralités sur les équations de Maxwell.

1. Les équations de Maxwell en coordonnées rectangulaires cartésiennes.....	1
2. Représentation complexe des grandeurs électromagnétiques.....	6
3. Les équations de Maxwell en coordonnées curvilignes rectangulaires	8
4. Potentiels et vecteurs de Hertz.....	9
5. Les fonctions U de Borgnis.....	13

CHAPITRE II. — Propagation des ondes dans les guides électriques.

1. Définition des guides électriques.....	15
2. Étude des guides à section rectangulaire.....	17
3. Étude des guides à section circulaire.....	21
4. Étude du câble coaxial.....	27
5. Étude des guides à section elliptique et de la stabilité des ondes dans les guides usuels.....	31
6. Vitesse de phase, vitesse de groupe et vitesse moyenne de l'énergie dans les propagations guidées.....	34
7. Conditions d'excitation et régimes transitoires.....	37

CHAPITRE III. — Étude de quelques problèmes de vibrations propres.

1. Problèmes de vibrations propres.....	43
2. Vibrations propres d'un parallélépipède rectangle.....	44
3. Vibrations propres du cylindre circulaire droit.....	45
4. Vibrations propres du tore à section rectangulaire.....	47
5. Vibrations propres du tore à section circulaire.....	48
6. Vibrations propres de la sphère.....	50

CHAPITRE IV. — Calcul des pertes dans les guides électriques.

1. Première méthode approximative pour le calcul des pertes.....	57
2. Pénétration des ondes électromagnétiques dans les conducteurs.....	58
3. Calcul de l'affaiblissement pour l'onde (E_0) d'un guide cylindrique.....	61
4. Calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_0) d'un guide cylindrique.....	62
5. Calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_1) d'un guide cylindrique.....	64

	Pages.
6. Seconde méthode pour le calcul de l'affaiblissement.....	65
7. Nouveau calcul de l'affaiblissement pour l'onde (E_0) du guide cylindrique.....	67
8. Nouveau calcul de l'affaiblissement pour l'onde (H_0) du guide cylindrique.....	68
9. Résultats nouveaux pour les ondes d'indices supérieurs à zéro.....	69
10. Théorie du câble électrique.....	70

CHAPITRE V. — *Propagation dans les cornets.*

1. Généralités sur le problème des cornets.....	73
2. Étude des cornets en forme de cônes circulaires droits.....	74
3. Étude des cornets biconiques.....	79
4. Étude du cornet sectoral.....	81
5. Étude du miroir parabolique.....	84

CHAPITRE VI. — *Le principe d'Huyghens et la diffraction
des ondes électromagnétiques à l'embouchure d'un guide ou d'un cornet.*

1. L'application de la formule de Kirchhoff aux ondes électromagnétiques.....	93
2. Démonstration des formules de Kottler.....	97
3. Diffraction des ondes à l'embouchure des guides et cornets.....	105
4. Diffraction à l'embouchure d'un guide à section rectangulaire pour l'onde (H_0).....	106
5. Démonstration d'une formule due à Darbord.....	110
6. Travaux récents sur le principe d'Huyghens et le théorème de réciprocité.....	113
BIBLIOGRAPHIE.....	115
TABLE DES MATIÈRES.....	117



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

135420

Dépôt légal, Imprimeur, 1950, n° 641.

Dépôt légal, Éditeur, 1950, n° 340.

Achevé d'imprimer le 15 décembre 1950.