

MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON

ET

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

La Mécanique ondulatoire des Systèmes de Corpuscules (*Collection de physique mathématique*). In-8 de vi-224 pages; 1950.

La théorie des Particules à spin 1/2 (*Électrons de Dirac*). In-8 (16-25) de 164 pages; 1951.

Problèmes de propagation guidées des Ondes électromagnétiques. In-8 (16-25) de vii-120 pages, 14 figures, 2^e édition; 1951.

Éléments de la théorie des quanta et de la Mécanique ondulatoire (*Collection de physique théorique et de physique mathématique*). In-8 (16-25) de 302 pages, 31 figures; 1953.

La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? (*Collection les Grands Problèmes des Sciences*). In-8 (16-25) de viii-116 pages, 4 figures; 1953.

En collaboration avec Maurice de BROGLIE

Introduction à la Physique des rayons X et des rayons γ . In-8 (16-25) de 201 pages, 27 figures, 11 planches (*Épuisé*).

MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON

ET

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

PAR

Louis de BROGLIE

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

*Deuxième édition
revue et corrigée*



ACADÉMIE
DES SCIENCES

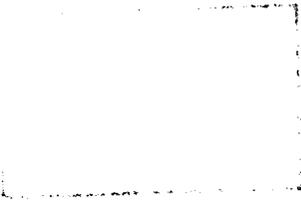
Fonds L. de BROGLIE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1957



© 1957 by Gauthier-Villars.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

INTRODUCTION

La Théorie quantique des champs électromagnétiques a dû son origine, il y a plus de vingt ans, aux travaux de M. Jordan et de MM. Pauli et Heisenberg ⁽¹⁾ : on en trouvera d'excellents exposés dans les livres de M. Heitler ⁽²⁾ et de M. Wentzel ⁽³⁾.

Nous plaçant à un point de vue assez différent, nous avons développé depuis 1934 une *Mécanique ondulatoire du photon* qui a l'avantage de bien montrer comment la théorie de la lumière vient trouver sa place dans le cadre général de la Mécanique ondulatoire, tout en permettant de retrouver par l'application directe de la seconde quantification la plupart des résultats essentiels de la théorie quantique des champs. Après avoir ébauché cette théorie dans deux fascicules de la collection des *Actualités scientifiques* (Paris, Hermann, n° XIII, 1934 et n° XX, 1936), nous en avons fait un exposé d'ensemble dans un Ouvrage en deux volumes intitulé *Une nouvelle théorie de la lumière : la Mécanique ondulatoire du photon* (Paris, Hermann, 1940-1942), puis dans un autre Ouvrage intitulé *Théorie générale des particules à spin* (Gauthier-Villars, Paris, 1943), où nous avons rattaché la Mécanique ondulatoire du photon à la Théorie générale des particules douées de spin.

Aujourd'hui, il nous paraît intéressant de reprendre, pour les

(1) *Zeitschrift für Physik*, 56, 1929, p. 1.

(2) *Quantum theory of radiation*, Oxford University Press, 1936.

(3) *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, Fr. Dentiche, Vienne, 1943.

approfondir, les compléter et parfois les rectifier, les résultats exposés dans le premier des deux Ouvrages que nous venons de citer, de façon notamment à bien mettre en évidence ce qui distingue notre Mécanique ondulatoire du photon, de la Théorie quantique des champs électromagnétiques telle qu'elle est usuellement exposée. Nous aurons ainsi l'occasion d'examiner un certain nombre de difficultés et de critiques que peut soulever notre point de vue.

Depuis la rédaction de nos précédents ouvrages sur ce sujet, nous avons eu l'occasion de faire de nouvelles remarques sur la signification physique des algorithmes de la théorie des champs (en particulier celles qui sont exposées au Chapitre IX). Nous avons aussi profité de nos échanges de vues avec les jeunes théoriciens de l'Institut Henri Poincaré, et surtout avec M^{me} M.-A. Tonnelat et avec M. Gérard Petiau, qui ont apporté dans ces dernières années à ce genre de questions de très précieuses contributions.

Malgré les points délicats qui subsistent en Mécanique ondulatoire du photon et que nous n'avons pas cherché à dissimuler, il nous semble certain que cette théorie garde le grand mérite de faire voir clairement le véritable sens physique du formalisme assez abstrait de la théorie quantique des champs et de préciser bien des questions qui restent assez obscures dans les exposés qu'on en fait habituellement.

LOUIS DE BROGLIE.



MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU PHOTON

ET

THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIES NON SUPERQUANTIFIÉES.

CHAPITRE I.

EXPOSÉ SCHÉMATIQUE DES DIVERSES FORMES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Conceptions générales.** — Nous supposerons connus dans leurs grandes lignes les principes généraux de la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde ainsi que ceux de la théorie de Dirac ⁽¹⁾. Nous voulons seulement développer ici un schéma général de ces théories qui présente sous une forme condensée quelques-uns de ces principes généraux sans entrer dans les détails.

Dans toutes les formes de la Mécanique ondulatoire (forme primitive à une seule fonction d'onde, théorie de Dirac, Mécanique ondulatoire du photon ou du méson), on représente toujours l'état d'un corpuscule par une certaine fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ définie en chaque point de l'espace et à chaque instant t : cette fonction représente donc un *champ* au sens habituel de la Physique du champ. D'ailleurs, on le sait, la grandeur Ψ est une grandeur complexe qui ne correspond pas à une quantité mesurable (observable au sens de Dirac), mais qui permet seulement de former des grandeurs qui, elles, représentent des grandeurs

⁽¹⁾ Pour approfondir leur étude, on pourra consulter notamment le livre de l'auteur, *Une nouvelle théorie de la lumière*, t. 1, Chap. III et IV, Hermann, Paris, 1940.

observables. Dans la Mécanique ondulatoire primitive, la grandeur Ψ est unique; en théorie de Dirac, elle comporte quatre composantes $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ dont l'ensemble est désigné symboliquement par la lettre Ψ de la même façon que l'on désigne symboliquement par \mathbf{A} l'ensemble des trois composantes A_x, A_y, A_z d'un vecteur de l'espace à trois dimensions. Dans la théorie du photon et dans celle du méson, la fonction d'onde Ψ a seize composantes; elle en a davantage pour les particules de spin plus élevé.

Dans chaque forme particulière de la Mécanique ondulatoire, intervient toujours, un opérateur dit *opérateur hamiltonien* qui représente une certaine opération linéaire effectuée sur une fonction de l'espace où est défini le Ψ , c'est-à-dire en fait dans l'espace ordinaire à trois dimensions quand on considère un seul corpuscule sans spin. Pour plus de généralité, en vue notamment des applications à la seconde quantification, nous dirons sans préciser davantage que l'opérateur hamiltonien (qu'on représente toujours par la lettre H) opère dans l'espace où est définie la fonction Ψ . L'évolution au cours du temps de la fonction Ψ est alors représentée par l'équation

$$(1) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi.$$

Dans le cas d'un corpuscule sans spin, cette équation d'évolution représente une seule équation aux dérivées partielles. Dans le cas d'un électron de Dirac (électron doué de spin), la fonction d'onde aura quatre composantes Ψ_σ et l'opérateur Hamiltonien pourra opérer non seulement sur les coordonnées x, y, z de l'électron, mais aussi sur l'indice σ qui est susceptible de prendre les valeurs distinctes 1, 2, 3, 4. L'action de l'hamiltonien sur l'indice σ de la fonction d'onde se représentera à l'aide des quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes généralement désignées en théorie de Dirac par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Dans la Mécanique ondulatoire du photon et du méson, il y aura seize composantes du Ψ : ces seize composantes pourront être écrites sous la forme $\Psi_{\sigma\tau}$ avec $\sigma, \tau = 1, 2, 3, 4$ et l'opérateur H agira à la fois sur x, y, z et sur les indices σ et τ , etc.

On obtiendra ainsi dans le cas de l'électron de Dirac quatre équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles obéissent les quatre Ψ_σ ; dans le cas du photon et du méson, on obtiendra, comme nous le verrons, seize équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles obéissent les seize $\Psi_{\sigma\tau}$ et dont on pourra déduire seize autres équations du même type, etc.

Pour les particules à spin dont les fonctions d'onde ont plusieurs composantes, on peut dire que les indices de ces composantes constituent des *variables de spin* susceptibles de prendre un certain nombre de valeurs distinctes : l'espace où est définie la fonction d'onde Ψ et où elle évolue suivant l'équation (1) est formé par les variables d'espace x, y, z pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et les variables de spin à nombre fini de valeurs distinctes. Toute intégration sur les variables x, y, z devra s'accompagner d'une sommation sur les variables de spin, si l'on veut avoir sommé sur toutes les variables dont dépend le Ψ . Nous désignerons par D le domaine total de variation des variables $x, y, z, \sigma, \tau, \dots$.

Dans les diverses formes de la Mécanique ondulatoire, on peut définir une grandeur de champ construite à partir du Ψ et jouissant de la propriété que son intégrale, dans le domaine d'espace ν où est défini le Ψ , reste constante en vertu de l'équation d'évolution (1). Cette grandeur, représentée par la lettre ρ , est nommée *densité de probabilité de présence* et, dans l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde et dans celle de la théorie de Dirac, l'on admet que $\rho(x, y, z, t) d\tau$ donne la probabilité pour qu'une expérience permette de localiser à l'instant t le corpuscule dans l'élément de volume $d\tau$ entourant le point x, y, z . Pour que $\rho d\tau$ donne cette probabilité en valeur absolue, il faut évidemment que l'intégrale $\int_{\nu} \rho d\tau$, qui reste constante au cours du mouvement en vertu de l'équation (1), soit égale à l'unité. Mais, l'opérateur H étant linéaire, l'équation (1) l'est aussi et, si Ψ est une certaine solution de (1), $C\Psi$ où C est une constante complexe quelconque en est une autre : on peut donc convenir de choisir la constante C (ou plus exactement son module) de façon que la condition suivante soit satisfaite

$$(2) \quad \int_{\nu} \rho d\tau = 1.$$

La fonction d'onde est alors dite normée et la normalisation du Ψ ainsi réalisée a une importance essentielle en Mécanique ondulatoire.

Le fait que $\int_{\nu} \rho d\tau$ reste constante en vertu de l'équation (1) se démontre en prouvant qu'il existe un vecteur \vec{f} d'espace tel que l'équation de continuité

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{f} = 0$$

soit satisfaite en vertu de l'équation de l'évolution du Ψ . On peut donc considérer ρ et \mathbf{f} comme définissant localement la densité et le mouvement d'un fluide fictif de probabilité tel que la quantité $\rho d\tau$ de ce fluide fictif contenue dans l'élément de volume $d\tau$ mesure la probabilité de présence de ce corpuscule dans cet élément de volume. Dans les théories relativistes comme celle de l'électron de Dirac ou celle du photon, les grandeurs ρ, f_x, f_y, f_z apparaissent comme les quatre composantes d'un vecteur densité-flux dans l'espace-temps.

Dans la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde, on a, en désignant par Ψ^* la quantité complexe conjuguée de Ψ ,

$$(3) \quad \rho = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*, \quad \mathbf{f} = \frac{h}{4\pi im} (\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}}\Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}}\Psi^*)$$

avec la condition de normalisation

$$(4) \quad \int_D |\Psi|^2 d\tau = 1,$$

où D est simplement le domaine d'espace ν où évolue l'unique fonction d'onde Ψ . En théorie de Dirac, on a

$$(5) \quad \rho = \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^* \Psi_{\sigma}, \quad \mathbf{f} = -c \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^* \vec{\alpha} \Psi_{\sigma},$$

où $\vec{\alpha}$ est un vecteur-matrice dont les trois composantes rectangulaires sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Ici ρ et \mathbf{f} définissent un quadrivecteur densité-flux dans l'espace-temps et l'on a comme condition de normalisation

$$(6) \quad \int_{\nu} dx dy dz \sum_{\sigma} \Psi_{\sigma}^* \Psi_{\sigma} = 1,$$

car ici le domaine D comprend à la fois le domaine ν de l'espace où évolue le Ψ et les quatre valeurs distinctes de la variable de spin σ .

2. Opérateurs, valeurs et fonctions propres en Mécanique ondulatoire. — L'opérateur hamiltonien est non seulement *linéaire*, il est aussi *hermitien* : ceci signifie que, si g et f sont deux fonctions réelles ou complexes, mais intégrables et nulles aux limites, des variables qui définissent le domaine D (y compris toujours les variables de spin), on a

$$(7) \quad \int_D f^* \Lambda g d\tau = \int_D g \Lambda^* f^* d\tau,$$

où l'astérisque indique toujours la quantité complexe conjuguée.

L'introduction en Mécanique ondulatoire d'opérateurs linéaires et hermitiens est un fait tout à fait général en ce sens qu'on y fait correspondre à toute grandeur physique mesurable (observable au sens de Dirac) un tel opérateur. L'opérateur hamiltonien H est celui qui correspond à la grandeur *énergie*. A toute autre grandeur observable, correspond de même un opérateur linéaire et hermitien que nous désignerons par la lettre A .

A chaque opérateur A , donc à chaque grandeur observable, on peut faire correspondre des valeurs propres et des fonctions propres. Considérons en effet l'équation

$$(8) \quad A\varphi = \alpha\varphi,$$

dite *équation aux valeurs propres de l'opérateur A* , où φ est une fonction des variables du domaine D où opère A et où α est une constante, c'est-à-dire une quantité indépendante des dites variables. Le temps t peut d'ailleurs figurer comme paramètre numérique dans A , α et φ . Par définition, on appelle *valeurs propres de l'opérateur A dans le domaine D* , les valeurs de la constante α pour lesquelles l'équation (8) admet au moins une solution φ , fonction finie, continue, uniforme et sommable dans D des variables du domaine D . Cette solution est une *fonction propre* de l'opérateur A correspondant à la valeur propre α .

De l'équation (8) et de l'équation conjuguée, on tire aisément la relation

$$(9) \quad \int_D [\varphi^* A \varphi - \varphi A^* \varphi^*] d\tau = (\alpha - \alpha^*) \int_D \varphi^* \varphi d\tau,$$

et, comme A est hermitien, le premier membre de (9) est nul, ce qui montre que $\alpha = \alpha^*$, c'est-à-dire que α est réel.

L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur hermitien forme le *spectre* de cet opérateur qui peut être continu (spectre de bandes) ou discontinu (spectre de raies) ou même mixte. Si à une même valeur propre correspondent plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes, la valeur propre est dite multiple ou dégénérée. Dans le cas des spectres discontinus de valeurs propres non dégénérées, on démontre aisément que les diverses fonctions propres sont orthogonales entre elles, c'est-à-dire que, si φ_i et φ_k sont les fonctions propres correspondant aux valeurs propres distinctes α_i et α_k , on a

$$(10) \quad \int_D \varphi_i^* \varphi_k d\tau = 0.$$

Comme le caractère linéaire de l'équation (8) entraîne que, si φ_i est une fonction propre, $C\varphi_i$ l'est aussi; on peut toujours, comme pour les fonctions d'onde Ψ , supposer que les φ_i ont été *normées* par la condition

$$(11) \quad \int_D |\varphi_i|^2 d\tau = 1.$$

Nous n'insisterons pas ici sur les complications qui se présentent quand il y a des valeurs propres multiples, ni sur les questions délicates que l'on rencontre dans la normalisation des spectres continus; on se reportera pour les étudier à d'autres exposés.

Rappelons cependant ⁽¹⁾ que la normalisation des spectres continus conduit à introduire la fonction symbolique de Dirac $\delta(x)$, ainsi que la fonction

$$(12) \quad \delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

\mathbf{r} étant le rayon vecteur qui joint l'origine au point de coordonnées xyz et que l'on a

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0); \quad \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(0),$$

la dernière intégrale étant étendue à tout l'espace à trois dimensions où x, y, z sont les coordonnées (espace \mathbf{r}) et $d\mathbf{r}$ désignant abrégativement l'élément de volume $dx dy dz$. On est ainsi conduit aux importantes formules dont nous aurons à nous servir

$$(14) \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk; \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

où $d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$, formules qui se déduisent aisément de la théorie des intégrales de Fourier. Les formules (14) sont des formules symboliques signifiant que les deux membres sont équivalents quand ils figurent sous les signes $\int dx$ et $\int d\mathbf{r}$.

3. Interprétation physique de la Mécanique ondulatoire. Définitions diverses. — Rappelons sur quels principes est fondée l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire.

Pour la Mécanique ondulatoire, l'état d'un corpuscule est défini,

⁽¹⁾ *Nouvelle théorie de la lumière*, t. I, p. 67.

aussi complètement qu'il peut l'être, par la connaissance de l'onde Ψ qui lui est associée. Cette onde Ψ qui représente les connaissances fournies sur le corpuscule par des observations ou des expériences antérieures doit être solution de l'équation d'évolution (1), et nous supposons toujours que cette solution est normée. La connaissance de l'onde Ψ ne permet pas d'attribuer, comme le faisait l'ancienne Physique, une valeur bien déterminée à chaque grandeur attachée au corpuscule : elle permet seulement d'attribuer à chacune de ces grandeurs des valeurs possibles affectées de probabilités. Elle y parvient en admettant les principes généraux que nous allons rappeler.

Tout d'abord, à toute grandeur observable attachée à un corpuscule, la Mécanique ondulatoire fait correspondre un opérateur linéaire et hermitien. Pour l'énergie, cet opérateur est l'opérateur hamiltonien H : pour les autres grandeurs telles par exemple que coordonnées, composantes de quantité de mouvement ou de moment cinétique, l'opérateur se forme, en partant des expressions classiques correspondantes, par des procédés automatiques bien connus que nous ne rappellerons pas ici. L'opérateur correspondant à une grandeur observable attachée à un corpuscule étant linéaire et hermitien, il possède un ensemble de valeurs propres réelles et un système complet de fonctions propres orthonormales (c'est-à-dire orthogonales et normées). Voici alors les deux principes fondamentaux que la Mécanique ondulatoire admet comme bases de son interprétation physique :

1° Les valeurs possibles d'une grandeur observable attachée à un corpuscule, c'est-à-dire les résultats possibles d'une mesure de cette grandeur, sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitien correspondant à cette grandeur.

2° Quand l'état d'un corpuscule est représenté par une certaine fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ solution de l'équation d'évolution (1), la probabilité pour qu'une mesure précise de la grandeur observable correspondant à un opérateur A fournisse à l'instant t une certaine valeur propre α de A , est égale au carré du module du coefficient de la fonction propre correspondante dans le développement de la fonction Ψ suivant les fonctions propres normées de l'opérateur A . D'une façon plus précise, si la fonction d'onde Ψ se développe suivant les fonctions propres de A sous la forme

$$(15) \quad \Psi = \sum_i c_i \varphi_i.$$

la probabilité de la valeur propre α_i est $|c_i|^2$. On vérifie que, Ψ étant normée, on a $\sum_i |c_i|^2 = 1$ en accord avec le théorème des probabilités totales.

On se reportera à des exposés plus détaillés pour voir comment on doit légèrement modifier ce second principe dans les trois cas suivants : 1° quand le spectre de valeurs propres α est continu; 2° quand l'opérateur A a des valeurs propres multiples; 3° quand l'opérateur A n'intéresse qu'une partie seulement des variables du domaine D .

Nous supposons connue du lecteur la façon dont les principes généraux énoncés ci-dessus permettent de montrer que la quantité $\Psi\Psi^*$ est bien la probabilité de présence en chaque point, de justifier le principe de décomposition spectrale de Born qui détermine les valeurs quantifiées de l'énergie et finalement de conduire aux inégalités d'incertitude de M. Heisenberg. Rappelons seulement que deux grandeurs correspondant aux opérateurs A et B sont simultanément mesurables avec précision si les opérateurs A et B commutent (c'est-à-dire si $AB \equiv BA$) et dans ce cas seulement.

Arrivons-en à la définition des *matrices* de la Mécanique ondulatoire. Ces matrices sont formées à partir des fonctions propres de l'opérateur hamiltonien H par la formule

$$(16) \quad a_{jk} = \int_D \Psi_j^* A \Psi_k d\tau \quad (a_{kj} = a_{jk}^*),$$

qui donne les éléments a_{jk} de la matrice engendrée par l'opérateur A_{op} . Le domaine D est toujours celui de l'ensemble des variables, y compris les variables de spin. On obtient les matrices d'Heisenberg ou celles de Schrödinger suivant que l'on inclut et que l'on n'inclut pas dans la définition de la fonction propre Ψ_k le facteur exponentiel $e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$.

Rappelons encore la définition des valeurs moyennes étroitement apparentée à celle des éléments de matrices. D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, la valeur moyenne probable de la grandeur observable correspondant à l'opérateur linéaire et hermitien A quand le système est dans l'état représenté par la fonction

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i \text{ est}$$

$$(17) \quad \bar{A} = \sum \alpha_i |c_i|^2,$$

puisque les valeurs possibles de A sont les α_i et que chaque α_i a la probabilité $|c_i|^2$. On démontre aisément que \bar{A} peut aussi s'écrire

$$(18) \quad \bar{A} = \int_D \Psi^* A \Psi d\tau,$$

D étant toujours le domaine de l'ensemble des variables, y compris celles de spin. Remarquons que dans les phénomènes macroscopiques, où intervient un nombre énorme de processus élémentaires, \bar{A} est seul accessible à l'expérience.

Il est évident que si la fonction d'onde Ψ coïncide avec l'une des fonctions propres Ψ_k de l'hamiltonien, on a $\bar{A} = a_{kk}$, ce qui montre le rapport étroit existant entre la définition des valeurs moyennes et celle des éléments de matrice.

Les grandeurs $\Psi_j^* A \Psi_k$ et $\Psi^* A \Psi$ (au besoin sommées sur les variables de spin) apparaissent dans les formules (16) et (18) comme les quantités qu'il faut intégrer dans l'espace pour obtenir les éléments de matrice ou la valeur moyenne pour la grandeur A : on peut donc les nommer *densités d'éléments de matrice* et *densités de valeur moyenne*. Ce sont des grandeurs de champ, c'est-à-dire des fonctions de $xyzt$, alors que les éléments de matrices et les valeurs moyennes qui en résultent par intégration ne sont fonctions que de t . L'examen de l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire montre que ces densités n'ont pas une signification physique aussi bien définie que leurs intégrales : elles ne sont définies qu'à une divergence d'espace près et rien ne permet de choisir entre deux formes de la densité qui sont *intégralement équivalentes*, c'est-à-dire qui donnent les mêmes valeurs pour les intégrales (16) ou (18), car seules ces intégrales possèdent en Mécanique ondulatoire une signification physique précise. Ce sont cependant ces densités qui, dans les théories relativistes comme celle de Dirac, ont une variance bien définie. Elles sont importantes à ce point de vue et aussi parce qu'elles donnent une image (peut-être un peu trompeuse au point de vue quantique) de l'aspect moyen des phénomènes. Ce sont également des quantités de ce type qui définissent les grandeurs électromagnétiques en Mécanique ondulatoire du photon.

4. Évolution au cours du temps des éléments de matrice et des valeurs moyennes. — Considérons un élément de matrice donné par la formule (16). Il peut dépendre du temps par Ψ_j^* , par Ψ_k et même pour l'opérateur A qui peut contenir dans sa définition le paramètre t .

La dérivée de a_{jk} par rapport à t est donc

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{da_{jk}}{dt} &= \int_D \left[\Psi_j^* \frac{\partial A}{\partial t} \Psi_k + \frac{\partial \Psi_j^*}{\partial t} A \Psi_k + \Psi_j^* A \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right] d\tau \\ &= \int_D \Psi_j^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right] \Psi_k d\tau, \end{aligned}$$

la dernière formule s'obtenant en tenant compte du fait que Ψ_k et Ψ_j^* satisfont respectivement à l'équation (1) et à l'équation conjuguée et du fait que H est un opérateur réel et hermitien. $\frac{\partial A}{\partial t}$ est l'opérateur obtenu en dérivant formellement l'opérateur A par rapport au paramètre t . On a donc

$$(20) \quad \frac{da_{jk}}{dt} = \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right]_{jk}.$$

Il arrive fréquemment que l'opérateur A ne contienne pas le temps dans sa définition : on a alors simplement

$$(21) \quad \frac{da_{jk}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [AH - HA]_{jk} = \frac{2\pi i}{h} [A, H]_{jk}.$$

$[A, H] = AH - HA$ étant le *commutateur* des opérateurs A et H . On écrit souvent (21) sous la forme symbolique

$$(22) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [A, H].$$

Cette notation est brève et élégante, mais elle a, comme beaucoup de notations symboliques, l'inconvénient de masquer un peu le sens véritable de la formule. La dérivée $\frac{dA}{dt}$ n'a, en effet, par elle-même aucun sens quand A ne dépend pas de t et la formule (22) est seulement une représentation symbolique de la manière dont les éléments de matrice dépendent du temps *par l'intermédiaire de* Ψ_k qui n'apparaissent pas explicitement dans (22).

On peut, de même, dériver par rapport au temps une valeur moyenne de la forme (18) et obtenir

$$(23) \quad \frac{d\bar{A}}{dt} = \int_D \Psi^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA) \right] \Psi d\tau,$$

qu'on peut écrire symboliquement

$$(24) \quad \frac{d\bar{A}}{dt} = \overline{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} (AH - HA)},$$

ou, quand A ne dépend pas du temps,

$$(25) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [A, H].$$

mais, ici encore, il ne faut pas oublier que la variation de \bar{A} dans le temps provient de celles de Ψ et de Ψ^* qui n'apparaissent pas explicitement dans la formule symbolique.

5. Remarques sur les valeurs moyennes dans la théorie quantique des champs. — Les remarques qui précèdent prennent une importance particulière dans la théorie quantique des champs. Cette théorie fait intervenir, nous le verrons, la seconde quantification, c'est-à-dire qu'on y considère un espace où les coordonnées sont les *nombre*s de corpuscules (en l'espèce, de photons) dans les divers états énergétiques possibles. Tout point figuratif dans cet espace doit avoir des coordonnées entières, fait qui traduit l'existence même des corpuscules. On considère l'évolution dans l'espace des n d'une certaine fonction d'onde que nous désignerons par R : c'est la *fonction de répartition* telle que $|R(n_1, n_2, \dots, t)|^2$ donne la probabilité pour qu'il y ait, à l'instant t , n_1 photons dans l'état 1, n_2 dans l'état 2, etc. La fonction R évolue suivant une équation de la forme type

$$(26) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial R}{\partial t} = \mathcal{H} R,$$

où \mathcal{H} est un opérateur agissant sur les variables n et jouant le rôle d'un Hamiltonien dans l'espace des n .

La théorie quantique des champs électromagnétiques conduit, et ceci est la chose fondamentale, à considérer toutes les grandeurs électromagnétiques comme des opérateurs agissant sur les variables n , opérateurs qui, par ailleurs, sont des fonctions des variables x, y, z, t d'espace et de temps. Ce sont donc des opérateurs opérant sur les n dont l'expression varie d'un point à l'autre de l'espace et d'un instant à l'autre du temps.

Si l'on considère la valeur moyenne correspondant à l'un de ces opérateurs, par exemple à la composante E_x du champ électrique, *valeur moyenne prise dans l'espace des n* , elle se définira par

$$(27) \quad \bar{E}_x = \sum_n R^*(n, \dots, t) E_x R(n, \dots, t),$$

la somme Σ étant étendue à toutes les valeurs entières possibles des n

et E_x étant au second membre l'opérateur de l'espace des n correspondant à la composante de champ considérée. La formule (27) nous fournit au point xyz et à l'instant t pour lesquels nous considérons l'opérateur E_x la valeur moyenne de la grandeur électromagnétique correspondante quand la répartition est définie par la fonction $R(n, \dots, t)$. C'est la grandeur \bar{E}_x que la théorie quantique des champs considère comme la valeur observable de la composante x du champ électrique au point xyz à l'instant t dans un champ de très nombreux photons dont la fonction de répartition est $R(n_1, \dots, t)$: \bar{E}_x définit donc la valeur macroscopique de cette composante de champ.

L'évolution de \bar{E}_x au cours du temps est donnée par la formule symbolique

$$(28) \quad \frac{d\bar{E}_x}{dt} = \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{2\pi i}{h} [E_x, \mathcal{H}]$$

ou, si l'on définit l'opérateur E_x de l'espace des n de façon qu'il soit indépendant du temps

$$(29) \quad \frac{d\bar{E}_x}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [E_x, \mathcal{H}],$$

la variation de \bar{E}_x provenant en réalité de la variation en fonction du temps de la fonction de répartition $R(n, \dots, t)$, qui ne figure pas explicitement dans la formule symbolique (29).

Ces remarques sont essentielles à retenir si l'on veut bien comprendre le sens véritable du formalisme de la théorie quantique des champs. Nous les examinerons à nouveau dans le cadre de la Mécanique ondulatoire du photon.

