

LA THÉORIE
DES
PARTICULES DE SPIN $1/2$
(ÉLECTRONS DE DIRAC)

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. (*Collection de Physique mathématique*, publiée sous la direction de É. BOREL, FASCICULE V.) In-8 (16-25) de vi-224 pages; 1950.

Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. In-8 (16-25) de vi-114 pages, avec 14 figures.

Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion. In-8 (16-25) de 210 pages; 1943.

Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs. In-8 (16-25) de vi-208 pages; 1949.

OUVRAGE DE MM. MAURICE et LOUIS DE BROGLIE

Introduction à la Physique des rayons X et des rayons gamma. In-8 (16-25) de 201 pages, avec 27 figures dans le texte et 11 planches hors texte.

LA THÉORIE
DES
PARTICULES DE SPIN $1/2$
(ÉLECTRONS DE DIRAC)

PAR

Louis de BROGLIE

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADEMIE DES SCIENCES



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

—
1952

Copyright by Gauthier-Villars, 1952.
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE

Dans le présent volume, j'ai exposé la théorie des particules de spin $\frac{1}{2}$ (électrons de Dirac) en comparant mes points de vue sur quelques grands problèmes à ceux que d'autres auteurs ont indiqués dans des mémoires récents.

J'ai commencé par rappeler les principes généraux de la Mécanique ondulatoire et de son interprétation physique. Puis j'ai introduit la notion de spin d'une particule et je l'ai examinée sous divers aspects. J'ai fait ensuite un exposé de la théorie de l'électron considéré comme un corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ (théorie de Dirac).

Je n'insiste pas ici sur les phénomènes qui en ont reçu une interprétation satisfaisante alors qu'ils étaient rebelles à toute explication complète par les anciennes théories; pour ces questions, je renvoie à mon livre "L'électron Magnétique"⁽¹⁾.

Par contre, j'ai analysé une dynamique relativiste des fluides à spin et des particules à spin due à M. Weyssenhoff pour montrer sa liaison avec des conceptions exposées antérieurement.

La dernière partie de cet ouvrage est consacrée à la possibilité de la mesure du spin de l'électron: la validité des arguments de Bohr tendant à prouver qu'il est impossible de mesurer directement le spin de l'électron me semble en général limitée au cas des vitesses faibles par rapport à celle de la lumière. Enfin l'opinion de M. Pauli, selon laquelle la mécanique ponctuelle d'un électron de Dirac est identique à la mécanique ponctuelle d'un électron sans spin, est en contradiction avec mes conclusions. Et sur ce point, dans l'état actuel des recherches, un examen, même approfondi, ne permet pas encore de se prononcer.

La présentation que l'on a donnée à ce livre a été volontairement choisie pour conserver à ces réflexions leur caractère d'actualité.

Je tiens à remercier bien vivement M. Michel Cazin de l'aide très importante qu'il m'a apportée pour la publication du présent ouvrage.

Louis de Broglie.

(1) "L'électron Magnétique" (HERMANN, Paris, 1934).

CHAPITRE I

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE NON RELATIVISTE A UNE FONCTION D'ONDE

I. IDÉES ET ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

L'idée qui a servi de point de départ à la Mécanique ondulatoire a été la suivante : puisque pour la lumière, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire reliés entre eux par la relation :

$$\text{énergie} = h \times \text{fréquence}$$

où figure la constante h des quanta de Planck, il est naturel de supposer que pour la matière aussi, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire, ce dernier longtemps méconnu. Ces deux aspects doivent être reliés par des relations générales où figure la constante de Planck et doivent contenir comme cas particuliers les relations applicables à la lumière.

Pour développer cette idée, il faut chercher à associer un élément périodique au concept de corpuscule. Imaginons un corpuscule qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme dans une certaine direction en l'absence de tout champ. Nous fixons uniquement notre attention sur l'état du mouvement du corpuscule, abstraction faite de sa position dans l'espace. Ce mouvement s'effectue dans une certaine direction que nous prendrons comme axe des z et il est défini par les deux grandeurs "énergie" et "quantité de mouvement" dont les expressions relativistes en fonction de la masse propre m_0 du corpuscule et de sa vitesse $v = \beta c$ sont données par les formules :

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

d'où l'on tire la relation :

$$|\vec{p}| = p = \frac{Wv}{c^2}$$

L'état de mouvement se trouve ainsi défini dans un certain système de référence Galiléen, pour un observateur A qui emploie des coordonnées x, y, z, t .

Soit maintenant un autre observateur B qui possède par rapport au premier la vitesse \vec{v} dans la direction oz , autrement dit qui est lié au mouvement du corpuscule. Nous pouvons supposer que B a choisi un axe $0, z_0$ qui glisse sur oz et des axes $0, x_0$ et $0, y_0$ parallèles à ox et à oy . Cela étant, les coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 employées par B sont liées aux coordonnées x, y, z, t de l'observateur A par les formules de la transformation de Lorentz :

$$x = x_0 \quad y = y_0 \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad t_0 = \frac{t - \frac{\beta}{c} z}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Or pour l'observateur B, la vitesse du corpuscule est nulle: il pose donc comme valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$W_0 = m_0 c^2 \quad \vec{p}_0 = 0$$

Suivant notre idée de base, nous devons maintenant chercher à introduire un élément périodique et nous tenterons de définir l'élément périodique souhaité sous la forme d'une onde stationnaire dans le système propre du corpuscule (système de l'observateur B). Nous poserons donc :

$$\psi_0 = A e^{2\pi i v_0 t_0}$$

et nous supposerons A constant; v_0 est la fréquence propre de l'onde et doit dépendre de la nature du corpuscule envisagé. Quelle valeur devons nous donner à cette constante ? Nous devons évidemment chercher à la définir à partir d'une valeur non nulle qui caractérise le corpuscule dans son système propre et nous n'avons à notre disposition comme telle grandeur que l'énergie W_0 . Etant donné le rôle joué par la constante des quanta dans toutes les théories quantiques, il est naturel de poser :

$$v_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}$$

analogue à la relation d'Einstein pour les photons.

Comment va se manifester pour l'observateur A l'élément périodique que nous venons de définir pour l'observateur B ? En supposant, ce qui est l'hypothèse la plus simple, que ψ soit un invariant relativiste, il suffira pour obtenir l'expression de l'onde pour A de substituer dans son expression pour B la quatrième équation de la transformation de Lorentz, d'où :

$$\psi(x, y, z, t) = A e^{2\pi i v(t - \frac{z}{v})}$$

avec :

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}$$

Ainsi pour l'observateur A, les phases de l'élément périodique introduit sont réparties comme les phases d'une onde plane monochromatique dont la fréquence ν et la vitesse de propagation de la phase V ont les valeurs indiquées.

En comparant les équations précédentes, on trouve $W = h\nu$, relation qui sera évidemment valable dans tous les systèmes Galiléens puisque rien ne distingue l'observateur A des autres observateurs Galiléens. Pour la longueur d'onde de l'onde ψ d'après la définition usuelle, on trouve :

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{c^2}{\nu} \cdot \frac{h}{W} = \frac{h}{p}$$

formule fondamentale qui, pour les faibles vitesses, prend la forme approchée :

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

vérifiée avec une grande précision par les expériences de diffraction par les cristaux des électrons et autres particules (y compris les neutrons) ainsi que par les expériences de Börsch sur la diffraction des électrons par le bord d'un écran.

Pour une particule de vitesse très voisine de c , on trouve

$$v = V = c \quad W = h\nu \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c}$$

On retrouve ainsi les formules fondamentales de la théorie des photons (quanta de Lumière d'Einstein).

Nous pouvons maintenant écrire la forme du ψ dans le système A :

$$\psi = Ae^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_z z)}$$

et plus généralement, si les axes rectangulaires ont une orientation quelconque,

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} = Ae^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

On voit donc qu'au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près la phase de l'onde est égale à l'action Hamiltonienne du corpuscule. En constatant cette proportionnalité entre l'action Hamiltonienne du corpuscule et la phase de l'onde qui lui est associée, on s'aperçoit que le principe d'action stationnaire valable pour la dynamique des corpuscules doit n'être qu'une traduction du principe de Fermat valable pour l'onde associée. Mais la théorie ondulatoire nous apprend que le principe de Fermat est valable seulement dans le domaine où l'optique géométrique est utilisable et perd sa valeur dans le domaine de l'optique physique proprement dite. On arrive ainsi à l'idée fondamentale que l'ancienne Mécanique (aussi bien sous la forme relativiste que sous sa forme Newtonienne classique) n'est qu'une approximation ayant le même domaine de validité que l'optique géométrique. Dès lors, on est

amené à concevoir la nécessité de construire une nouvelle Mécanique qui serait à la Mécanique ancienne ce qu'est l'Optique ondulatoire à l'Optique géométrique. C'est cette idée que nous allons développer.

2. ÉQUATIONS D'ONDES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Nous sommes parvenus à l'idée qu'il faut associer à un corpuscule une onde représentée par une fonction $\psi(x, y, z, t)$ qui sera généralement différente de zéro dans une région étendue de l'espace. En d'autres termes, nous adjoignons à l'idée de corpuscule celle d'un champ au sens de la physique du champ, le champ ψ .

La fonction d'onde ψ devra satisfaire à une certaine "équation de propagation" qui va remplacer les équations classiques de Newton et servir de base à la nouvelle Mécanique. Nous allons chercher à écrire cette équation sans nous préoccuper pour l'instant de satisfaire aux exigences de la théorie de la Relativité. Nous obtiendrons ainsi une Mécanique ondulatoire non relativiste valable seulement pour les mouvements de vitesses très inférieures à c.

Considérons un corpuscule de masse m se déplaçant dans un champ de force qui dérive de la fonction potentielle $U(x, y, z, t)$. Soient \vec{p} l'impulsion du corpuscule, E son énergie totale :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t)$$

Par définition, nous appelons fonction Hamiltonienne $H(x, y, z, t, p_x, p_y, p_z, t)$ la fonction des coordonnées, des composantes de l'impulsion et du temps qui donne la valeur de l'énergie. On a donc ici :

$$H(x, y, z, t, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t)$$

Le développement de la Mécanique ondulatoire a montré que l'on obtient l'équation de propagation pour les ondes ψ à partir de la fonction Hamiltonienne H par le procédé suivant : on commence par remplacer dans l'expression de H chacun des moments p_k par l'opérateur $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ ce qui fournit l'opérateur :

$$H_{op} = H\left(x, y, z, t, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

dit "opérateur Hamiltonien" ou plus brièvement Hamiltonien. Puis ont écrit :

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_{op} \psi$$

ψ étant la fonction d'onde. On obtient ainsi l'équation d'ondes du corpuscule considéré.

En explicitant la forme de H_{op} , on obtient :

$$(I,a) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi + U \psi$$

ou encore :

$$\Delta \psi - \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} U \psi = \frac{4\pi i m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Cette équation de propagation étant du premier ordre par rapport au temps, permet en principe de calculer la forme de la fonction ψ à tout instant t quand on connaît sa forme $\psi(x, y, z, t_0)$ à l'instant initial t_0 .

L'équation (I,a) est à coefficients complexes : la fonction ψ a un caractère essentiellement complexe. Nous désignerons par F^* la quantité complexe conjuguée de la quantité complexe F . L'équation satisfaite par la fonction ψ^* est l'équation complexe conjuguée de (I,a).

Si nous posons par définition :

$$\rho = \psi \psi^* ; \quad \vec{f} = \frac{\hbar}{4\pi i m} (\psi^* \vec{\text{grad}} \psi - \psi \vec{\text{grad}} \psi^*)$$

on démontre en partant des équations satisfaites par ψ et ψ^* que l'on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{f} = 0$$

Cette équation à la forme classique d'une équation de continuité. Si l'onde ψ occupe un domaine D (fini ou infini) et est nulle aux limites de D , on tire de l'équation précédente que :

$$\int_D \rho d\tau = \int_D |\psi|^2 d\tau$$

est constante au cours du temps. Comme la fonction ψ , solution d'une équation linéaire n'est définie qu'à une constante multiplicative près, on pourra choisir cette constante de façon à avoir constamment :

$$\int_D |\psi|^2 d\tau = 1$$

On dit alors que ψ est normée et nous admettrons que toutes les fonctions ψ doivent toujours être normées, hypothèse que justifiera l'interprétation physique donnée plus loin à la grandeur $|\psi|^2$. Même normée, la fonction ψ contient encore un facteur arbitraire $e^{i\alpha}$ de norme 1.

On démontre que la Mécanique ondulatoire dont nous venons d'obtenir l'équation de base admet la Mécanique ancienne comme approximation au degré d'approximation de l'optique géométrique.

Un cas particulier important est celui où la fonction U ne dépend pas du temps (champ extérieur permanent). L'équation des ondes ψ admet alors des solutions "monochromatiques" ne contenant le temps que par un facteur exponentiel de la forme $e^{\frac{2\pi i}{h} Et}$. Une telle onde est solution de l'équation :

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - U(x, y, z, t)] \psi = 0$$

comme cela résulte par substitution dans l'équation (I,a).

Dans le cas plus particulier encore où $U=0$, on trouve comme solution de l'équation des ondes les "ondes planes monochromatiques" du type :

$$\psi = A e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - \sqrt{2mE} (\alpha x + \beta y + \gamma z)]}$$

où A est une constante et α, β, γ sont les cosinus directeurs d'une même direction liés par la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Cette solution représente une onde plane monochromatique de fréquence $v = \frac{E}{h}$ et de longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

se propageant dans la direction α, β, γ . Nous retrouvons donc ainsi (avec seulement une différence sans importance dans la définition de la fréquence v) l'onde plane monochromatique que, dès ses débuts, la Mécanique ondulatoire avait fait correspondre au mouvement rectiligne et uniforme en l'absence de champ d'un corpuscule de masse m , d'énergie E et de quantité de mouvement mv dans la direction α, β, γ .

3. NOUVELLE CONCEPTION DES GRANDEURS ATTACHÉES A UN CORPUSCULE

Dans la méthode que nous venons de développer, on substitue aux grandeurs p_x, p_y, p_z , qui, dans l'ancienne Mécanique, représentaient la quantité de mouvements du corpuscule les opérateurs $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$. Cette idée de substituer ou de faire correspondre des "opérateurs" aux "grandes" classiques a été érigée en principe général au cours du développement de la Mécanique ondulatoire. On a admis qu'à toute grandeur mesurable (observable) définie par la Mécanique classique doit correspondre dans la nouvelle Mécanique un certain opérateur. Pour former cet opérateur à partir de l'expression classique de la grandeur exprimée à l'aide des variables de Lagrange x, y, z, p_x, p_y, p_z , on a

été amené à adopter la règle suivante : aux grandeurs p_x, p_y, p_z on fait correspondre, nous le savons déjà, les opérateurs $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$. Aux grandeurs x, y, z , on fait correspondre les opérateurs x, y, z , c'est-à-dire multiplication par x, y, z . Nous n'aurons qu'à remplacer dans l'expression classique de la grandeur considérée en fonction de x, y, z, p_x, p_y, p_z , les variables canoniques par les opérateurs correspondants pour obtenir l'opérateur qui correspond à la grandeur. Cet opérateur pourra contenir le temps comme paramètre numérique si l'expression de la grandeur le contenait. Remarquons que c'est précisément en appliquant la méthode précédente à la grandeur "énergie" que nous avons obtenu l'opérateur Hamiltonien.

En appliquant cette méthode à la composante suivant l'axe des z du moment cinétique d'un corpuscule par rapport à l'origine, on trouve l'opérateur :

$$(M_z)_{op} = (x p_y - y p_x)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

φ étant l'azimut compté autour de oz .

Les opérateurs que l'on forme ainsi en Mécanique ondulatoire pour les faire correspondre à des grandeurs mesurables sont des opérateurs en général complexes appartenant à la catégorie des opérateurs hermitiens que nous allons maintenant définir : nous dirons qu'un opérateur est Hermitien dans un domaine D si :

$$\int_D f^* A g d\tau = \int_D g A^* f^* d\tau$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires dans D , assujetties seulement à être dans ce domaine finies, uniformes et continues et nulles aux limites de D de façon que les intégrales de surface apparaissant par l'intégration par parties de \int_D soient nulles.

Tous les opérateurs qui en Mécanique ondulatoire correspondent à des grandeurs observables sont hermitiens. On peut par exemple le vérifier aisément pour H et M_z précédemment définis. Nous verrons plus loin la signification physique de ce fait.

Les opérateurs de la Mécanique ondulatoire ne sont pas seulement hermitiens ; ils sont aussi linéaires, c'est-à-dire tels que :

$$A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2 ; A(c\varphi) = cA\varphi$$

c étant une constante complexe quelconque.

Il y a encore lieu de distinguer en Mécanique ondulatoire deux catégories d'opérateurs : les opérateurs "complets" qui intéressent l'ensemble des variables du domaine D (ici : x, y, z) et les opérateurs "incomplets" qui n'intéressent qu'une partie de ces variables. L'opérateur H est le type d'un opérateur complet alors que M_z est incomplet.

Bref en Mécanique ondulatoire, on fait correspondre à toute grandeur physique observable attachée à un corpuscule un opérateur linéaire et hermitien en général complexe. Mais il est bien évident que si l'on parvient à effectuer une mesure précise de cette grandeur, cette mesure s'exprime par un nombre réel. La Mécanique ondulatoire doit donc pouvoir dire quels sont les nombres réels qu'une mesure précise peut nous fournir comme valeurs d'une certaine grandeur physique.

De l'opérateur linéaire et hermitien que la nouvelle Mécanique fait correspondre à une grandeur mesurable, nous devons donc pouvoir déduire une série de nombres réels représentant tous les résultats possibles de la mesure de cette grandeur. Or ceci est précisément possible parce que les opérateurs linéaires et hermitiens tels que ceux employés en Mécanique ondulatoire ont une suite de "valeurs propres" qui sont toujours des nombres réels. Nous allons étudier ce point.

4. VALEURS PROPRES ET FONCTIONS PROPRES D'UN OPÉRATEUR LINÉAIRE ET HERMITIEN

Soit A un opérateur linéaire et hermitien. Ecrivons l'équation :

$$(I, b) \quad A\varphi = \alpha\varphi$$

où φ est une fonction de x, y, z , et α une constante. Le temps t peut figurer comme paramètre dans A, φ et α . Par définition, nous nommerons "valeurs propres" de l'opérateur A dans le domaine D les valeurs de la constante α pour lesquelles l'équation précédente a au moins une solution $\varphi(x, y, z, \alpha)$ dite "fonction propre" jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue dans D et l'intégrale du carré de son module dans D est convergente. Si D est infini, cette dernière condition entraîne que φ doit décroître assez vite à l'infini pour assurer ladite convergence. De plus, si D est fini, φ doit être nulle aux limites de D .

Nous admettrons l'existence des valeurs propres pour les opérateurs rencontrés en Mécanique ondulatoire et nous allons montrer qu'elles sont réelles. En effet, de (I, b) et de sa conjuguée, on tire :

$$\int_D [\varphi^* A \varphi - \varphi A^* \varphi^*] d\tau = (\alpha - \alpha^*) \int_D |\varphi|^2 d\tau$$

Comme par hypothèse, A est hermitien, le premier nombre est nul : l'intégrale du second nombre étant essentiellement positive, on doit avoir $\alpha = \alpha^*$, donc α est réel.

L'ensemble des fonctions propres de (I, b) forme le spectre de cette équation. Si ces valeurs propres sont isolées, le spectre est discontinu, c'est un "spectre de raies". C'est au

contraire un "spectre continu" si la suite des valeurs propres est continue. Le spectre peut d'ailleurs être en partie continu, en partie discontinu.

Occupons-nous d'abord des spectres discontinus. Désignons par α_i une valeur propre isolée : il existe au moins une fonction propre $\varphi_i(x, y, z, t)$ qui lui correspond. Montrons que l'ensemble des fonctions propres du spectre discontinu forme un ensemble orthogonal, c'est-à-dire que si φ_i et φ_j sont deux fonctions propres correspondant à des valeurs propres distinctes α_i et α_j , on a :

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau = 0$$

En effet, puisque tous les α_i sont réels, nous tirons de (I, b) et de sa conjuguée :

$$\int_D [\varphi_i^* A \varphi_j - \varphi_j A^* \varphi_i^*] d\tau = (\alpha_i - \alpha_j) \int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau$$

et, le premier membre étant nul (puisque A est hermitien) et $\alpha_i \neq \alpha_j$, le résultat annoncé en résulte.

La démonstration précédente serait en défaut pour deux fonctions propres correspondant à une même valeur propre. Quand ce cas se présente, on dit qu'on a affaire à une valeur propre multiple ou dégénérée. Soit α_i une telle valeur propre à laquelle correspondent p fonctions propres linéairement indépendantes $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ip}$. On peut, connaissant ces p fonctions propres indépendantes, les remplacer par p combinaisons linéaires linéairement indépendantes de $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$ car, l'équation (I, b) étant linéaire, de telles combinaisons sont encore solutions pour la même valeur α_i de α . On voit aisément que l'on peut choisir ces combinaisons linéaires de façon qu'elles soient orthogonales. On peut donc même en ce cas choisir les fonctions propres de façon à avoir un système orthogonal.

Les fonctions propres n'étant évidemment définies qu'à une constante complexe multiplicative près en raison du caractère linéaire de (I, b), on peut choisir le module de cette constante de façon que :

$$\int_D |\varphi_i|^2 d\tau = 1$$

La fonction φ_i est alors "normée" : elle contient encore un facteur arbitraire de module unité $e^{i\alpha}$. Les fonctions φ_i une fois normées forment un système "orthonormal" tel que :

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$; $\delta_{ii} = 1$).

Passons au cas du spectre continu. Si A possède un spectre continu, à toute valeur propre de ce spectre correspondra une fonction propre $\varphi(x, y, z, \alpha)$ où nous écrivons α comme une variable parce qu'elle varie continuement dans le spectre. On démontre aisément que toute fonction propre du spectre continu est

orthogonale aux fonctions propres du spectre discontinu s'il y en a un. Mais, pour exprimer que les fonctions propres du spectre continu sont normées et orthogonales entre elles, il est utile, pour éviter certaines difficultés de convergence, de considérer, au lieu des fonctions propres $\varphi(x, y, z, \alpha)$ elles-mêmes les expressions :

$$\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta \alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$$

dites "différentielles propres" correspondant à des intervalles $(\alpha, \alpha + \Delta \alpha)$ choisis aussi petits que l'on veut dans le domaine des variations du paramètre continu α . Physiquement, cette substitution correspond à celle qu'on opère dans l'ancienne théorie des ondes quand l'on considère, à la place de l'onde plane monochromatique qui est une abstraction, le groupe d'ondes formé par une superposition d'ondes de fréquences très voisines. Pour exprimer l'orthonormalité des différentielles propres, on doit remplacer les relations valables pour le spectre continu par la suivante :

$$\frac{1}{\Delta \alpha} \int_D d\tau \left[\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta \alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right] \left[\int_{\alpha'}^{\alpha + \Delta \alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right]^* = \delta_{\alpha' \alpha}$$

Les fonctions propres des opérateurs complets de la Mécanique ondulatoire possèdent la propriété importante de former un système complet. Cela veut dire que sous des conditions très larges une fonction définie dans le domaine D des variables intéressées par un opérateur A se laisse développer en une somme de fonctions propres de cet opérateur. Si par exemple $f(x, y, z)$ est une fonction des variables x, y, z , elle se laisse très généralement développer suivant les fonctions propres d'un opérateur hermitien complet sous la forme :

$$f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \int c(\alpha) \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$$

la somme Σ étant relative au spectre discontinu et l'intégrale au spectre continu. Dans les développements précédents, nous pouvons mettre en évidence les différentielles propres du spectre continu en écrivant :

$$f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \sum_{\Delta \alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + \Delta \alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$$

(Pour plus de rigueur, il faudrait introduire ici la notion de "convergence en moyenne", ce que nous ne ferons pas).

En utilisant les formules qui expriment le caractère orthonormal des fonctions propres du spectre discontinu et des différentielles propres du spectre continu, nous trouvons :

$$c_i = \int_D \varphi_i^* f(x, y, z) d\tau ; c(\alpha) = \frac{1}{\Delta \alpha} \int_D d\tau \left[\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta \alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right]^* f(x, y, z)$$

Les coefficients c_i et $c(\alpha)$ sont souvent nommés les coefficients de Fourier du développement de la fonction $f(x, y, z)$ suivant les fonctions propres de l'opérateur A . La série et l'intégrale de Fourier sont des exemples simples de ce type de développements. Le temps peut figurer comme paramètre numérique dans l'expression des c_i et des $c(\alpha)$.

5. SPECTRE CONTINU DE L'OPÉRATEUR HAMILTONIEN D'UN CORPUSCULE LIBRE

L'équation aux valeurs propres de l'opérateur Hamiltonien peut s'écrire :

$$H\varphi = E\varphi$$

E étant la constante α du cas général. Pour un corpuscule libre

$$U=0 \text{ et } H=-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta$$

d'où :

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\varphi = E\varphi$$

soit \vec{p} le vecteur impulsion du corpuscule. On trouve les fonctions propres :

$$\varphi(x, y, z, \vec{p}) = ae^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} = ae^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r})}$$

avec :

$$(I, c) \quad \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{p^2}{2m} = E$$

On voit donc : 1°) que toute valeur positive de E est valeur propre; 2°) qu'à toute valeur propre de E correspond une infinité de fonctions propres du type précédent obtenues en donnant à p_x, p_y, p_z toutes les valeurs compatibles avec (I, c) . Donc pour l'énergie, on trouve un spectre continu allant de 0 à $+\infty$ avec dégénérescence d'ordre ∞ pour toute valeur de E autre que 0.

A chaque fonction propre correspond une onde plane monochromatique de la forme :

$$\psi_{\vec{p}}(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, \vec{p}) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} Et} = ae^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

On peut pour simplifier l'écriture poser :

$$k = \frac{2\pi}{\hbar c} E \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\hbar} \vec{p}$$

ce qui donne :

$$\psi_{\vec{k}} = ae^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

avec la relation :

$$kc = \frac{1}{2m} |\vec{k}|^2 \frac{\hbar}{2\pi}$$

qui exprime (I, c) avec les nouvelles notations.

Le vecteur \vec{k} est appelé le vecteur de propagation de l'onde plane qui est entièrement spécifiée par cette seule donnée. Il faut bien distinguer k et $|\vec{k}|$.

On peut prendre indifféremment comme fonctions propres de H soit les $\psi_{\vec{k}}$, soit les $\varphi_{\vec{k}}$ qui n'en diffèrent que par le facteur e^{ikct} .

On peut exprimer l'orthonormalité des ondes planes en introduisant les différentielles propres. Au cours de ce calcul dont nous ne reproduisons pas les détails, on est amené à introduire avec Dirac la fonction "impropre" ou "singulière" $\delta(x)$ ayant les deux propriétés suivantes :

1°) $\delta(x)$ est une fonction paire de x

2°) On a toujours $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0) & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de signes contraires} \\ 0 & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de même signe.} \end{cases}$

On peut représenter $\delta(x)$ par la fonction singulière de Dirichlet en posant :

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\pi Nx}{\pi x}$$

Finalement le calcul en question montre que les fonctions propres du spectre continu doivent s'écrire :

$$\varphi(\vec{k}, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad ; \quad \psi(\vec{k}, x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Le caractère complet de l'ensemble des $\varphi_{\vec{k}}$ se traduit par le fait que, sous des conditions très générales, une fonction $f(x, y, z)$ sera développable en intégrale de Fourier sous la forme :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}$$

$d\vec{k}$ désignant $dk_x dk_y dk_z$. Les $c(\vec{k})$ sont données par la formule

$$c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_D f(x, y, z) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ désignant $dx dy dz$. C'est la formule d'inversion donnant les coefficients d'un développement de Fourier.

On peut aussi écrire :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\vec{k}, t) \psi_{\vec{k}}(x, y, z, t) d\vec{k}$$

avec :

$$c(\vec{k}, t) = c(\vec{k}) e^{-ikct}$$

CHAPITRE II

INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

I. PRINCIPES GÉNÉRAUX

Nous avons vu que la Mécanique ondulatoire doit pouvoir calculer les valeurs possibles des grandeurs mesurables attachées à un corpuscule et leurs probabilités respectives. Nous avons appris à représenter l'état d'un corpuscule par une fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ solution de l'équation de propagation, fonction que nous supposerons toujours normée. De plus nous avons fait correspondre à toute grandeur attachée à un corpuscule un opérateur linéaire et hermitien qui permet de définir un ensemble de nombres réels, ses valeurs propres, et un système complet de fonctions orthonormales, ses fonctions propres. Nous sommes ainsi en mesure d'énoncer les deux principes fondamentaux de l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire.

Premier principe. - Les valeurs possibles d'une grandeur mesurable, c'est-à-dire les divers résultats possibles d'une mesure de cette grandeur sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitien correspondant à cette grandeur.

Second principe. - Quand l'état du corpuscule est représenté par une certaine fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ solution de l'équation de propagation, la probabilité pour qu'une mesure précise de la grandeur mesurable correspondant à l'opérateur linéaire et hermitien A , complet et à valeurs propres non dégénérées, fournit à l'instant t une certaine valeur propre est égale au carré du module du coefficient de la fonction propre correspondante dans le développement de la fonction ψ suivant les fonctions propres de A .

Plus précisément, si la fonction ψ se développe suivant les fonctions propres et les différentielles propres de A suivant la formule :

$$\psi(x, y, z, t) = \sum_i c_i \varphi_i + \sum_{\alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + \Delta \alpha} \varphi(\alpha) d\alpha$$

la probabilité de la valeur propre α_i est $|c_i|^2$ et la probabilité d'une valeur comprise dans l'intervalle $(\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$ est $|c(\alpha)|^2 \Delta\alpha$. On peut vérifier que la fonction ψ étant normée par hypothèse, la probabilité totale de toutes les hypothèses possibles est égale à l'unité. Naturellement les probabilités des valeurs possibles peuvent être fonction du temps.

Si l'opérateur A a des valeurs propres multiples, l'énoncé du second principe doit être modifié. Soit α_i une valeur propre multiple à laquelle correspondent p fonctions propres $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ip}$, normées et orthogonales, linéairement indépendantes. La probabilité de trouver par une mesure faite à l'instant t la valeur α_i pour la grandeur A est alors la somme des carrés des modules des coefficients de $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$ dans le développement du ψ , soit $\sum_{j=1}^{j=p} |c_{ij}|^2$. On démontre que la valeur de cette probabilité est indépendante de la façon (dans une certaine mesure arbitraire) dont sont choisies les φ_{ij} . En d'autres termes, quand on remplace les φ_{ij} par p combinaisons linéaires linéairement indépendantes φ_{ij} , la quantité $\sum_{j=1}^{j=p} |c_{ij}|^2$ reste invariante.

Quand l'opérateur A est incomplet, l'énoncé du second principe doit subir une autre modification. Alors, en effet, les fonctions propres de A ne contiennent pas toutes les variables x, y, z et les coefficients c_i et $c(\alpha)$ sont des fonctions des variables non intéressées par A . La probabilité d'une valeur propre α_i ne peut donc être le $|c_i|^2$ correspondant qui dépend encore de certaines variables. Pour obtenir cette probabilité, il faut intégrer sur ces variables. On peut vérifier qu'avec cette modification la probabilité totale de toutes les valeurs possibles est bien égale à un.

Les deux principes généraux de l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire peuvent être réunis dans un énoncé unique comme l'a montré M.E. Arnow. Il suffit pour cela d'admettre le postulat suivant : la distribution de probabilité correspondant aux valeurs mesurables de la grandeur observable A a pour fonction caractéristique :

$$\psi(u) = \int_D \psi^* e^{iAu} \psi d\tau$$

où A est l'opérateur correspondant à la grandeur A . Nous n'insisterons pas ici sur cette très intéressante et élégante forme des lois de probabilité de la Mécanique ondulatoire.

Un exemple simple d'application des deux principes est fourni par le cas de l'opérateur Hamiltonien H qui est complet. Si H est indépendant du temps, il admet des valeurs propres constantes E_i et des fonctions propres φ_i . Une mesure précise de l'énergie ne peut fournir que l'une des valeurs E_i et si l'on a $\psi = \sum c_i \varphi_i$, la probabilité de la valeur E_k est $|c_k|^2$. Si le spectre est discret, on a une suite discrète d'états stationnaires à énergies quantifiées. C'est le cas qui se présente pour les systèmes atomiques.

Prenons un autre cas : celui de la coordonnée x du corpuscule correspondant à l'opération "multiplication par x ". L'équation aux valeurs propres est :

$$x \varphi = \alpha \varphi$$

Cette équation peut être considérée comme vérifiée pour toute valeur réelle de x en posant :

$$\varphi(x, \alpha) = \delta(x - \alpha)$$

$\delta(x - \alpha)$ étant la fonction singulière de Dirac pour $x - \alpha$. Donc, d'après le premier principe, une mesure de x peut nous fournir n'importe quelle valeur de x réelle et comprise entre $-\infty$ et $+\infty$. De plus, les différentielles propres de ce spectre continu $\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta \alpha} \delta(x - \alpha) d\alpha$ forment un système complet satisfaisant à la relation d'orthonormalité. Comme on a évidemment :

$$\psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha, y, z, t) \delta(x - \alpha) d\alpha$$

la probabilité pour qu'un mesure de x fournisse à l'instant t une valeur comprise dans l'intervalle $(\alpha, \alpha + \Delta \alpha)$ est :

$$\iint_{-\infty}^{\infty} dy dz |\psi(\alpha, y, z, t)|^2 \Delta \alpha$$

On en déduit aisément que la probabilité pour que la présence du corpuscule se manifeste à l'instant t dans l'élément de volume $d\tau$ entourant le point x, y, z , est $|\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau$. La probabilité totale de présence en un point quelconque de l'espace est bien égale à l'unité puisque ψ est normée : c'est là la raison physique pour laquelle la fonction d'onde doit toujours être normée. L'interprétation donnée ainsi à $|\psi|^2$ est en accord avec le caractère défini positif de cette grandeur ($|\psi|^2 \geq 0$).

Des deux principes fondamentaux, on tire par des raisonnements sur lesquels nous n'insisterons pas ici la conclusion suivante : deux grandeurs mesurables ne peuvent être simultanément mesurées avec précision dans une même opération de mesure que si les opérateurs correspondants A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$.

L'exemple le plus important de deux grandeurs non simultanément mesurables est celui d'une coordonnée x et de la composante conjuguée de la quantité de mouvement p_x . On a en effet :

$$(xp_x - p_x x)_{op} = \frac{\hbar}{2\pi i} \left(\frac{\partial}{\partial x} x - x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{2\pi i} \neq 0$$

Donc une coordonnée de Lagrange et le moment conjugué ne sont pas simultanément mesurables avec précision. Leurs mesures simultanées sont affectées "d'incertitudes" qui ne peuvent être nulles simultanément. Nous verrons plus loin que l'on a toujours pour ces incertitudes $\Delta x \cdot \Delta p_x > \hbar$ en ordre de grandeur.

Ce sont les inégalités d'incertitude de M. Heisenberg. Plus généralement pour deux quantités canoniquement conjuguées p et q on a :

$$\Delta p \cdot \Delta q > \hbar$$

On dit, avec M. Bohr, que les quantités p et q correspondent à des aspects "complémentaires" de la réalité qu'on ne peut jamais connaître exactement en même temps.

On peut dire que, quand deux quantités p et q sont canoniquement conjuguées, on doit faire correspondre à p l'opérateur $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$ ou inversement. Comme exemple, rappelons que le moment cinétique d'un corpuscule autour d'un axe oz est canoniquement conjugué de l'angle d'azimut φ autour de cet axe : or nous avons déjà montré qu'en Mécanique ondulatoire, l'on doit faire correspondre à la grandeur classique M_z l'opérateur $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ce qui confirme les énoncés précédents.

2. LES MATRICES ALGÉBRIQUES ET LEURS PROPRIÉTÉS

On appelle "matrice" un tableau de nombres contenant un nombre fini ou infini de lignes et de colonnes. Si ce tableau est de dimensions finies nous le supposerons carré pour simplifier. Soit a_{ik} l'élément de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne avec la $k^{\text{ème}}$ colonne. Les éléments a_{ij} à indices égaux sont les éléments "diagonaux". Une matrice dont seuls les éléments diagonaux sont différents de zéro est une "matrice diagonale". Deux matrices A et B sont dites égales si $a_{ik} = b_{ik}$ pour tout i et tout k .

Les matrices se présentent en Algèbre quand on étudie les transformations linéaires. En effet, si des variables x'_i sont des combinaisons linéaires d'autres variables x_i , on a des formules de transformation du type :

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

ou symboliquement :

$$X' = AX$$

avec la convention :

$$(AX)_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

Ces formules conduisent à définir la somme et le produit de deux matrices par les règles suivantes :

1°) La somme de A et B est la matrice $A+B$ dont l'élément d'indices i,k est $a_{ik} + b_{ik}$.

2°) Le produit de A par B est la matrice AB dont l'élément ik et $\sum_j a_{ij} b_{jk}$. De cette définition résulte qu'en général $AB \neq BA$. Si par exception $AB = BA$, on dit que les matrices commutent. On désigne sous le nom de "commutateur" de A et B la matrice $[A, B] = AB - BA$ qui, si elle n'est pas nulle, mesure le défaut de commutation de A et B . Parfois on introduit aussi "l'anticommuteur" de A et de B défini par $[A, B]_+ = AB + BA$. Si $AB = -BA$, A et B anticommutent. Les matrices peuvent être réelles ou complexes.

suivant que leurs éléments sont réels ou complexes. Nous envisagerons le cas général des matrices complexes.

Une matrice est dite hermitienne si l'on a :

$$a_{ik} = a_{ki}^*$$

pour tout i et tout k . Une matrice hermitienne réelle est donc symétrique par rapport à sa diagonale. Les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont réels.

Une matrice est antihermitienne si l'on a :

$$a_{ik} = -a_{ki}^*$$

pour tout i et tout k . Les éléments diagonaux d'une matrice antihermitienne sont purement imaginaires.

Le produit de deux matrices hermitiennes A et B est lui-même hermitien si A et B commutent et dans ce cas seulement; il est antihermitien si A et B anticommutent.

La matrice \tilde{A} est la matrice "transposée" de A si $\tilde{a}_{ik} = a_{ki}$. On dit que A^* est la matrice "adjointe" de A si $a_{ik}^* = \tilde{a}_{ki}$. Donc $A^* = \tilde{A}^*$. Si A est hermitien, on a $A = A^*$: la matrice A est alors sa propre adjointe. On a évidemment $(A^*)^* = A$ et l'on démontre aisément que $(AB)^* = B^*A^*$.

Une matrice hermitienne qui est diagonale est nécessairement réelle. La matrice d'éléments $a_{ik} = \delta_{ik}$ est diagonale, tous ses termes diagonaux sont égaux à 1. On l'appelle la matrice unité et on la représente souvent par 1. Etant donnée une matrice A , s'il existe une matrice A^{-1} telle que :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1$$

la matrice A^{-1} est dite "inverse" de A . Si A a un nombre fini de lignes et de colonnes, A^{-1} existe toujours quand le déterminant déduit des a_{ik} est différent de zéro. Si A a un nombre infini de lignes et de colonnes, A^{-1} peut suivant les cas exister ou ne pas exister. On démontre aisément que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Quand A est une matrice réelle et que l'on a :

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}, \sum_i a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$$

on dit que la matrice est orthogonale : elle définit alors une transformation orthogonale qui laisse invariante la somme $\sum_i x_i^2$ comme cela est bien connu en géométrie. On généralise cette définition pour une matrice A complexe en disant que si l'on a :

$$\sum_i a_{ij} a_{ik}^* = \delta_{jk}, \sum_i a_{ji} a_{ki}^* = \delta_{jk}$$

la matrice définit une transformation orthogonale complexe ou encore une transformation "unitaire". Pour une telle transformation la somme des normes des x_i , $\sum_i |x_i|^2$ reste invariante comme on le démontre aisément. Pour une matrice A unitaire, on a :

$$\sum_i a_{ki}^* a_{ij} = \delta_{kj}, \sum_i a_{ji}^* a_{ik} = \delta_{jk}$$

ou encore : $A^* A = A A^* = 1$ d'où $A^* = A^{-1}$.

Donc l'adjointe d'une matrice unitaire coïncide avec son inverse.

La trace d'une matrice A est la somme de ses termes diagonaux :

$$\text{Tr}(A) = \sum_i a_{ii}$$

On démontre aisément que :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = \sum_{ik} a_{ik} b_{ki}$$

Soient encore une matrice carrée quelconque A et une matrice unitaire S ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La matrice $S^*AS = B$ est dite obtenue à partir de A par une transformation canonique. On vérifie aisément que, si A est hermitienne, B l'est aussi. Les transformations canoniques conservent le caractère hermitien d'une matrice. Il est aisément de vérifier qu'elles conservent aussi sa trace. De plus, si deux matrices carrées A et A' sont transformées respectivement en B et B' par la transformation canonique S , leur produit AA' est transformé en BB' par cette transformation car $S^*ASS^*A'S = S^*AA'S$.

3. OPÉRATEURS ET MATRICES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Supposons que nous connaissons un système de fonctions orthonormales $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$, dans un domaine D de variations de certaines variables. Nous les appellerons des fonctions de base. Ce système pourra être celui des fonctions propres normées d'un opérateur linéaire et hermitien de la Mécanique ondulatoire. Avec ce système de base, à tout opérateur linéaire on peut faire correspondre une matrice. Soit en effet A un opérateur linéaire. L'application de cet opérateur à une des fonctions de base φ_i nous fournira une nouvelle fonction qui pourra se développer suivant le même système de fonctions de base. Nous aurons donc une relation de la forme :

$$A\varphi_i = \sum_j a_{ji} \varphi_j$$

avec :

$$a_{ji} = \int_D \varphi_j^* A \varphi_i d\tau$$

D étant le domaine de variation des variables figurant dans les φ_i . Par définition les a_{ij} sont les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système de base des φ_i . Nous désignerons cette matrice par le même symbole A que l'opérateur ou, si nous désirons préciser le système de base employé, par A^* . Il est facile de vérifier que les matrices ainsi définies vérifient les règles d'addition et de multiplication des matrices algébriques étudiées plus haut.

Si le système de base est formé par les fonctions propres d'un opérateur de la Mécanique ondulatoire et si l'opérateur A est lui-même un opérateur linéaire et hermitique de cette Méca-

nique, nous dirons que A est une matrice de la Mécanique ondulatoire. On voit immédiatement que ces matrices sont toujours elles-mêmes hermitiennes, c'est-à-dire que : $a_{ij} = a_{ji}^*$.

On voit d'ailleurs que la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice engendrée par un opérateur A dans un système de base soit hermitienne est que l'opérateur soit lui-même hermitien. L'hermitianité est donc une propriété intrinsèque des opérateurs en ce sens qu'un opérateur hermitien engendre des matrices hermitiennes dans tous les systèmes de fonctions de base. Toutes les matrices de la Mécanique ondulatoire sont donc hermitiennes.

Nos définitions établissent une corrélation très étroite entre les opérateurs et les matrices. En particulier la condition nécessaire et suffisante pour que des matrices commutent (ou anticommutent) est que les opérateurs correspondants commutent (ou anticommutent) et vice-versa. Ceci nous amène à définir le commutateur ou l'anticommuteur de deux opérateurs A et B par les formules :

$$[A, B] = AB - BA \quad ; \quad [A, B]_+ = AB + BA$$

Une catégorie très importante de matrices de la Mécanique ondulatoire est obtenue en prenant toujours comme fonctions de base les fonctions propres de l'opérateur Hamiltonien correspondant au problème considéré. Soient $\psi_1, \dots, \psi_i, \dots$, les fonctions propres de l'opérateur H . Les matrices A engendrées par un opérateur linéaire et hermitien A dans le système des ψ_i dont les éléments sont :

$$a_{jk} = \int_D \psi_j^* A \psi_k d\tau$$

peuvent être nommées les matrices de la Mécanique quantique parce que ce sont elles que M. Heisenberg a mises, sans les interpréter explicitement ainsi, à la base de sa Mécanique quantique.

Si l'on comprend dans les ψ les facteurs exponentiels $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t}$ c'est-à-dire si l'on pose :

$$\psi_k = a_k(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t}$$

on aura :

$$a_{jk} = \int_D a_j^* A a_k d\tau \cdot e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k - E_j)t}$$

Ces éléments définissent les matrices d'Heisenberg proprement dites qui dépendent du temps. Parfois on supprime dans l'expression de ψ_k le facteur exponentiel et l'on pose simplement :

$$a'_{jk} = \int_D a_j^* A a_k d\tau$$

La matrice A' d'éléments a'_{jk} indépendants du temps est nommée la matrice de Schrödinger correspondant à l'opérateur A .

4. VALEURS MOYENNES ET GRANDEURS DE CHAMP EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Envisageons un certain corpuscule et supposons connue l'onde ψ qui lui est associée. Soit une certaine grandeur observable attachée à ce corpuscule et à laquelle correspond un opérateur linéaire et hermitien A. Les principes de la Mécanique ondulatoire nous permettent de prévoir les valeurs observables possibles de A et leurs probabilités. Comme il y a en général plusieurs valeurs possibles de probabilité non nulle, on ne peut pas parler de la valeur de A à chaque instant, mais on peut aisément définir sa valeur moyenne (espérance mathématique) par la formule :

$$\bar{A} = \sum_i |c_i|^2 \alpha_i$$

Il est facile de vérifier que l'on a d'une manière équivalente

$$\bar{A} = \int_D \psi^* A \psi d\tau$$

Soit maintenant une grandeur observable B autre que A attachée au corpuscule et à laquelle correspond un opérateur linéaire et hermitien B. Soient $\beta_1, \dots, \beta_k, \dots$ et x_1, \dots, x_k, \dots les valeurs propres et fonctions propres de B. Si la fonction ψ se développe sur les x_i par la formule $\psi = \sum_i d_i x_i$, on aura :

$$\bar{A} = \sum_{ik} d_i^* d_k a_{ik}^x$$

où a_{ik}^x est l'élément d'indices i, k de la matrice engendrée par A dans le système des x .

Donc la valeur moyenne de A peut toujours s'exprimer linéairement à l'aide des éléments de matrice qu'engendre l'opérateur A dans le système des fonctions propres d'un autre opérateur B.

En particulier si le corpuscule se trouve dans l'un des états propres relatifs à la grandeur B, on aura $\psi = d_i x_i$ avec $|d_i| = 1$ et par suite $\bar{A} = a_{ii}^x$. D'où le théorème : "L'élément diagonal d'indices i, i de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système des fonctions propres de l'opérateur B est égale à la valeur moyenne de la grandeur A quand on sait que B a la valeur β_i ".

Le système des matrices d'Heisenberg a ceci de particulier que la matrice H correspondant à l'énergie y est représentée par une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les diverses valeurs propres de l'énergie (si toutefois on a eu soin dans le cas où H a des valeurs propres multiples de choisir les fonctions propres correspondantes de façon qu'elles soient orthogonales). On a en effet :

$$H_{ik} = \int_D \psi_i^* H \psi_k d\tau = E_k \int_D \psi_i^* \psi_k d\tau = E_k \delta_{ik}$$

Ce résultat est un cas particulier du résultat général suivant "Si l'on construit la matrice engendrée par un opérateur A dans

le système des fonctions propres orthonormales de cet opérateur, cette matrice est diagonale et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de A^* .

Dans les définitions des éléments de matrice $a_{ik} = \int_D \psi_i^* A \psi_k d\tau$ et des valeurs moyennes $\bar{A} = \int_D \psi^* A \psi d\tau$, les quantités sous le signe \int_D sont des fonctions de x, y, z et éventuellement du paramètre t . Nous les nommerons "densités d'éléments de matrice" ou "densités de valeur moyenne". Ces densités variables d'un point à l'autre de l'espace ont le caractère de grandeurs de champ attachées au corpuscule. Ainsi à la grandeur A , on pourra associer une grandeur de champ, la densité de valeur moyenne de A :

$$\rho(A) = \psi^* A \psi$$

Toutefois les grandeurs de champ ainsi définies n'ont pas un sens physique aussi précis que dans les théories classiques de la Physique du champ. Elles se présentent ici comme étant seulement "les quantités qu'il faut intégrer pour obtenir les valeurs moyennes (ou les éléments de matrice)". Ce sont souvent des grandeurs complexes et elles ne sont d'ailleurs définies qu'à une divergence près. Ce sont cependant ces grandeurs physiquement assez mal définies du point de vue quantique qui dans les théories quantiques comme celles de Dirac sont des grandeurs à variance relativiste bien définie.

5. INTÉGRALES PREMIERES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

L'élément de matrice $a_{jk} = \int_D \psi_j^* A \psi_k d\tau$ peut dépendre du paramètre t par l'intermédiaire de ψ_j , de ψ_k et aussi de A si cet opérateur contient t dans sa définition. La dérivée de a_{jk} calculée en tenant compte du fait que ψ_j et ψ_k satisfont à l'équation d'ondes et que A est hermitien est :

$$\frac{da_{jk}}{dt} = \int_D \psi_j^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} (AH - HA) \right] \psi_k d\tau$$

où $\frac{\partial A}{\partial t}$ est l'opérateur obtenu en dérivant formellement A par rapport à t . On peut dire que la matrice d'Heisenberg dont l'élément d'indices j, k est $\frac{da_{jk}}{dt}$ est engendrée par l'opérateur $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} (AH - HA)$ et l'on pose :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} (AH - HA) = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} [A, H]$$

Si A ne dépend pas explicitement de t , cas fréquent, on a simplement :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{\hbar} [A, H]$$

Par définition, dans un problème où l'Hamiltonien H est donné, la grandeur observable A est "intégrale première" ou "constante du mouvement" pour le problème considéré si $\frac{dA}{dt} \equiv 0$. Si A ne dépend pas explicitement du temps, A est intégrale première si A et H commutent.

On peut encore définir les intégrales premières de la façon suivante : une grandeur, dont l'opérateur est A , est intégrale première si, ψ étant une solution quelconque de l'équation des ondes, $A\psi$ l'est également. En effet, si par hypothèse $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\hbar} H\psi$ on a $A \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\hbar} AH\psi$ et $\frac{\partial}{\partial t} A\psi = \frac{\partial A}{\partial t}\psi + \frac{2\pi i}{\hbar} AH\psi$. Pour que $A\psi$ soit solution de l'équation des ondes il faudra que :

$$\frac{\partial A}{\partial t}\psi + \frac{2\pi i}{\hbar} (AH - HA)\psi = 0$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, quelle que soit la solution ψ de l'équation des ondes, est précisément que $\frac{dA}{dt} = 0$. c.q.f.d.

Voici quelques exemples d'intégrales premières. Si le champ extérieur agissant sur le corpuscule est indépendant du temps, l'opérateur H ne contient pas t et comme il commute évidemment avec lui-même, l'énergie est alors intégrale première : nous retrouvons l'analogie de la conservation de l'énergie pour les systèmes conservatifs en Mécanique classique. De même, si la composante x du champ est nulle, l'opérateur H ne dépend pas de x et par suite commute avec $(p_x)_0$. La composante x de la quantité de mouvement est alors intégrale première, théorème analogue à un théorème de la Mécanique classique.

Enfin si la fonction U possède la symétrie cylindrique autour de oz , l'hamiltonien H ne dépend pas de l'azimut φ autour de cet axe. En ce cas la composante M_z du moment cinétique autour de oz est intégrale première. Si le champ de force est central, les trois composantes M_x , M_y , M_z sont intégrales premières et il en est de même de la grandeur $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$. Nous reviendrons plus longuement sur ce cas important.

6. FORME PRÉCISE DES RELATIONS D'INCERTITUDE

Nous allons donner une forme précise des relations d'incertitude d'Heisenberg due à M. Pauli. Il faut remarquer que cette forme précise n'est pas tout à fait équivalente à la forme qualitative $\delta q \cdot \delta p \geq \hbar$ qui a souvent une signification physique plus directement accessible à l'expérimentateur et qui peut même être valable quand la forme précise ne l'est plus.

Nous commencerons par introduire la définition suivante. Nous dirons que l'opérateur F^* est l'opérateur adjoint de F dans un domaine D si :

$$\int_D f^* F g d\tau = \int_D (F^* f)^* g d\tau$$

f et g étant deux fonctions du domaine D assujetties seulement à être finies, uniformes et continues dans D et à s'annuler aux limites de D de façon que les intégrales de surface pouvant apparaître dans les intégrations par parties de \int_D soient nulles.

En comparant la définition des opérateurs adjoints avec celle des opérateurs hermitiens, on voit qu'un opérateur est hermitien si, et seulement si, il est son propre adjoint. ($F=F^*$)

Que l'opérateur F soit ou non hermitien, la valeur moyenne de FF^* est toujours réelle et définie positive car :

$$(II,a) \quad \overline{FF^*} = \int_D \psi^* F F^* \psi d\tau = \int_D (F^* \psi)^* F^* \psi d\tau = \int_D |F^* \psi|^2 d\tau$$

Ceci posé nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème. - Si deux grandeurs physiques observables correspondent respectivement aux opérateurs linéaires et hermitiens A et B , on a :

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} [A, B]$$

$[A, B]$ étant le commutateur de A et de B , et σ_A, σ_B étant les écarts quadratiques (dispersions) définis par :

$$\sigma_A = \sqrt{(A - \bar{A})^2} \quad ; \quad \sigma_B = \sqrt{(B - \bar{B})^2}$$

Pour démontrer ce théorème, nous considérons l'opérateur linéaire non hermitien $A + i\lambda B$ où λ est une constante réelle : son adjoint est $A - i\lambda B$ et, par application de la formule (II,a), nous voyons que :

$$(A + i\lambda B)(A - i\lambda B) = A^2 + \lambda^2 B^2 - i\lambda [A, B]$$

est réel et défini positif. Donc la fonction de λ

$$f(\lambda) = A^2 + \lambda^2 B^2 - i\lambda [A, B]$$

est réelle et définie positive. On en conclut que $[A, B]$ est purement imaginaire. Or $f(\lambda)$ est minimum pour $\lambda_0 = \frac{i}{2} \frac{[A, B]}{B^2}$ et a alors pour valeur $f(\lambda_0) = A^2 + \frac{1}{4} \frac{([A, B])^2}{B^2}$. Comme cette valeur doit être positive ou nulle, on a :

$$(II,b) \quad A^2 \cdot B^2 \geq -\frac{1}{4} ([A, B])^2$$

Posons par définition $\Delta A = A - \bar{A}$ et $\Delta B = B - \bar{B}$. \bar{A} et \bar{B} sont des nombres, mais comme A et B sont des opérateurs ΔA et ΔB sont des opérateurs et l'on trouve aisément :

$$(II,c) \quad [\Delta A, \Delta B] = [A - \bar{A}, B - \bar{B}] = [A, B]$$

L'inégalité (II,b) donne alors en l'appliquant aux opérateurs ΔA et ΔB et en tenant compte de (II,c) :

$$\overline{(\Delta A)^2} \cdot \overline{(\Delta B)^2} \geq -\frac{1}{4} \left(\overline{[A, B]} \right)^2$$

$\overline{[A, B]}$ étant purement imaginaire, nous en tirons :

$$\sigma_A \cdot \sigma_B = \sqrt{\overline{(\Delta A)^2}} \cdot \sqrt{\overline{(\Delta B)^2}} \geq \frac{1}{2} \overline{[A, B]}$$

et le théorème est démontré.

En Mécanique ondulatoire on dit que deux grandeurs observables A et B sont "canoniquement conjuguées" quand on a :

$$[A, B] = -\frac{\hbar}{2\pi i} 1$$

On a alors :

$$\overline{[A, B]} = \int_D \psi^* \left(-\frac{\hbar}{2\pi i} \right) \psi d\tau = -\frac{\hbar}{2\pi i}$$

quantité purement imaginaire comme cela doit être. Ceci nous donne :

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{\hbar}{4\pi}$$

C'est la forme précise annoncée des relations d'incertitude qui donne en particulier :

$$\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq \frac{\hbar}{4\pi}$$

CHAPITRE III

THÉORIE QUANTIQUE DES MOMENTS CINÉTIQUES ET DES SPINS

I. MOMENT CINÉTIQUE ORBITAL

Nous nommerons "moment cinétique orbital" (moment d'impulsion ou moment de rotation) d'une particule par rapport à un point 0 pris comme origine des coordonnées, le moment de la quantité de mouvement de la particule par rapport à ce point. Ce moment cinétique orbital est un vecteur dont l'expression est :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$

C'est donc le produit vectoriel du rayon vecteur \vec{r} de la particule (de composantes x, y, z) et de la quantité de mouvement \vec{p} . En composantes on a donc :

$$M_x = -y p_z - z p_y ; \quad M_y = z p_x - x p_z ; \quad M_z = x p_y - y p_x$$

La propriété essentielle du moment cinétique, celle qui rend cette grandeur particulièrement importante au point de vue mécanique, c'est que, si le potentiel des forces agissant sur la particule ne dépend pas de l'azimut pris autour de l'un des axes de coordonnées (autrement dit si la force est partout dans le même plan que cet axe), la composante du moment cinétique orbital le long de cet axe est constante au cours du mouvement, autrement dit elle est intégrale première.

La longueur M du moment cinétique orbital est définie par

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = r^2 p^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2$$

d'après l'identité de Lagrange.

M est intégrale première si la force passe constamment par le point 0 (force centrale).

En Mécanique ondulatoire, nous devons remplacer les quantités ainsi définies classiquement par des opérateurs. On doit poser :

$$(M_x)_{op} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_x} ; (M_y)_{op} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_y}$$

$$(M_z)_{op} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_z}$$

Dans ces expressions $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ sont les azimuts comptés autour de ox, oy, oz . L'un quelconque de ces trois opérateurs $M_k = \frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ avec $k=1, 2, 3$ admet pour valeurs propres les valeurs $m \frac{h}{2\pi}$ avec m entier (positif, négatif ou nul) et pour fonctions propres normées $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi_k}$ comme on le vérifie aisément.

D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, on doit en conclure que la mesure exacte de l'une des composantes rectangulaires du moment cinétique donne toujours une valeur égale à un multiple entier de $\frac{h}{2\pi}$. Pour cette raison $\frac{h}{2\pi}$ peut être nommée l'unité quantique du moment cinétique.

On s'aperçoit alors que l'image vectorielle du moment cinétique fournie par la théorie classique a quelque chose de trompeur à l'échelle quantique. En effet les trois composantes du moment cinétique ne sont pas simultanément mesurables à l'échelle quantique car les opérateurs M_x, M_y, M_z ne commutent pas entre eux. Si donc on effectue avec précision la mesure d'une de ces composantes, il y aura seulement une distribution de probabilité pour les valeurs des deux autres dont on ne pourra connaître la valeur exacte.

On ne pourra donc pas tracer réellement le vecteur \vec{M} dont on ne connaîtra jamais exactement plus d'une composante. Par contre le vecteur \vec{M} dont les composantes sont les valeurs moyennes M_x, M_y, M_z est toujours bien défini et c'est là ce qui permet d'employer à l'échelle macroscopique, où seules comptent les valeurs moyennes, un vecteur moment orbital.

L'impossibilité de connaître simultanément les trois composantes du moment cinétique s'exprime par la non-commutation des opérateurs correspondants. Pour écrire les formules de non-commutation, nous poserons en mettant en évidence l'unité $\frac{h}{2\pi}$

$$M_x = m_x \cdot \frac{h}{2\pi} ; \quad M_y = m_y \cdot \frac{h}{2\pi} ; \quad M_z = m_z \cdot \frac{h}{2\pi}$$

avec :

$$m_x = i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) ; \quad m_y = i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) ; \quad m_z = i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

L'on peut aisément vérifier que :

$$(III, a) \quad [m_x, m_y] = -i m_z ; \quad [m_y, m_z] = -i m_x ; \quad [m_z, m_x] = -i m_y$$

Nous verrons plus loin la signification de ces formules.

Nous poserons aussi :

$$(M^2)_{op} = (M_x)_{op}^2 + (M_y)_{op}^2 + (M_z)_{op}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} (m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) = m^2 \frac{h^2}{4\pi^2}$$

et l'on trouve :

$$m^2 = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

en prenant des coordonnées polaires autour de 0. L'opérateur m^2 n'est pas autre chose que le Laplacien sur la surface d'une sphère de rayon 1. L'équation aux valeurs propres $m^2 f = \alpha f$ n'admet comme solutions finies, continues et uniformes sur la sphère de rayon 1 que les fonctions de Laplace $\gamma_k(\theta, \varphi)$, la valeur propre correspondant à la fonction propre γ_1 , où 1 est un entier positif ou nul, étant 1 (1+1). Finalement les valeurs propres de l'opérateur M^2 sont :

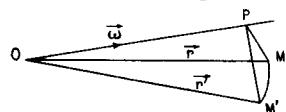
$$M_1^2 = l(l+1) \frac{h^2}{4\pi^2} \quad (l=0,1,2,\dots)$$

Il est aisé de vérifier que $(m^2)_{op}$ commute avec m_x, m_y, m_z , ce qui montre que M^2 est une grandeur mesurable en même temps que l'une des grandeurs M_x, M_y, M_z .

2. LE MOMENT CINÉTIQUE ET LE GROUPE DES ROTATIONS SPATIALES

Pour mieux comprendre le sens de la non-commutation des composantes du moment cinétique, il est utile de démontrer comment le caractère d'intégrale première de M_z est relié aux rotations autour de oz . Pour que M_z soit intégrale première, il faut que le potentiel U ne dépende pas de l'azimut φ autour de oz . Mais alors le problème de Mécanique ondulatoire n'est aucunement modifié par une rotation du système d'un angle quelconque $\Delta\varphi$ autour de oz . Donc si $\psi(r, \theta, \varphi, t)$ est, en coordonnées polaires avec oz comme axe polaire, l'expression d'une solution de l'équation des ondes, $\psi(r, \theta, \varphi + \Delta\varphi, t)$ sera aussi solution et il en sera de même de $\frac{\psi(r, \theta, \varphi + \Delta\varphi, t) - \psi(r, \theta, \varphi, t)}{\Delta\varphi}$ ce qui, pour $\Delta\varphi$ infiniment petit, est égal à $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$. Donc l'hypothèse que le problème n'est pas modifié par une rotation autour de oz , entraîne que si ψ est solution de l'équation des ondes, $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ et par suite $M_z\psi$ en est une autre. Nous avons vu que ce résultat entraîne le caractère d'intégrale première de M_z . Ainsi se trouve mise en lumière la relation entre M_z et les rotations autour de oz .

Nous allons montrer maintenant que la non-commutation des composantes du moment cinétique est reliée à la non-commutation des rotations spatiales. Soit un point M de coordonnées x, y, z formant les composantes du rayon vecteur $OM = \vec{r}$ et soit une rotation infinitésimale définie par un vecteur $\vec{\omega}$ passant par 0. Sous l'influence de la rotation $\vec{\omega}$ le point M vient en M' en décrivant un arc de cercle infiniment petit MM' égal à $\omega \vec{r}P$ où:



On a donc :

$$\vec{r}' = \vec{r} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Considérons maintenant trois rotations infinitésimales de même valeur absolue égale à 1 autour des trois axes rectangulaires, ox, oy, oz . Il leur correspond trois vecteurs $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ de même longueur portés respectivement sur ox, oy, oz . On a évidemment :

$$\vec{\omega}_1 = [\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_3] : \vec{\omega}_2 = [\vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_1] : \vec{\omega}_3 = [\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2]$$

Désignons par $(\omega_1 \omega_2)_{op}$ l'opération qui consiste à appliquer à un point P d'abord la rotation $\vec{\omega}_2$, puis la rotation $\vec{\omega}_1$, et par $(\omega_2 \omega_1)_{op}$ l'opération qui consiste à appliquer à P ces deux rotations, mais dans l'ordre inverse. L'opération $(\omega_1 \omega_2)_{op}$ conduit du point P initial à un point P_1 tel que :

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}]]$$

et l'opération $(\omega_2 \omega_1)_{op}$ conduit de P au point P_2 tel que :

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}] + [\vec{\omega}_2 \times [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}]]$$

Les deux opérations ne sont pas équivalentes et ne donnent pas le même résultat : les rotations $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ ne sont pas commutables. La différence des résultats correspondant au symbole $(\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1)_{op}$ est donnée par :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = [\vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}]] - [\vec{\omega}_2 \times [\vec{\omega}_1 \times \vec{r}]] = [\vec{\omega}_1 \times [\vec{\omega}_2 \times \vec{r}]] + [\vec{\omega}_2 \times [\vec{r} \times \vec{\omega}_1]]$$

D'une façon générale, entre trois vecteurs A, B, C , on a la relation facile à vérifier :

$$[\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] + [\vec{B} \times [\vec{C} \times \vec{A}]] + [\vec{C} \times [\vec{A} \times \vec{B}]] = 0$$

En appliquant cette relation à $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ et \vec{r} , il vient :

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -[\vec{r} \times [\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2]] = [[\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2] \times \vec{r}] = [\vec{\omega}_3 \times \vec{r}]$$

L'opération $(\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1)_{op}$ est donc équivalente à ω_3 ce qui s'écrit sous forme d'équation entre opérateurs :

$$[\omega_1, \omega_2] = \omega_3$$

Cette relation est bien équivalente à celle qui correspond à la première relation (III,a), car m_k est égal à $i \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ et, comme une rotation dans un certain sens des axes correspond à une variation en sens inverse des valeurs du ψ , le symbole $i \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$ correspond au symbole $-i(\omega_k)_{op}$.

On trouve des correspondances analogues par permutation circulaire sur x, y, z . Ainsi les formules de non-commutation des m_k se trouvent rattachées à la non-commutation des opérateurs de rotation dans l'espace.

3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX RELATIFS AUX VALEURS PROPRES D'OPÉRATEURS SATISFAISANT AUX RELATIONS DE NON-COMMUTATION (III a)

Nous allons maintenant effectuer l'étude générale des valeurs propres de trois opérateurs linéaires et hermitiens au sujet desquels nous supposerons seulement que l'on ait :

$$[m_x, m_y] = -im_z ; \quad [m_y, m_z] = -im_x ; \quad [m_z, m_x] = -im_y$$

sans supposer qu'ils soient égaux à :

$$i(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}) , \quad i(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}) , \quad i(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

Nous étudierons les relations de ces valeurs propres avec celles de l'opérateur $m^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$.

Les valeurs propres de tous ces opérateurs sont réelles puisqu'ils sont hermitiens. Les valeurs propres de m_x^2, m_y^2, m_z^2 sont donc positives ou nulles puisqu'elles sont les carrés des valeurs propres de m_x, m_y, m_z . Les valeurs moyennes de m_x^2, m_y^2, m_z^2 sont donc nécessairement positives et il en est de même de celles de m^2 . De là, on conclut que les valeurs propres de m^2 sont positives ou nulles sans quoi pour un état propre de m^2 correspondant à une valeur propre négative la valeur moyenne de m^2 serait négative, ce qui est impossible.

Par raison de symétrie, les valeurs propres de m_x, m_y, m_z sont les mêmes et nous savons que m^2 commute avec m_x, m_y, m_z . Comme m_x et m_y sont hermitiens, en aucun cas la valeur moyenne de m_z^2 ne peut être supérieure à m^2 . Donc les valeurs propres de m_z^2 sont inférieures ou au plus égales aux valeurs correspondantes de m^2 . Autrement dit, les valeurs propres de m_z ne peuvent être ni supérieures à m , ni inférieures à $-m$.

Ceci dit, on vérifie aisément la relation :

$$(m_x - im_y) m_z - m_z (m_x - im_y) = -(m_x - im_y)$$

d'où :

$$(m_x - im_y) m_z = (m_z - 1)(m_x - im_y)$$

Soient γ_i et φ_i les valeurs propres et fonctions propres de m_z . Nous allons nous servir des φ_i comme système de base pour la construction des matrices dont nous allons faire usage. A un opérateur A correspondent alors les éléments de matrice A_{ik}^{φ} que nous écrirons simplement A_{ik} .

On aura donc entre les m_{ik} ainsi construits la relation :

$$\sum_k (m_x - im_y)_{ik} (m_z)_{kj} = \sum_k (m_z - 1)_{ik} (m_x - im_y)_{kj}$$

traduisant la dernière relation de commutation, qui avec le système de base choisi devient simplement :

$$(m_x - im_y)_{ij} \gamma_j = (\gamma_i - 1) (m_x - im_y)_{ij}$$

Pour que cette relation soit vérifiée, il faut avoir :

$$\text{soit : } \gamma_j = \gamma_i - 1$$

$$\text{soit : } (m_x - im_y)_{ij} = 0$$

Maintenant, pour γ_k , valeur propre quelconque de m_z , on a :

$$[(m_x - im_y)(m_x + im_y)]_{kk} = \sum_l (m_x - im_y)_{kl} (m_x + im_y)_{lk}$$

où dans la somme du second membre tous les termes sont nuls sauf peut-être, s'il existe, le terme $\gamma_l = \gamma_k - 1$. Donc si $\gamma_k - 1$ n'est pas valeur propre de m_z , tous les termes de la somme seront nuls et l'on aura :

$$[(m_x - im_y)(m_x + im_y)]_{kk} = 0$$

Or on a aussi :

$$\begin{aligned} (m_x - im_y)(m_x + im_y) &= m_x^2 + m_y^2 + i[m_x, m_y] = m_x^2 + m_y^2 + m_z \\ &= m^2 - m_z^2 + m_z = m^2 + \frac{1}{4} - (m_z - \frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

Si $\gamma_k - 1$ n'est pas valeur propre de m_z , on a donc :

$$\left[m^2 + \frac{1}{4} - (m_z - \frac{1}{2})^2 \right]_{kk} = m^2 + \frac{1}{4} - (\gamma_k - \frac{1}{2})^2 = 0$$

d'où :

$$\gamma_k = \frac{1}{2} \pm \theta \quad ; \quad \theta = \sqrt{m^2 + \frac{1}{4}}$$

Bref, si γ_k est valeur propre de m_z , $\gamma_k - 1, \gamma_k - 2$ etc... le seront aussi jusqu'à ce qu'on arrive à une valeur propre égale à $\frac{1}{2} \pm \theta$.

On obtiendra ainsi une suite décroissante de valeurs propres qui sera nécessairement bornée inférieurement puisque toutes les valeurs propres de m_z sont supérieures à $-m$. Le dernier terme de cette série sera forcément $\frac{1}{2} - \theta$. La suite sera donc :

$$\gamma_k, \gamma_k - 1, \gamma_k - 2, \dots, -\theta + \frac{1}{2}$$

En raisonnant maintenant sur $(m_x + im_y)(m_x - im_y)$ comme nous venons de le faire sur $(m_x - im_y)(m_x + im_y)$, on trouverait de même que si γ_k est valeur propre de m_z , γ_{k+1} l'est aussi sauf si $\gamma_k = -\frac{1}{2} \pm \theta$ et l'on en déduit comme ci-dessus qu'on a une suite croissante de valeurs propres :

$$\gamma_k, \gamma_k + 1, \gamma_k + 2, \dots, \theta - \frac{1}{2}$$

La suite complète des valeurs propres est donc :

$$-\theta + \frac{1}{2}, -\theta + \frac{3}{2}, \dots, \theta - \frac{3}{2}, \theta - \frac{1}{2}$$

et il faut par suite que $\theta - \frac{1}{2} - (-\theta + \frac{1}{2}) = 2\theta - 1$ soit entier, c'est-à-dire que l'on ait soit $\theta = n$, soit $\theta = \frac{n+1}{2}$ (n entier). La valeur correspondante de m^2 est $\theta^2 - \frac{1}{4}$, d'après la définition de θ . Si donc nous posons par définition de j :

$$\theta = j + \frac{1}{2}$$

alors j sera soit un entier positif ou nul ($0, 1, 2, \dots$), soit un demi-entier positif ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$) car m^2 est positif ou nul. Comme alors $\theta^2 - \frac{1}{4} = j(j+1)$, on voit que les valeurs propres possibles de m^2 sont de la forme $j(j+1)$ avec soit $j=0, 1, 2, \dots$, soit $j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ et pour une même valeur donnée de m^2 , m_z a les $2j+1$ valeurs propres possibles $-j, -j+1, \dots, j-1, j$.

En résumé, l'opérateur m^2 a les valeurs propres $j(j+1)$ avec $j=0, 1, \dots$ ou $j=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$, pour une valeur donnée de j , chacun des opérateurs m_x, m_y, m_z a les $2j+1$ valeurs propres possibles $-j, -j+1, \dots, j-1, j$. Telles sont les conclusions que nous pouvons tirer du seul fait que les opérateurs m_x, m_y, m_z obéissent aux relations de commutation :

$$[m_x, m_y] = -im_z; [m_y, m_z] = -im_x; [m_z, m_x] = -im_y$$

Si l'on applique ces résultats généraux au moment cinétique orbital, on voit que l'opérateur M^2 a bien pour valeurs propres $l(l+1)\frac{h^2}{4\pi^2}$ avec $l=0, 1, 2, \dots$ et que pour l donné, chacun des trois opérateurs M_x, M_y, M_z a bien les $2l+1$ valeurs propres possibles $-l\frac{h}{2\pi}, -(l-1)\frac{h}{2\pi}, \dots, (l-1)\frac{h}{2\pi}, l\frac{h}{2\pi}$, mais ici le nombre l ne peut pas prendre les valeurs demi-entières $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ du cas général. Ceci vient de ce qu'ici m_x, m_y, m_z doivent satisfaire non seulement aux relations de commutation (III,a), mais aussi aux définitions plus restrictives :

$$m_x = i(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}), m_y = i(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}), m_z = i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

Si donc on considère les relations de non-commutation, qui sont liées, nous l'avons vu, au groupe des rotations, comme ce qui est le plus essentiel dans la théorie des moments cinétiques, on peut penser que, si les moments cinétiques orbitaux ne font intervenir que les valeurs entières du nombre j de la théorie générale, d'autres formes de moments cinétiques pourraient faire intervenir les valeurs demi-entières. C'est ce qui se présente dans la théorie du spin.

4. LE SPIN

Pendant longtemps, on a considéré que les particules matérielles étaient entièrement caractérisées par deux constantes : leur masse (ou plus exactement, en théorie relativiste, leur masse propre) et leur charge électrique. Mais l'existence de divers phénomènes (effets Zeeman anormaux, structure fine de certaines raies, etc.) impossibles à interpréter par les théories quantiques de l'atome, même en employant la Mécanique ondulante

(1) Voir L. de Broglie : l'Electron Magnétique, Hermann, Paris, 1934.

toire, a montré la nécessité d'attribuer aux électrons, en dehors de leur masse propre et de leur charge, une troisième caractéristique essentielle, leur spin.

Si l'on reste dans le cadre des théories classiques, le spin de l'électron peut se représenter par une rotation du corpuscule électrisé autour d'un de ses diamètres : cette rotation aurait pour conséquence l'existence d'un moment cinétique propre auquel nous réservons le nom de spin et celle d'un moment magnétique propre due à la rotation de la charge de l'électron. Pour interpréter les faits expérimentaux, il est nécessaire d'attribuer au moment cinétique propre de l'électron la valeur $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$ et à son moment magnétique propre la valeur $\frac{e\hbar}{4\pi m_c}$ égale à un "magnéton de Bohr" : c'est l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit. On voit donc que pour le spin, on est amené à faire usage de la possibilité, prévue par la théorie générale développée ci-dessus, d'attribuer au moment cinétique une valeur égale à un nombre demi-entier de fois l'unité $\frac{\hbar}{2\pi}$ (pour l'électron $\frac{1}{2}$ fois).

Plus généralement, il semble bien qu'il y ait lieu aujourd'hui d'attribuer un spin à toute particule de l'échelle microphysique. Au point de vue classique, ce moment cinétique propre devrait être représenté par un vecteur \vec{S} de composantes rectangulaires S_x, S_y, S_z dont le carré de la longueur serait :

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

Au point de vue quantique, nous devons remplacer les grandeurs classiques par des opérateurs, mais a priori nous ne connaissons pas la forme de ces opérateurs car nous ne connaissons plus, comme c'était le cas pour le moment cinétique orbital, d'expression classique susceptible de guider notre choix. Ce que cependant nous pouvons admettre, c'est que le spin, ayant la nature d'un moment cinétique, doit être relié au groupe des rotations de la même manière que le moment cinétique orbital.

Mettant en évidence l'unité quantique $\frac{\hbar}{2\pi}$ nous écrirons d'abord :

$$(S_x)_{op} = \frac{\hbar}{2\pi} s_x \quad ; \quad (S_y)_{op} = \frac{\hbar}{2\pi} s_y \quad ; \quad (S_z)_{op} = \frac{\hbar}{2\pi} s_z$$

et nous admettrons que les opérateurs s_x, s_y, s_z satisfont aux relations de non-commutation :

$$[s_x, s_y] = -i s_z \quad ; \quad [s_y, s_z] = -i s_x \quad ; \quad [s_z, s_x] = -i s_y$$

correspondant aux relations admises plus haut pour les m_x, m_y, m_z et qui exprimeront ici les relations du spin avec le groupe des rotations. Enfin, à la place de la grandeur classique S^2 , nous introduirons un "opérateur de spin total".

$$(S^2)_{op} = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} s^2 \quad \text{avec} \quad s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$$

Dans ces conditions, il résulte de la démonstration générale donnée précédemment que les valeurs propres possibles de S^2 sont de la forme $s(s+1) \frac{\hbar^2}{4\pi^2}$ avec soit $s = 0, 1, 2, \dots$, soit $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$

et que pour une valeur donnée de s , chacun des opérateurs S_x, S_y, S_z a les $(2s+1)$ valeurs propres possibles :

$$-s\frac{\hbar}{2\pi}, -(s-1)\frac{\hbar}{2\pi}, \dots, (s-1)\frac{\hbar}{2\pi}, s\frac{\hbar}{2\pi}$$

Pour l'électron et les autres particules de spin $\frac{1}{2}$, on devra prendre des opérateurs S_x, S_y, S_z tels que S^2 ait la valeur propre $\frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{\hbar^2}{4\pi^2}$ correspondant à $s=\frac{1}{2}$; alors S_x, S_y, S_z ont les valeurs propres $\pm\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2\pi}$, ce qui correspond bien au spin de l'électron d'après l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit. Nous verrons ultérieurement comment la théorie de Dirac a précisé la forme des opérateurs S_x, S_y, S_z .

En partant de l'électron de Dirac considéré comme type de corpuscule élémentaire, le procédé de la "fusion" des corpuscules élémentaires ⁽¹⁾ permet de construire des particules ayant plusieurs états de spin total différents. Pour chacun de ces états, le nombre s a une valeur déterminée qui, pour les particules obtenues par fusion d'un nombre pair $2n$ de constituants peut varier de $s=0$ à $s=n$ et qui pour les particules formées par la fusion d'un nombre impair $2n+1$ de constituants peut varier de

$$s=\frac{1}{2} \text{ à } s=\frac{2n+1}{2}=n+\frac{1}{2}$$

Dans cet exposé, nous nous bornerons à la théorie des particules $s=\frac{1}{2}$ dont l'électron est le type.

(1) Voir L. de Broglie : Théorie Générale des particules à spin, Gauthier-Villars, Paris, 1943.

CHAPITRE IV

LES MOMENTS CINÉTIQUES PROPRES DU POINT DE VUE RELATIVISTE

I. GÉNÉRALITÉS

Nous verrons bientôt que la théorie de l'électron de Dirac nous apprend qu'en Mécanique ondulatoire on doit introduire simultanément le spin et la relativité qui sont étroitement liés l'un à l'autre. Ceci nous amène donc à étudier comment se présente au point de vue relativiste la notion de moment cinétique. La question peut paraître simple, mais, comme nous allons le voir, elle est beaucoup plus compliquée qu'en apparence, notamment pour les moments cinétiques propres ou spins.

Nous supposerons connus les principes généraux et le formalisme de la Relativité restreinte. Cependant nous allons rappeler quelques points concernant le choix des variables. Au cours de cet exposé, nous emploierons en effet tantôt les variables complexes de Minkowski, tantôt les variables réelles d'espace-temps et, pour éviter les confusions, il est utile de préciser la forme et les propriétés de ces variables.

On peut repérer un événement qui, dans un système de référence Galiléen, se produit en un point à un certain instant en se donnant les quatre coordonnées d'Univers (au sens de Minkowski) de cet événement. Ce sont :

$$x_1 = x \quad ; \quad x_2 = y \quad ; \quad x_3 = z \quad ; \quad x_4 = i c t$$

La quatrième coordonnée est imaginaire pure.

Avec ce choix de coordonnées, la distance de deux événements infiniment voisins dans l'espace-temps est donnée en Relativité restreinte par un ds tel que :

$$ds^2 = - \sum_j dx_j^2$$

Le ds^2 a donc une forme euclidienne et c'est là l'avantage essentiel des coordonnées de Minkowski. Il n'y a pas lieu alors de distinguer les composantes covariantes d'un tenseur de ses composantes contrevariantes et l'on aura :

$$T_{ijk...}^{rst...} = T_{ijk...rst...}$$

ment à l'aide des composantes M^{ik} du même tenseur dans le premier système par les formules classiques :

$$M'^{23} = \frac{M^{23} - \beta M^{14}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad M'^{31} = \frac{M^{31} + \beta M^{24}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad M'^{12} = M^{12}$$

$$M'^{14} = \frac{M^{14} + \beta M^{23}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad M'^{24} = \frac{M^{24} - \beta M^{31}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad M'^{34} = M^{34}$$

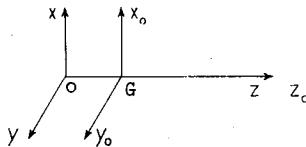
Les résultats que nous venons de rappeler sont souvent exprimés en disant qu'on doit considérer tout moment cinétique comme défini par un tenseur antisymétrique de rang 2 ou tout au moins par les composantes d'espace d'un tel tenseur. A notre avis, cette manière de parler est un peu trompeuse. En effet, dans chaque système de référence, l'origine des coordonnées est un point arbitraire et le moment cinétique par rapport à ce point arbitraire n'a pas en général de signification physique particulière. Ce qui a une signification physique intéressante, c'est le moment cinétique par rapport à un centre doué de propriétés physiques, par exemple par rapport à un centre de forces c'est-à-dire à une particule source d'un champ de force central. Considérons un observateur qui voit passer devant lui avec la vitesse v un atome d'hydrogène : dans le système propre de l'atome, le moment cinétique par rapport à l'origine où se trouve le noyau a une signification physique importante ; mais si nous transformons le tenseur M fourni dans le système propre par la transformation indiquée plus haut, les composantes M^{23} , M^{31} , M^{12} du tenseur dans le système de l'observateur fixe lui donneront un moment cinétique par rapport à son origine des coordonnées, ce qui est sans intérêt physique. Même pour l'observateur fixe, ce qui a un sens physique c'est le moment cinétique de l'électron atomique autour du noyau en mouvement et non celui par rapport à l'origine arbitraire des coordonnées. Si l'on cherche comment l'observateur fixe peut représenter le moment cinétique de l'électron par rapport au noyau entraîné (ce qui est en somme le moment cinétique propre de l'atome H en mouvement), on trouve que pour chaque observateur Galiléen il existe un vecteur représentant ce moment propre, mais que, quand on change d'observateur Galiléen, les composantes de ce moment cinétique propre ne se transforment pas comme les composantes d'un tenseur antisymétrique de rang 2. On voit ainsi que la représentation d'un moment cinétique propre par un tenseur antisymétrique de rang 2 a quelque chose de fallacieux.

3. ÉTUDE DU MOMENT CINÉTIQUE PROPRE DU POINT DE VUE RELATIVISTE

Soit un observateur Galiléen que nous nommerons l'observateur A : il emploie un système de référence cartésien xyz et un temps t . Devant lui passe un système formé d'une particule M de

masse propre m_o tournant autour d'un centre attractif G. Nous supposerons que ce système est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à l'observateur Galiléen A, c'est-à-dire que l'on peut lier à G un référentiel Galiléen $G x_o y_o z_o$. C'est là une hypothèse qui soulève quelques questions délicates liées à la difficulté de définir le centre de gravité en théorie relativiste. Quoi qu'il en soit, nous admettons l'existence d'un référentiel Galiléen $G x_o y_o z_o$ qui accompagne le système dans son mouvement et est animé par rapport à A d'un mouvement rectiligne uniforme. Nous nommerons "moment cinétique propre" du système le moment cinétique du système par rapport à G tel qu'il apparaît à l'observateur A.

Pour préciser la définition du moment cinétique propre, plaçons-nous d'abord dans le système de référence $G x_o y_o z_o$ que nous nommerons le système propre.



Nous supposons que les axes $Oxyz$ et $G x_o y_o z_o$ sont parallèles et que le second référentiel est animé de la vitesse βc par rapport au premier dans le sens oz , ce qui ne diminue aucunement la généralité. Alors le moment cinétique du système sera défini dans le système propre par les composantes d'espace du tenseur antisymétrique de rang 2 :

$$M_{(o)}^{ik} = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x_{(o)}^i v_{(o)}^k - x_{(o)}^k v_{(o)}^i \right) = m_o \left(x_{(o)}^i u_{(o)}^k - x_{(o)}^k u_{(o)}^i \right)$$

Explicitement le moment cinétique sera donc représenté dans le système $G x_o y_o z_o$ par un vecteur d'espace $S^{(o)}$ de composantes :

$$(IV, a) \quad S_x^{(o)} = M_{(o)}^{23} = m_o \frac{y_o v_z^{(o)} - z_o v_y^{(o)}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}}, \dots, \dots$$

Plaçons-nous maintenant avec l'observateur dans le système $Oxyz$. Dans ce système le tenseur antisymétrique M a pour composantes :

$$M^{23} = \frac{M_{(o)}^{23} - \beta M_{(o)}^{24}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad M^{31} = \frac{M_{(o)}^{31} + \beta M_{(o)}^{14}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad M^{12} = M_{(o)}^{12}$$

$$(IV, b) \quad M^{14} = \frac{M_{(o)}^{14} + \beta M_{(o)}^{31}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad M^{24} = \frac{M_{(o)}^{24} - \beta M_{(o)}^{23}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad M^{34} = M_{(o)}^{34}$$

mais si l'origine du temps est choisie de façon qu'au temps $t=0$ le point G coïncide avec O, les composantes M^{23} , M^{31} et M^{12} représentent les composantes du moment cinétique orbital de la particule M par rapport au point O. Or, nous l'avons remarqué, ce moment cinétique par rapport à l'origine O des coordonnées

n'a pas d'intérêt physique : ce qui a un intérêt physique pour l'observateur A, c'est le moment cinétique de la molécule en mouvement par rapport à son point central G, quantité qui est pour A le moment cinétique propre du système entraîné. Comment l'observateur A va-t-il définir mathématiquement le vecteur d'espace qui représentera pour lui ce moment propre ? Il imaginerà par exemple des axes $G\xi\eta\zeta$ liés à G et parallèles à Oxyz. Ces axes coïncident avec $Gx_0y_0z_0$. Si je les appelle $G\xi\eta\zeta$, c'est pour rappeler que, du moins en ce qui concerne $G\xi\eta\zeta$, les longueurs évaluées par A le long de cet axe diffèrent, en raison de la contraction de Lorentz, des mêmes longueurs évaluées dans le système propre. Les coordonnées ξ, η, ζ de la molécule de coordonnées x, y, z sont pour A :

$$\xi = x ; \quad \eta = y ; \quad \zeta = z - \beta c t$$

De plus les composantes de la quantité de mouvement de la molécule de masse propre m_0 dans la mesure où ces composantes proviennent du mouvement de rotation autour de G sont données par :

$$p_\xi = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad p_\eta = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; \quad p_\zeta = \frac{m_0 (v_z - \beta c)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En effet $m_0 \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ représente pour la molécule dont la vitesse totale est \vec{v} la partie de la composante z de l'impulsion qui est due à la vitesse d'ensemble βc . Le vecteur d'espace qui représentera pour l'observateur A le moment cinétique propre sera défini par les formules :

$$S_x = m_0 \left[y \frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - (z - \beta c t) \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] ; \quad S_y = m_0 \left[(z - \beta c t) \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - x \frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

[IV, c]

$$S_z = m_0 \left[x \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - y \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

En comparant avec les expressions de $S_x^{(o)}$, $S_y^{(o)}$, $S_z^{(o)}$, on voit tout d'abord que, si l'observateur A était lié au système entraîné, il trouverait (ce qui est évident a priori) pour le vecteur \vec{S} le vecteur $\vec{S}^{(o)}$ car on aurait alors $\beta = 0$, $x = x_0, \dots, v_z = v_z^{(o)}$. D'autre part, on a les formules de transformation :

$$y = y_0 ; \quad x = x_0 ; \quad z - \beta c t = z_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

et des formules de composition des vitesses :

$$v_x = \frac{v_x^{(o)} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(o)}} ; \quad v_y = \frac{v_y^{(o)} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(o)}} ; \quad v_z = \frac{v_z^{(o)} + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(o)}}$$

on tire d'abord :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}} \cdot \frac{1 + \frac{\beta}{c} v_z^{(o)}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

puis :

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x^{(o)}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}} ; \quad \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_y^{(o)}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}} ; \quad \frac{v_z - \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_z^{(o)} \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}}$$

De là, on tire aisément en comparant les expressions (IV,a) et (IV,c) :

$$S_x = S_x^{(o)} \sqrt{1 - \beta^2} ; \quad S_y = S_y^{(o)} \sqrt{1 - \beta^2} ; \quad S_z = S_z^{(o)}$$

Ces formules de transformation sont tout à fait différentes de celles des composantes d'espace d'un tenseur antisymétrique de rang 2. Ainsi par exemple, si l'on fait tendre β vers 1, le vecteur d'espace dont les composantes sont M^{23}, M^{31} et M^{12} tend d'après les formules (IV,b) à se placer perpendiculairement à oz tandis que \bar{S} tend à se coucher sur oz .

On peut bien, pour un observateur A donné, trouver un tenseur antisymétrique qui ait pour composantes d'espace S_x, S_y, S_z dans le système oxyz et $S_x^{(o)}, S_y^{(o)}, S_z^{(o)}$ dans le système propre : il suffit en effet pour cela de définir ce tenseur par les formules

$$S^{23} = S_x ; \quad S^{31} = S_y ; \quad S^{12} = S_z \\ S^{14} = 0 ; \quad S^{24} = 0 ; \quad S^{34} = 0$$

ce qui donnera bien :

$$(IV,d) \quad S_{(o)}^{23} = S_x^{(o)} ; \quad S_{(o)}^{31} = S_y^{(o)} ; \quad S_{(o)}^{12} = S_z^{(o)}$$

d'après les formules de transformation des tenseurs antisymétriques. Mais, et ceci est essentiel, le tenseur ainsi défini change quand on passe d'un système Galiléen A à un autre A' qui est en mouvement relatif par rapport à A. Pour le voir, il suffit de remarquer que s'il y avait un seul tenseur \bar{S} , ce tenseur devrait avoir ses composantes S^{14} nulles dans tous les systèmes Galiléens, ce qui est impossible. Nous allons retrouver cette conclusion plus loin par une autre voie.

Finalement nous avons pu définir pour chaque observateur Galiléen un vecteur d'espace \bar{S} définissant le moment cinétique propre du système considéré, mais nous n'avons pu rattacher ce vecteur d'une façon unique à un être mathématique à caractère tensoriel dans l'espace-temps.

Si l'on avait cherché à définir le tenseur \bar{S} de façon à avoir dans le système propre :

$$S_{(o)}^{23} = S_x^{(o)} ; \quad S_{(o)}^{31} = S_y^{(o)} ; \quad S_{(o)}^{12} = S_z^{(o)} ; \quad S_{(o)}^{14} = S_{(o)}^{24} = S_{(o)}^{34} = 0$$

les trois premières composantes de ce tenseur dans un autre système Galiléen seraient :

$$S^{23} = \frac{S_x^{(o)}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad S^{31} = \frac{S_y^{(o)}}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad S^{12} = S_z^{(o)}$$

et ce ne serait pas là les trois composantes du moment propre dans ce système. Cette remarque nous sera utile pour étudier la théorie de M.v. Weyssenhoff.

En Mécanique ondulatoire on cherche toujours à associer à toute particule des densités ayant le caractère de grandeurs de champ. Quand nous cherchons à définir en Mécanique ondulatoire le moment cinétique propre d'une particule (spin de l'électron), il sera donc naturel de définir le spin par un vecteur \vec{S} de la forme :

$$\vec{S} = \int_D \vec{\sigma} d\tau$$

où σ sera la densité de moment propre.

Dans le système propre, nous aurons alors :

$$S_x^{(o)} = \int_D \sigma_x^{(o)} d\tau ; \quad S_y^{(o)} = \int_D \sigma_y^{(o)} d\tau ; \quad S_z^{(o)} = \int_D \sigma_z^{(o)} d\tau$$

et nous supposerons $\vec{\sigma}^{(o)}$ fonction de x_o, y_o, z_o , mais indépendant de t_o . Si l'on veut effectuer les intégrations en se servant des variables x, y, z d'un observateur A, on devra remplacer $d\tau$ par $\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$ à cause de la contraction de Lorentz et l'on trouvera :

$$S_x^{(o)} = \frac{S_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int_D \frac{\sigma_x^{(o)}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau ; \quad S_y^{(o)} = \frac{S_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \int_D \frac{\sigma_y^{(o)}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau ; \quad S_z^{(o)} = S_z = \int_D \frac{\sigma_z^{(o)}}{\sqrt{1-\beta^2}} d\tau$$

d'où l'on tire :

$$\sigma_x = \sigma_x^{(o)} ; \quad \sigma_y = \sigma_y^{(o)} ; \quad \sigma_z = \frac{\sigma_z^{(o)}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Les grandeurs $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ se transforment donc comme les trois composantes rectangulaires d'espace d'un quadrivecteur $\vec{\Sigma}$ dont la quatrième composante $\sigma_4^{(o)}$ serait nulle dans le système propre. Pour β tendant vers 1, le vecteur $\vec{\sigma}$ se couche sur la direction du mouvement. Ainsi donc tandis que le moment cinétique propre n'a pas de caractère tensoriel bien défini, on peut par contre définir une "densité de moment cinétique propre" à l'aide d'un quadrivecteur $\vec{\Sigma}$ dont la composante de temps est nulle dans le système propre (ce qui paraît naturel du point de vue physique). Cette dernière condition nous permet d'ailleurs d'exprimer σ_4 en fonction du vecteur d'espace $\vec{\sigma}$ dans n'importe quel système Galiléen. En effet le produit scalaire :

$$(\vec{\Sigma} \cdot \vec{ds}) = \sigma_4 c dt - \sigma_x dx - \sigma_y dy - \sigma_z dz$$

est nul comme on le voit en se plaçant dans le système propre : autrement dit le quadrivecteur $\vec{\Sigma}$ est orthogonal dans l'espace-temps à la ligne d'Univers de la particule. On a donc dans tout système Galiléen (puisque $\vec{\Sigma} \cdot \vec{ds}$ est un invariant)

$$\sigma_4 = \frac{1}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{v})$$

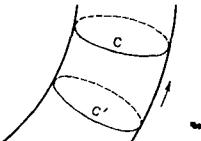
Nous allons reprendre le problème de la représentation relativiste du moment cinétique propre en nous inspirant des travaux

de M. Olivier Costa de Beauregard et retrouver les mêmes résultats par une autre voie.

4. THÉORIE RELATIVISTE GÉNÉRALE DES MOMENTS CINÉTIQUES PROPRES

Considérons un fluide en mouvement conçu à la façon classique. L'ensemble des lignes d'Univers de ses divers éléments forme un tube d'Univers occupant dans l'espace-temps un domaine à quatre dimensions allongé dans le sens du temps.

Coupons ce tube par des cloisons à trois dimensions (hyper-cloisons) C, C', \dots . Supposons que notre fluide est doué de moment cinétique propre, chaque élément du fluide transportant son moment, et cherchons avec M. Costa de Beauregard à définir en chaque point du tube d'Univers une densité de moment cinétique propre qui, intégrée sur une cloison C quelconque, donne un moment cinétique ou plus exactement un tenseur antisymétrique du second rang dont les composantes d'espace définissent un moment cinétique. La cloison C étant à trois dimensions, un élément de cette cloison pourra être défini comme un parallélépipède construit sur trois petits vecteurs ds^I, ds^{II} et ds^{III} contenus dans cette multiplicité :



Cet élément de volume peut, on le sait, être considéré comme un quadrivecteur, ou plus exactement comme un tenseur du troisième rang complètement antisymétrique dont la projection d'indice i (c'est-à-dire la projection du volume sur l'hyperplan perpendiculaire à l'axe des x_i) est donnée par le déterminant :

$$[dx_j, dx_k, dx_l] = \begin{vmatrix} dx_j^I & dx_k^I & dx_l^I \\ dx_j^{II} & dx_k^{II} & dx_l^{II} \\ dx_j^{III} & dx_k^{III} & dx_l^{III} \end{vmatrix}$$

Il est alors naturel de chercher, comme le fait M. Costa de Beauregard, à écrire le moment cinétique propre attaché à la cloison C sous la forme :

$$dS_{ij} = \sum_{k=1}^{k=4} \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k]$$

où les quatre σ^k forment les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps (ou plutôt, ce qui revient pratiquement au même en Relativité restreinte, les quatre composantes d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 3). Ce quadrivecteur est la "densité de moment cinétique propre" défini en tout point du fluide.

En intégrant dS_{ij} sur la cloison C choisie, on obtient la grandeur :

$$S_{ij}^{(c)} = \int_C \sum_{k=1}^{k=4} \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k]$$

Nous avons écrit $S_{ij}^{(c)}$ car nous ne savons pas encore si cette grandeur dépend ou non de la cloison C choisie. Pour examiner cette question, il est intéressant de comparer les définitions précédentes avec celles que l'on adopte usuellement en Relativité restreinte pour la charge et le courant électrique.

En relativité, on définit le mouvement d'une distribution d'électricité par un quadrivecteur d'espace-temps \bar{J} de composantes spatiales j_1, j_2, j_3 égales aux composantes de la densité de courant et de composante de temps égale à $c\rho$, c'est-à-dire à c fois la densité d'électricité. Le mouvement d'ensemble de la distribution d'électricité au cours du temps sera représenté par un "tube d'Univers" formé par l'ensemble des lignes d'Univers de ses divers éléments. Sur les parois du tube, le quadrivecteur \bar{J} est par définition toujours tangent à la paroi, ce qui exprime le fait physique que l'électricité ne traverse pas cette paroi. Nous pouvons encore couper le tube d'Univers par une cloison C à trois dimensions.

Avec les mêmes notations que plus haut, nous définirons la grandeur :

$$F_{(C)}(\bar{J}) = \int_C - [j_1 [dx_1, dx_2, dx_3] - j_2 [dx_3, dx_4, dx_1] - j_3 [dx_2, dx_4, dx_3]]$$

$$= \int_C \begin{vmatrix} dx_1^I & dx_2^I & dx_3^I & dx_4^I \\ dx_1^{II} & dx_2^{II} & dx_3^{II} & dx_4^{II} \\ dx_1^{III} & dx_2^{III} & dx_3^{III} & dx_4^{III} \\ j_1 & j_2 & j_3 & \rho c \end{vmatrix}$$

La grandeur $F_{(C)}(\bar{J})$ est le flux du quadrivecteur \bar{J} à travers la cloison C. Elle possède deux propriétés essentielles :

1°- $F_{(C)}(\bar{J})$ est un pseudo-invariant relativiste, c'est-à-dire que, pour une cloison C donnée, elle a la même valeur, quel que soit le système de référence utilisé pour l'évaluer. Cette propriété résulte du caractère tensoriel de \bar{J} et des éléments d'hypersurface : elle est tout à fait indépendante de la conservation de l'électricité.

2°- Si l'on considère deux cloisons différentes C et C', coupant le tube d'Univers, on a

$$F_{(C)}(\bar{J}) = F_{(C')}(\bar{J})$$

Cette seconde propriété exprime la conservation de l'électricité. En effet, le théorème flux-divergence appliqué dans l'espace-temps au domaine D compris à l'intérieur du tube d'Univers entre

les cloisons C et C' donne, compte tenu du sens positif choisi sur le tube,

$$\begin{aligned} F_{(C)}(\vec{J}) - F_{(C')}(\vec{J}) &= \int_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} \right) [dx_1, dx_2, dx_3, dx_4] \\ &= \int_D \operatorname{Div} \vec{J} [dx_1, dx_2, dx_3, dx_4] \end{aligned}$$

où :

$$\operatorname{Div} \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}$$

est la divergence quadridimensionnelle de \vec{J} . Si l'on admet la conservation de l'électricité traduite par l'équation $\operatorname{Div} \vec{J} = 0$ on a :

$$F_{(C')}(\vec{J}) = F_{(C)}(\vec{J})$$

Si le quadrivecteur \vec{J} n'obéissait pas à l'équation de continuité la première des propriétés de $F_{(C)}(\vec{J})$, son invariance, subsisterait, mais la seconde, sa constance quand on déplace la cloison C, ne subsisterait plus. Ceci met bien en lumière la différence entre l'invariance de la charge électrique et sa conservation.

Bref la grandeur $F_{(C)}(\vec{J})$, ayant même valeur pour toute cloison C coupant le tube d'Univers, est caractéristique de l'ensemble de ce tube : par définition, on la considère comme mesurant au facteur $\frac{1}{c}$ près "la charge électrique totale" de la distribution. Pour voir que cette définition est conforme à la notion usuelle de charge, il suffit de remarquer qu'un observateur prend naturellement une cloison C formée par des points de l'espace-temps qui, pour lui, sont simultanés et qu'il définira la charge électrique par :

$$e = \int_V \rho dv$$

V étant le volume qu'occupe la distribution électrique à l'instant t de son temps propre où il fait l'intégration.

Après cette étude rapide de la définition relativiste de la charge électrique, revenons à la définition donnée plus haut pour le moment cinétique propre :

$$S_{ij}^{(C)} = \int_C \sum_{k=1}^{k=4} \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k]$$

Pour une valeur donnée des indices i et j, il n'y a que deux termes non nuls dans la somme du second membre (à cause de l'antisymétrie du crochet). Mais, et c'est un point essentiel, le tenseur antisymétrique du second rang ainsi défini dépend du choix de la cloison C.

Physiquement, il est naturel (et nous verrons même qu'il est presque nécessaire dans la théorie quantique du spin) de définir dans chaque système Galiléen un tenseur S à l'aide d'une cloison C dont tous les points sont simultanés dans un système de référence. Si le mouvement du fluide est un mouvement d'ensemble à

caractère permanent, le tenseur ainsi défini pour un certain observateur Galiléen restera constant au cours du temps, mais quand on passe de ce premier observateur à un second en mouvement relatif par rapport au premier, on passera d'une cloison C_1 à une cloison C_2 et par suite d'un tenseur S_1 à un tenseur S_2 . Les tenseurs S sont donc définis par rapport à un observateur. Si toutes les lignes d'Univers des éléments du fluide sont parallèles, on peut considérer les cloisons C qui sont orthogonales aux lignes d'Univers dans l'espace-temps : elles correspondent au volume du fluide pour un observateur lié à son mouvement (système propre). On pourra définir un tenseur S en se servant de ces cloisons, c'est-à-dire en se plaçant dans le système propre. Nous verrons que c'est ce que fait M. v. Weyssenhoff. Mais le tenseur ainsi obtenu n'a pour composantes d'espace les composantes du moment cinétique propre que dans le système propre. Le même tenseur envisagé dans un système Galiléen autre que le système propre n'a plus pour composantes d'espace celles du moment cinétique propre.

Pour chaque observateur, nous aurons :

$$S_{ij} = \int_C \sigma^k [dx_i, dx_j, dx_k] \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$S_{i4} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

si nous intégrons dans l'espace propre de cet observateur. C'est un tenseur de ce type que nous avons rencontré précédemment.

Nous obtenons ainsi pour chaque observateur un tenseur $S^{(1)}$ lié à la cloison C qui forme "l'espace" de cet observateur.

Naturellement un deuxième observateur peut en principe calculer les composantes $S_{ij}^{(1)}$ du tenseur $S^{(1)}$ du premier observateur, mais il ne s'y intéresse pas et emploieira les composantes du tenseur $S^{(2)}$ qui lui correspond à lui-même et dont les composantes $S_{i4}^{(2)}$ sont nulles. Comme nous l'avons déjà noté, le fait que les composantes $S_{i4}^{(2)}$ sont nulles suffit à montrer que les divers tenseurs $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots$ sont différents les uns des autres car un tenseur antisymétrique de rang 2 ne peut pas avoir ses composantes S_{i4} nulles dans tous les systèmes Galiléens.

Dans la théorie du spin de l'électron, les remarques précédentes vont trouver leur application. La propagation de l'onde ψ de la particule à spin considérée définira un tube d'Univers dans l'espace-temps et nous serons amenés à considérer une "densité de spin" définie par un quadrivecteur dont les quatre composantes seront données par des formules du type :

$$\sigma^i = \psi^* (\sigma^i)_{op} \psi$$

où $(\sigma^i)_{op}$ est un opérateur dont nous aurons à préciser la forme. La définition précédente est conforme à la définition générale des densités en Mécanique ondulatoire. Suivant ces mêmes principes, on pourra calculer pour chaque observateur à l'instant t la valeur du tenseur S en intégrant sur la cloison C du tube d'Univers qui est formée par les points d'espace-temps simultanés pour l'observateur envisagé à son instant t . Si le mouvement de la particule est permanent, le tenseur S reste le même au cours

du temps pour chaque observateur mais même en ce cas il change quand on passe d'un observateur Galiléen à un autre. C'est là le point essentiel car il en résulte que les valeurs moyennes :

$$S_i = S_{jk} = \int_D \sigma^i d\tau = \int_D \psi^*(\sigma^i)_{op} \psi d\tau$$

(où i, j, k forment une permutation paire des indices $1, 2, 3$) ne se transforment pas comme les composantes d'espace d'un tenseur antisymétrique de rang 2 quand on passe d'un observateur Galiléen à un autre. Cette circonstance souvent méconnue doit rendre très prudent quand on veut assimiler le spin à un tenseur antisymétrique d'espace-temps.

En réalité, quand on s'occupe des variances relativistes, il est préférable de considérer uniquement la "densité de spin" qui, elle, a un caractère tensoriel tout à fait défini puisque les σ^i définis en chaque point de l'espace-temps se transforment comme les composantes d'un quadrivecteur. Le spin intégral doit plutôt être envisagé comme un vecteur d'espace bien défini dans chaque système de référence que comme un tenseur. Pourtant, nous le verrons, c'est un vecteur sans variance définie d'espace-temps qui a un sens physique dans la théorie quantique. C'est là un exemple des oppositions assez fréquentes qui se présentent entre idées quantiques et idées relativistes.

5. ASPECT RELATIVISTE DES MOMENTS MAGNÉTIQUES PROPRES

Nous avons vu que les particules à spin ont aussi un moment magnétique propre. L'examen de ce moment magnétique conduit à des conclusions assez analogues à celles des paragraphes précédents. Ce n'est pas le moment magnétique lui-même, c'est la densité de moment magnétique (intensité d'aimantation) qui a une variance tensorielle bien définie. Plus exactement, on ne peut pas séparer l'étude relativiste du moment magnétique propre de celle du moment électrique propre, les deux notions étant du point de vue relativiste aussi liées l'une à l'autre que celles de champ électrique et de champ magnétique. De même qu'en Electromagnétisme relativiste les six composantes du champ électrique et du champ magnétique s'unissent pour former un tenseur antisymétrique de second rang, les densités de moment électrique et de moment magnétique s'unissent de même pour former un autre tenseur antisymétrique du second rang. Soit M le vecteur d'espace "moment magnétique" et P le vecteur d'espace "moment électrique", les densités μ et π correspondantes sont par définition telles que :

$$M_i = \int_D \mu_i d\tau \quad ; \quad P_i = \int_D \pi_i d\tau \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

En posant :

$$\begin{aligned} m_{23} &= -m_{32} = \mu_x = \mu_1 & m_{31} &= -m_{13} = \mu_y = \mu_2 & m_{12} &= -m_{21} = \mu_z = \mu_3 \\ m_{14} &= -m_{41} = \pi_x = \pi_1 & m_{24} &= -m_{42} = \pi_y = \pi_2 & m_{34} &= -m_{43} = \pi_z = \pi_3 \end{aligned}$$

on définit un tenseur \underline{m} antisymétrique de rang 2. D'après les formules de transformation des tenseurs de cette espèce, on voit que, si par exemple, le moment électrique d'un corps dans un certain système Galiléen où il est au repos se trouve être nul sans que son moment magnétique le soit, dans un autre système en mouvement par rapport au premier, le corps possèdera à la fois un moment magnétique et un moment électrique : on peut dire qu'en passant du premier au second système, on voit le corps qui dans son système propre était magnétique sans être électriquement polarisé, devenir polarisé électriquement par suite de son mouvement. C'est là précisément ce qui se passe pour l'électron. Envisagé dans un système où il est au repos, l'électron a un moment magnétique propre, mais pas de moment électrique propre : envisagé dans un système où il est en mouvement, il a à la fois un moment magnétique propre et un moment électrique propre.

Il est aisé de trouver l'expression du vecteur $\vec{\pi}$ en fonction du vecteur $\vec{\mu}$ pour une particule magnétique en mouvement uniforme. En effet, dans le système propre de la particule, on a par hypothèse $\vec{\pi}^{(0)} = 0$. Or le tenseur \underline{m} étant antisymétrique, on a

$$(IV,e) \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_{ij} dx_1 - m_{i4} dx_4 = 0$$

comme on le voit aisément en écrivant cet invariant dans le système propre. Si dans cette équation on fait $i=1,2,3$ on trouve :

$$m_{ij} dx_j + m_{ik} dx_k = m_{i4} c dt$$

où i,j,k forment une permutation paire des indices 1,2,3. Tenant compte des valeurs des m_{ik} on trouve :

$$\vec{\pi} = \frac{1}{c} [\vec{\mu} \times \vec{v}]$$

ce qui donne l'expression de $\vec{\pi}$ dans tout système Galiléen.

De plus, si dans (IV,e) on fait $i=4$, on obtient :

$$(\vec{\pi} \cdot \vec{v}) = 0$$

Le vecteur $\vec{\pi}$ engendré par le mouvement est donc toujours normal à la vitesse \vec{v} . Ces formules sont valables dans la théorie de l'électron de Dirac et plus généralement pour toute particule à moment magnétique propre.

6. RAPPORT ENTRE LE MOMENT MAGNÉTICO-ÉLECTRIQUE ET LE SPIN

L'idée fondamentale de l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit sur le spin est que l'électron possède un moment de rotation propre égal à $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{4\pi}$ et un moment magnétique propre colinéaire ayant pour valeur $\frac{e\hbar}{4\pi m_e c}$ (magnéton de Bohr). Ces deux moments sont donc représentés par des vecteurs de même direction et de sens opposés (en raison de la charge négative de l'électron), le

moment magnétique propre se déduisant du moment cinétique propre ou spin par multiplication par le facteur $\frac{-e\hbar}{m_0 c}$.

$$\vec{M} = \frac{-e\hbar}{4\pi m_0 c} \vec{M}$$

Les considérations que nous venons de développer nous permettent de voir que cette relation entre les moments n'est exacte que dans le système propre de la particule. Dans tout système Galiléen, en effet, le moment cinétique propre ou spin est représenté par un vecteur de composantes :

$$S_x = \int \sigma_1 d\tau \quad S_y = \int \sigma_2 d\tau \quad S_z = \int \sigma_3 d\tau$$

où, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les composantes d'espace du quadrivecteur "densité de spin" considéré plus haut. Le moment magnétique propre de la particule et le moment électrique propre qui lui est associé par suite même de son mouvement sont représentés par deux vecteurs de composantes :

$$\vec{M}_x = \int \mu_x d\tau = \int m_{23} d\tau, \dots$$

$$\vec{P}_x = \int \pi_x d\tau = \int m_{14} d\tau, \dots$$

où m_{23}, \dots sont les composantes du tenseur antisymétrique de rang 2 "densité de moment magnétique et de moment électrique", précédemment défini. Quand on se place dans le système propre de la particule, on a :

$$\sigma_4 = 0, m^{14} = m^{24} = m^{34} = 0$$

et de plus :

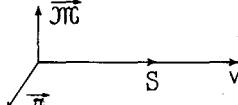
$$m_{23} = \frac{-e}{m_0 c} \sigma_1, \quad m_{31} = -\frac{e}{m_0 c} \sigma_2, \quad m_{12} = -\frac{e}{m_0 c} \sigma_3$$

d'où :

$$\vec{P} = 0, \quad \frac{\vec{M}}{S} = -\frac{e}{m_0 c}$$

L'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit est vérifiée dans le système propre.

Mais dans un autre système Galiléen où la particule est en mouvement, il n'en est plus ainsi. D'après les formules de transformation des composantes de $\vec{\sigma}$ et de \vec{M} , on voit que plus le mouvement de la particule est rapide, plus le vecteur \vec{S} tend à se coucher sur la trajectoire et le vecteur \vec{M} à se mettre normal à elle, le vecteur $\vec{\pi}$ en raison des formules $\vec{\pi} = \frac{1}{c} [\vec{\mu} \cdot \vec{v}]$ et $(\vec{\pi} \cdot \vec{v}) = 0$ étant toujours normal à la fois à \vec{M} et à la vitesse \vec{v} . A la limite pour v tendant vers c , les trois vecteurs prennent la disposition suivante :



qui rappelle la disposition des vecteurs électromagnétiques dans une onde électromagnétique, remarque qui m'a servi de guide dans l'élaboration de ma théorie du photon.

Les vecteurs moment magnétique propre et moment cinétique propre ne sont donc colinéaires (en sens inverse) que dans le système propre de l'électron.

7. THÉORIE DE M. JAN v. WEYSENHOFF

M. Jan.v.Weyssenhoff a publié (1) une série de mémoires où, développant des idées de Mathisson, Lubanski et Frenkel, il a établi une dynamique relativiste des fluides à spin et des particules à spin. Une tentative en ce sens a aussi été faite en France par M. Olivier Costa de Beauregard.

Je vais résumer ici brièvement, sans entrer dans tous les détails ni poursuivre les développements, quelques-uns des calculs de M.v. Weyssenhoff pour montrer leur liaison avec les conceptions exposées ci-dessus.

L'auteur part de l'idée qu'il faut introduire dans la théorie classique du spin un tenseur antisymétrique de rang 2 représentant la "densité de moment cinétique propre". Ce que nous avons dit précédemment montre qu'il faut faire des réserves sur cette hypothèse puisqu'en réalité la densité de spin est représentée par un quadrivecteur et non par un tenseur antisymétrique.

Weyssenhoff désigne par $s^{\alpha\beta}$ les composantes du tenseur qu'il introduit et définit les deux vecteurs à trois dimensions : \vec{s} de composantes s^{23} , s^{31} , s^{12} et \vec{q} de composantes s^{14} , s^{24} , s^{34} . Il pose comme condition :

$$(IV, f) \quad s_{\alpha\beta} u^\beta = s^{\alpha\beta} u_\beta = 0$$

(avec sommation sur β) où les u^β sont les composantes de la vitesse d'Univers:

$$u^1 = \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}; u^2 = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; u^3 = \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}; u^4 = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

d'où il résulte que les composantes s^{14} , s^{24} , s^{34} de \vec{s} s'annulent dans le système propre. La relation $s^{\alpha\beta} u_\beta = 0$ est équivalente à :

$$\vec{q} = \frac{1}{c} (\vec{s} \times \vec{v}) \text{ et } (\vec{q} \cdot \vec{s}) = 0$$

Le tenseur $s^{\alpha\beta}$ de Weyssenhoff représente bien au facteur constant $\frac{-e}{m_0 c}$ près le tenseur m^{ik} (densité de moment magnétique et électrique propres), mais d'après ce que nous avons dit plus

(1) Acta Physica Polonica, vol. IX (1947), pp. 8-53.

haut, il ne représente vraiment le moment cinétique propre que dans le système propre où l'on aura :

$$S_{(o)}^{23} = \sigma_{(o)}^1 \quad ; \quad S_{(o)}^{31} = \sigma_{(o)}^2 \quad ; \quad S_{(o)}^{12} = \sigma_{(o)}^3 \quad ; \quad S^{14} = S^{24} = S^{34} = 0$$

d'où en intégrant sur le volume propre :

$$S_{(o)}^{23} = S_{(o)}^1 = S_x^{(o)}, \dots \quad \text{avec} \quad S_{(o)}^{23} = \int S_{(o)}^{23} d\tau_o, \dots$$

ce qui est précisément les formules (IV,d).

Mais dans un système de référence autre que le système propre, le tenseur $S^{\alpha\beta}$ n'aura plus de relations simples avec le spin toujours défini par $S_x = \int \sigma^1 d\tau, \dots$ car les trois quantités $\int S^{23} d\tau = S^{23}, \int S^{31} d\tau = S^{31}$ et $\int S^{12} d\tau = S^{12}$ ne coïncident plus avec S_x, S_y, S_z .

En particulier dans un système où $v \approx c$ le vecteur \vec{S} (S_x, S_y, S_z) est couché sur la vitesse tandis que le vecteur S^{23}, S^{31}, S^{12} lui est perpendiculaire.

M. Weyssenhoff écrit la conservation de l'énergie et de l'impulsion sous la forme :

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$$

$T^{\alpha\beta}$ définissant le tenseur énergie-impulsion. Dans le cas des fluides sans spin, on pose $T^{\alpha\beta} = \mu_0 u^\alpha u^\beta$, μ_0 étant la densité de masse. Le tenseur $T^{\alpha\beta}$ est alors symétrique. M. Weyssenhoff, adoptant un point de vue dont M. Costa de Beauregard a plusieurs fois souligné l'importance, ne suppose pas le tenseur $T^{\alpha\beta}$ symétrique et écrit :

$$T^{\alpha\beta} = g^\alpha u^\beta$$

où g^α est le quadrivecteur "densité propre d'impulsion linéaire". Nous ne supposons pas que g^α soit colinéaire à u^α comme on le fait dans le cas de l'absence de spin.

Avec M. Weyssenhoff, nous désignerons à partir de maintenant par des indices grecs les indices d'Univers allant de 1 à 4 et par des indices latins les indices d'espace ordinaire allant de 1 à 3. Désignons par g^i les composantes de la quantité de mouvement au sens ordinaire; nous aurons :

$$T^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} g^i v^k & c \vec{g} \\ c \vec{u} v & c^2 \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^1 v^1 & g^1 v^2 & g^1 v^3 & c g^1 \\ g^2 v^1 & g^2 v^2 & g^2 v^3 & c g^2 \\ g^3 v^1 & g^3 v^2 & g^3 v^3 & c g^3 \\ c \mu v_1 & c \mu v_2 & c \mu v_3 & c^2 \mu \end{vmatrix}$$

La relation $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion. La relation $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, qui est équivalente à la précédente dans le cas de l'absence de spin, n'est plus exacte ici. La quantité de mouvement \vec{g} et la vitesse \vec{v} ne sont plus colinéaires. Dans le système propre de la particule, l'énergie est proportionnelle à la masse au repos.

Weyssenhoff introduit ensuite deux sortes de dérivation par rapport au temps, d'abord la dérivation lagrangienne classique (en suivant la particule)

$$d_t f = \partial_t f + v^k \partial_k f$$

puis la dérivation (pour les densités)

$$D_t f = d_t f + f \partial_k v^k = \partial_t f + \partial_k (f v^k)$$

On a

$$d_t (f d\tau) = (D_t f) d\tau \quad ; \quad d_t \int f d\tau = \int (D_t f) d\tau$$

car :

$$d_t (d\tau) = (\operatorname{div} \vec{v}) d\tau$$

Par analogie, on définit dans l'Univers de Minkowski des dérivation par rapport au temps propre prises le long de la ligne d'Univers d'une particule :

$$d_{t_o} f = \dot{f} = u^\nu d_\nu f$$

$$D_{t_o} f = d_{t_o} f + f \partial_\nu u^\nu = \partial_\nu (f u^\nu)$$

Si $d\Omega$ désigne un élément de volume quadridimensionnel, on a :

$$d_{t_o} (f d\Omega) = (D_{t_o} f) d\Omega$$

car :

$$d_{t_o} (d\Omega) = d\Omega \operatorname{Div} \vec{u} = d\Omega \partial_\nu u^\nu$$

Mais $d\Omega = d\tau_o \cdot dt_o$, d'où :

$$d_{t_o} (f d\tau_o) = (D_{t_o} f) d\tau_o$$

On a donc :

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta (G^\alpha u^\beta) = D_{t_o} G^\alpha$$

d'où :

$$D_{t_o} G^\alpha = 0$$

ce qui exprime la conservation de l'impulsion.

M.Weyssenhoff exprime la conservation du moment total de la quantité de mouvement (orbital+spin) en écrivant la condition :

$$D_{t_o} (x^\alpha G^\beta - x^\beta G^\alpha) + D_{t_o} S^{\alpha\beta} = 0$$

Elle exprime la conservation dans le système propre : d'ailleurs $S^{\alpha\beta}$ ne représente le spin que dans ce système.

On a :

$D_{t_o} (fg) = f D_{t_o} g + g d_{t_o} f = g D_{t_o} f + f d_{t_o} g = d_{t_o} f + d_{t_o} g + fg \partial_\nu u^\nu$
pour f et g quelconques d'après les définitions admises. L'équation de conservation s'écrit donc :

$$D_{t_o} S^{\alpha\beta} = G^\alpha u^\beta - G^\beta u^\alpha = T^{\alpha\beta} - T^{\beta\alpha}$$

On voit que l'existence du spin est reliée à la non-symétrie du tenseur T comme M. Costa de Beauregard l'avait fait observer. Multiplions l'équation précédente par u_β et remarquons que $u^\beta u_\beta = -c^2$, il vient, en posant :

$$\mu_o = -\frac{1}{c^2} u_\beta G^\beta$$

$$G^\alpha = \mu_o u^\alpha - \frac{1}{c^2} u_\beta D_{t_o} S^{\alpha\beta} = \mu_o u^\alpha + \frac{1}{c^2} S^{\alpha\beta} \dot{u}_\beta$$

la dernière expression s'obtenant en appliquant l'opérateur D_{t_0} à l'équation $S^{\alpha\beta}u_\beta = 0$, et en posant :

$$\dot{u}_\beta = d_{t_0} u_\beta$$

Ayant ainsi défini des densités à caractère tensoriel, l'auteur les intègre pour obtenir des grandeurs intégrales. Mais cette opération ne laisse les variances intactes que si l'on intègre dans le volume propre. On pose donc :

$$G^\alpha = \int g^\alpha d\tau_0$$

$$S^{\alpha\beta} = \int s^{\alpha\beta} d\tau_0$$

$$m_0 = \int \mu_0 d\tau_0$$

La troisième définition va de soi, mais il y a d'intéressantes remarques à faire sur la seconde. Dans le système propre, le tenseur $S^{\alpha\beta}$ a ses composantes d'espace $S^{23}_{(0)}$, $S^{31}_{(0)}$, $S^{12}_{(0)}$, qui coïncident avec les composantes du vecteur spin et $S^{11}_{(0)} = S^{22}_{(0)} = S^{33}_{(0)} = 0$, mais il n'en est pas de même dans les autres systèmes Galiléens. Le tenseur $S^{\alpha\beta}$ est donc le tenseur S qui correspond au spin pour l'observateur propre tel que nous l'avions précédemment défini : il ne correspond pas au spin dans les autres systèmes Galiléens. Ce point paraît avoir échappé à M.v. Weyssenhoff.

Des définitions précédentes, en remarquant que :

$$d_{t_0} G^\alpha = \int (D_{t_0} g^\alpha) d\tau_0$$

et en tenant compte des relations $D_{t_0} g^\alpha = 0$ et $s^{\alpha\beta} u_\beta = 0$, on tire :

$$\dot{G}^\alpha = 0 \quad ; \quad S^{\alpha\beta} u_\beta = 0 \quad ; \quad \dot{S}^{\alpha\beta} = G^\alpha u^\beta - G^\beta u^\alpha$$

$$G^\alpha = m_0 u^\alpha + \frac{1}{c^2} S^{\alpha\beta} \dot{u}_\beta \quad ; \quad m_0 = - \frac{1}{c^2} u_\beta G^\beta$$

On en déduit :

$$m_0 \dot{u}^\alpha + \frac{1}{c^2} S^{\alpha\beta} \dot{u}_\beta = 0$$

$$\dot{S}^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2} S^{\alpha\sigma} \dot{u}_\sigma u^\beta - \frac{1}{c^2} S^{\beta\sigma} \dot{u}_\sigma u^\alpha$$

Dans la première équation, on a supprimé un terme en $\dot{S}^{\alpha\beta} \dot{u}_\beta$: en effet il est nul car on a :

$$S^{\alpha\beta} \dot{u}_\beta = G^\alpha u^\beta \dot{u}_\beta - G^\beta u^\alpha \dot{u}_\beta, \text{ or } u^\beta \dot{u}_\beta = 0$$

d'après :

$$u^\beta u_\beta = -c^2 \text{ et } G^\beta \dot{u}_\beta = m_0 \dot{u}_\beta u^\beta + \frac{1}{c^2} S^{\alpha\beta} \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta$$

qui est nul en raison de l'antisymétrie de $S^{\alpha\beta}$.

De $m_0 = -\frac{1}{c^2} u_\beta G^\beta$, on tire $\dot{m}_0 = -\frac{1}{c^2} u_\beta \dot{G}^\beta - \frac{1}{c^2} \dot{u}_\beta G^\beta$ et $\dot{u}_\beta G^\beta$ est nul ainsi que \dot{G}^β , de sorte que $\dot{m}_0 = 0$. Donc m_0 est une constante, la masse au repos de la particule.

On trouve encore $\dot{S}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$ parce que $S^{\alpha\beta} u_\beta = 0$, d'où :
 $S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = \vec{S} \cdot \vec{S} - \vec{Q} \cdot \vec{Q} = S_o^2 = C^2$

Le moment angulaire propre de la particule est constant.

Je n'exposerai pas la partie du mémoire de M. Weyssenhoff consacrée à l'intégration des équations. Cette intégration conduit à considérer la particule à spin comme étant animée dans son système propre d'un mouvement circulaire perpendiculaire au vecteur $\vec{S}^{(e)}$. Cette image est certainement intéressante et peut être utilement comparée au "tremblement de Schrödinger". Mais, comme l'auteur lui-même l'a constaté, elle présente des difficultés quand on la compare à la théorie de Dirac et elle ne présente pas le caractère quantifié qui est aujourd'hui indispensable pour représenter les propriétés des corpuscules à spin. Par son caractère intuitif, elle pourrait même à ce sujet suggérer des idées fausses.

Je m'étendrai davantage sur l'analyse que M. v. Weyssenhoff a donnée du mouvement de la particule à spin dans un champ électromagnétique. Ce sera d'ailleurs en partie pour critiquer son raisonnement qui me paraît avoir des points faibles.

Nous introduirons d'abord le tenseur électromagnétique F tel que :

$$\vec{H} (F^{23}, F^{31}, F^{12}) \quad \text{et} \quad \vec{E} (F^{14}, F^{24}, F^{34})$$

et le tenseur "densité de moment magnétique et électrique propres" $m^{\alpha\beta}$ qui, nous le savons, est proportionnel à $s^{\alpha\beta}$ dans tous les systèmes de référence :

$$m^{\alpha\beta} = \chi s^{\alpha\beta}$$

avec $\chi = -\frac{e}{m_e c}$ pour l'électron.

M. Weyssenhoff pose que l'énergie de la particule dans un champ électromagnétique est :

$$U = -\vec{M} \cdot \vec{H} - \vec{J} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}$$

La dernière expression nous paraît inexacte car $m^{\alpha\beta}$ est la densité du moment électromagnétique et non ce moment lui-même. Il convient de poser :

$$U = -\frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} d\tau$$

Ici intervient une circonstance intéressante. $U = -\vec{M} \cdot \vec{H} - \vec{J} \cdot \vec{E}$ a les dimensions physiques et le sens d'une énergie. Elle n'a cependant pas la variance relativiste d'une énergie : elle n'est pas la composante de temps d'un quadrivecteur. Si l'on admettait l'expression de M. Weyssenhoff :

$$(IV, g) \quad U = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}$$

U serait un invariant. Mais en prenant l'expression correcte :

$$U = -\frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} d\tau = -\frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} d\tau_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

on voit que U est de la forme :

$$U = U_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

où U_0 est l'invariant $-\frac{1}{2} \int F^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} d\tau_0$. U se transforme comme un volume. Si la particule est assez petite pour être assimilée à un point, on pourra poser :

$$G_\alpha = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta + \partial_\alpha \frac{1}{2} \int F^{\rho\sigma} m_{\rho\sigma} d\tau_0$$

où $\frac{e}{c} F_{\alpha\beta} u^\beta$ est la force de Lorentz (à quatre dimensions) et où ∂_α indique la dérivation par rapport aux coordonnées de la particule considérée comme une unité (coordonnées du centre de gravité de la particule). Les trois premières équations donnent (car $d\tau_0 = dt \sqrt{1 - \beta^2}$) (f = force de Lorentz à trois dimensions) :

$$\frac{dG^i}{dt} = f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} (U_0 \sqrt{1 - \beta^2}) = f_i - \partial_i U \quad i = 1, 2, 3$$

et la quatrième exprime la conservation de l'énergie :

$$\frac{dW}{dt} = (f_i \cdot v_i) - \frac{\partial}{\partial t} U$$

Pour exprimer le couple exercé sur la particule, on écrira :

$$S^{\alpha\beta} = G_\alpha u_\beta - G_\beta u_\alpha + \int (m_{\alpha\sigma} F_\beta^\sigma - m_{\beta\sigma} F_\alpha^\sigma) d\tau_0$$

Nous avons ajouté l'intégrale qui ne figure pas dans le travail de Weyssenhoff.

Comme :

$$m_0 = \int \mu_0 d\tau_0 = -\frac{1}{c^2} u^\beta \int G_\beta d\tau_0$$

on a :

$$\dot{m}_0 = -\frac{1}{c^2} u^\beta \int \dot{G}_\beta d\tau_0 = -\frac{1}{c^2} \dot{G}^\beta u_\beta = -\frac{1}{c^2} \dot{G}_\beta u^\beta = d_{t_0} \left(-\frac{1}{2c^2} \int m^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} d\tau_0 \right)$$

La quantité :

$$\begin{aligned} m_{00} &= m_0 + \frac{1}{2c^2} \int F_{\rho\sigma} m^{\rho\sigma} d\tau_0 = -\frac{1}{c^2} G^\beta u_\beta + \frac{1}{2c^2} \int F_{\rho\sigma} m^{\rho\sigma} d\tau_0 \\ &= m_0 - \frac{U_0}{c^2} = m_0 - \frac{U}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

qui se réduit à m_0 si les champs sont nuls, est une constante du mouvement. La masse propre variable m_0 est la somme de la partie constante m_{00} et de la partie variable $\frac{U_0}{c^2}$. En nommant m'_0 ce que Weyssenhoff appelle m_0 et m_0 ce qu'il appelle m_{00} , nous aurons donc :

$$m'_0 = m_{00} + \frac{U_0}{c^2}$$

ce qui définit une masse propre variable m'_0 de la particule à spin dans le champ électromagnétique que nous retrouverons ultérieurement.

Remarque. - La relation :

$$(IV, f) \quad s_{\alpha\beta} u^\beta = 0$$

jointe à la relation de définition :

$$(IV, g) \quad \mu^{\alpha\beta} = x s^{\alpha\beta}$$

nous donne :

$$\mu_{\alpha\beta} u^\beta = 0$$

En désignant (1) par $\vec{\pi}^{(o)}$ le quadrivecteur $\vec{\pi}^{(o)} = m_0 c \vec{u}$, nous obtenons :

$$(IV, h) \quad \mu_{\alpha\beta} \pi^{(o)\beta} = 0$$

relation que nous utiliserons ultérieurement.

(1) ne pas confondre avec la densité de moment électrique propre.

CHAPITRE V

LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON A SPIN DE DIRAC

I. LES ÉQUATIONS D'ONDES DE L'ÉLECTRON A SPIN

M. Dirac a trouvé les équations fondamentales de sa théorie en cherchant à construire une Mécanique ondulatoire de l'électron qui soit relativiste et qui permette de conserver pour la densité de probabilité de présence une forme analogue à la forme définie positive $|\psi|^2$, valable dans la Mécanique ondulatoire non-relativiste primitive.

S'inspirant d'une tentative antérieure de M. Pauli, il a admis que la fonction d'onde ψ de l'électron devait avoir plusieurs composantes ψ_k et que la densité de probabilité de présence, devant être définie positive, s'exprimait en fonction des ψ_k par :

$$\rho = \sum_k |\psi_k|^2$$

Pour que la probabilité de toutes les positions possibles de l'électron soit égale à 1, il faut alors normer la fonction en posant :

$$\int_D \sum_k |\psi_k|^2 d\tau = 1$$

où D est le domaine d'espace où peut se trouver l'électron. Mais cette condition n'est acceptable que si, une fois réalisée à un instant donné, elle reste ensuite réalisée en vertu des équations d'ondes. Or M. Dirac a remarqué que, pour qu'il en soit ainsi, les équations satisfaites par les ψ_k devaient être du premier ordre en t puisqu'il faut que la seule donnée des ψ_k à un instant initial suffise pour déterminer toute leur évolution ultérieure. La symétrie relativiste entre temps et coordonnées d'espace indique alors que l'on doit chercher pour les ψ_k un système d'équations aux dérivées partielles qui soit du premier ordre par rapport aux variables d'espace et de temps.

Parvenu à cette conclusion, Dirac a montré qu'il faut prendre au moins quatre fonctions ψ_k et il a admis qu'il fallait se borner à quatre. Or au début du développement de la Mécanique ondulatoire, plusieurs auteurs (de Donder, Fock, Gordon et L. de Broglie) ont donné simultanément à l'équation d'ondes une forme relativiste. Pour cela, ils étaient partis de la remarque qu'en Dynamique relativiste ancienne, l'énergie W d'un corpuscule est reliée, en l'absence de champ, aux composantes de son impulsion \vec{p} et à sa masse propre m_0 par la formule :

$$\frac{W^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2) = 0$$

Dans cette équation, remplaçons W par l'opérateur $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$ et chaque p_i par l'opérateur $\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_i}$. Nous obtenons un opérateur et, en appliquant cet opérateur à la fonction ψ et égalant le résultat à zéro, on obtient :

$$\square \psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \psi = 0 \quad \text{avec} \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

équation que l'on avait proposé de prendre comme équation d'ondes de la Mécanique ondulatoire à une seule fonction d'onde en l'absence de champ.

Cette tentative n'avait pas donné de résultats satisfaisants (notamment pour le calcul des niveaux de l'hydrogène) et les raisonnements de Dirac montrent qu'une telle équation du second ordre ne peut servir de base à une Mécanique ondulatoire de l'électron satisfaisante et qu'il faut écrire quatre équations du premier ordre pour quatre ψ_k . Néanmoins, il était naturel de penser que du moins en l'absence de champ extérieur, chacun des quatre ψ_k doit obéir à la précédente équation du second ordre. Bref, M. Dirac a été amené à chercher pour les quatre ψ_k quatre équations du premier ordre en x, y, z, t valables en l'absence de champs et entraînant alors pour chacun des ψ_k l'équation :

$$\square \psi_k + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \psi_k = 0$$

Pour écrire ces équations du premier ordre, on est amené à employer quatre matrices hermitiennes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ à quatre lignes et quatre colonnes et l'on définit le symbole $\alpha_i \psi_k$ par :

$$\alpha_i \psi_k = \sum_{j=1}^{j=4} (\alpha_i)_{kj} \psi_j$$

de sorte qu'appliquer à ψ_k l'opération α_i revient à faire une certaine combinaison linéaire des quatre ψ_j .

On impose aux quatre matrices α_i les conditions suivantes : 1°- le carré de chacune d'elles doit être égal à la matrice unité; 2°- deux matrices α_i différentes anticommutent. Ces deux conditions peuvent se résumer par la formule unique :

$$(V, a) \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} \cdot 1$$

où $\mathbf{1}$ représente la matrice unité à quatre lignes et quatre colonnes :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Ces conditions ne suffisent d'ailleurs pas à déterminer complètement les matrices α_i , mais nous allons voir que l'indétermination qui subsiste sur les matrices α_i n'entraîne aucune indétermination dans les conséquences physiques de la théorie.

Les équations de Dirac s'écrivent symboliquement avec l'aide des matrices α_i :

$$(V, b) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + x m_0 c \alpha_4 \right) \right] \psi_k = 0$$

$k = 1, 2, 3, 4$ et $x = \frac{2\pi i}{h}$. Ceci représente quatre équations simultanées entre les quatre ψ_k .

Si l'on applique au premier membre de (V, b) l'opérateur :

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + x m_0 c \alpha_4 \right) \right]$$

on vérifie en tenant compte de (V, a) que l'on trouve pour chacun des ψ_k :

$$\square \psi_k + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \psi_k = 0 \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Il nous reste à expliquer pourquoi le fait que les matrices α_i restent pour une large mesure arbitraires, n'entraîne pas une indétermination des conséquences physiques de (V, b). Pour le montrer, nous partirons du résultat suivant : on peut prouver que si $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ et $\alpha'_1, \dots, \alpha'_4$ sont deux ensembles de matrices hermitiennes satisfaisant chacun aux équations (V, a), il est possible de trouver une matrice unitaire S à quatre lignes et quatre colonnes telle que l'on ait :

$$\alpha'_i = S^{-1} \alpha_i S = S^* \alpha_i S$$

Autrement dit, on peut toujours passer des α_i aux α'_i par une transformation canonique qui conserve le caractère hermitien et les relations de commutation (V, a).

De l'équation de Dirac écrite avec les α'_i

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha'_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha'_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha'_3 + x m_0 c \alpha'_4 \right) \right] \psi'_k = 0$$

ou encore

$$0 = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} S^{-1} \alpha_1 S - \frac{\partial}{\partial y} S^{-1} \alpha_2 S - \frac{\partial}{\partial z} S^{-1} \alpha_3 S - x m_0 c S^{-1} \alpha_4 S \right] \psi'_k$$

on tire immédiatement en multipliant en avant par S que les

quantités $S\psi_k$ sont solutions des équations de Dirac écrites avec les α_i . Les quantités :

$$\psi_k = S\psi'_k \quad (k=1,2,3,4)$$

sont des combinaisons linéaires des ψ'_k . Donc changer les α_i revient à faire une transformation unitaire sur les ψ_k . Or les grandeurs physiques que l'on rencontre en théorie de Dirac sont

toutes, nous le verrons, de la forme $\sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* A \psi_k$ ou $\int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* A \psi_k d\tau$ où

A est un opérateur linéaire et hermitien qui peut contenir les α_i ou leurs produits et par suite opérer sur les indices k des ψ_k . Quand on passe d'un système de matrices α_i à un système α'_i (on dit alors qu'on passe de la représentation α_i à la représentation α'_i) l'opérateur A devient $A' = S^{-1} A S$ et la quantité

$\sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* A \psi_k$ devient en tenant compte de $S^{-1} = S^+$.

$$\sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* A \psi_k = \sum_{k=1}^{k=4} S^* \psi'_k^* A S \psi'_k = \sum_{k=1}^{k=4} \psi'_k^* S^{-1} A S \psi'_k = \sum_{k=1}^{k=4} \psi'_k^* A' \psi'_k$$

Donc les grandeurs ayant un sens physique gardent la même valeur quand on change de représentation. Grâce à cette circonstance, l'indétermination partielle des α_i n'entraîne aucune indétermination dans les prévisions physiquement vérifiables de la théorie de Dirac, ce qui est évidemment nécessaire pour que cette indétermination des α_i soit acceptable.

Les équations de Dirac peuvent s'écrire sous la forme condensée :

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$$

H étant l'opérateur hamiltonien de Dirac qui est donné par :

$$H = \frac{c}{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 + x m_0 c \alpha_4 \right)$$

Dans le cas général où l'électron se meut dans un champ électromagnétique dérivant du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \vec{A} , Dirac remplace les équations de propagation variables en l'absence de champ par les équations suivantes :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{e}{c} V \right) \psi_k = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + x \frac{e}{c} A_x \right) \alpha_1 + \left(\frac{\partial}{\partial y} + x \frac{e}{c} A_y \right) \alpha_2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} + x \frac{e}{c} A_z \right) \alpha_3 + x m_0 c \alpha_4 \right] \psi_k$$

pour $k=1,2,3,4$. (la charge de l'électron est désignée par $-e$)

Profitant de l'indétermination des α_i , nous ferons généralement usage des matrices suivantes dont l'emploi est commode :

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dont le caractère hermitien est évident et qui vérifient les relations (V, a) .

Avec ce choix des α_i , les équations de Dirac s'écrivent :

$$(V, c) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_4 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_3 - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi_1, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_4 - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi_2, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_2 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_1 + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi_3, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_4}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi_1 - \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \psi_4 \end{array} \right.$$

On peut être surpris par la forme très dissymétrique de ces équations qui font jouer un rôle particulier à l'axe des z. Pour comprendre le sens de cette dissymétrie, il faut se rappeler que le rôle des fonctions d'onde est essentiellement de permettre l'évaluation de certaines probabilités. Or, pour l'électron à spin, les questions de probabilité doivent être posées par rapport à un certain axe de référence D : on peut par exemple se demander quelles sont les valeurs possibles de la composante du spin dans la direction de référence D et les probabilités de ces valeurs possibles. Le choix que nous avons fait des α_i correspond au cas où la direction de référence D coïncide avec l'axe des z. Les ψ_k solutions des équations (V, c) donnent, nous le verrons plus loin, les probabilités des deux valeurs possibles de la composante z du spin. Si on voulait répondre à une question de probabilité de valeur du spin posée pour une direction de référence qui ne coïncide pas avec la direction choisie initialement comme axe des z, il faudrait d'abord faire un changement d'axe amenant oz dans la direction D et ce sont les nouveaux ψ'_k (qui, nous le verrons plus loin, sont des combinaisons linéaires des anciens ψ_k) qui nous fourniraient les probabilités cherchées.

2. INVARIANCE RELATIVISTE DES ÉQUATIONS DE DIRAC

M. Dirac a montré que, si l'on fait un changement de système de référence Galiléen en soumettant les coordonnées à une transformation de Lorentz, les équations de propagation gardent la même forme dans le nouveau système que dans l'ancien avec les mêmes valeurs des α_i , les composantes ψ_k de la fonction d'onde subissant une transformation linéaire de la forme :

$$\psi_k = \sum_{l=1}^{l=4} \Lambda_{kl} \psi_l \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Les coefficients Λ_{kl} sont les éléments d'une matrice Λ à quatre lignes et quatre colonnes qui, dans le cas général, n'est ni hermitienne, ni unitaire. La matrice Λ dépend naturellement de la transformation de Lorentz qui est effectuée, mais il faut noter que la transformation des quatre ψ_k n'est pas celle que subissent les quatre composantes d'un quadrivecteur d'espace-

temps. L'être mathématique ψ de la théorie de Dirac, bien qu'ayant quatre composantes, n'est donc pas un quadrivecteur : il appartient à une catégorie d'êtres mathématiques que l'on n'avait pas introduits en Physique avant la théorie de Dirac et que l'on étudie maintenant dans la théorie des spineurs. Pour trouver dans la Mécanique ondulatoire relativiste de Dirac des grandeurs se transformant lors d'une transformation de Lorentz comme les composantes d'un tenseur, il faut former certaines combinaisons bilinéaires des ψ_k et des ψ_k^* dont nous aurons plus loin à parler plus longuement.

Pour démontrer l'invariance des équations de Dirac, nous nous servirons des variables d'Univers $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ et nous poserons par définition :

$$P_j = -\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e}{c} A_j \quad ; \quad (j = 1, 2, 3) \quad ; \quad P_4 = -\frac{-h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{e}{c} iV$$

Nous écrirons alors les équations de Dirac sous la forme symbolique :

$$\left(\frac{P_4}{i} + \sum_{j=1}^{j=3} P_j \alpha_j + m_0 c \alpha_4 \right) \psi_k = 0$$

d'où, après multiplication par $i \alpha_4$ en avant :

$$\left(\alpha_4 P_4 + \sum_{j=1}^{j=3} i \alpha_4 \alpha_j P_j + i m_0 c \right) \psi_k = 0$$

Nous remplaçons maintenant, avec von Neumann, les matrices α_i par des matrices γ_i définies par les équations :

$$\gamma_1 = i \alpha_4 \alpha_1 \quad ; \quad \gamma_2 = i \alpha_4 \alpha_2 \quad ; \quad \gamma_3 = i \alpha_4 \alpha_3 \quad ; \quad \gamma_4 = \alpha_4$$

Il est facile de vérifier que l'on a encore comme pour les α_i :

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij} \cdot 1$$

Les équations de Dirac s'écrivent alors symboliquement :

$$\left(\sum_{j=1}^{j=4} P_j \gamma_j + i m_0 c \right) \psi_k = 0$$

Cette forme élégante est en accord avec l'idée relativiste que les coordonnées d'espace et de temps doivent jouer toujours un rôle symétrique : elle a, par contre, l'inconvénient de mettre moins en évidence que l'équation en α_i le rôle particulier que joue le temps dans les théories quantiques.

Supposons maintenant que nous changions d'axes galiléens, les coordonnées d'espace-temps subissant alors une transformation de Lorentz. Il est bien connu en Relativité qu'une telle transformation équivaut à une rotation des axes dans l'Univers de Minkowski. Les nouvelles variables x'_i après la transformation seront donc reliées aux anciennes par les formules :

$$x_i = \sum_j \alpha_{ij} x'_j$$

α étant une matrice à quatre lignes et quatre colonnes. En raison du caractère purement imaginaire de la variable x_4 d'Univers, α n'est pas une matrice réelle : ceux de ses éléments qui con-

tiennent une fois l'indice 4 sont purement imaginaires. De plus, on a la relation d'orthogonalité :

$$\sum_1^4 \circ_{1i} \circ_{1j} = \sum_1^4 \circ_{1i} \circ_{1j} = \delta_{ij}$$

Il est visible que les P_i se transforment comme les x_i , c'est-à-dire que :

$$P_i = \sum_{j=1}^{j=4} \circ_{ij} P'_j$$

Après le changement d'axes, l'équation de Dirac s'écrira donc :

$$\left(\sum_1^4 \gamma_i \sum_{j=1}^{j=4} \circ_{ij} P'_j + im_0 c \right) \psi_k = 0$$

où les composantes ψ_k du ψ peuvent être exprimées à l'aide des nouvelles variables x'_i . Si nous posons :

$$(V, d) \quad \gamma'_j = \sum_{i=1}^{i=4} \circ_{ij} \gamma_i$$

nous pourrons écrire :

$$\left(\sum_{j=1}^{j=4} \gamma'_j P'_j + im_0 c \right) \psi = 0$$

L'équation (V, d) exprime les matrices γ'_j en fonction des matrices γ_i . Si l'on veut préciser son sens, on écrira :

$$(\gamma'_j)_{mn} = \sum_{i=1}^{i=4} \circ_{ij} (\gamma_i)_{mn}$$

où $(\gamma_i)_{mn}$ par exemple est l'élément mn de γ_i .

Comme l'on a

$$(\gamma'_j)_{mn}^* = \sum_{i=1}^{i=4} \circ_{ij}^* (\gamma_i)_{mn}^* = \sum_{i=1}^{i=4} \circ_{ij}^* (\gamma_i)_{nm} \neq (\gamma'_j)_{nm}$$

on voit que les γ'_j ne sont pas hermitiennes parce que les \circ_{ij} ne sont pas tous réels. ($\circ_{ij}^* \neq \circ_{ij}$)

Par contre, il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \gamma'_i \gamma'_j + \gamma'_j \gamma'_i &= \sum_{kl} \circ_{ki} \circ_{lj} (\gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k) = \sum_{kl} \circ_{ki} \circ_{lj} 2 \delta_{kl} \\ &= 2 \sum_k \circ_{ki} \circ_{kj} = 2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Si les γ'_j étaient hermitiennes, elles seraient reliées aux γ_i , d'après un résultat général énoncé précédemment, par la formule

$$\gamma'_i = S^{-1} \gamma_i S$$

où S serait unitaire. Il ne peut pas en être ainsi, puisque les transformations canoniques conservent le caractère hermitien et que les γ'_j ne sont pas hermitiennes. Par contre, nous pouvons avoir une relation de la forme :

$$(V, e) \quad \gamma'_i = \Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda$$

Λ étant une matrice qui, en général, n'est pas unitaire ($\Lambda^{-1} \neq \Lambda^+$). Cette transformation des γ conservera évidemment les relations de commutation, mais ne conserve pas le caractère hermitien.

Nous allons pour l'instant admettre l'existence de la relation (V, e) , nous réservant de revenir plus loin sur sa démonstration. L'équation de Dirac en coordonnées x_j s'écrira alors :

$$\left(\sum_{j=1}^{j=4} \Lambda^{-1} \gamma_j \Lambda P'_j + i m_0 c \right) \psi = 0$$

Multiplions en avant par Λ et remarquons que la matrice Λ correspondant à une opération effectuée sur les indices des ψ_k commute avec P'_j . Nous aurons :

$$\left(\sum_{j=1}^{j=4} \gamma_j P'_j + i m_0 c \right) \Lambda \psi = 0$$

Il en résulte que la fonction $\psi' = \Lambda \psi$ de composantes $\psi'_k = \sum_j \Lambda_{kj} \psi_j$ est solution des équations de Dirac dans le système des variables primées avec les mêmes matrices γ_i (ou α_i) que dans le système primitif. C'est bien là le résultat que nous voulions établir.

Mais il nous reste à démontrer la relation (V, e) . Pour cela, nous remarquerons tout d'abord que cette transformation forme un groupe, car, si l'on a :

$$\gamma'_i = \Lambda_1^{-1} \gamma_i \Lambda_1 \quad ; \quad \gamma''_i = \Lambda_2^{-1} \gamma'_i \Lambda_2$$

on a aussi :

$$\gamma''_i = \Lambda_2^{-1} \Lambda_1^{-1} \gamma_i \Lambda_1 \Lambda_2 = (\Lambda_1 \Lambda_2)^{-1} \gamma_i (\Lambda_1 \Lambda_2)$$

On en conclut aisément que, si la formule est vraie pour une rotation infinitésimale des axes d'Univers, elle est encore vraie pour une rotation finie : il suffit de le démontrer pour une rotation infinitésimale. Or pour une telle rotation, on pourra poser :

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

les ε_{ij} étant des quantités très petites dont on pourra négliger les carrés et les produits. Pour que la condition d'orthogonalité soit satisfaite, il faut alors que :

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \quad ; \quad \varepsilon_{ii} = 0$$

La matrice Λ est peu différente de la matrice 1 et nous pourrons poser :

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T_{kl} \quad ; \quad T_{kl} = -T_{lk}$$

les ε étant très petits, d'où au second ordre près en ε :

$$\Lambda^{-1} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T_{kl}$$

Les T_{kl} sont des matrices dont les éléments sont inconnus. Nous avons à démontrer qu'on peut choisir les T_{kl} de façon à avoir :

$$\sum_j \epsilon_{ji} \gamma_j = \Lambda^{-1} \gamma_i \Lambda$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \gamma_i + \sum_j \varepsilon_{ji} \gamma_j &= \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T_{kl} \right) \gamma_i \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} T_{kl} \right) \\ &= \gamma_i + \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} (\gamma_i T_{kl} - T_{kl} \gamma_i) + \dots \end{aligned}$$

aux termes en Σ^2 près, soit :

$$\sum_j \varepsilon_{ji} \gamma_j = \frac{1}{2} \sum_{kl} \varepsilon_{kl} (\gamma_i T_{kl} - T_{kl} \gamma_i) ; \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Cette équation matricielle admet comme solution :

$$T_{kl} = -T_{lk} = -\frac{1}{2} \gamma_k \gamma_l$$

Nous avons ainsi démontré l'existence de la matrice Λ pour une rotation infinitésimale des axes d'Univers et nous en avons trouvé l'expression. Il en résulte, nous l'avons dit, l'existence générale d'une matrice Λ pour une transformation quelconque de Lorentz et la démonstration de l'invariance relativiste des équations de Dirac se trouve ainsi achevée.

La matrice Λ n'est unitaire que si la transformation des axes envisagée se réduit à une simple rotation des axes d'espace sans mouvement relatif. Pour un changement d'axes avec mouvement relatif, Λ n'est pas unitaire (on peut, en effet, montrer que $\Lambda^* = \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4$ et non $\Lambda^* = \Lambda^{-1}$). Il en résulte que :

$$\sum_k \psi'_k * \psi'_k = \sum_k (\Lambda \psi_k)^* \Lambda \psi_k = \sum_k \psi_k^* \Lambda^* \Lambda \psi_k$$

n'est pas égal à $\sum_k \psi_k^* \psi_k$ car : $\Lambda^* \Lambda = \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4 \Lambda \neq 1$ La probabilité de présence n'est donc pas invariante pour une transformation de Lorentz avec mouvement relatif : nous verrons en effet qu'elle est la composante de temps d'un quadrivecteur.

3. LE SPIN DE L'ÉLECTRON EN THÉORIE DE DIRAC

Ce qu'il y a de remarquable en théorie de Dirac, c'est que, partie d'un effort pour constituer une Mécanique ondulatoire relativiste de l'électron, sans qu'il soit explicitement question de spin, elle s'est trouvée avoir automatiquement introduit l'existence du moment cinétique propre et du moment magnétique propre qui était réclamée par l'interprétation des faits expérimentaux.

En Mécanique ondulatoire non relativiste, nous avions trouvé le résultat suivant tout à fait analogue à un résultat de Mécanique classique :

"Dans un champ de force central, les grandeurs "composantes du moment cinétique orbital M " correspondant aux opérateurs $(x p_y - y p_x)_{op}, \dots$, sont des intégrales premières". Au contraire, en Mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac, les composantes du moment cinétique orbital ne commutent pas avec l'hamiltonien et ne sont pas des intégrales premières. Pour obtenir en théorie de Dirac des intégrales premières, c'est-à-dire des opérateurs qui commutent avec l'Hamiltonien H , on est conduit à ajouter respectivement à chacune des composantes du moment orbital des grandeurs nouvelles, les composantes du moment cinétique propre ou

"spin" de l'électron, composantes définies à la manière quantique par des opérateurs :

$$(S_x)_{\text{op}} = \frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_2 \alpha_3 ; \quad (S_y)_{\text{op}} = \frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_3 \alpha_1 ; \quad (S_z)_{\text{op}} = \frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_1 \alpha_2$$

dont les valeurs propres sont, on le vérifie aisément, $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$. C'est donc ici le vecteur $\vec{M} + \vec{S}$ qui est intégrale première dans un champ central et qui joue ainsi le rôle de moment cinétique total de l'électron : il est la somme du moment cinétique orbital et du spin. Chacune des composantes du spin \vec{S} a bien les valeurs possibles $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$ prévues par l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit.

Si nous écrivons l'opérateur \vec{S}_{op} sous la forme déjà employée

$$(\vec{S})_{\text{op}} = \frac{\hbar}{2\pi} (\vec{s})_{\text{op}}$$

nous voyons qu'il faut poser pour le spin de l'électron :

$$(s_x)_{\text{op}} = \frac{1}{2} i \alpha_2 \alpha_3 ; \quad (s_y)_{\text{op}} = \frac{1}{2} i \alpha_3 \alpha_1 ; \quad (s_z)_{\text{op}} = \frac{1}{2} i \alpha_1 \alpha_2$$

et, avec ces définitions, on trouve les relations de non-commutation :

$$[s_x, s_y] = -i s_z ; \quad [s_y, s_z] = -i s_x ; \quad [s_z, s_x] = -i s_y$$

Ce sont bien les relations exigées par la théorie quantique générale des moments cinétiques, ce qui montre la cohérence des définitions adoptées.

L'opérateur $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$ correspondant est égal à :

$$s^2 = -\frac{1}{4} [(\alpha_1 \alpha_2)^2 + (\alpha_2 \alpha_3)^2 + (\alpha_3 \alpha_1)^2]$$

ce qui correspond à la valeur $s = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à la valeur propre $s(s+1) = \frac{3}{4}$ de s^2 .

Nous avons vu qu'au moment cinétique propre de l'électron était associé un moment magnétique propre. Ce moment magnétique propre, la théorie de Dirac parvient aussi à le retrouver et voici sous quelle forme. En cherchant l'équation du second ordre qui remplace l'équation :

$$\square \Psi_k + \frac{4\pi^2}{h^2} m_o^2 c^2 \Psi_k = 0$$

dans le cas où existe un champ électromagnétique extérieur, elle arrive à la conclusion que l'électron se comporte alors comme doué d'un moment magnétique propre \vec{M} et d'un moment électrique propre \vec{G} . Cette conclusion est en rapport avec les hypothèses d'Uhlenbeck et Goudsmit puisque l'électron possède, dans ces hypothèses, un moment magnétique dans son système propre doit, par un effet de relativité, posséder aussi un moment électrique propre dans un système galiléen où il est en mouvement. Comme toujours en Mécanique ondulatoire, les composantes de \vec{M} et de \vec{G}

doivent être définies par des opérateurs. Le raisonnement que nous allons développer conduit à poser :

$$(\mathcal{M}_x)_{op} = Bi\alpha_2\alpha_3\alpha_4; (\mathcal{M}_y)_{op} = Bi\alpha_3\alpha_1\alpha_4; (\mathcal{M}_z)_{op} = Bi\alpha_1\alpha_2\alpha_4$$

$$(\mathcal{G}_x)_{op} = Bi\alpha_1\alpha_4; (\mathcal{G}_y)_{op} = Bi\alpha_2\alpha_4; (\mathcal{G}_z)_{op} = Bi\alpha_3\alpha_4$$

où B désigne le magnéton de Bohr $B = \frac{-e\hbar}{4\pi m_0 c}$.

Les six opérateurs ont tous pour valeurs propres $\pm B$ et cette conclusion est aussi en accord avec l'hypothèse d'Uhlenbeck et Goudsmit sur la valeur du moment magnétique propre de l'électron.

Pour justifier la forme des opérateurs indiqués ci-dessus, nous poserons :

$$p_4 = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad p_j = -\frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad ; \quad (j = 1, 2, 3)$$

et nous écrirons d'abord l'équation de la Mécanique ondulatoire non relativiste de l'électron sous la forme :

$$\left[c p_4 - \left(\frac{1}{2m_0} \sum_{j=1}^{j=3} p_j^2 + U \right) \right] \Psi = 0$$

ou encore :

$$(V, f) \quad \left(2m_0 c p_4 - \sum_{j=1}^{j=3} p_j^2 - 2m_0 U \right) \Psi = 0$$

D'autre part nous avons vu que, pour un électron libre, une Mécanique ondulatoire qui emploie une seule fonction Ψ doit écrire

$$(V, g) \quad \left(p_4^2 - \sum_{j=1}^{j=3} p_j^2 - m_0^2 c^2 \right) \Psi = 0$$

Pour l'électron placé dans un champ électromagnétique, on devra remplacer les opérateurs p par les suivants :

$$p_4 = p_4 + \frac{e}{c} V \quad ; \quad p_j = p_j + \frac{e}{c} A_j \quad ; \quad (j = 1, 2, 3)$$

et l'on obtiendra l'équation de propagation :

$$\left(p_4^2 - \sum_{j=1}^{j=3} p_j^2 - m_0^2 c^2 \right) \Psi = 0$$

qui à l'approximation non relativiste redonne l'équation (V, f).

Dans la théorie de Dirac, on part du système d'équations :

$$\left(p_4 + \sum_{j=1}^{j=3} \alpha_j p_j - \alpha_4 m_0 c \right) \Psi_k = 0 \quad ; \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Si nous appliquons à cette équation l'opérateur :

$$\left[p_4 - \left(\sum_{j=1}^{j=3} \alpha_j p_j - \alpha_4 m_0 c_4 \right) \right]$$

il vient aisément :

$$\left[P_4^2 - \sum_{j=1}^{j=3} P_j^2 - m_0^2 c^2 + \sum_{j=1}^{j=3} \alpha_j (P_4 P_j - P_j P_4) - \sum_{i \neq j}^3 (\alpha_i \alpha_j P_i P_j - \alpha_j \alpha_i P_j P_i) \right] \psi_k = 0$$

En nous souvenant que les champs se déduisent des potentiels par les formules :

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

on trouve :

$$0 = \left[P_4^2 - \sum_{j=1}^{j=3} P_j^2 - m_0^2 c^2 + \frac{e}{c} \frac{h}{2\pi i} (\alpha_2 \alpha_3 H_x + \alpha_3 \alpha_1 H_y + \alpha_1 \alpha_2 H_z) - \frac{e}{c} \frac{h}{2\pi i} (\alpha_1 E_x + \alpha_2 E_y + \alpha_3 E_z) \right] \psi_k$$

Si les trois premiers termes de cette équation existaient seuls, on retomberait sur l'équation (V, g) appliquée à chaque ψ_k , donc sur l'équation (V, f) à l'approximation non relativiste. L'élément nouveau introduit ici par la théorie de Dirac, c'est la présence des deux derniers termes qu'il s'agit d'interpréter. Pour cela nous comparerons la dernière équation avec l'équation non relativiste (V, f) . Cette comparaison montre que les deux termes à interpréter doivent être, du moins à l'approximation non relativiste, considérés comme le produit par le facteur $-2m_0$ d'une énergie potentielle d'interaction entre le champ électromagnétique et l'électron. Mais si l'on ne veut pas s'en tenir à l'approximation non relativiste, on devra dans cet énoncé remplacer la masse propre m_0 par la quantité $\alpha_4 m_0$ qui figure dans les équations de Dirac. En écrivant que $-2m_0 \alpha_4 U$ est égal aux deux derniers termes de la dernière équation, on voit alors que U est la somme des termes suivants :

$$U_e = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i (\alpha_1 \alpha_4 E_x + \alpha_2 \alpha_4 E_y + \alpha_3 \alpha_4 E_z)$$

$$U_m = \frac{eh}{4\pi m_0 c} i (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 H_x + \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 H_y + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 H_z)$$

Or un corps doué d'un moment magnétique \vec{M} et d'un moment électrique \vec{G} placé dans un champ électromagnétique défini par les vecteurs \vec{E} et \vec{H} y possède une énergie potentielle égale à :

$$U = U_e + U_m = -(\vec{M} \cdot \vec{H}) - (\vec{G} \cdot \vec{E}) = -(\mathcal{M}_x H_x + \mathcal{M}_y H_y + \mathcal{M}_z H_z) - (G_x E_x + G_y E_y + G_z E_z)$$

En identifiant les expressions précédentes de U_e et de U_m , on retrouve les expressions proposées pour les opérateurs correspondant à \vec{M} et à \vec{G} . Ainsi le moment magnétique et le moment électrique apparaissent comme contenus dans les équations mêmes de Dirac.

CHAPITRE VI

FORMALISME ET INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE LA THÉORIE DE DIRAC

I. FORMALISME GÉNÉRAL DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE RELATIVISTE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC

En Mécanique ondulatoire de Dirac, on retrouve un formalisme analogue à celui que nous avons rencontré en Mécanique ondulatoire non relativiste. Tous les énoncés valables dans celle-ci vont pouvoir être transposés dans celle-là à condition toutefois d'admettre, à côté des opérateurs agissant sur les coordonnées, l'intervention d'autres opérateurs agissant sur les indices k des fonctions ψ_k (tels que les matrices α_i ou leurs combinaisons linéaires et hermitiennes par addition et multiplication) et aussi à condition de toujours ajouter dans toutes les formules une sommation de 1 à 4 sur l'indice k .

C'est ainsi que les expressions déjà données pour la densité de probabilité et pour la formule de normalisation du ψ s'obtiennent à partir des formules correspondantes de la Mécanique ondulatoire non relativiste en ajoutant une sommation sur k . Cependant la définition du vecteur "flux de probabilité de

présence" qu'il faut adjoindre à $\rho = \sum_{k=1}^{k=4} |\psi_k|^2$ pour former un quadrivecteur "densité-flux" a , en théorie de Dirac, une forme particulière, car on doit poser :

$$\vec{f} = -c \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* \vec{\alpha} \psi_k$$

$\vec{\alpha}$ désignant la matrice-vecteur dont les trois composantes sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. On démontre aisément en théorie de Dirac par des combinaisons des équations de propagation et de leurs conjuguées, que ρ et \vec{f} obéissent à la relation de conservation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{f} = 0$. Il en résulte, en raison des conditions toujours imposées à ψ aux limites du domaine D que $\int_D \rho d\tau$ est constant : donc, si cette

intégrale est égale à 1 à un instant quelconque, elle reste toujours égale à 1, ce qui permet de normer ψ en posant :

$$\int_D \rho d\tau = \int_D \sum_k |\psi_k|^2 d\tau = 1$$

En Mécanique ondulatoire de Dirac, comme en Mécanique ondulatoire non relativiste, à toute grandeur mesurable (observable) attachée à un corpuscule, on fait correspondre un opérateur linéaire et hermitien A , A pouvant en général agir non seulement sur les coordonnées, mais aussi sur les indices des composantes ψ_k . Pour les coordonnées et les composantes de l'impulsion, les opérateurs restent les mêmes que précédemment et n'agissent que sur les coordonnées. Pour l'énergie, l'opérateur est l'opérateur H ci-dessus défini qui agit à la fois sur les indices k et les variables x, y, z . Pour les nouvelles grandeurs introduites par la théorie de Dirac (moments cinétiques propres, moments magnétiques et électriques propres), les opérateurs n'agissent que sur l'indice k .

Les valeurs possibles de la grandeur mesurable correspondant à un opérateur linéaire et hermitien A sont ici les valeurs propres de l'équation :

$$A \psi_k = \alpha_k \psi_k \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4$$

À la valeur propre α_1 , correspond une fonction propre $\psi^{(1)}$ à quatre composantes $\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}, \psi_3^{(1)}, \psi_4^{(1)}$. Ces fonctions propres sont orthogonales entre elles (du moins si on les choisit convenablement en cas de dégénérescence), c'est-à-dire que l'on a :

$$\int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^{(1)*} \psi_k^{(1')} d\tau = 0 \quad (1 \neq 1')$$

On les normera en posant :

$$\int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^{(1)*} \psi_k^{(1)} d\tau = 1$$

De plus, elles forment un système complet, c'est-à-dire que l'on peut toujours, par exemple, développer les ψ_k de la fonction d'onde ψ sous la forme :

$$\psi_k = \sum_1 c_1 \psi_k^{(1)} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, 4$$

les c_1 étant indépendants de k . On écrit souvent les quatre équations précédentes sous la forme condensée :

$$\psi = \sum_1 c_1 \psi^{(1)}$$

La probabilité de la valeur propre α_1 est donnée par $|c_1|^2$. On en déduit aisément que la valeur moyenne de A doit se définir par :

$$\bar{A} = \sum_1 |c_1|^2 \alpha_1 = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^{(1)*} A \psi_k^{(1)} d\tau$$

De même, si $\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,4}$ sont les composantes de la fonction propre de l'opérateur Hamiltonien, les éléments de la matrice d'Heisenberg engendrée par l'opérateur A dans le système des fonctions propres de H sont par définition :

$$a_{ij} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_{i,k}^* A \psi_{j,k} d\tau$$

Les densités de valeur moyenne définies par $\sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* A \psi_k$ et les densités d'éléments de matrice $\sum_{k=1}^{k=4} \psi_{i,k}^* A \psi_{j,k}$ sont des grandeurs définies en chaque point de l'espace à chaque instant, donc des grandeurs de champ : elles jouent un rôle important en théorie de Dirac, car ce sont elles qui présentent un caractère tensoriel analogue à celui des grandeurs de champ dans les théories de la physique relativiste classique. Nous y reviendrons plus loin.

Comme exemple important d'application de ces principes généraux, on peut considérer le cas de la composante z du spin. L'opérateur correspondant est, nous l'avons vu, $\frac{\hbar}{4\pi} i \alpha_1 \alpha_2$: ses valeurs propres, c'est-à-dire les résultats possibles d'une mesure de S_z sont $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$ en accord avec les hypothèses d'Uhlenbeck et Goudsmit.

En appliquant les principes généraux, on trouve, avec le choix fait pour les α_i , que la probabilité de la valeur propre $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$ pour S_z dans un état représenté par une certaine fonction d'onde ψ est $\int_D (|\psi_1|^2 + |\psi_3|^2) d\tau$, tandis que la probabilité de la valeur propre $-\frac{\hbar}{4\pi}$ est $\int_D (|\psi_4|^2 + |\psi_2|^2) d\tau$. La somme de ces deux probabilités est bien égale à 1 puisque ψ est normée. On peut retrouver aisément la valeur de ces probabilités par le calcul de la valeur moyenne de S_z . On a, en effet, par définition :

$$\bar{S}_z = \frac{\hbar}{4\pi} \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* i \alpha_1 \alpha_2 \psi_k d\tau$$

Or, avec les valeurs adoptées par les α_i , la règle de multiplication des matrices donne :

$$i \alpha_1 \alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

d'où :

$$\bar{S}_z = \frac{\hbar}{4\pi} \int_D (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2) d\tau$$

ce qui concorde avec les expressions données plus haut pour les probabilités des deux valeurs possibles $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$.

2. LES GRANDEURS DE CHAMP DÉFINIES PAR LA THÉORIE DE DIRAC

Nous avons déjà signalé la manière dont la Mécanique ondulatoire non relativiste introduit sous la forme de densités (de valeur moyenne ou d'éléments de matrice) des grandeurs de champ qui permettent de rapprocher le point de vue de la physique corpusculaire de celui de la physique du champ et ce sont elles qui ont des variances relativistes simples et donnent un aspect relativiste à tout le formalisme. Mais ici, comme en Mécanique ondulatoire non relativiste, ces grandeurs de champ se présentent sous la forme de densités qui, du point de vue quantique, ont une signification physique incertaine. Ce sont les intégrales d'espace de ces quantités (valeurs moyennes ou éléments de matrice) qui, du point de vue quantique, ont une signification physique certaine : mais, par contre, ces intégrales n'ont pas un caractère tensoriel relativiste (à cause de l'intégration dans l'espace seulement). Cette circonstance curieuse est l'un des aspects du désaccord qui subsiste actuellement entre les conceptions quantiques et les conceptions relativistes.

On peut classer rationnellement les grandeurs de champ de la théorie de Dirac en partant de la remarque suivante : les matrices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (qui jouent le rôle d'opérateurs agissant sur les indices k des fonctions ψ_k), si on leur adjoint la matrice 1 à quatre lignes et quatre colonnes, permettent de former par multiplication 16 matrices hermitiennes linéaires indépendantes que nous ordonnerons dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
 \Gamma_0 = \alpha_4 & & & \\
 \Gamma_1 = \alpha_1 & \Gamma_2 = \alpha_2 & \Gamma_3 = \alpha_3 & \Gamma_4 = 1 \\
 \Gamma_{23} = i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & \Gamma_{31} = i \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 & & \Gamma_{12} = i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \\
 \Gamma_{14} = i \alpha_1 \alpha_4 & \Gamma_{24} = i \alpha_2 \alpha_4 & & \Gamma_{34} = i \alpha_3 \alpha_4 \\
 \Gamma_{234} = i \alpha_2 \alpha_3 & \Gamma_{314} = i \alpha_3 \alpha_1 & \Gamma_{124} = i \alpha_1 \alpha_2 & \Gamma_{123} = i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\
 & \Gamma_{1234} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 & &
 \end{array}$$

Dans ce tableau, les facteurs i ont été introduits pour rendre hermitiennes les matrices-produits qui, sans ce facteur, seraient antihermétiques. Avec ces seize opérateurs, nous pouvons former seize densités de valeurs moyennes ayant une variance re-

relativiste simple. Nous allons les expliciter en employant une abréviation très usuelle qui consiste à écrire $\psi^* A \psi$ au lieu de $\sum_{k=1}^4 \psi_k^* A \psi_k$.

$$\left. \begin{array}{l}
 I_1 = \psi^* \alpha_4 \psi \\
 f_x = -c \psi^* \alpha_1 \psi \quad f_y = -c \psi^* \alpha_2 \psi \quad f_z = -c \psi^* \alpha_3 \psi \quad \rho = \psi^* \psi \\
 \mu_x = B \psi^* i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi \quad \mu_y = B \psi^* i \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 \psi \quad \mu_z = B \psi^* i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \psi \\
 \pi_x = B \psi^* i \alpha_1 \alpha_4 \psi \quad \pi_y = B \psi^* i \alpha_2 \alpha_4 \psi \quad \pi_z = B \psi^* i \alpha_3 \alpha_4 \psi \\
 \sigma_x = \frac{h}{4\pi} \psi^* i \alpha_2 \alpha_3 \psi \quad \sigma_y = \frac{h}{4\pi} \psi^* i \alpha_3 \alpha_1 \psi \quad \sigma_z = \frac{h}{4\pi} \psi^* i \alpha_1 \alpha_2 \psi \quad \sigma_4 = \frac{-h}{4\pi} \psi^* i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi \\
 I_2 = \psi^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi
 \end{array} \right\} \quad (VI, a)$$

La grandeur I_1 est invariante pour une transformation de Lorentz comme cela résulte des formules de transformation des ψ_k . De même, I_2 est un autre invariant (ou plus exactement un tenseur complètement antisymétrique de rang 4, ce qui revient pratiquement au même).

Les grandeurs f et ρ de la deuxième ligne forment les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps. C'est le quadrivecteur "densité-flux" pour la probabilité de présence qui satisfait à l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{f} = 0$.

Les six quantités μ_x, \dots, π_z forment les six composantes distinctes d'un tenseur antisymétrique de rang 2. Le vecteur $\vec{\mu}$ représente la densité de moment magnétique propre pour l'électron dans l'état ψ car, en intégrant les composantes de $\vec{\mu}$ dans ce domaine, on obtient les valeurs moyennes des composantes du moment magnétique propre de l'électron définies précédemment. De même le vecteur $\vec{\pi}$ donne la densité moyenne du moment électrique propre, complément relativiste du moment magnétique propre.

Les grandeurs $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ et σ_4 se transforment comme les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps lors d'une transformation de Lorentz (ou plus exactement comme les composantes d'un tenseur complètement antisymétrique de rang 3, ce qui pratiquement revient au même). Les composantes de ce quadrivecteur sont liées à l'invariant I_2 par la relation :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \sigma_4}{\partial t} + \text{div } \vec{\sigma} = -m_e c I_2$$

Les grandeurs σ_x, σ_y et σ_z sont les densités de valeur moyenne pour les composantes du moment cinétique propre de l'électron dans l'état ψ : σ_4 est la composante de temps qui complète le quadrivecteur du point de vue relativiste. Le spin de l'électron est donc bien défini par un quadrivecteur densité (et non par un tenseur antisymétrique de rang 2) et c'est bien ce que nous avions annoncé. Nous verrons plus loin que dans le

cas où l'onde ψ est plane et monochromatique et où, par suite, l'on peut attribuer à l'électron une vitesse \vec{v} bien définie, on a la relation :

$$\sigma_4 = \frac{1}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{v})$$

déjà rencontrée dans nos considérations relativistes sur le spin.

Enfin, aux seize grandeurs du tableau précédent, nous pouvons adjoindre seize autres grandeurs de champ qui forment les seize composantes d'un tenseur du second rang non symétrique auquel, suivant les idées de MM. Costa de Beauregard et v. Weyssenhoff on peut attribuer le sens d'un tenseur densité d'énergie-impulsion pour l'électron à spin.

En employant les coordonnées réelles d'espace-temps, nous définirons ces grandeurs en posant :

$$(VI, b) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{ij} = \frac{hc}{4\pi i} \left[\psi^* \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_j} \alpha_i \psi \right] \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ T_{4i} = -\frac{hc}{4\pi i} \left[\psi^* \alpha_i \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \alpha_i \psi \right] \\ T_{i4} = -\frac{hc}{4\pi i} \left[\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \psi \right] \\ T_{44} = \frac{hc}{4\pi i} \left[\psi^* \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right] \end{array} \right.$$

Ce tenseur non symétrique répond au schéma $\begin{array}{|c|c|c|} \hline g_i v_k & c \vec{g} \\ \hline \vec{W} & \vec{V} & W \\ \hline C & & & \\ \hline \end{array}$ déjà rencon-

tré dans la théorie de M. Weyssenhoff. T_{44} est la densité de valeur moyenne de l'énergie. Les T_{i4} sont les densités de valeur moyenne des composantes de l'impulsion multipliées par c . Les T_{4i} sont les flux de l'énergie en densité de valeur moyenne le long des axes, divisés par c . Les T_{ij} pour $i, j = 1, 2, 3$ sont les densités de valeurs moyennes pour les flux des composantes de l'impulsion le long des axes. Dans le cas où ψ est une onde plane monochromatique, on vérifie facilement ces interprétations. Les équations de Dirac permettent d'établir la formule :

$$\sum_{j=1}^{j=4} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad ; \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Ces quatre relations expriment la conservation des composantes de l'impulsion et de l'énergie.

On introduit souvent à la place du tenseur non symétrique T_{ij} le tenseur symétrique $T'_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji})$ et l'on peut vérifier qu'il obéit aussi à la relation de conservation :

$$\sum_{j=1}^{j=4} \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{j=4} \frac{\partial T'_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

La non-symétrie du tenseur T_{ij} provient ici comme dans la théorie de M.v. Weyssenhoff de ce que l'on n'a pas $\bar{g} \leftrightarrow \bar{v} = \frac{W}{C^2} \bar{v}$ comme en Mécanique relativiste ordinaire (sans spin) de l'électron. S'il en était ainsi le tenseur prendrait la forme symétrique

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \frac{W}{C^2} v_i v_k & \frac{W}{C} \bar{v} \\ \hline \frac{W}{C} \bar{v} & W \\ \hline \end{array}$$

Mais, sauf dans le cas de l'onde place monochromatique, il n'en est pas ainsi en théorie de Dirac comme nous le verrons mieux plus loin. Alors $\bar{g} \neq \bar{v}$

3. LES ONDES PLANES MONOCHROMATIQUES EN THÉORIE DE DIRAC

D'après les idées fondamentales de la Mécanique ondulatoire, au mouvement rectiligne et uniforme de l'électron avec l'énergie W et la quantité de mouvement \vec{p} doit correspondre une onde plane monochromatique qui, en théorie de Dirac, aura des composantes :

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})} \quad ; \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

En substituant cette forme dans les quatre équations de Dirac, on obtient quatre relations algébriques linéaires et homogènes entre les quatre amplitudes a_k . Pour que ces équations admettent pour solutions des valeurs non toutes nulles des a_k , il faut que leur déterminant soit nul. Faisant le calcul, on trouve la condition :

$$\frac{W^2}{C^2} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_o^2 c^2$$

c'est-à-dire la relation qui, en théorie relativiste, lie l'énergie et la quantité de mouvement d'un corpuscule libre de masse propre m_o . Si cette condition est satisfaite, non seulement le déterminant des équations en a_k , mais les mineurs du premier ordre sont nuls, de sorte que deux des a_k sont arbitraires, les deux autres s'exprimant à l'aide de ceux-là. Si nous posons arbitrairement $a_3 = c_1$ et $a_4 = c_2$, nous obtiendrons :

$$a_1 = - \frac{p_z c_1 + (p_x + i p_y) c_2}{\frac{W}{C} + m_o c} \quad ; \quad a_2 = - \frac{(p_x - i p_y) c_1 - p_z c_2}{\frac{W}{C} + m_o c}$$

$$a_3 = c_1 \quad ; \quad a_4 = c_2$$

Pour interpréter ce résultat, supposons que l'axe des z soit

pris dans la direction du mouvement (direction du vecteur \vec{p}). Ceci ne restreint pas la généralité puisqu'on sait en principe comment se transforment les ψ_k pour une rotation des axes d'espace. On a alors $p_x = p_y = 0$ et

$$\psi_1 = \frac{-p_z}{\Delta} c_1 P \quad ; \quad \psi_2 = \frac{p_z}{\Delta} c_2 P \quad ; \quad \psi_3 = c_1 P \quad ; \quad \psi_4 = c_2 P$$

avec

$$\Delta = \frac{W}{C} + m_0 C \quad ; \quad P = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Wt - p_z z)}$$

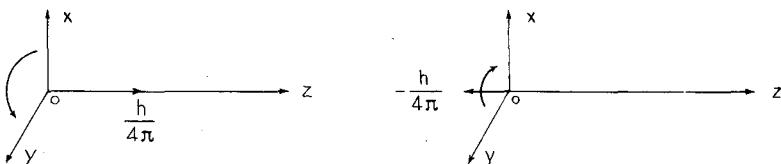
On peut énoncer ce résultat de la façon suivante : toute onde plane et monochromatique correspondant à un mouvement rectiligne et uniforme (à énergie positive) d'un corpuscule de Dirac peut être considérée comme la superposition de deux ondes $\psi^{(g)}$ et $\psi^{(d)}$ suivant la formule :

$$\psi = c_1 \psi^{(g)} + c_2 \psi^{(d)}$$

$\psi^{(g)}$ et $\psi^{(d)}$ ayant les composantes suivantes :

$$\psi_1^{(g)} = -\frac{p_z}{\Delta} P \quad ; \quad \psi_3^{(g)} = P \quad ; \quad \psi_2^{(g)} = \psi_4^{(g)} = 0 \quad ; \quad \psi_1^{(d)} = \psi_3^{(d)} = 0 \quad ; \quad \psi_2^{(d)} = \frac{p_z}{\Delta} P \quad ; \quad \psi_4^{(d)} = P$$

Si l'on se souvient que la probabilité des deux valeurs possibles $\pm \frac{\hbar}{4\pi}$ de la composante z du spin sont proportionnelles à $|\psi_1|_z^2 + |\psi_3|_z^2$ et à $|\psi_2|_z^2 + |\psi_4|_z^2$, l'on voit que $\psi^{(g)}$ correspond au spin $\frac{\hbar}{4\pi}$ et $\psi^{(d)}$ au spin $-\frac{\hbar}{4\pi}$. En associant par la règle habituelle une rotation dans le plan xoy à un vecteur porté le long de oz , on fait correspondre $\psi^{(g)}$ à une rotation levogyre ou circulaire gauche et $\psi^{(d)}$ à une rotation dextrogyre ou circulaire droite suivant le schéma ci-contre :



Toute onde plane monochromatique (à énergie positive) est donc la somme de deux ondes planes monochromatiques correspondant chacune à une valeur propre de la composante du spin dans la direction de propagation, la proportion des deux ondes et leur différence de phase dans la superposition étant données par les valeurs des deux composantes complexes C_1 et C_2 .

Sur les formules précédentes, l'on voit que ψ_1 et ψ_2 sont négligeables devant ψ_3 et ψ_4 lorsque $p_z c$ est petit devant $m_0 c^2$, c'est-à-dire à l'approximation de la Mécanique newtonienne ($v \ll c$). Dans le cas limite opposé d'une vitesse voisine de c , $m_0 c^2$ est négligeable devant W et $|\vec{p}|$ est sensiblement égal à $\frac{W}{c}$; on a alors :

$$-\psi_1^{(g)} = \psi_3^{(g)} = P \quad ; \quad \psi_2^{(g)} = \psi_4^{(g)} = 0 \quad ; \quad \psi_2^{(d)} = \psi_4^{(d)} = P \quad ; \quad \psi_1^{(d)} = \psi_3^{(d)} = 0$$

Il est très intéressant de calculer les seize densités de moyenne définies par le tableau (VI,a), pour le cas d'une onde plane monochromatique. Nous remarquerons d'abord que les constantes C_1 et C_2 sont reliées par la relation de normalisation des ondes ψ . Pour éviter l'introduction des formules un peu compliquées relatives aux spectres continus, nous emploierons un artifice souvent utilisé, en supposant que le corpuscule est enfermé dans une enceinte de volume U dont les dimensions sont très grandes par rapport à la longueur d'onde. On peut alors écrire la condition de normalisation :

$$(VI,c) \quad \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* \psi_k d\tau = (|C_1|^2 + |C_2|^2) \left[1 + \frac{p^2}{\Delta^2} \right] U = 1$$

qui s'écrit aussi :

$$(|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2W}{\Delta} U = 1$$

Calculons alors les seize densités de moyenne du tableau (VI,a) en tenant compte des relations précédentes. On trouve d'abord :

$$I_1 = |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 - |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 = \frac{m_0 c^2}{W} \cdot \frac{1}{U}$$

Si nous introduisons dans cette expression la vitesse βc du mouvement rectiligne correspondant telle que $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, on a :

$$I_1 = \sqrt{1-\beta^2} \frac{1}{U} \quad ; \quad \int_D I_1 d\tau = \sqrt{1-\beta^2}$$

et l'on voit que l'invariant I_1 est lié étroitement à la contraction de Lorentz. Le facteur de contraction $\frac{m_0 c^2}{W}$ joue ici un rôle important.

Pour l'invariant I_2 , on trouve de même :

$$I_2 = i \left[\psi_1^* \psi_3 + \psi_2^* \psi_4 - \psi_3^* \psi_1 - \psi_4^* \psi_2 \right] = 0$$

Cet invariant est donc nul pour une onde plane monochromatique. Un calcul analogue fournit pour les composantes du quadrivecteur "flux-densité"

$$f_x = f_y = 0 \quad ; \quad f_z = (|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2pc}{\Delta} \quad ; \quad p = (|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2W}{\Delta}$$

En comparant les expressions de f_z et de p et en se rappelant que $p = \frac{Wv}{c^2}$, on a :

$$f_x = f_y = 0 \quad ; \quad f_z = p \frac{pc^2}{W} = p v$$

Il y a donc un flux de probabilité dans la direction de propagation de l'onde ψ avec la vitesse v : c'est ce que l'on devait attendre.

Passons maintenant au calcul du quadrivecteur "densité de spin"

$$\sigma_x = \frac{\hbar}{4\pi} (c_1^* c_2 + c_2^* c_1) \frac{2m_0 c}{\Delta} ; \quad \sigma_y = \frac{\hbar}{4\pi} i (c_1^* c_2 - c_2^* c_1) \frac{2m_0 c}{\Delta}$$

$$\sigma_z = \frac{\hbar}{4\pi} (|c_1|^2 - |c_2|^2) \frac{2\frac{W}{C}}{\Delta} ; \quad \sigma_4 = \frac{\hbar}{4\pi} (|c_1|^2 - |c_2|^2) \frac{2p}{\Delta}$$

La relation de normalisation des ψ permet d'écrire :

$$\sigma_z = \frac{1}{U} \cdot \frac{\hbar}{4\pi} \cdot \frac{|c_1|^2 - |c_2|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2} ; \quad S_z = \int_D \sigma_z d\tau = \frac{\hbar}{4\pi} \frac{|c_1|^2 - |c_2|^2}{|c_1|^2 + |c_2|^2}$$

En comparant les expressions de σ_z et de σ_4 , on tire :

$$\sigma_4 = \sigma_z \frac{p.c}{W} = \frac{1}{c} (\vec{\sigma} \cdot \vec{v})$$

relation prévue précédemment.

Donnons enfin les composantes des densités moyennes de moment magnétique et de moment électrique propres pour l'onde plane monochromatique

$$(VI,d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_x = -B(c_1^* c_2 + c_2^* c_1) \frac{2\frac{W}{C}}{\Delta} ; \quad \mu_y = B i (c_1^* c_2 - c_2^* c_1) \frac{2\frac{W}{C}}{\Delta} ; \quad \mu_z = B (|c_2|^2 - |c_1|^2) \frac{2m_0 c}{\Delta} \\ \pi_x = B i (c_2^* c_1 - c_1^* c_2) \frac{2p}{\Delta} ; \quad \pi_y = B (c_2^* c_1 + c_1^* c_2) \frac{2p}{\Delta} ; \quad \pi_z = 0 \end{array} \right.$$

sur ces formules on vérifie aisément que :

$$\vec{\pi} = \left[\vec{\mu} \times \frac{\vec{v}}{c} \right] ; \quad (\vec{\pi} \cdot \vec{v}) = 0$$

formules également prévues antérieurement. Nous voyons que le vecteur $\vec{\pi}$ est toujours transversal par rapport à la direction de propagation, tandis que $\vec{\mu}$ peut faire un angle quelconque avec elle, mais $\vec{\pi}$ et $\vec{\mu}$ sont toujours perpendiculaire entre eux.

Lorsque la vitesse v tend vers c , le vecteur $\vec{\sigma}$ se couche sur la direction de propagation : au contraire $\vec{\mu}$ tend à se mettre perpendiculairement à cette direction, les vecteurs $\vec{\mu}$ et $\vec{\pi}$ étant à la limite tous deux dans le plan d'onde, normaux entre eux et égaux en grandeur comme les champs électromagnétiques d'une onde lumineuse. Ainsi les vecteurs $\vec{\mu}$ et $\vec{\sigma}$ dont les directions coïncident dans le système propre de la particule sont à angle droit pour un observateur qui voit passer la particule avec une vitesse très voisine de c .

Nous venons d'étudier les ondes planes monochromatiques à énergie W positive. Il existe aussi en théorie de Dirac des ondes planes à énergies négatives qui jouent dans la théorie un rôle très particulier. Nous en ferons plus loin une étude spéciale.

4. LE QUADRIVECTEUR DENSITÉ-COURANT ET SA DÉCOMPOSITION

Nous avons défini plus haut les grandeurs ρ et \vec{f} pour l'électron. En les multipliant par la charge électrique $-e$ de l'électron, on obtient un quadrivecteur dont la composante de temps donne la densité de moyenne $-e|\psi|^2 = \delta$ de l'électricité pour l'électron dans l'état ψ et dont les composantes d'espace :

$$j_i = -e f_i = e c \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* \alpha_i \psi_k \quad ; \quad (i=1, 2, 3)$$

donnent les composantes de la densité de courant correspondantes.

Nous allons montrer d'abord comment on peut décomposer en deux parties le courant j et le résultat obtenu, appelé "décomposition de Gordon", nous montrera qu'en raison de l'existence du moment magnétique propre et du moment électrique propre impliquée par la forme même des équations de Dirac, le courant j ne se réduit pas au courant de convection dû au déplacement du corpuscule chargé.

Pour faire cette décomposition, nous partons des équations de Dirac en l'absence de champ

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1 \psi_k + \frac{\partial}{\partial y} \alpha_2 \psi_k + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_3 \psi_k + x m_0 c \alpha_4 \psi_k$$

et des équations conjuguées par le caractère hermitien des α_i permet d'écrire

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \psi_k^* \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial y} \psi_k^* \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial z} \psi_k^* \alpha_3 + x m_0 c \psi_k^* \alpha_4$$

avec la convention :

$$\psi_k^* \alpha_i = \sum_{l=1}^{l=4} \psi_l^* (\alpha_i)_{lk}$$

Multiplions la première équation en avant par $\psi_k^* \alpha_1 \alpha_4$ et la seconde en arrière par $\alpha_1 \alpha_4 \psi_k$, ajoutons et sommes sur k . Il vient facilement en notation symbolique :

$$\begin{aligned} \psi^* \alpha_1 \psi = & \frac{\hbar}{4 \pi i m_0 c} \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \alpha_1 \alpha_4 \psi) + \psi^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \alpha_4 \psi \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\psi^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \psi) - \frac{\partial}{\partial z} (\psi^* \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 \psi) \right] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément en multipliant par ec et en tenant compte des définitions admises :

$$j_x = \frac{\partial \pi_x}{\partial t} + c (\text{rot } \vec{\mu})_x + \frac{e \hbar}{4 \pi m_0 c} (\psi^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \alpha_4 \psi)$$

On démontrerait de même les deux relations qui se déduisent par permutation circulaire sur x, y, z et l'on en conclut :

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$$

avec :

$$\vec{J}_1 = \frac{eh}{4\pi im_0} (\psi^* \alpha_4 \vec{\text{grad}} \psi - \vec{\text{grad}} \psi^* \alpha_4 \psi)$$

$$\vec{J}_2 = \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + c \text{ rot } \vec{\mu}$$

Le terme \vec{J}_1 est facile à interpréter en se plaçant dans le cas où l'onde ψ est plane et monochromatique, c'est-à-dire où l'on peut attribuer à l'électron un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{W}$. On a alors :

$$\vec{J}_1 = \frac{eh}{4\pi im_0} 2 \left(-\frac{2\pi i}{h} \vec{p} \right) \psi^* \alpha_4 \psi = -pe \frac{\vec{p}}{m_0 c^2} = -pe \frac{\vec{p}c^2}{W} = (-pe) \vec{v}$$

\vec{J}_1 est donc simplement la densité de moyenne pour le courant de convection dû au mouvement d'ensemble de la charge électrique.

L'interprétation du terme \vec{J}_2 est plus intéressante, mais exige quelques remarques préliminaires.

Considérons d'abord un milieu polarisé électriquement et dans ce milieu un élément cylindrique de longueur l de section s dont l'axe coïncide avec la direction du vecteur polarisation



L'une des bases porte la charge $+\epsilon$, l'autre la charge $-\epsilon$. Le moment électrique est ϵl correspondant à la densité $\epsilon = \frac{\epsilon l}{l s} = \frac{\epsilon}{s}$. Si la première charge devient $\epsilon + d\epsilon$ et la seconde $-(\epsilon + d\epsilon)$, la grandeur π a augmenté de $\frac{d\epsilon}{s}$ et, si cette augmentation a lieu dans un temps dt , comme on peut la considérer comme due au transport de la charge $d\epsilon$ de la seconde base à la première, elle est liée à un courant égal à $\frac{d\epsilon}{dt}$, c'est-à-dire à une densité de courant $\frac{1}{s} \frac{d\epsilon}{dt}$. Finalement on voit que l'augmentation de π est équivalente à l'existence d'une densité de courant égale à $\frac{d\pi}{dt}$.

D'autre part, considérons un aimant de moment magnétique \vec{M} . Le champ magnétique créé par cet aimant dérive, on le sait, du potentiel magnétique $-\vec{M} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{1}{r}$, mais dérive aussi du potentiel vecteur $\vec{A} = -[\vec{M} \times \vec{\text{grad}} \frac{1}{r}]$ comme on le voit aisément en démontrant que :

$$-\vec{\text{grad}} (\vec{M} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{1}{r}) = \vec{\text{rot}} [\vec{M} \times \vec{\text{grad}} \frac{1}{r}]$$

Le champ créé à l'extérieur par une distribution de magnétisme d'intensité d'aimantation μ occupant un volume V dérive donc du potentiel vecteur :

$$\vec{A} = - \int_V \left[\vec{\mu} \times \vec{\text{grad}} \frac{1}{r} \right] d\tau = \int_V \frac{\vec{\text{rot}} \vec{\mu}}{r} d\tau$$

la dernière expression provenant d'une intégration par parties. En comparant avec la formule classique des potentiels retardés

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{J}}{r} dt$$

on voit donc que l'intensité d'aimantation $\vec{\mu}$ est équivalente à une densité de courant égale à $c \operatorname{rot} \vec{\mu}$.

En résumé, nous avons retrouvé le résultat classique suivant : "Quand une région de l'espace est le siège d'une distribution de moment électrique définie en chaque point par une certaine polarisation $\vec{\pi}$ et d'une distribution de moment magnétique définie en chaque point par une certaine intensité d'aimantation $\vec{\mu}$, cette région de l'espace est le siège de courants microscopiques dont la densité est donnée par le vecteur $\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \vec{\mu}$."

Si nous revenons alors à la décomposition de Gordon, nous voyons que le vecteur \vec{j}_2 a pour origine l'existence des moments électrique et magnétique propres de l'électron.

La région occupée par l'onde ψ de l'électron peut se comparer (sans prendre la comparaison trop à la lettre) avec un milieu polarisé et aimanté de la théorie classique. L'électricité y possède un mouvement de convection global caractérisé par la vitesse $\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{W}$ dans le cas où le mouvement d'ensemble est rectiligne et uniforme. Il s'y superpose un mouvement "fin" de l'électricité correspondant à la polarisation et à l'aimantation.

En regardant les choses de près, l'on voit qu'il faut distinguer la vitesse globale "fine" \vec{U} dont les composantes correspondent aux opérateurs $-c\alpha_1$, $-c\alpha_2$, $-c\alpha_3$, et la vitesse de translation d'ensemble \vec{v} dont les composantes correspondent aux opérateurs $-\frac{h}{2\pi m_0} \alpha_4 \frac{\partial}{\partial x}$, $-\frac{h}{2\pi m_0} \alpha_4 \frac{\partial}{\partial y}$, $-\frac{h}{2\pi m_0} \alpha_4 \frac{\partial}{\partial z}$. La première sert à définir le courant "fin" total \vec{j} , la deuxième le courant de convection \vec{j}_1 . La différence $\vec{j} - \vec{j}_1 = \vec{j}_2$ représente le courant dû aux effets de polarisation et d'aimantation. On trouvera dans le livre de R. Becker sur l'électron⁽¹⁾ une étude détaillée des courants dans un milieu polarisé. L'analogie est étendue, mais on ne doit pas oublier que nous avons ici seulement une représentation moyenne des courants, polarisations et aimantations attachés à un corpuscule unique.

La distinction entre \vec{U} et \vec{v} fait aussi comprendre pourquoi le tenseur énergie-impulsion T_{ij} n'est pas symétrique. En réalité il a pour schéma

g^{ju}	cg
$\frac{W}{c} \vec{U}$	W

(\vec{U} étant la vitesse fine totale que nous venons de définir)

et non

g^{jv}	cg
$\frac{W}{c} \vec{v}$	W

(1) Théorie des Electrons (Alcan, Paris, 1938) p. 125 et sq.

et comme c'est \vec{v} et non \vec{u} qui est proportionnelle à la quantité de mouvement, on voit pourquoi T_{ij} n'est pas symétrique. La forme même des formules (VI, b) pour les T_{ij} montre bien qu'ils sont formés avec les densités de quantité de mouvement et les composantes de \vec{u} .

Nous avons obtenu la formule :

$$\vec{J} = \frac{eh}{4\pi m_0} (\psi^* \alpha_4 \vec{\text{grad}} \psi - \vec{\text{grad}} \psi^* \alpha_4 \psi) + \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + c \text{rot} \vec{\mu}$$

A l'aide des notations relativistes, elle s'écrit :

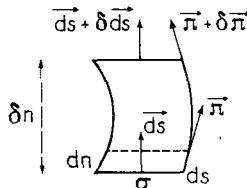
$$j_i = \frac{eh}{4\pi m_0} (\psi^* \alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_i} \alpha_4 \psi) + c \sum_j \frac{\partial m^{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

où m^{ij} est le tenseur antisymétrique ($\vec{\pi}, \vec{\mu}$). La quatrième composante de la densité de courant étant $j_4 = \delta c$, en appliquant la formule précédente au cas $i=4$, on trouve de même :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{-eh}{4\pi m_0 c} (\psi^* \alpha_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \alpha_4 \psi) - \text{div} \vec{\pi}$$

Le premier terme correspond à la densité qui existerait si le spin n'existe pas. Le second, $\text{div} \vec{\pi}$, correspond à l'existence du spin, car l'on sait que dans un milieu électriquement polarisé existe une densité microscopique égale à $-\text{div} \vec{\pi}$. Nous retrouverons pour la quatrième composante de la densité de courant la même image que pour les trois premières. [conservation de la charge microscopique $\frac{\partial}{\partial t} (-\text{div} \vec{\pi}) + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} + \text{rot} \vec{\mu} \right) = 0$].

Pour montrer le sens de $-\text{div} \vec{\pi}$, on peut considérer un élément de tube de force correspondant au vecteur polarisation dans le milieu polarisé. Sur la section inférieure de cet élément, la densité, la section transversale et la polarisation auront les valeurs σ , ds et $\vec{\pi}$. Sur la section supérieure, ces valeurs seront augmentées de $\delta \sigma$, δds et $\delta \vec{\pi}$.



On a :

$$-\varepsilon = \sigma ds ; \quad \pi = \frac{\varepsilon dn}{dnds} = \frac{\varepsilon}{ds} = -\sigma$$

Le théorème flux-divergence donne :

$$\iint \pi_n ds = (\vec{\pi} + \delta \vec{\pi})(\vec{ds} + \delta \vec{ds}) - \vec{\pi} \cdot \vec{ds} \simeq \delta (\vec{\pi} \cdot \vec{ds}) = -\delta (\sigma \cdot ds) = \iiint \text{div} \vec{\pi} dv$$

d'où

$$\operatorname{div} \vec{\pi} = - \frac{\delta(\sigma ds)}{\delta n ds}.$$

La charge de l'élément de volume dv est $\int_0^{\delta n} \frac{d(\sigma ds)}{dn} dn = \delta(\sigma ds)$
et la densité de charge dans l'élément est $\frac{1}{\delta n ds} \delta(\sigma ds) = -\operatorname{div} \vec{\pi}$
c.q.f.d.

CHAPITRE VII

LES SOLUTIONS A ÉNERGIE NÉGATIVE EN THÉORIE DE DIRAC

I. L'ONDE PLANE A ÉNERGIE NEGATIVE

Nous venons d'étudier les solutions de l'équation de Dirac qui représentent des ondes monochromatiques planes à énergie W positive et nous avons trouvé que pour avoir une solution de la forme :

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})}$$

il faut avoir entre W et p la relation :

$$(VII,a) \quad \frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2 c^2$$

En posant :

$$W = \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_z^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Nous avons trouvé :

$$a_1 = -\frac{p_z A + (p_x + i p_y) B}{\frac{W}{c} + m_0 c} ; \quad a_2 = \frac{p_z B - (p_x - i p_y) A}{\frac{W}{c} + m_0 c} ; \quad a_3 = A ; \quad a_4 = B$$

où A et B sont des constantes arbitraires.

Mais nous aurions pu aussi satisfaire à la condition (VII,a) en posant :

$$W = -c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

Nous aurions alors trouvé la solution suivante :

$$a_1 = C ; \quad a_2 = D ; \quad a_3 = \frac{p_z C + (p_x + i p_y) D}{m_0 c - \frac{W}{c}} ; \quad a_4 = \frac{(p_x - i p_y) C - p_z D}{m_0 c - \frac{W}{c}}$$

C et D étant des constantes arbitraires.

Nous allons maintenant modifier légèrement les notations employées à l'instant. Pour des valeurs données de p_x, p_y, p_z , nous appellerons W la quantité positive $c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$ et, pour tenir compte de la deuxième solution, nous dirons que nous avons à

considérer à la fois l'onde d'énergie W et l'onde d'énergie $-W$. Il faudra alors dans les dernières formules changer W en $-W$.

Bref, pour des valeurs données de p_x, p_y, p_z avec :

$$W = +c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

nous avons à considérer l'onde plane monochromatique :

$$\Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - p_x x - p_y y - p_z z)}$$

avec :

$$(VII, b) \quad a_1 = -\frac{p_z A + (p_x + i p_y) B}{\frac{W}{c} + m_0 c} ; \quad a_2 = \frac{p_z B - (p_x - i p_y) A}{\frac{W}{c} + m_0 c} ; \quad a_3 = A ; \quad a_4 = B$$

et l'onde plane monochromatique à énergie négative $-W$ définie par :

$$\Psi_k = b_k e^{\frac{2\pi i}{h} (-Wt - p_x x - p_y y - p_z z)}$$

avec :

$$(VII, c) \quad b_1 = C ; \quad b_2 = D ; \quad b_3 = \frac{p_z C + (p_x + i p_y) D}{\frac{W}{c} + m_0 c} ; \quad b_4 = -\frac{p_z D - (p_x - i p_y) C}{\frac{W}{c} + m_0 c}$$

Comparons ces deux ondes.

Pour l'onde à énergie positive, nous savons déjà que les composantes Ψ_3 et Ψ_4 qui correspondent en quelque sorte à la masse m_0 l'emportent sur les ondes Ψ_1 et Ψ_2 qui correspondent à la masse $-m_0$. Les ondes Ψ_1 et Ψ_2 sont nulles pour la vitesse nulle et ne prennent de l'importance qu'aux vitesses voisines de c .

Considérons l'invariant :

$$I_1 = \Psi^* \alpha_4 \Psi = |\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2 - |\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{v}$$

Il est toujours positif et tend vers zéro pour v tendant vers c .

Pour l'onde à énergie négative, les conclusions sont opposées. Les ondes Ψ_1 et Ψ_2 prédominent et si l'électron est au repos, c'est-à-dire si $p_x = p_y = p_z = 0$, on a :

$$\Psi_1 = C e^{\frac{-2\pi i}{h} m_0 c^2 t} ; \quad \Psi_2 = D e^{\frac{-2\pi i}{h} m_0 c^2 t} ; \quad \Psi_3 = \Psi_4 = 0$$

Pour des vitesses croissantes, les ondes Ψ_3 et Ψ_4 prennent de l'importance, mais c'est seulement pour le cas limite $v = c$ que l'on aurait $|\Psi_3|^2 + |\Psi_4|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$ de sorte qu'ici $I_1 \ll 0$ l'égalité se rapportant au cas limite $v = c$. Ce sont les ondes à masse propre négative qui l'emportent. On peut associer à la masse propre l'opérateur $m_0 \alpha_4$ dont $I_1 \cdot m_0$ est la densité de valeur moyenne : la valeur moyenne correspondante est $m_0 \sqrt{1-\beta^2}$ pour les ondes à énergie positive et $-m_0 \sqrt{1-\beta^2}$ pour les ondes à énergie négative.

L'existence des états à énergie négative en théorie de Dirac constitue une circonstance étrange. Les propriétés d'un électron dans un tel état seraient extraordinaires. Placé dans un champ électrique \vec{E} , il prendrait une accélération de sens opposé à la force $-e\vec{E}$: on augmenterait donc sa vitesse en lui retirant de l'énergie; sa vitesse serait en sens inverse de sa quantité de mouvement⁽¹⁾ etc.. On n'a jamais observé de corpuscules ayant ces propriétés paradoxales. Il y a donc là une difficulté en théorie de Dirac.

On pourrait croire que cette difficulté existe déjà en Dynamique relativiste Einsteinienne car la relation :

$$\frac{W^2}{c^2} = m_0 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

est valable dans cette théorie et en prenant la racine carrée, on trouve $W = \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$ avec le double signe \pm . Mais ici il est facile d'écartier la difficulté.

En effet les valeurs possibles pour W sont comprises dans les intervalles disjoints $(-\infty, -m_0 c^2)$ et $(m_0 c^2, +\infty)$, l'intervalle $(-m_0 c^2, m_0 c^2)$ ne correspondant à aucune valeur possible de W . Or en Dynamique ancienne, relativiste ou non, les variations ont lieu d'une façon continue. Si donc à l'origine, tous les électrons ont une énergie W positive, comprise entre $m_0 c^2$ et $+\infty$, il en sera toujours de même par la suite : aucune valeur négative de W comprise entre $-m_0 c^2$ et $-\infty$ ne pourra apparaître puisque l'intervalle $(+m_0 c^2, -m_0 c^2)$ ne peut pas être traversé par une variation continue de W . L'objection relative aux énergies négatives se trouve donc écartée en Dynamique Einsteinienne.

Il n'en est pas de même en Mécanique quantique car celle-ci admet en principe l'existence de transitions brusques entre états dont l'énergie diffère d'une quantité finie, ce qui empêche d'écartier a priori le passage du domaine des énergies positives à celui des énergies négatives. Et, qui plus est, on peut imaginer des exemples simples où des transitions de ce genre se trouvent réalisées.

Dans un article de 1929 [Zeitsch.f. Physik 53 (1929) p.157] M. O.Klein a le premier signalé un exemple de transition qui, sans être à proprement parler un passage d'un état d'énergie positive à un état d'énergie négative, lui est cependant équivalent. Il considère une surface plane S séparant une région (I) où les potentiels sont nuls d'une région (II) où règne un potentiel scalaire constant et négatif de sorte que dans la région (II) un électron possède l'énergie potentielle $U = -eV > 0$. Sur la surface de séparation tombe normalement venant de la région (I) une onde électrique de Dirac : cette onde est supposée monochromatique, plane et d'énergie positive W . Il s'agit de calculer les ondes réfléchies et transmises par la surface de séparation.

$$\begin{array}{c|c} U_1 = 0 & U_2 = -eV > 0 \\ (I) & S & (II) \end{array}$$

(1) en vertu de la relation $\vec{v} = \frac{\partial W}{\partial \vec{p}}$ qui exprime que la vitesse du corpuscule = la vitesse de groupe.

On montre que, pour effectuer le calcul, il faut exprimer la continuité de chacun des quatre ψ_k à travers la surface S, c'est à dire écrire :

$$\psi_k \text{ incident} + \psi_k \text{ réfléchi} = \psi_k \text{ transmis}$$

Naturellement les ondes réfléchies et transmises correspondent à la même énergie W que l'onde incidente : le phénomène est conservatif.

Mais M. Klein a démontré le résultat suivant. Pour :

$$0 < U < W - m_0 c^2$$

il y a à la fois réflexion et transmission, l'onde transmise ayant comme l'onde réfléchie les caractères normaux d'une onde à énergie positive. Pour $W - m_0 c^2 < U < W + m_0 c^2$, il y a réflexion totale avec onde évanescante dans le deuxième milieu. Enfin pour $U > W + m_0 c^2$, on trouve à nouveau une onde transmise à travers S, mais, c'est là ce qui constitue "le paradoxe de Klein", cette onde est une sorte d'onde à énergie négative : évidemment son énergie totale W est positive, mais ce qu'on peut appeler "l'énergie de nature non potentielles" c'est-à-dire $W - U$ est, dans la région (II), négative et inférieure à $-m_0 c^2$, alors qu'en Dynamique Einsteinienne elle doit toujours être supérieure à $m_0 c^2$. L'onde transmise dans le milieu (II) où règne le potentiel scalaire ψ est donc analogue à une onde à énergie négative en l'absence de potentiel et possède les mêmes propriétés paradoxales. On doit dire qu'il y a une certaine probabilité pour qu'un électron incident pénètre dans la région (II) en passant dans cet état étrange. C'est le paradoxe de Klein.

Le cas envisagé par Klein est très schématique. D'autres auteurs, notamment en France M. Gérard Petiau, ont approfondi ce genre de problèmes. Le résultat essentiel paraît être le suivant : chaque fois que l'énergie potentielle de l'électron subit une variation au moins égale à $m_0 c^2$ sur un parcours de l'ordre de $\frac{h}{m_0 c}$, il y a possibilité de passage à des états à énergie négative. On voit le rôle ici joué par "la longueur d'onde de Compton" $\frac{h}{m_0 c} \approx 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$ que nous retrouverons plus loin.

2. CARACTERE INCOMPLET DU SYSTÈME DES ONDES A ÉNERGIE POSITIVE

Revenons sur certaines particularités de la Mécanique ondulatoire non relativiste. Dans cette théorie, l'équation de propagation $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$ est du premier ordre par rapport au temps. La solution en est donc complètement déterminée si l'on se donne sa forme initiale $\psi(x, y, z, 0)$. Considérons le cas de l'absence de champ où l'équation de propagation a la forme simple :

$$\Delta \psi = \frac{4\pi i m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

elle a pour solution l'onde plane monochromatique :

$$\psi(x, y, z, t) = a e^{-\frac{2\pi i}{\hbar}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)}$$

avec (sans ambiguïté de signe) :

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

Supposons que nous nous donnions la forme initiale de la fonction d'onde $\psi(x, y, z, 0) = F(x, y, z)$ et considérons le développement de $F(x, y, z)$ en intégrale de Fourier :

$$F(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} dp_x dp_y dp_z$$

Les coefficients g sont calculables à partir de F donnée par la formule :

$$g(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{h^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)} dx dy dz$$

Je dis alors que la fonction :

$$\psi(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)} dp_x dp_y dp_z$$

est la solution admettant F pour forme initiale. En effet :

1°- $\psi(x, y, z, t)$ satisfait à l'équation de propagation comme étant une somme de solutions planes monochromatiques de cette équation linéaire.

2°- A l'instant $t=0$, elle se réduit visiblement à $F(x, y, z)$.

Nous en concluons qu'en Mécanique ondulatoire non relativiste le système des ondes planes monochromatiques constitue un système "complet" en ce sens que toute solution de l'équation des ondes peut se représenter comme une superposition d'ondes planes monochromatiques.

Passons maintenant à la théorie de Dirac et cherchons à y transposer le raisonnement précédent. Ici nous avons affaire à quatre équations simultanées du premier ordre en x, y, z, t entre les quatre ψ_k . Ces quatre fonctions d'onde sont donc entièrement déterminées si l'on se donne les formes initiales $\psi_k(x, y, z, 0)$. Prenons toujours le cas du champ nul et demandons-nous encore s'il est possible de représenter n'importe quelle solution par une superposition d'ondes planes monochromatiques. Une solution est entièrement définie par la donnée des quatre :

$$\psi_k(x, y, z, 0) = F_k(x, y, z)$$

que nous supposerons développées en intégrales de Fourier de la forme :

$$F_k(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{h} (p_x x + p_y y + p_z z)} dp_x dp_y dp_z$$

les g_k étant données par les formules d'inversion :

$$g_k(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{h^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} F_k(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} (p_x x + p_y y + p_z z)} dx dy dz$$

Cherchons à représenter la solution qui correspond aux ψ_k initiaux donnés par une superposition d'ondes planes monochromatiques qui ne contiendraient que des ondes à énergies positives. Pour cela posons :

$$\psi_k(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} dp_x dp_y dp_z$$

avec $W = +c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$. Nous avons bien là une solution de l'équation d'ondes, mais pour qu'elle ait la forme initiale $F(x, y, z)$, il faudrait avoir :

$$a_k(p_x, p_y, p_z) = g_k(p_x, p_y, p_z) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

les g_k étant connus. Mais nous savons que sur les quatre a_k , deux seulement sont arbitraires et ceci nous montre qu'en général, nous ne pourrons pas satisfaire aux conditions précédentes. Les ondes planes monochromatiques à énergie positive ne forment donc pas ici un système complet.

Considérons maintenant, à côté des ondes planes monochromatiques à énergie positive, les ondes planes monochromatiques à énergie négative. Nous obtenons alors un système complet. En effet si nous posons :

$$\begin{aligned} \psi_k(x, y, z, t) = & \iiint_{-\infty}^{+\infty} a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})} dp_x dp_y dp_z + \\ & \iiint_{-\infty}^{+\infty} b_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - \vec{p} \cdot \vec{r})} dp_x dp_y dp_z \end{aligned}$$

avec toujours $W = +c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$, nous aurons une solution des équations de propagation puisqu'elles sont linéaires et les $\psi_k(x, y, z, 0)$ coïncideront avec les $F_k(x, y, z)$ si l'on a :

$$a_k(p_x, p_y, p_z) + b_k(p_x, p_y, p_z) = g_k(p_x, p_y, p_z) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

A la différence des conditions obtenues plus haut, celles-ci sont toujours compatibles car sur les huit a_k et b_k , il y en a quatre d'arbitraires.

Les conditions précédentes s'écrivent explicitement :

$$-\frac{p_z A + (p_x + ip_y)B}{\frac{W}{c} + m_0 c} + C = g_1(p_x, p_y, p_z); \frac{p_z B - (p_x - ip_y)A}{\frac{W}{c} + m_0 c} + D = g_2(p_x, p_y, p_z)$$

$$\frac{p_z C + (p_x + ip_y)D}{\frac{W}{c} + m_0 c} + A = g_3(p_x, p_y, p_z); \frac{p_z D - (p_x - ip_y)C}{\frac{W}{c} + m_0 c} + B = g_4(p_x, p_y, p_z)$$

Si l'on étudie le système précédent en tenant compte des relations d'incertitude d'Heisenberg, on voit que dans le cas d'un paquet d'ondes immobile ou animé d'une vitesse $v \ll c$, on obtient le résultat suivant : il est possible de représenter le paquet d'ondes ψ par une superposition d'ondes planes monochromatiques si, et seulement si, ce paquet d'ondes a des dimensions au moins égales à $\frac{h}{m_0 c}$. Si le paquet d'ondes a des dimensions inférieures à $\frac{h}{m_0 c}$, la superposition doit comprendre des ondes à énergie négative. Si le paquet d'ondes a dans le système de référence utilisé une vitesse βc voisine de c , on voit aisément, en tenant compte de la contraction de Lorentz, que le paquet d'ondes sera représentable par une superposition d'ondes planes monochromatiques à énergie positive si, et seulement si, ses dimensions sont au moins de l'ordre de $\frac{h}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}$.

D'une façon générale, il est donc impossible en théorie de Dirac de représenter un train d'ondes quelconque sans faire intervenir les ondes à énergie négative, ce qui montre qu'on ne peut éviter de considérer ces ondes.

La condition pour pouvoir représenter un train d'ondes uniquement par des ondes à énergie positive est donc $\delta x \gg \frac{h}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}$ δx étant l'extension du train d'ondes le long d'un axe ox quelconque. Nous allons retrouver cette condition en partant des relations d'incertitude. La quatrième relation d'incertitude :

$$\delta W \cdot \delta t > h$$

doit s'interpréter en disant que si une mesure de l'énergie fournit la valeur de l'énergie à δW près, cette mesure dure au moins un temps δt égal à $\frac{h}{\delta W}$. Pour que le train d'ondes considéré ne contienne dans son développement de Fourier que des ondes à énergie positive, il faut que $\delta W < W$ puisque δW doit, d'après les principes de la Mécanique ondulatoire, mesurer l'étendue, dans l'échelle des W , des ondes qui figurent dans le développement de Fourier du ψ . La durée δt de la mesure qui permet de délimiter le train des ondes est donc $\delta t > \frac{h}{W}$. Or, dans la Mécanique ondulatoire de Dirac, les fronts d'onde peuvent se propager avec toutes les vitesses de 0 à c de sorte que pendant la durée δt de la mesure, les frontières du paquet d'ondes peuvent se déplacer de

côt. L'extension du paquet d'ondes qui résulte de la mesure est donc au moins $\delta x = c\delta t$ dans le sens ox . On aura donc :

$$\delta x > \frac{hc}{W} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{1-\beta^2}$$

car :

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

C'est bien le résultat obtenu plus haut.

Si l'on applique la formule $\delta t > \frac{hc}{W}$ à la lumière (pour laquelle $W = h\nu$ et $\lambda = \frac{c}{\nu}$), on trouve $\delta x > \lambda$. Il est impossible de localiser le photon dans un volume de dimensions inférieures à la longueur d'onde. Au contraire pour une particule matérielle (électron par exemple), on a $\delta x > \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1-\beta^2} \frac{v}{c} = \lambda \cdot \beta$ et, comme $\beta < 1$ on peut localiser la particule dans un volume de dimensions inférieures à la longueur d'onde associée et cela d'autant mieux que sa vitesse est plus petite.

3. LA THÉORIE DES "TROUS" DE DIRAC

Nous venons de voir, par l'étude du paradoxe de Klein et par celle du caractère incomplet des ondes planes à énergie positive, qu'il est impossible d'éliminer les ondes planes à énergie négative de la théorie de Dirac. Notons encore le curieux résultat suivant : l'électron de Dirac ne pourrait pas diffuser la lumière si les états à énergie négative n'existaient pas : l'existence du phénomène de la diffusion de la lumière nous interdit donc aussi d'éliminer ces ondes paradoxales.

M. Dirac lui-même a trouvé un moyen ingénieux de lever la difficulté que constitue, dans sa théorie, l'existence, impossible à écarter, des ondes à énergie négative. Remarquant que d'après le principe d'exclusion de Pauli, il ne peut y avoir plus d'un électron par état, il imagine que tous les états d'énergie négative sont occupés dans l'état normal de l'Univers. Il en résulte une densité uniforme dans l'univers d'électrons à énergie négative et M. Dirac admet que cette densité uniforme normale est inobservables. Mais il y aurait plus d'électrons dans l'univers qu'il n'est nécessaire pour garnir tous les états à énergie négative et le surplus, obligé de se répartir entre les états à énergie positive, constituerait les électrons qui se manifestent à nous dans l'expérience. Exceptionnellement, un électron à énergie négative peut passer, sous l'influence d'une action extérieure, dans un état à énergie positive : il y a alors apparition simultanée d'un électron expérimental et d'un "trou", d'une lacune, dans la distribution des électrons à énergie négative. Or M. Dirac a montré, nous reviendrons tout à l'heure sur

ce point, qu'une telle lacune se comporte comme un corpuscule à énergie positive qui aurait même masse que l'électron et une charge électrique égale et de signe contraire. Ce serait un corpuscule en quelque sorte complémentaire de l'électron habituel, l'électron positif ou "positon".

En 1932, M. Anderson et M.M. Blackett et Occhialini ont découvert dans les rayons cosmiques des électrons positifs répondant aux conceptions de Dirac. Retrouvés dans les produits de la désintégration des radio-éléments artificiels, les positons, malgré le caractère plutôt exceptionnel de leur apparition, sont aujourd'hui devenus pour les physiciens des êtres familiers. La théorie des trous de Dirac conduit à penser que les électrons positifs doivent être instables en présence de la matière car, si une lacune rencontre dans la matière un des électrons négatifs dont elle est pleine, cet électron négatif pourra combler la lacune et cette transition quantique se traduira par la disparition simultanée de deux électrons de signes contraires dont toute l'énergie sera émise sous forme de rayonnement : c'est le phénomène de la "dématérialisation d'une paire d'électrons" dont l'existence est aujourd'hui certaine grâce surtout aux travaux de M.M. Joliot et Thibaud.

Nous pouvons donc avec Dirac considérer le positon comme un "trou" ou une "lacune" dans la distribution des états à énergie négative de l'électron, mais nous pouvons aussi, plus physiquement peut-être, le considérer comme un véritable corpuscule "complémentaire" de l'électron dont la fonction d'onde ψ obéit à une équation d'ondes complémentaire de celle de Dirac. Précisons ce point.

Considérons le cas de l'absence de champ et soit ψ^+ une solution à énergie positive des équations de Dirac :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k^+}{\partial t} = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h} m_0 c \alpha_4 \right) \psi_k^+$$

Je dis que la fonction $\psi^- = -i \alpha_2 \alpha_4 (\psi^+)^*$ de composantes :

$$\psi_1^- = -(\psi_4^+)^* ; \quad \psi_2^- = (\psi_3^+)^* ; \quad \psi_3^- = (\psi_2^+)^* ; \quad \psi_4^- = -(\psi_1^+)^*$$

car

$$-i \alpha_2 \alpha_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

est solution à énergie négative des équations de Dirac. Qu'elle soit à énergie négative est évident. Qu'elle soit solution des équations de Dirac se voit en écrivant l'équation conjuguée :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k^{**}}{\partial t} = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \alpha_4 \right) \psi_k^{**}$$

obtenue en remarquant qu'avec notre choix des α_i , α_1 , α_3 et α_4 sont réelles et α_2 purement imaginaire, puis en multipliant en avant l'équation précédente par $-i \alpha_2 \alpha_4$ et tenant compte des relations de commutation entre α_i .

Ainsi partant d'une solution à énergie positive ψ^+ , nous lui avons associé une solution à énergie négative ψ^- . Posons maintenant :

$$\varphi = \psi^{-*} = -i\alpha_2\alpha_4\psi^+$$

de composantes :

$$\varphi_1 = -\psi_4^+ \quad ; \quad \varphi_2 = \psi_3^+ \quad ; \quad \varphi_3 = \psi_2^+ \quad ; \quad \varphi_4 = -\psi_1^+$$

Il est aisé de vérifier, en multipliant l'équation en ψ^+ par $-i\alpha_2\alpha_4$ en avant, que φ est solution de :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi i}{h} m_0 c \alpha_4 \right) \varphi_k$$

que nous appellerons l'équation complémentaire de celle de Dirac. La fonction φ sera la fonction d'onde du corpuscule "complémentaire" de l'électron, c'est-à-dire le positon : elle est solution des équations "complémentaires" de Dirac.

Passons maintenant au cas où il existe un champ électromagnétique dérivant des potentiels V et \vec{A} . Soit encore ψ^+ une solution à énergie positive des équations de Dirac telle que :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + xe \frac{V}{c} \right) \psi_k^+ = \left[\alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + xe A_x \right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + xe A_y \right) + \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} + xe A_z \right) + xm_0 c \alpha_4 \right] \psi_k^+$$

avec :

$$x = \frac{2\pi i}{h}$$

Pour obtenir la solution ψ^- à énergie négative associée à ψ^+ , nous commençons par considérer l'équation obtenue à partir de la précédente en remplaçant e par $-e$. Nous en obtiendrons une solution ψ'^+ en changeant e en $-e$ dans l'expression de ψ^+ et nous aurons :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - xe \frac{V}{c} \right) \psi'^+ = \left[\alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} - xe A_x \right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - xe A_y \right) + \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - xe A_z \right) + xm_0 c \alpha_4 \right] \psi'^+$$

La solution ψ^- cherchée sera :

$$\psi^- = -i\alpha_2\alpha_4(\psi'^+)^*$$

On le verra aisément en prenant la conjuguée de la dernière équation :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + xe \frac{V}{c} \right) (\psi'^+)^* = \left[\alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + xe A_x \right) - \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + xe A_y \right) + \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} + xe A_z \right) - xm_0 c \alpha_4 \right] (\psi'^+)^*$$

et en appliquant l'opérateur $-i\alpha_2\alpha_4$ en avant ce qui donne :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + xe \frac{V}{c} \right) \psi^- = \left[\alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} + xe A_x \right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} + xe A_y \right) + \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} + xe A_z \right) + xm_0 c \alpha_4 \right] \psi^-$$

(Naturellement si

$$V=0, \vec{A}=0, \text{ alors } \psi'^+ = \psi^+ \text{ et } \psi^- = -i\alpha_2\alpha_4\psi^{**}$$

de sorte que nous retrouvons le résultat établi plus haut).

Posons :

$$\varphi = \psi^{-*} = -i\alpha_2\alpha_4\psi^{**}$$

En prenant la conjuguée de l'équation satisfaite par ψ^- , nous trouvons :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - xe \frac{V}{c} \right) \varphi_k = \left[\alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} - xe A_x \right) - \alpha_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - xe A_y \right) + \alpha_3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - xe A_z \right) - xm_0 c \alpha_4 \right] \varphi_k$$

L'onde φ représente un corpuscule obéissant à l'équation complémentaire de Dirac et possédant la charge $+e$: elle représente un positon, corpuscule complémentaire de l'électron.

Naturellement pour $V=0$, $\vec{A}=0$ nous retombons sur les résultats obtenus plus haut.

CHAPITRE VIII

LE TREMBLEMENT DE SCHRODINGER

I. LE CENTRE DE GRAVITÉ DE LA PROBABILITÉ DANS LES MÉCANIQUES ONDULATOIRES

En Mécanique ondulatoire il vaut mieux généralement éviter de parler de vitesse, car la vitesse n'est définie que dans des cas particuliers (ondes planes monochromatiques). Au lieu de parler de vitesse, on doit parler de quantité de mouvement. Par contre on peut toujours définir un point G qu'on nomme "centre de gravité de la probabilité de présence" et qui est défini par les formules :

$$\bar{x} = \int_D \psi^* x \psi d\tau \quad ; \quad \bar{y} = \int_D \psi^* y \psi d\tau \quad ; \quad \bar{z} = \int_D \psi^* z \psi d\tau$$

en Mécanique ondulatoire non relativiste, et par les formules :

$$\bar{x} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* x \psi_k d\tau \quad ; \quad \bar{y} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* y \psi_k d\tau \quad ; \quad \bar{z} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* z \psi_k d\tau$$

en Mécanique ondulatoire de Dirac. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont par définition les coordonnées de ce point.

Au cours du temps $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont des fonctions bien définies du temps de sorte qu'on peut sans ambiguïté parler de la vitesse du point G.

Soit $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ une solution des équations de Dirac qui représente l'onde associée à un certain mouvement de l'électron. Nous pouvons écrire :

$$\psi_k = \sum_n c_n \psi_{k,n}$$

$\psi_{k,n}$ étant la $k^{\text{ème}}$ composante de la $n^{\text{ème}}$ fonction propre de l'énergie (fonction propre de H) et les c_n des constantes complexes. On trouve par substitution :

$$\bar{x} = \sum_{m,n} c_m^* c_n \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_{k,m}^* x \psi_{k,n} d\tau = \sum_{m,n} c_m^* c_n x_{mn}$$

x_{mn} étant l'élément de la matrice d'Heisenberg correspondant à l'opérateur x.

Comme

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \left[\Psi_{k,m}^* \frac{2\pi i}{\hbar} (xH - Hx) \Psi_{k,n} \right] d\tau$$

avec :

$$H = - \left[eV + c(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 m_0 c) \right]$$

H étant l'hamiltonien de Dirac en présence de champ où, comme nous le savons,

$$P_j = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{e}{c} A_j$$

On trouve aisément :

$$\frac{2\pi i}{\hbar} (xH - Hx) = c \alpha_1 \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) = -c \alpha_1$$

et par suite :

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \left[\Psi_{k,m}^* (-c \alpha_1) \Psi_{k,n} \right] d\tau$$

d'où :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_{m,n} c_m^* c_n \frac{dx_{mn}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \left[\sum_m c_m^* \Psi_{k,m}^* (-c \alpha_1) \sum_n c_n \Psi_{k,n} \right] d\tau = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \Psi_k^* (-c \alpha_1) \Psi_k d\tau$$

et l'on trouverait de même :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \Psi_k^* (-c \alpha_2) \Psi_k d\tau \quad ; \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \Psi_k^* (-c \alpha_3) \Psi_k d\tau$$

Or nous avons trouvé précédemment pour les composantes du courant de probabilité

$$\rho u_x = -c \sum_{k=1}^{k=4} \Psi_k^* \alpha_1 \Psi_k, \dots, \dots$$

d'où :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int_D \rho u_x d\tau = \bar{u}_x \quad ; \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{u}_y \quad ; \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{u}_z$$

La vitesse du centre de gravité G est donc égale à la valeur moyenne de la vitesse de la probabilité, résultat qu'on aurait pu prévoir a priori.

On interprète souvent les formules précédentes en disant que les opérateurs $-c\alpha_1$, $-c\alpha_2$ et $-c\alpha_3$ sont les opérateurs correspondant aux trois composantes de la vitesse du corpuscule électron. Comme ces opérateurs n'ont pour valeurs propres que $+c$ et $-c$, on est amené à dire, d'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, que les seules valeurs possibles des composantes de la vitesse sont $+c$ et $-c$, résultat assez difficile à interpréter. Mais il semble préférable de ne pas considérer la vitesse comme une "observable" à laquelle on puisse faire correspondre un opérateur.

2. LE THÉORÈME D'EHRENFEST

En Mécanique ondulatoire non relativiste, on démontre le théorème d'EHRENFEST exprimé par les formules :

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \bar{f}_x \quad ; \quad m \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} = \bar{f}_y \quad ; \quad m \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} = \bar{f}_z$$

qui s'explique en disant que le centre de gravité de la probabilité se déplace comme le ferait un point matériel de masse m sous l'influence de la valeur moyenne de la force :

$$\bar{f} = \int_D \psi^* (-\nabla \text{grad } U) \psi d\tau$$

Dans le cas où il n'y a pas de champ, le point G est donc animé d'un mouvement uniforme et rectiligne, s'il n'est pas au repos. Nous allons démontrer directement ce dernier théorème. En Mécanique ondulatoire non relativiste $H = \left(\frac{\hbar}{2\pi i}\right)^2 \frac{1}{2m} \Delta$

d'où :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D \psi^* \times \psi d\tau = \int_D \psi^* \frac{2\pi i}{\hbar} [x H - Hx] \psi d\tau = \int_D \psi^* \left(\frac{-\hbar}{2\pi i m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi d\tau$$

car :

$$[x, \Delta] = -2 \frac{\partial}{\partial x}$$

et par suite :

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \int_D \psi^* \frac{\hbar}{2\pi i} \left[-\frac{\hbar}{2\pi i m} \frac{\partial}{\partial x} H - H \left(\frac{-\hbar}{2\pi i m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \psi d\tau = 0$$

car $\frac{\partial}{\partial x}$ commute avec Δ .

En théorie de Dirac, les résultats précédents ne sont plus exacts en général.

De :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* (-c \alpha_1) \psi_k d\tau$$

nous tirons :

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \psi_{k,m}^* \frac{\hbar}{2\pi i} \left[-c \alpha_1 H + H c \alpha_1 \right] \psi_{k,n} d\tau$$

Mais ici α_1 ne commute pas avec H qui contient α_2 , α_3 et α_4 . On a donc :

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \neq 0 \text{ et aussi } \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} \neq 0 \text{ et } \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} \neq 0$$

Le mouvement du centre de gravité de la probabilité en l'absence de champ n'est pas en général rectiligne et uniforme.

3. LE TREMBLEMENT DE SCHRODINGER

Pour comprendre pourquoi en théorie de Dirac le mouvement du centre de gravité de probabilité n'est pas rectiligne et uni-

forme, même en l'absence de champ, il est instructif de soumettre à une analyse détaillée l'expression :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \int_D \sum_{k=1}^{k=4} \Psi_k^* (-c \alpha_1) \Psi_k d\tau$$

où nous pouvons écrire :

$$\Psi_k = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} \right] dp_x dp_y dp_z$$

avec $W = +c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$. Les huit a_k et b_k peuvent se calculer à partir de quatre d'entre eux qui restent arbitraires par des formules que nous connaissons.

Appelons maintenant "espace des moments" l'espace construit en prenant comme coordonnées rectangulaires les grandeurs p_x, p_y, p_z et divisons cet espace en cellules σ aussi petites que nous voulons. Les quantités

$$\Delta(\sigma) = \iiint e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)} dp_x dp_y dp_z$$

sont (à une constante de normalisation près) les "différentielles propres" du spectre continu des ondes monochromatiques planes et nous pouvons écrire

$$\Psi_k(x, y, z, t) = \sum_{\sigma} \left[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} \right] \Delta(\sigma)$$

p_x, p_y, p_z étant les coordonnées du centre de l'élément σ dans l'espace des moments et \sum_{σ} désignant une sommation sur toutes les cellules σ de cet espace.

Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -c \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \sum_{k=1}^{k=4} \left[a_k(p'_x, p'_y, p'_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} + b_k(p'_x, p'_y, p'_z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} \right]^* \cdot \alpha_1 \left[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} \right] \int_D \Delta^*(\sigma') \Delta(\sigma) d\tau$$

le domaine D étant naturellement ici l'espace entier. Les différentielles propres étant orthogonales et supposées normées, nous avons, en désignant par σ le volume de la cellule σ

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -c \sum_{\sigma} \sigma \sum_{k=1}^{k=4} \left[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} \right]^* \cdot \alpha_1 \left[a_k(p_x, p_y, p_z) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} + b_k(p_x, p_y, p_z) e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} Wt} \right]$$

ou encore

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = -c \sum_{\sigma} \sigma \sum_{k=1}^{k=4} (a_k^* \alpha_1 a_k + b_k^* \alpha_1 b_k) - c \sum_{\sigma} \sigma \left(\sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_1 b_k e^{-\frac{4\pi i}{\hbar} Wt} + \sum_{k=1}^{k=4} b_k^* \alpha_1 a_k e^{\frac{4\pi i}{\hbar} Wt} \right)$$

En tenant compte des formules (VII,b) que nous rappelons ici :

$$a_1 = -\frac{p_z A + (p_x + i p_y) B}{\frac{W}{C} + m_0 c} ; \quad a_2 = \frac{p_z B - (p_x - i p_y) A}{\frac{W}{C} + m_0 c} ; \quad a_3 = A ; \quad a_4 = B$$

nous avons

$$-c \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_1 a_k = -c (a_1^* a_4 + a_2^* a_3 + a_3^* a_2 + a_4^* a_1) = 2 p_x c \frac{A A^* + B B^*}{\frac{W}{C} + m_0 c}$$

et comme on a aussi

$$\sum_{k=1}^{k=4} a_k^* a_k = (A A^* + B B^*) \left[1 + \frac{p^2}{\left(\frac{W}{C} + m_0 c \right)^2} \right] = 2 W \frac{A A^* + B B^*}{W + m_0 c^2}$$

il vient

$$-c \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_1 a_k = \frac{p_x c^2}{W} \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* a_k$$

On trouverait de même en utilisant l'expression des b_k donnée par les formules (VII,c) :

$$-c \sum_{k=1}^{k=4} b_k^* \alpha_1 b_k = -\frac{p_x c^2}{W} \sum_{k=1}^{k=4} b_k^* b_k$$

D'autre part, les deux derniers termes dans l'expression de $\frac{d\bar{x}}{dt}$ sont complexes conjugués à cause de l'hermiticité de α_1 et peuvent s'écrire

$$c \sum_{\sigma} \sigma A_1 \cos \left(\frac{4\pi}{h} W t + \varphi_1 \right)$$

A_1 et φ_1 variant naturellement d'une cellule σ à l'autre, c'est à dire étant des fonctions de p_x, p_y, p_z . On a posé en effet :

$$A_1 e^{i\varphi_1} = -2 \sum_{k=1}^{k=4} b_k^* \alpha_1 a_k$$

Finalement nous pouvons écrire :

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_{\sigma} \sigma \frac{c^2 p_x}{W} \left(\sum_{k=1}^{k=4} a_k^* a_k - \sum_{k=1}^{k=4} b_k^* b_k \right) + \sum_{\sigma} \sigma c A_1 \cos \left(\frac{4\pi}{h} W t + \varphi_1 \right)$$

Or, d'après les formules de la Dynamique relativiste $\frac{p_x c^2}{W}$ est la composante x de la vitesse correspondant à la quantité de mouvement p_x et à l'énergie $+W$. On peut de même considérer $-\frac{p_x c^2}{W}$ comme la composante x de la vitesse correspondant à la quantité de mouvement p_x et à l'énergie $-W$. Le premier terme de l'expression précédente de $\frac{d\bar{x}}{dt}$ est donc une sorte de valeur moyenne de la composante de vitesse v_x correspondant à la composition spectrale du ψ .

Posons donc

$$\bar{v}_x = \sum_{\sigma} \sigma \frac{p_x c^2}{W} \sum_{k=1}^{k=4} (a_k^* a_k - b_k^* b_k)$$

\bar{v}_x est naturellement indépendante du temps et nous avons

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}_x + \sum \sigma \sigma c A_1 \cos \left(\frac{4\pi}{h} W t + \varphi_1 \right)$$

d'où par intégration

$$\bar{x} = \xi + \sum \sigma \frac{hc}{4\pi W} A_1 \sin \left(\frac{4\pi}{h} W t + \varphi_1 \right)$$

et on trouverait de même

$$\bar{y} = \eta + \sum \sigma \frac{hc}{4\pi W} A_2 \sin \left(\frac{4\pi}{h} W t + \varphi_2 \right)$$

$$\bar{z} = \zeta + \sum \sigma \frac{hc}{4\pi W} A_3 \sin \left(\frac{4\pi}{h} W t + \varphi_3 \right)$$

avec les définitions

$$\xi = \bar{x}_0 + \bar{v}_x t \quad ; \quad \eta = \bar{y}_0 + \bar{v}_y t \quad ; \quad \zeta = \bar{z}_0 + \bar{v}_z t$$

$$\bar{v}_y = \sum \sigma \frac{p_y c^2}{W} \sum_{k=1}^{k=4} (a_k^* a_k - b_k^* b_k) \quad ; \quad \bar{v}_z = \sum \sigma \frac{p_z c^2}{W} \sum_{k=1}^{k=4} (a_k^* a_k - b_k^* b_k)$$

Le point de coordonnées ξ , η , ζ se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme, mais le centre de gravité G de coordonnées \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} exécute autour de ce point une série d'oscillations de fréquence $\frac{2W}{h}$. C'est là "le tremblement de Schrödinger" qui empêche le théorème d'Ehrenfest d'être valable. Les amplitudes de ces oscillations sont d'ailleurs en général faibles car elles sont proportionnelles au facteur $\frac{hc}{4\pi W}$ qui est toujours plus petit que $\frac{h}{4\pi m_0 c} = \frac{1}{4\pi} \frac{h}{m_0 c}$: or la quantité $\frac{h}{m_0 c}$, souvent appelée "longueur d'onde de Compton", est très petite ($2,4 \cdot 10^{-10}$ cm. pour l'électron).

L'analyse précédente montre nettement l'origine du tremblement de Schrödinger. Il est dû au battement des ondes à énergie positive $+W$ et des ondes à énergie négative $-W$ correspondantes. La fréquence du battement est, comme à l'ordinaire, la différence des fréquences, soit $\frac{2W}{h}$.

Pour un train d'ondes dans la décomposition spectrale duquel ne figureraient aucune onde à énergie négative, il n'y aurait pas tremblement de Schrödinger car $A_1 = 0$ si $b_k = 0$ et, par suite, le théorème d'Ehrenfest serait valable. Mais nous savons que pour représenter un train d'ondes il faut en général faire intervenir des ondes à énergie négative (si les dimensions du train sont inférieures à $\frac{h}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}$) et c'est pourquoi le théorème d'Ehrenfest n'est pas valable en théorie de Dirac.

CHAPITRE IX

POSSIBILITÉ DE MESURER LE SPIN DE L'ÉLECTRON

I. IDEES ACTUELLES SUR LA QUESTION

M. Bohr a donné des arguments pour prouver qu'il était impossible de mettre en évidence par des mesures directes le spin de l'électron. Naturellement cela n'exclut pas la mise en évidence indirecte de ce spin par la constatation de ses répercussions sur divers phénomènes tels que la structure fine des spectres. Cela n'exclut pas non plus la possibilité de mettre en évidence, ce qui jusqu'à présent ne paraît pas avoir été fait d'une façon nette, l'état de polarisation d'une onde électronique par des expériences du type de Norremberg en optique (réflexion par un corps polarisateur d'une onde déjà polarisée par une première réflexion).

Nous allons étudier les raisonnements de Bohr (développés notamment par M. Pauli dans les Actes du Congrès Solvay 1930, p. 217 et sq.) et voir que leur validité semble en général limitée au cas des vitesses faibles par rapport à c .

2. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE PROPRE

Considérons un faisceau monocinétique parallèle de particules, la vitesse étant dirigée suivant ox et les dimensions transversales du faisceau étant Δy et Δz . On peut supposer par exemple que le faisceau a été limité latéralement par son passage à travers une fente rectangulaire de côtés Δy et Δz . Nous supposons que les particules, qui pourraient ne pas être des électrons à condition d'être des particules de spin $1/2$ obéissant aux équations de Dirac, ont une charge e et une masse propre m_0 , et qu'elles sont soumises à l'action d'un champ magnétique non homogène partout parallèle au plan $y o z$ de sorte que nous aurons :

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

Si nous attachons notre attention aux actions qui s'exercent sur les particules suivant oz (un raisonnement analogue s'applique à oy), nous voyons que l'action laplacienne du champ magnétique sur la particule se traduit par l'existence suivant oz d'une force $\frac{e}{c} v H_y$, tandis que l'action du champ sur le moment magnétique propre \mathfrak{M} de la particule donne lieu suivant oz à la forme $\mathfrak{M}_z \frac{\partial H_z}{\partial z}$, force qui, compte tenu de la relation $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, a pour valeur absolue maxima $\frac{eh}{4\pi m_e c} \frac{\partial H_y}{\partial y}$ dans le cas où le mouvement magnétique propre est normal à l'axe et dirigé suivant oz.

Mais le faisceau ayant une largeur Δy dans le sens oy, la force laplacienne est affectée d'une incertitude égale à $\frac{e}{c} v \frac{\partial H_y}{\partial y} \Delta y$ et, pour qu'on puisse mettre en évidence l'existence du moment magnétique propre, il faut que cette incertitude soit beaucoup plus petite que la force due au gradient du champ, ce qui conduit à l'inégalité

$$\Delta y \ll \frac{1}{4\pi} \frac{h}{m_e v}$$

Pour des particules de vitesse faible par rapport à la vitesse c, le facteur $\frac{h}{m_e v}$ est égal à la longueur d'onde λ de l'onde associée et l'on a

$$\Delta y \ll \lambda$$

Cette condition entraîne l'existence d'une diffraction intense qui ne permet plus d'attribuer à la particule une trajectoire bien définie, d'où résulte l'impossibilité de mettre en évidence l'existence du moment magnétique propre dans une expérience où la notion de trajectoire peut être conservée.

Il convient toutefois de remarquer que dans le raisonnement précédent, nous avons supposé que la particule de masse m_e portait le moment magnétique $\frac{eh}{4\pi m_e c}$ qui lui correspond dans la théorie de Dirac. Il en est autrement dans le cas de l'expérience de Stern et Gerlach où un atome d'argent de grande masse propre M , transporte un moment magnétique égal à un magnéton de Bohr $\frac{eh}{4\pi m_e c}$ où m_e est ici la masse de l'électron. En reprenant le raisonnement précédent et remarquant que $\lambda = \frac{h}{M_e v}$, on trouve:

$$\Delta y \ll \frac{M_e}{m_e} \lambda$$

à la place de :

$$\Delta y \ll \lambda$$

et, comme $\frac{M_e}{m_e}$ est très petit, rien ne s'oppose plus à ce que nous puissions mettre en évidence le moment magnétique propre de l'électron dans des expériences où l'on peut attribuer une trajectoire à un atome d'argent.

Arrivons maintenant à un point essentiel. Nous avons plus haut négligé les corrections de relativité en posant $\lambda = \frac{h}{m_0 v}$ alors que l'expression rigoureuse de la longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\beta = \frac{v}{c})$$

Si nous tenons compte de cette expression rigoureuse, nous obtenons au lieu de $\Delta y \ll \lambda$

$$\Delta y \ll \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et si β est assez voisin de 1 (v assez voisin de c) $\sqrt{1 - \beta^2}$ sera très petit et la condition précédente n'entraîne plus que Δy soit très petit par rapport à λ , condition qui a été démontrée plus haut dans le cas $v \ll c$.

On ne peut donc pas affirmer pour des particules de Dirac animées de vitesses voisines de c qu'il soit impossible de mettre en évidence leur moment magnétique propre par l'expérience envisagée.

Cependant, comme M. Thibaud l'a fait remarquer, il subsiste une impossibilité pratique pour les électrons même si $v \sim c$. On a en effet $\Delta y \ll \frac{h}{m_0 c}$, ce qui pour les électrons donne $\Delta y \ll 10^{-10} \text{ cm}$ et l'on ne peut utiliser une fente aussi étroite. Il en serait autrement pour des particules beaucoup plus légères que les électrons. Par exemple pour $m \sim 10^{-37} \text{ gr.} = 10^{-16} \text{ m}_0$, on aurait $\Delta y \ll 1 \text{ cm}$, ce qui est aisément réalisable.

En résumé, pour des particules lentes ($v \ll c$), la mise en évidence du moment magnétique propre paraît impossible. Pour des électrons rapides ($v \sim c$), il n'y aurait plus d'impossibilité théorique (provenant des relations d'incertitude), mais il y aurait toujours impossibilité pratique (provenant des dispositifs utilisables). Pour des particules beaucoup plus légères que les électrons et de vitesse voisine de c , on n'aperçoit plus a priori d'impossibilité de mettre en évidence le moment magnétique propre.

Nota - La composante du moment magnétique normale à la vitesse est indépendante de la vitesse car elle est égale à

$$\int \mu_{23} d\tau = \int \frac{\mu_{23}^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} d\tau_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \int \mu_{23}^0 d\tau_0$$

3. MESURE DU CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR L'ÉLECTRON

Les champs magnétiques produits par l'électron magnétique en un point à la distance r sont en ordre de grandeur

$$H_1 = \frac{e}{r^2} \cdot \frac{v}{c} \quad ; \quad H_2 = \frac{mc}{r^3}$$

avec :

$$\mathfrak{M} = \text{moment magnétique propre} = \frac{eh}{4\pi m_0 c}; \quad \varepsilon = -e$$

Pour une incertitude Δv sur v , on a

$$\Delta H_1 = \frac{e}{cr^2} \Delta v$$

Or la position de l'électron étant incertaine à Δr près, on aura
 $\Delta p \cdot \Delta r \gg h$

car Δr peut être considéré comme la largeur d'une fente que l'électron traverse normalement. De plus toute mesure précise suppose $\Delta r \ll r$. Si l'on admet la formule non relativiste $p = m_0 v$, on a

$$\Delta v \gg \frac{h}{m_0 \Delta r} \quad \text{et} \quad \Delta H_1 \gg \frac{e}{cr^2} \cdot \frac{h}{m_0 \Delta r} \gg \frac{eh}{m_0 c r^3} \quad \text{ou} \quad \Delta H_1 \gg \frac{\mathfrak{M}}{r^3}$$

L'incertitude sur H_1 est donc très supérieure à H_2 , ce qui empêche la mesure de H_2 , mais ici encore il n'en est plus de même si $v \approx c$, car alors on a $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et :

$$\Delta p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta v + m_0 v \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = m_0 \Delta v \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v}{\Delta v} \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right] \gg m_0 \Delta v$$

car :

$$\frac{v}{\Delta v} > 1 \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \gg 1 \quad ; \quad \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \frac{v}{\Delta v} = \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \gg 1$$

Posons $\Delta p = m_0 \Delta v$. N avec $N \gg 1$, il vient

$$\Delta H_1 \gg \frac{e}{cr^2} \cdot \frac{h}{m_0 N \Delta r} \gg \frac{eh}{m_0 c r^3} \cdot \frac{1}{N}$$

mais comme N est très grand, nous ne pouvons plus en déduire :

$$\Delta H_1 \gg H_2$$

4. COMPENSATION DE LA FORCE DE LORENTZ PAR UN CHAMP ÉLECTRIQUE

M. Pauli a aussi envisagé le cas suivant. Des électrons sont lancés avec la vitesse v le long de l'axe des z et soumis à l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique, tous deux parallèles au plan xoy et indépendants de z . Ces champs dérivent d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur A_z qui fonctionnent seulement de x et y et tels que

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad H_x = \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial y}$$

La force agissant sur l'électron a pour composantes

$$F_x = -e E_x + \frac{e}{c} v H_y = e \frac{\partial}{\partial x} \left(V - \frac{v}{c} A_z \right)$$

$$F_y = -e E_y - \frac{e}{c} v H_z = e \frac{\partial}{\partial y} \left(V - \frac{v}{c} A_z \right)$$

Il y aura compensation des forces dans tout l'espace si $V = \frac{e}{c} A_z$
 Il semble donc, dit M. Pauli, que l'on puisse mettre en évidence les forces exercées sur le moment magnétique propre qui sont seules à subsister, une définition exacte de la position des électrons dans les directions perpendiculaires au faisceau n'étant pas nécessaire. Mais si $v_x = v_y = 0$, v_z ne peut être indépendant de x et de y car ce n'est pas mv_z , mais bien $p_z = mv_z - \frac{e}{c} A_z$ qui est intégrale première en Dynamique relativiste (m est la masse en mouvement $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$).

Supposons p_z constant et imaginons un faisceau d'électrons limité latéralement par une ouverture circulaire de diamètre d . Soient encore :

$$A_z = -(ax + byx) ; \quad H_x = -bx ; \quad H_y = a + by ; \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = b$$

Sur l'axe z , le champ magnétique :

$$H = H_y = a$$

produit l'orientation des moments magnétiques propres et la force exercée sur chacun de ces moments est $F_y = \mathcal{M}b$. Sur le bord du faisceau, il y a une force de Lorentz non compensée

$$\Delta F_y = \frac{e}{c} \Delta v_z H_x = \frac{e}{c} \Delta v_z b d .$$

et comme

$$\Delta p_z = 0 \text{ ou } \Delta v_z = \frac{e}{mc} \Delta A = \frac{e}{mc} b d^2$$

on a :

$$\Delta F_y = \frac{e}{mc} \cdot \frac{e}{c} b^2 d^3$$

où m est la masse en mouvement $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Pour pouvoir mesurer F_y , il faut que $\Delta F_y \ll F_y$ ou :

$$\mathcal{M}b \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} b^2 d^3$$

soit encore :

$$\mathcal{M} \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} b d^3$$

L'angle de diffraction du faisceau après passage par le trou de diamètre d est de l'ordre de $\frac{\lambda}{d}$ ($\lambda = \frac{h}{mv_z}$) et pour que la notion de trajectoire garde un sens, il faut que le trajet l dans le champ soit tel que

$$\frac{\lambda}{d} l \ll d \text{ ou } l \gg \frac{\lambda l}{d^2}$$

En multipliant cette inégalité par la précédente, on trouve

$$\mathcal{M} \gg \frac{e}{mc} \cdot \frac{e}{c} \cdot b d \lambda l$$

ou :

$$\frac{\lambda l}{d} \mathcal{M} \gg \frac{e}{mc} \frac{e}{c} b \frac{h^2}{m^2 v_z^2} l^2$$

et comme $\mathcal{M} = \frac{e h}{4 \pi m_0 c}$

$$\frac{\lambda l}{d} \gg \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 \mathcal{M} b \frac{l^2}{m v_z^2}$$

Or comme on a $\frac{d}{dt} (m v_y) = \mathcal{M} b$, on obtient en intégrant sur le temps $t = \frac{1}{v_z}$

$$m v_y = \mathcal{M} b \frac{1}{v_z} \quad \text{et} \quad \frac{v_y}{v_z} = \mathcal{M} b \frac{1}{m v_z^2}$$

La déviation D est donc

$$D = \frac{v_y}{v_z} l = \mathcal{M} b \frac{l^2}{m v_z^2}$$

Finalement :

$$\frac{\lambda l}{d} \gg \left(\frac{m_0}{m} \right)^2 D$$

Si l'on suppose, comme M. Pauli le fait implicitement, $v \ll c$ et $m \approx m_0$, on a

$$\frac{\lambda l}{d} \gg D$$

ce qui signifie que l'effet de diffraction masque entièrement la déviation, mais il n'en est plus de même si $v \approx c$ car alors $(\frac{m_0}{m})^2$ égal à $(1 - \beta^2)$ est très petit et l'inégalité obtenue ne prouve plus rien.

Ainsi trois des exemples donnés par M. Pauli à la suite de M. Bohr établissent seulement l'impossibilité de mettre en évidence le moment magnétique propre dans le cas $v \ll c$, mais sont insuffisants pour le cas $v \approx c$.

M. Pauli a traité un quatrième exemple où l'impossibilité semble subsister même pour $v \approx c$ comme nous allons le voir.

5. ARRET D'UN ÉLECTRON ORIENTÉ PAR UN GRADIENT DE CHAMP MAGNÉTIQUE

Des électrons se meuvent avec une vitesse v_z le long de oz en présence d'un champ magnétique dirigé vers les z négatifs et ayant un gradient $\frac{\partial H_z}{\partial z}$ le long de oz . Les électrons dont le mo-

ment magnétique est dirigé dans le sens négatif de oz sont arrêtés au bout d'un temps t tel que :

$$mv_z = \mathcal{M} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial z} \cdot t \quad (v_z = \text{vitesse initiale} ; m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}})$$

Mais si H_x est nul sur l'axe, il ne peut l'être en dehors de l'axe en raison de la relation $\text{div } \vec{H} = 0$, et à la distance Δx de oz on a :

$$H_x = \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \Delta x = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \quad \Delta x$$

Il en résulte une rotation "de Larmor" des électrons autour de la direction ox avec la fréquence

$$\nu = \frac{eH_x}{4\pi m_0 c} = \frac{\mathcal{M}H_x}{h}$$

M. Pauli dit que de cette rotation de Larmor résulte une inversion du sens de la vitesse v_z au bout du temps $\frac{1}{\nu}$. Pour que le renversement de v_z soit dû à l'action du champ magnétique sur le moment propre et non à la rotation de Larmor, il faut que :

$$t \ll \frac{h}{\mathcal{M}H_x} \text{ ou } \mathcal{M} \frac{\partial H_z}{\partial z} t \Delta x \ll h$$

et puisque $mv_z = \mathcal{M} \frac{\partial H_z}{\partial z} t$, on en déduit : $mv_z \Delta x \ll h$

Or $\lambda = \frac{h}{mv_z}$; donc $\Delta x \ll \lambda$ et les phénomènes de diffraction empêchent l'expérience de réussir. Tel est le raisonnement de Pauli qui suppose explicitement que les électrons vont lentement. Voyons ce qui se passe si $v \sim c$.

La formule donnant ν subsiste car dans le système propre de l'électron on a :

$$v_0 = \frac{eH_x^{(o)}}{4\pi m_0 c} = \frac{eH_x}{4\pi m_0 c \sqrt{1-\beta^2}} \text{, car } H_x^{(o)} = \frac{H_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Or d'après le ralentissement des horloges : $\nu = v_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{eH_x}{4\pi m_0 c}$ c.q.f.d. Mais le moment propre M_z dans le système de l'observateur vaut $\mathcal{M} \sqrt{1-\beta^2}$ car :

$$\mu_{12} = \mu_{12}^o ; \quad \int \mu_{12} dv = \int \mu_{12}^o dv_0 \sqrt{1-\beta^2} = \mathcal{M} \sqrt{1-\beta^2}$$

On doit donc écrire :

$$\frac{d}{dt} (mv_z) = \mathcal{M} \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial H_z}{\partial z}$$

et comme $\sqrt{1-\beta^2}$ est toujours inférieur à l'unité, on a :

$$mv_z < \mathcal{M} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial t} \cdot t$$

et puisque l'on doit avoir $t \ll \frac{1}{v}$ on a :

$$\frac{4\pi m_0 c}{eH_x} \gg \frac{mv_z}{\mathcal{M} \frac{\partial H_z}{\partial z}}$$

soit

$$\Delta x \ll \frac{4\pi m_0 c}{e} \cdot \frac{eh}{4\pi m_0 c} \cdot \frac{1}{mv_z} = \lambda$$

et il y a bien encore impossibilité. L'impossibilité subsiste donc ici pour $v \approx c$.

6. MESURE DU MOMENT CINÉTIQUE PROPRE (SPIN)

Si la mise en évidence du moment magnétique propre ne paraît pas impossible quand $v \approx c$, il n'en est pas de même pour le moment cinétique propre (spin) qui paraît, suivant l'opinion de Bohr, toujours masqué par l'incertitude du moment orbital.

Imaginons un écran percé d'une ouverture rectangulaire de côtés Δx et Δy . Sur cet écran tombe un faisceau d'électrons se propageant suivant la normale à l'écran (axe oz). Le train d'ondes transmis a pour dimensions latérales Δx et Δy qui sont les incertitudes sur les coordonnées x et y du corpuscule après le passage de l'écran. Les incertitudes sur les composantes p_x et p_y de la quantité de mouvement sont donc :

$$|\Delta p_x| \gg \frac{h}{\Delta x} ; \quad |\Delta p_y| \gg \frac{h}{\Delta y}$$

Le moment orbital de l'électron autour de oz a pour expression :

$$M_z = x p_y - y p_x$$

Il y a donc une incertitude dont la valeur est comprise entre 0 et

$$\Delta M_z = \Delta x \cdot |\Delta p_y| + \Delta y \cdot |\Delta p_x|$$

d'où

$$\Delta M_z \gg h \left(\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = h \left(\frac{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}{\Delta x \Delta y} \right)$$

Comme $(\Delta x - \Delta y)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2 \Delta x \cdot \Delta y \gg 0$, on en déduit $\Delta M_z \gg 2h$ et a fortiori

$$\Delta M_z \gg \frac{h}{4\pi}$$

On voit que l'incertitude sur M_z est supérieure à $\frac{h}{4\pi}$, c'est à dire à la valeur du spin, ce qui rend impossible de reconnaître quelle est, dans le moment cinétique total, la part du spin.

7. CONCLUSION - Il ne semble donc pas qu'il y ait une véritable impossibilité de principe de mettre en évidence la valeur du moment magnétique propre pour des particules de Dirac animées d'une vitesse voisine de c ; Néanmoins pour les électrons il sub-

siste une impossibilité pratique. Pour des particules beaucoup plus légères (électrinos de J. Thibaud), il pourrait ne plus en être de même pour $v \approx c$.

Mais M. Pauli a donné une autre démonstration de l'impossibilité de mettre en évidence le moment magnétique, démonstration d'un genre tout différent car elle utilise non plus les relations d'incertitudes, mais le passage à l'approximation de l'optique géométrique en théorie de Dirac. Nous allons étudier cette nouvelle démonstration et pour cela rappeler d'abord comment s'opère en Mécanique ondulatoire relativiste le passage à l'approximation de l'optique géométrique.

CHAPITRE X

PASSAGE A L'APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE RELATIVISTE

I. L'APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

En Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde, l'équation d'onde est :

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\epsilon}{c} A_x \right)^2 \right] \psi = m_0^2 c^2 \psi$$

qui en l'absence de champ se réduit à

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \psi$$

Le ψ étant une fonction complexe, nous pouvons poser :

$$\psi = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)} = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} S(x, y, z, t)}$$

a étant l'argument et $2\pi\varphi$ la phase; et d'autre part : $S = h\varphi$

Si nous substituons cette forme dans l'équation des ondes, nous obtenons une équation complexe où, après suppression du facteur commun $e^{\frac{2\pi i}{h} S}$, nous pouvons séparer les termes réels et imaginaires. Ceci nous donne :

$$(X,a) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\epsilon}{c} A_x \right)^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square a}{a} = m_0^2 c^2 \quad (J)$$

$$(X,b) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[a^2 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V \right) \right] + \operatorname{div} \left[a^2 \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} S + \frac{\epsilon}{c} \overrightarrow{A} \right) \right] = 0 \quad (C)$$

L'équation (X,b) exprime rigoureusement la conservation du nombre des particules, car en Mécanique ondulatoire relativiste à une fonction d'onde les composantes du quadrivecteur densité-flux sont données par :

$$\rho = -\frac{h}{4\pi i m_0 c^2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\epsilon}{m_0 c^2} V \psi \psi^*$$

$$\overrightarrow{f} = \frac{h}{4\pi i m_0} \left(\psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi^* - \psi^* \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \right) - \frac{\epsilon}{m_0 c} \overrightarrow{A} \psi \psi^*$$

ce qui se peut écrire :

$$\rho = \frac{1}{m_0 c} a^2 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} V \right) ; \quad \vec{f} = - \frac{a^2}{m_0} \left(\vec{\text{grad}} S + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A} \right)$$

ou en posant :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} V = \pi_4 ; \quad - \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c} A_x = \pi_x, \dots, \dots$$

$$\rho = \frac{1}{m_0 c} a^2 \pi_4 ; \quad \vec{f} = \frac{a^2}{m_0} \vec{\pi}$$

et l'équation (X,b) qu'on peut écrire :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \pi_4) + \text{div} (a^2 \vec{\pi}) = 0$$

est équivalente à $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{f} = 0$ et exprime bien la conservation de la probabilité de présence (ou du nombre des corpuscules dans le cas statistique).

Revenons à l'équation (X,a) que l'on peut écrire :

$$(X,c) \quad \pi_4^2 - \pi^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square a}{a} = m_0^2 c^2$$

Elle lie les variations de l'amplitude a à celle de la phase S . On dit que l'approximation de l'optique géométrique est valable lorsque, dans cette équation, on peut négliger les termes en h^2 . On démontre que cette condition est réalisée quand les conditions de propagation sont telles que l'amplitude varie peu à l'échelle de la longueur d'onde. On a alors :

$$\pi_4^2 - \pi^2 = m_0^2 c^2$$

et cette relation est celle qui existe en Mécanique relativiste ponctuelle, car dans cette Mécanique (Dynamique Einsteinienne) on a :

$$\frac{W}{c} = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \varepsilon V ; \quad \vec{p} = -\vec{\text{grad}} S = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}$$

d'où :

$$(X,d) \quad \pi_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} V = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad \vec{\pi} = -\vec{\text{grad}} S - \frac{\varepsilon}{c} \vec{A} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ce qui entraîne bien :

$$\pi_4^2 - \pi^2 = m_0^2 c^2$$

Dans ce cas, les phases de l'onde sont représentées par une intégrale complète de l'équation de Jacobi

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} V \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2 = m_0^2 c^2$$

et le mouvement est défini en chaque point de l'espace-temps par les formules (X,d) qui donnent π_4 et $\vec{\pi}$ en fonction de $S(x,y,z,t)$ et de $V(x,y,z,t)$ et $\vec{A}(x,y,z,t)$ supposées connues.

Du point de vue ondulatoire de la Mécanique ondulatoire, on peut se représenter ce qui se passe de la façon suivante. Les conditions de propagation varient très peu à l'échelle de la

longueur d'onde, on peut considérer des régions qui soient très grandes par rapport à la longueur d'onde et à l'intérieur desquelles les potentiels V et \vec{A} varient très peu. Dans une telle région peut exister un groupe d'ondes de dimensions très grandes par rapport à la longueur d'onde et cependant presque monochromatique de fréquence $\nu = \frac{\partial S}{\partial t} \frac{1}{h}$ et de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{[grad S]}$. Les quantités π_4 et $\vec{\pi}$ sont définies pour ce groupe d'ondes par les formules

$$\pi_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} V; \vec{\pi} = -\vec{\text{grad}} S - \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}$$

avec les valeurs locales presque constantes de V et \vec{A} . L'équation $\frac{\partial p}{\partial t} \cdot \text{div } \vec{f} = 0$ montre alors que le groupe d'ondes se déplace avec la vitesse $\frac{|\vec{f}|}{p}$ égale à

$$\frac{\vec{\pi}}{\pi_4} c = \frac{\frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \beta^2}}} c = \vec{V}$$

On a donc affaire à un groupe d'ondes ou globule de probabilité qui glisse le long d'une des trajectoires prévues par la Mécanique ponctuelle classique avec la vitesse \vec{V} , et ainsi est effectué à l'approximation de l'optique géométrique le passage de la Mécanique ondulatoire à la Mécanique ponctuelle.

En somme, l'optique géométrique et par suite la Mécanique ponctuelle sont valables dès qu'on peut obtenir une équation de Jacobi en négligeant des termes de l'ordre de h^2 , l'équation de continuité prouvant alors que l'on peut considérer des groupes d'ondes se déplaçant le long d'une des trajectoires de la Mécanique ponctuelle avec la vitesse correspondante.

2. LA MÉTHODE W. K. B. D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

La méthode Wentzel - Kramers - Brillouin procède par approximations successives par rapport à la quantité très petite $\frac{h}{2\pi i}$. Pour cela on part de l'un des développements suivants :

$$\Psi = e^{\frac{2\pi i}{h} [S_0 + \frac{h}{2\pi i} S_1 + \dots + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n S_n + \dots]}$$

ou

$$\Psi = \left[a_0 + \frac{h}{2\pi i} a_1 + \dots + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n a_n + \dots \right] e^{\frac{2\pi i}{h} S_0}$$

entre lesquels existent les relations :

$$a_0 = e^{S_1} \quad ; \quad a_1 = S_2 e^{S_1} \quad ; \quad a_2 = \left(\frac{S_2}{2} + S_3 \right) e^{S_1} ; \dots$$

L'approximation d'ordre zéro (en $\frac{h}{2\pi i}$) consistera à ne garder que les termes a_0 (ou S_0). L'approximation d'ordre 1 à garder a_0 et a_1 (ou S_0 et S_1), ...

Dans la méthode précédente, nous écrivions $\psi = ae^{\frac{S}{h}}$ avec a et S (module et argument de ψ). Ici (cette remarque est importante pour la suite), les a_0, a_1, \dots sont moins bien définis.

Si par exemple on a $a_i = \alpha_i e^{i\beta_i}$ (α_i et β_i module et argument de a_i) on pourra faire rentrer β_0 dans le facteur exponentiel en posant $S = S_0 + \frac{h}{2\pi i} \beta_0$ et poser :

$$\psi = \left[a_0 + \frac{h}{2\pi i} \alpha_1 e^{i(\beta_1 - \beta_0)} + \dots + \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^n \alpha_n e^{i(\beta_n - \beta_0)} + \dots \right] e^{\frac{S}{h}}$$

et il y aura ainsi une certaine indétermination dans la forme du développement surtout si β_0 est assez grand pour que $\frac{h}{2\pi i} \beta_0$ soit d'un ordre de grandeur intermédiaire entre 1 et $\frac{h}{2\pi i}$. Autrement dit si $S_1 = S'_1 + iS''_1$ a sa partie imaginaire S''_1 assez grande pour que $\frac{h}{2\pi i} \cdot S_1$ ait un ordre de grandeur intermédiaire entre 1 et $\frac{h}{2\pi i}$, on ne sait pas bien s'il faut écrire :

$$a_0 = e^{S'_1}$$

ou :

$$a_0 = e^{S'_1 + iS''_1}$$

ou même

$$a_0 = e^{S'_1 + i\eta S''_1}$$

avec :

$$0 < \eta < 1$$

Quoi qu'il en soit et en admettant que ces indéterminations ne soient pas gênantes, nous allons substituer le développement en a_i dans l'équation de propagation et séparer les termes correspondants aux diverses puissances de $\frac{h}{2\pi i}$.

L'équation d'ordre zéro en $\frac{h}{2\pi i}$ est

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} V \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial S_0}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} A_i \right)^2 = m_0^2 c^2$$

C'est l'équation de Jacobi : elle montre que $\frac{2\pi S_0}{h}$ est la phase à l'approximation de l'optique géométrique.

L'équation d'ordre un en $\frac{h}{2\pi i}$ donne :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\pi^{(0)} a_0^2 \right] + \operatorname{div} \left[\pi^{(0)} a_0^2 \right] = 0$$

avec :

$$\pi_4^{(o)} = \frac{1}{c} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V; \vec{\pi} = -\vec{\text{grad}} S_o - \frac{\epsilon}{c} \vec{A}$$

et cette équation exprime toujours la conservation de la probabilité de densité a_o^2 et de vitesse $\frac{\vec{\pi}^{(o)c}}{\pi_4^{(o)}}$ à l'approximation de l'optique géométrique.

Les équations suivantes permettraient de calculer a_1, a_2, \dots en fonction de S_o et a_o . Ces grandeurs doivent être négligeables à l'approximation de l'optique géométrique : si elles ne le sont pas, les phénomènes de diffraction apparaissent.

Les deux méthodes que nous venons d'employer pour passer à l'approximation de l'optique géométrique en Mécanique ondulatoire apparaissent comme simples dans la Mécanique ondulatoire non relativiste et, comme nous venons de le voir, dans la Mécanique ondulatoire relativiste à un ψ . Il en est tout autrement en théorie de Dirac où la question est beaucoup plus compliquée. Nous allons l'étudier en envisageant successivement les deux méthodes que nous venons d'exposer.

3. PASSAGE A L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE EN THÉORIE DE DIRAC

Pour effectuer le passage à l'optique géométrique, nous emploierons d'abord la même méthode qu'en Mécanique ondulatoire relativiste.

Nous partons des équations du second ordre de la théorie de Dirac qui sont :

$$\left[P_4^2 - \sum_{i=1}^{i=3} P_i^2 - m_o^2 c^2 + \frac{\epsilon}{c} \frac{h}{2\pi i} (\alpha_1 h_x + \alpha_2 h_y + \alpha_3 h_z) - \frac{\epsilon}{c} \frac{h}{2\pi i} (\alpha_2 \alpha_3 H_x + \alpha_3 \alpha_1 H_y + \alpha_1 \alpha_2 H_z) \right] \psi_k = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, 4)$$

et pour passer à l'approximation de l'optique géométrique nous poserons :

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} S} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

où S est une fonction de phase commune aux quatre ψ_k et rapidement variable à l'échelle de la longueur d'onde tandis que les a_k sont des amplitudes qui à l'approximation de l'optique géométrique devront être lentement variables à cette échelle. Nous allons substituer cette forme des ψ_k dans l'équation symbolique du second ordre et chercher à en déduire, par séparation des termes réels et des termes imaginaires, d'une part une équation (J) de Jacobi, d'autre part une équation (C) de continuité. Mais, pour pouvoir séparer avec sécurité des termes réels et des termes imaginaires purs, il faut prendre quelques précautions. Pour obtenir cette séparation après introduction de la forme admise pour les ψ_k dans l'équation symbolique du second ordre, nous

appliquerons à cette équation l'opérateur α_4 , puis nous multiplierons par a_k^* et nous sommerons sur k . Nous pourrons alors séparer les termes réels des termes imaginaires et en posant :

$$\pi_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V ; \vec{\pi} = -\vec{\text{grad}} S, \frac{\epsilon}{c} \vec{A}$$

nous obtiendrons pour les termes réels :

$$\left(\pi_4^2 - \pi^2 - m_o^2 c^2 \right) \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k + \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=4} \left[\left(a_k^* \alpha_4 \frac{1}{c} \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial a_k^*}{\partial t} \alpha_4 a_k \right) \pi_4 + \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial x} - \frac{\partial a_k^*}{\partial x} \alpha_4 a_k \right) \pi_x + \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial y} - \frac{\partial a_k^*}{\partial y} \alpha_4 a_k \right) \pi_y + \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial z} - \frac{\partial a_k^*}{\partial z} \alpha_4 a_k \right) \pi_z \right] -$$

$$- \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k \right) = - \frac{\epsilon}{c} \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \left(h_x i \alpha_1 \alpha_4 + h_y i \alpha_2 \alpha_4 + h_z i \alpha_3 \alpha_4 \right) a_k - \frac{\epsilon}{c} \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \left(H_x i \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + H_y i \alpha_3 \alpha_1 \alpha_4 + H_z i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 \right) a_k$$

Ceci devra nous donner l'équation de Jacobi (J).

Quant aux termes imaginaires, ils nous fournissent l'équation (C) :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\pi_4 \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k \right) + \text{div} \left(\vec{\pi} \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k \right) + \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k \right) = 0$$

Nous allons d'abord étudier la première équation. A l'approximation de l'optique géométrique, l'onde ψ se réduit à un paquet d'ondes presque monochromatiques dans une région de champ sensiblement constant : elle est assimilable à une onde plane monochromatique "locale" correspondant à une certaine vitesse βc et l'on aura :

$$\sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k = \rho \sqrt{1 - \beta^2}$$

ρ étant la densité de probabilité et par suite :

$$\int \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} \text{ car } \int \rho d\tau = 1$$

En intégrant dans D la première équation obtenue nous aurons l'équation

$$\pi_4^2 - \pi^2 + F(a_k) + G(a_k) = m_o^2 c^2 - \frac{2}{m_o c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \left\{ (\vec{H} \cdot \vec{\pi}) + (\vec{h} \cdot \vec{g}) \right\}$$

\vec{M} et \vec{F} étant respectivement le moment magnétique propre et le moment électrique propre de la particule. Par définition on a :

$$G(a_k) = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2} \sum_{k=1}^{k=4} \frac{(a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$F(a_k) = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{k=4} \left[\left(a_k^* \alpha_4 \frac{1}{c} \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial a_k^*}{\partial t} \alpha_4 a_k \right) \pi_4 + \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial x} - \frac{\partial a_k^*}{\partial x} \alpha_4 a_k \right) \pi_x + \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial y} - \frac{\partial a_k^*}{\partial y} \alpha_4 a_k \right) \pi_y + \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial z} - \frac{\partial a_k^*}{\partial z} \alpha_4 a_k \right) \pi_z \right]}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{k=4} \sum_{j=1}^{j=4} \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_k^*}{\partial x_j} \alpha_4 a_k \right) \pi_j}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Nous allons supposer qu'à l'approximation de l'optique géométrique $F(a_k)$ et $G(a_k)$ sont négligeables. Cela paraît très vraisemblable pour $G(a_k)$ qui est de l'ordre de \hbar^2 : c'est moins évident pour $F(a_k)$ qui est de l'ordre de \hbar . Nous reviendrons plus tard sur ces hypothèses pour les justifier; pour l'instant nous les admettrons. On obtient alors l'équation de Jacobi :

$$\pi_4^2 - \pi^2 = m_0^2 c^2 + 2\eta U m_0$$

avec les définitions :

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad U = -(\vec{M} \cdot \vec{H}) - (\vec{F} \cdot \vec{h})$$

U est l'énergie potentielle due à l'action du champ sur les moments propres.

En écrivant le second membre de l'équation de Jacobi sous la forme :

$$m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 + 2m_0 \eta U$$

nous définissons une masse propre variable qui est précisément analogue à celle que M. Weyssenhoff avait introduite dans sa dynamique de la particule à spin. Nous devions nous attendre à cette coïncidence. La masse m_0 est lentement variable à l'échelle de la longueur d'onde.

Sur la formule précédente, on peut remarquer que ηU est un invariant relativiste. Ceci pourrait surprendre car on serait tenté de donner à U la variance relativiste d'une énergie et alors ηU ne serait pas un invariant. Mais, en réalité, U bien qu'ayant les dimensions physiques d'une énergie, n'en a pas la variance relativiste. En effet, si F_{ik} et m_{ik} désignent respectivement les composantes du tenseur "champ électromagnétique" et celles du tenseur "densités de moment magnétique et de moment électrique propres" on a :

$$U = -\frac{1}{2} \int \sum_{i,k} F_{ik} m^{ik} d\tau = -\frac{1}{2} \int \sum_{i,k} F_{ik} m^{ik} d\tau_0 \sqrt{1-\beta^2} = U_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{U_0}{\eta}$$

U_0 étant la valeur de U dans le système propre. Donc le produit $\eta U = U_0$ est bien un invariant.

Il paraît très probable que pour obtenir une Mécanique ponctuelle de la particule à spin, il faut supposer que $2m_0 U_0$ est très petit devant $m_0 c^2$ c'est à dire que l'énergie propre U_0 due à l'action du champ sur les moments propres est très petite devant l'énergie de masse $m_0 c^2$. Nous ferons donc l'hypothèse que

$$\frac{U_0}{m_0 c^2} = \frac{\eta U}{m_0 c^2} = K$$

est très petit devant l'unité, sans supposer cependant que K soit absolument négligeable. Nous pourrons alors poser approximativement :

$$m_0' c^2 \approx \left(m_0 c + \frac{U_0}{c} \right)^2 = \left(m_0 c + \frac{\eta U}{c} \right)^2$$

d'où :

$$m_0' = m_0 + \frac{U_0}{c^2} = m_0 + \frac{\eta U}{c^2}$$

Il sera alors naturel de chercher à développer la Mécanique ponctuelle de l'électron à spin en posant comme fonction de Lagrange :

$$L = -m_0' c^2 \sqrt{1-\beta^2} - \mathcal{E} V + \frac{\mathcal{E}}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

c'est à dire en remplaçant m_0 par m_0' dans l'expression usuelle de la fonction de Lagrange en Dynamique relativiste de l'électron. On pourra écrire :

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - U - \mathcal{E} V + \frac{\mathcal{E}}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A})$$

expression qui est bien telle que $\int L dt$ soit un invariant relativiste puisque :

$$\int U dt = \int U_0 dt_0 = \int \left(\frac{U_0 dt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{U_0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} v_i dx_i \right)$$

est visiblement invariant, les intégrales étant prises le long de la ligne d'Univers de la particule.

Les formules classiques de Dynamique analytique $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ nous donnent :

$$\vec{p} = -\vec{\text{grad}} S = \frac{m_0' \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{A}$$

d'où :

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{A} = \frac{m_0' \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{U_0 \vec{v}}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \vec{\pi}^{(0)} + \frac{U_0 \vec{v}}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}$$

Quant à l'énergie, elle est donnée par la formule :

$$W = \frac{\partial S}{\partial t} = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \frac{m_0' c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \mathcal{E} V$$

dont on déduit :

$$\pi_4 = \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V = \frac{m'_o c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_o c}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{U_o}{c \sqrt{1-\beta^2}} = \pi_4^{(o)} + \frac{U_o}{c \sqrt{1-\beta^2}}$$

$c \pi_4^{(o)} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et $\pi^{(o)} = \frac{m_o \vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ désignant respectivement l'énergie et la quantité de mouvement d'une particule de masse propre m_o et de vitesse \vec{V} en dehors de tout champ.

On vérifie immédiatement l'équation de Jacobi (J) car :

$$\pi_4^2 - \pi^2 = m_o^2 c^2 \simeq m_o^2 c^2 + 2 m_o U_o = m_o^2 c^2 + 2 m_o \eta U$$

avec l'hypothèse $K \ll 1$.

Si maintenant nous écrivons les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

avec la forme admise pour L , nous trouvons :

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \vec{F} - \vec{\text{grad}} U$$

où \vec{F} est la force de Lorentz et $-\vec{\text{grad}} U$ la force exercée par le gradient du champ électromagnétique sur les moments propres.

En comparant la valeur de la force $-\vec{\text{grad}} U$ avec l'incertitude sur la force laplacienne contenue dans \vec{F} dans le cas envisagé au début du chapitre IX, on retrouverait aisément la formule $\Delta x \propto \frac{h}{m_o V}$ et les conséquences que nous en avons tirées (impossibilité de mettre en évidence le moment magnétique propre sauf si $V \simeq c$).

Revenons maintenant à l'équation (C) :

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\pi_4 \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k \right) + \text{div} \left(\vec{\pi} \sum_{k=1}^{k=4} a_k^* \alpha_4 a_k \right) + \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k \right)$$

Pour voir qu'elle représente l'équation de continuité, nous ferons d'abord un raisonnement peu rigoureux : nous négligerons le dernier terme et nous confondrons π_4 et $\vec{\pi}$ avec $\pi_4^{(o)}$ et $\vec{\pi}^{(o)}$, ce qui nous donnera :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_o c}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \rho \sqrt{1-\beta^2} \right) + \text{div} \left(\frac{m_o \vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} \rho \sqrt{1-\beta^2} \right) = 0$$

ou après division par la constante m_o :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}) = 0$$

ce qui est bien l'équation de continuité.

Mais en réalité $\pi_4 = \frac{m'_o c}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\vec{\pi} = \frac{m'_o \vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ et il faut tenir compte du dernier terme, d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho m'_o) + \text{div} (\rho \vec{V} m'_o) + \frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k \right) = 0$$

On peut écrire :

où $\frac{dm'_o}{dt} = \frac{\partial m'_o}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\text{grad}} m'_o$ est la dérivée totale de m'_o le long de la trajectoire. L'équation de continuité sera donc vérifiée si :

$$\frac{1}{c^2} \frac{dU_o}{dt} = \frac{dm'_o}{dt} = - \frac{h}{2\pi i k} \sum_{k=1}^{k=4} (a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k)$$

Le dernier terme de l'équation (C) qui au premier abord peut paraître un terme parasite sert en réalité à compenser les variations de m'_o le long de la trajectoire. Nous retrouverons plus loin une démonstration de l'équation de continuité.

4. LA MÉTHODE W. K. B. EN THÉORIE DE DIRAC

Nous avons opéré le passage au cas de l'optique géométrique en partant de l'équation du second ordre. On peut aussi partir des équations du premier ordre en appliquant la méthode K.W.B. C'est ce qu'a fait M. Pauli dans un très intéressant mémoire (Helvetica physica acta S. 1932 p. 179) dont nous n'adopterons pas cependant toutes les conclusions. Nous allons reproduire son raisonnement.

Nous partons des équations du premier ordre de Dirac

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V \right) \psi_k + \sum_{i=1}^{i=3} \left(-\alpha_i \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\epsilon}{c} A_i \right) \psi_k = m_o c \alpha_4 \psi_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Avec un léger changement de notations, écrivons avec M. Pauli le développement suivant des ψ_k :

$$\psi_k = b_k e^{\frac{2\pi i}{h} S_o} = \left[b_k^{(0)} + \frac{h}{2\pi i} b_k^{(1)} + \dots + \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^n b_k^{(n)} + \dots \right] e^{\frac{2\pi i}{h} S_o}$$

où au second membre b_k est développé suivant les puissances de la quantité très petite $\frac{h}{2\pi i}$ (conformément aux principes de la méthode K.W.B.) et où S_o désigne la fonction de Jacobi pour une particule sans spin soumise au champ électromagnétique considéré c'est-à-dire la fonction

$$S_o = \int \left[\left(\pi_4^{(0)} + \frac{\epsilon}{c} V \right) c dt - \sum_{i=1}^{i=3} \left(\pi_i^{(0)} + \frac{\epsilon}{c} A_i \right) d x_i \right]$$

l'intégrale étant prise le long du rayon-trajectoire. On doit bien noter que dans la formule précédente, c'est $\pi_4^{(0)}$ et $\pi^{(0)}$, et non π_4 et π qui figurent au second membre. On doit noter aussi que les grandeurs

$$\pi_4^{(0)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\epsilon}{c} V(x, y, z, t) ; \quad \pi_i^{(0)} = -\frac{\partial S_o}{\partial x_i} - \frac{\epsilon}{c} A_i(x, y, z, t)$$

sont des fonctions bien définies de x, y, z, t , lentement variables à grande échelle dans le champ électromagnétique quand l'approximation de l'optique géométrique est valable. Ainsi, dans un champ permanent, selon le point de vue de M. Pauli, on aurait :

$$c \pi_4^{(o)} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = W - \varepsilon V (x, y, z, t)$$

W étant la valeur constante de l'énergie.

En substituant dans les équations de Dirac la forme admise pour les Ψ_k , on obtient en faisant un calcul d'approximations successives par rapport aux puissances de $\frac{h}{2\pi i}$ les équations

$$(X, e) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a) \left[\pi_4^{(o)} + \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \pi_i^{(o)} - \alpha_4 m_o c \right] b_k^{(o)} = 0 \\ (b) \left[\pi^{(o)} + \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \pi_i^{(o)} - \alpha_4 m_o c \right] b_k^{(1)} = - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x_i} \right) \end{array} \right.$$

La première équation étant homogène n'admet de solutions non identiquement nulles que si le déterminant est nul et cette condition est équivalente à la relation :

$$\pi_4^{(o)2} - \pi^{(o)2} = m_o^2 c^2$$

qui est bien vérifiée. Il résulte alors de la théorie bien connue de l'onde plane monochromatique en théorie de Dirac que les $b_k^{(o)}$ sont les amplitudes des Ψ_k dans le mouvement rectiligne uniforme correspondant à l'énergie $c \pi_4^{(o)}$ et à la quantité de mouvement $\vec{\pi}^{(o)}$. Mais comme il est bien connu, à chaque état de mouvement rectiligne et uniforme, correspondent deux états possibles pour le spin. Si nous désignons par A_k et B_k les amplitudes (fonctions de $\pi_4^{(o)}$ et de $\vec{\pi}^{(o)}$ et par suite lentement variables à grande échelle) relatives aux deux états de spin et dont nous connaissons les expressions, nous aurons :

$$b_k^{(o)} = C_1 (x, y, z, t) A_k (\pi_4^{(o)}, \vec{\pi}^{(o)}) + C_2 (x, y, z, t) B_k (\pi_4^{(o)}, \vec{\pi}^{(o)})$$

avec :

$$A_1 = - \frac{\pi_z^{(o)}}{\pi_4^{(o)} + m_o c} ; \quad A_2 = - \frac{\pi_x^{(o)} - i \pi_y^{(o)}}{\pi_4^{(o)} + m_o c} ; \quad A_3 = 1 ; \quad A_4 = 0$$

$$B_1 = - \frac{\pi_x^{(o)} + i \pi_y^{(o)}}{\pi_4^{(o)} + m_o c} ; \quad B_2 = \frac{\pi_z^{(o)}}{\pi_4^{(o)} + m_o c} ; \quad B_3 = 0 ; \quad B_4 = 1$$

C_1 et C_2 sont lentement variables à grande échelle.

On voit alors que les équations en $b_k^{(1)}$, qui sont linéaires et ont un déterminant nul, ne peuvent admettre de solutions non nulles en $b_k^{(1)}$ que si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_k^* \left(\frac{1}{c} \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x_i} \right) = 0 ; \quad \sum_{k=1}^{k=4} B_k^* \left(\frac{1}{c} \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x_i} \right) = 0$$

Ce sont les "conditions de Pauli". Il est facile, étant données les expressions ci-dessus des A_k et B_k , de les écrire explicite-

ment par exemple dans le cas où $\pi_4^{(o)}$ reste constant. On trouve ainsi :

$$(X,f)(a) \quad 2 \left[\pi_4^{(o)} \frac{1}{c} \frac{\partial C_1}{\partial t} + \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \pi_y^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial y} + \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right] + \pi_z^{(o)} \left(\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_2}{\partial y} \right) - \left(\pi_x^{(o)} - i \pi_y^{(o)} \right) \frac{\partial C_2}{\partial z} = - C_1 \operatorname{div} \vec{\pi}^{(o)} + i C_1 \left(\frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial y} \right) - i C_2 \left[\left(\frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial y} - \frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial z} \right) + i \left(\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} - \frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial x} \right) \right]$$

et :

$$(X,f)(b) \quad 2 \left[\pi_4^{(o)} \frac{1}{c} \frac{\partial C_2}{\partial t} + \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \pi_y^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial y} + \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial z} \right] + \pi_z^{(o)} \left(\frac{\partial C_1}{\partial x} + i \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) - \left(\pi_x^{(o)} + i \pi_y^{(o)} \right) \frac{\partial C_1}{\partial z} = - C_2 \operatorname{div} \vec{\pi}^{(o)} - i C_2 \left(\frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial y} \right) - i C_1 \left[\left(\frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial y} - \frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial z} \right) + i \left(\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} - \frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial x} \right) \right]$$

Il est important de remarquer que le premier crochet dans ces deux équations peut s'écrire $m_e c \eta \frac{d C_i}{d t}$ (avec $i = 1, 2$), la dérivée $\frac{d}{d t}$ étant prise en suivant le mouvement de la particule défini par le vecteur $\vec{\pi}^{(o)}$.

Les équations de condition de Pauli sont deux équations aux dérivées partielles du premier ordre qui déterminent les fonctions $C_1(x, y, z, t)$ et $C_2(x, y, z, t)$ quand on connaît les vitesses initiales. La variation à grande échelle des A_k et des B_k par l'intermédiaire de $\pi^{(o)}$ et de $\vec{\pi}^{(o)}$ et celle des fonctions C_1 et C_2 expriment la façon dont la portion d'onde monochromatique qui représente à petite échelle le mouvement du paquet d'ondes se transforme sous l'influence du champ électromagnétique quand le paquet d'ondes progresse.

Multiplions les équations de condition de Pauli par C_1^* et C_2^* respectivement et les équations conjuguées par C_1 et C_2 , respectivement et ajoutons ; nous obtenons en tenant compte de l'hermiticité des α_i :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} b_k^{(o)} - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} \alpha_i b_k^{(o)} = 0$$

et comme l'on a :

$$\rho = \sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} b_k^{(o)} ; \quad \vec{F} = \rho \vec{u} = \sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} (-c \vec{\alpha}) b_k^{(o)}$$

(du moins à l'approximation d'ordre zéro), on obtient l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0$$

On pourrait, bien entendu, faire d'une manière analogue l'étude de la détermination des $b_k^{(2)}$, $b_k^{(3)}$, ...

Comme les A_k et les B_k ne dépendent aucunement de l'action des champs électromagnétiques sur les moments propres de l'électron, il en est de même pour les $b_k^{(o)}$ (c'est là un point que nous aurons à examiner de plus près). Donc l'approximation d'ordre zéro ne fait aucunement intervenir l'action du champ sur les mo-

ments propres et l'équation de continuité obtenue avec les expressions données pour ρ et ρ' montre qu'à cette approximation le mouvement est le même que si les moments propres n'existaient pas. M. Pauli en conclut que, quand la Mécanique ponctuelle est valable pour un électron de Dirac, elle est la même que si l'électron n'avait pas de spin. Pour trouver les effets du spin appréciables, il faut être obligé de tenir compte des $b_k^{(1)}$. Mais il est bien connu que, si l'on est obligé de tenir compte des $b_k^{(1)}$, les effets de diffraction apparaissent et alors la Mécanique ponctuelle cesse d'être valable. M. Pauli pense donc qu'il est impossible de mettre en évidence l'existence du moment magnétique propre d'un électron par des expériences où les conceptions de la Mécanique ponctuelle sont valables, c'est à dire où l'on peut attribuer aux électrons des trajectoires bien définies.

La conclusion à laquelle nous parvenons ainsi avec M. Pauli et suivant laquelle la Mécanique ponctuelle d'un électron de Dirac est identique à la Mécanique ponctuelle d'un électron sans spin, est évidemment en contradiction complète avec les idées que nous avions développées plus haut et avec la théorie de M. Weyssenhoff. Nous devons donc soumettre la question à un examen plus approfondi.

5. APPLICATION DU MODE DE RAISONNEMENT DE PAULI QUAND ON PART DE LA MÉCANIQUE PONCTUELLE DE WEYSSENHOFF

Au cours de ses raisonnements, M. Pauli, dans son calcul d'approximations, est parti de la Mécanique ponctuelle d'un électron sans spin. A notre point de vue, il est naturel de reprendre le même mode de raisonnement en partant de la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff que nous avons retrouvée plus haut. Nous allons donc envisager au départ un ensemble de trajectoires de la même classe (c'est à dire correspondant à la même fonction de Jacobi) dans le cadre de la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff : bien entendu, ces trajectoires sont distinctes de celles qu'envisage le raisonnement de M. Pauli puisqu'elles subissent l'influence de l'action des champs électromagnétiques sur les moments propres. L'onde Ψ associée à la classe de trajectoires considérée s'écrira sous la forme :

$$\Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i S}{\hbar}} = \left[a_k^{(0)} + \frac{\hbar}{2\pi i} a_k^{(1)} + \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 a_k^{(2)} + \dots \right] e^{\frac{2\pi i S}{\hbar}}$$

S étant la fonction de Jacobi définie par :

$$S = \int \left[\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{eV}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dt - \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{m_0 V_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c} A_i + \frac{U_0}{c} \cdot \frac{V_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dx_i \right]$$

l'intégrale étant prise en suivant le mouvement.

Posons :

$$S'_0 = \int \left[\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \varepsilon V \right) dt - \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\varepsilon}{c} A_i \right) dx_i \right]$$

S'_0 ne coïncide pas avec le S_0 de Pauli parce que l'intégrale est prise en suivant un mouvement différent de celui qu'envisage M. Pauli. En posant encore :

$$(X, g) \quad b_k^{(j)} = a_k^{(j)} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \int u dt} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

nous pourrons écrire le développement des ψ_k sous une forme analogue à celle employée par M. Pauli :

$$\psi_k = \left[b_k^{(0)} + \frac{\hbar}{2\pi i} b_k^{(1)} + \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 b_k^{(2)} + \dots \right] e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S'_0}$$

Substituons cette forme dans les équations de Dirac :

$$\left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon V \right) \psi_k + \sum_{i=1}^{i=3} \left(-\alpha_i \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} A_i \right) \psi_k = \alpha_4 m_0 c^2 \psi_k$$

Posons :

$$\pi_4^{(0)} = \frac{1}{c} \frac{\partial S'_0}{\partial t} - \varepsilon V = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad \pi_i^{(0)} = -\frac{\partial S'_0}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} A_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Les $\pi_4^{(0)}$ et $\pi_i^{(0)}$ ainsi définis ne seront pas les mêmes que dans le raisonnement de M. Pauli puisqu'ils correspondent à la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff et non à celle de l'électron sans spin mais on aura toujours :

$$\pi_4^{(0)2} - \pi_i^{(0)2} = m_0^2 c^2$$

Le résultat de la substitution des ψ_k dans les équations de Dirac nous permettra toujours d'écrire la suite des équations d'approximations successives

$$(X, h) \begin{cases} (a) & \left[\pi_4^{(0)} + \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \pi_i^{(0)} - \alpha_4 m_0 c \right] b_k^{(0)} = 0 \\ (b) & \left[\pi_4^{(0)} + \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \pi_i^{(0)} - \alpha_4 m_0 c \right] b_k^{(1)} = -\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) b_k^{(0)} \end{cases}$$

Nous retrouvons donc pour les $b_k^{(1)}$ les mêmes équations que nous avions trouvées pour les $b_k^{(0)}$ dans le raisonnement de M. Pauli.

Les équations (X, h) -(a) n'admettent de solutions non identiquement nulles que si leur déterminant est nul, ce qui est vérifié car ce déterminant est égal à $\pi_4^{(0)2} \pi_i^{(0)2} m_0^2 c^2$. Nous obtenons alors les deux solutions indépendantes :

$$A_1 = -\frac{\pi_z^{(0)}}{\pi_4^{(0)} + m_0 c} ; \quad A_2 = -\frac{\pi_x^{(0)} + i \pi_y^{(0)}}{\pi_4^{(0)} + m_0 c} ; \quad A_3 = 1 ; \quad A_4 = 0$$

et :

$$B_1 = -\frac{\pi_x^{(0)} + i \pi_y^{(0)}}{\pi_4^{(0)} + m_0 c} ; \quad B_2 = \frac{\pi_z^{(0)}}{\pi_4^{(0)} + m_0 c} ; \quad B_3 = 0 ; \quad B_4 = 1$$

Mais il est essentiel de remarquer que les fonctions A_k ($\pi_4^{(0)}, \pi_i^{(0)}$) et B_k ($\pi_4^{(0)}, \pi_i^{(0)}$), bien qu'ayant les mêmes formes, ne varient pas

ici de la même façon en x, y, z, t que dans le raisonnement de M. Pauli. En effet nous avons ici :

$$\pi_4^{(o)} = \frac{1}{c} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \mathcal{E}V \text{ et } \vec{\pi}^{(o)} = -\vec{\text{grad}} S_o - \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{A}$$

et non :

$$\pi_4^{(o)} = \frac{1}{c} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \mathcal{E}V \text{ et } \vec{\pi}^{(o)} = -\vec{\text{grad}} S_o - \frac{\mathcal{E}}{c} \vec{A}$$

et les fonctions S_o et S'_o sont définies différemment. En particulier, dans le cas d'un champ permanent où l'énergie garde une valeur constante W , la quantité $c \pi_4^{(o)}$ sera donnée non par $W - \mathcal{E}V(x, y, z)$ comme dans le cas de Pauli, mais par la formule :

$$c \pi_4^{(o)} = W - \mathcal{E}V(x, y, z) - \eta^2 U(x, y, z)$$

de sorte qu'ici l'existence des moments propres se fait déjà sentir à l'approximation d'ordre zéro.

Si maintenant nous posons encore comme dans le raisonnement de M. Pauli

$$b_k^{(o)} = C_1(x, y, z, t) A_k(\pi_4^{(o)}, \vec{\pi}^{(o)}) + C_2(x, y, z, t) B_k(\pi_4^{(o)}, \vec{\pi}^{(o)})$$

nous retrouverons, pour déterminer les fonctions C_1 et C_2 les "conditions de Pauli"

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_k^* \left(\frac{1}{c} \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{k=4} B_k^* \left(\frac{1}{c} \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x_i} \right) = 0$$

dont nous avons donné plus haut les formes explicites.

Le calcul de Pauli nous montre qu'ici encore nous avons l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

si nous posons à l'approximation d'ordre zéro :

$$\rho = \sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} b_k^{(o)} ; \quad \vec{f} = \rho \vec{u} = \sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} \vec{\alpha} c b_k^{(o)}$$

et l'on trouve aussi :

$$\sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} \alpha_4 b_k^{(o)} = \rho \sqrt{1 - \beta^2}$$

La relation (X, g) qui définit les $b_k^{(o)}$ en fonction des $a_k^{(o)}$ nous fournit donc :

$$\rho = \sum_{k=1}^{k=4} a_k^{(o)*} a_k^{(o)} ; \quad \vec{f} = \rho \vec{u} = - \sum_{k=1}^{k=4} a_k^{(o)*} c \vec{\alpha} a_k^{(o)}$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=4} a_k^{(o)*} \alpha_4 a_k^{(o)} = \rho \sqrt{1 - \beta^2}$$

La dernière formule justifie a posteriori la relation que nous avions admise en établissant l'équation de Jacobi tandis que la validité de l'équation de continuité avec les définitions ci-dessus de ρ et de \vec{f} semble indiquer que le mouvement s'opère, du moins à l'approximation d'ordre zéro, suivant les lois de la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff. Comme cette Mécanique pon-

tuelle contient l'action des champs électromagnétiques sur les moments propres, nous sommes en contradiction complète avec les conclusions de M. Pauli. La question qui se pose est donc de savoir si c'est le raisonnement que nous venons de donner ou le raisonnement de M. Pauli qui conduit sur ce point à une conclusion exacte. Pour trancher cette difficile question, on pourrait essayer d'abord de faire des calculs complets dans des cas déterminés. Malheureusement ces calculs sont en général extrêmement difficiles. Nous allons, pour nous orienter, faire le calcul dans un cas très simple, ce qui nous révèlera déjà un certain nombre de circonstances intéressantes.

6. CALCUL DES FONCTIONS C_1 ET C_2 DANS LE CAS DU MOUVEMENT D'UN ÉLECTRON DANS LA DIRECTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE PERMANENT ET HOMOGENE

Nous prendrons la direction du champ constant H comme axe des z et nous supposerons que le mouvement de l'électron s'opère suivant cet axe.

Nous ferons le calcul simultanément dans l'hypothèse de M. Pauli (mécanique ponctuelle sans spin) et avec la mécanique ponctuelle de Weyssenhoff.

Les conditions de Pauli déterminant C_1 et C_2 sont les suivantes :

$$2 \left[\pi_x^{(o)} \frac{1}{c} \frac{\partial C_1}{\partial t} + \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \pi_y^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial y} + \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right] + \pi_z^{(o)} \left(\frac{\partial C_2}{\partial x} - i \frac{\partial C_2}{\partial y} \right) - \left(\pi_x^{(o)} - i \pi_y^{(o)} \right) \frac{\partial C_2}{\partial x} \\ = -C_1 \operatorname{div} \vec{\pi}^{(o)} + i C_1 \left(\vec{\operatorname{rot}} \vec{\pi}^{(o)} \right)_z - i C_2 \left[\left(\vec{\operatorname{rot}} \vec{\pi}^{(o)} \right)_x + i \left(\vec{\operatorname{rot}} \vec{\pi}^{(o)} \right)_y \right]$$

et :

$$2 \left[\pi_x^{(o)} \frac{1}{c} \frac{\partial C_2}{\partial t} + \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \pi_y^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial y} + \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial z} \right] + \pi_z^{(o)} \left(\frac{\partial C_1}{\partial x} + i \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) - \left(\pi_x^{(o)} + i \pi_y^{(o)} \right) \frac{\partial C_1}{\partial x} \\ = -C_2 \operatorname{div} \vec{\pi}^{(o)} - i C_2 \left(\vec{\operatorname{rot}} \vec{\pi}^{(o)} \right)_z - i C_1 \left[\left(\vec{\operatorname{rot}} \vec{\pi}^{(o)} \right)_x + i \left(\vec{\operatorname{rot}} \vec{\pi}^{(o)} \right)_y \right]$$

Or ici l'on peut poser :

$$A_x = -\frac{H}{2} y ; A_y = \frac{H}{2} x ; A_z = 0$$

ce qui donne :

$$H_x = 0 ; H_y = 0 ; H_z = H$$

Les moments de Lagrange ont pour valeurs :

$$p_x = \pi_x + \frac{\epsilon}{c} A_x = \pi_x - \frac{\epsilon H}{2} y ; p_y = \pi_y + \frac{\epsilon}{c} A_y = \pi_y + \frac{\epsilon H}{2} x ; p_z = \pi_z$$

Dans la théorie de Pauli :

$$\pi_x = \pi_x^{(o)}, \dots$$

Avec la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff, on a :

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}^{(o)} + \frac{U_0}{c} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et $\vec{\pi}$ ne diffère de $\vec{\pi}^{(o)}$ que par un terme de l'ordre de U_0 que nous négligerons parce que dans le résultat final il ne nous donnerait en supplément qu'un terme en U_0^2 et, dans la mécanique ponctuelle que nous adoptons, nous négligeons les termes en U_0^2 . Nous allons donc confondre $\vec{\pi}$ avec $\vec{\pi}^{(o)}$, $\vec{\pi}^{(o)}$ ayant d'ailleurs des valeurs différentes dans la théorie de Pauli et dans la nôtre.

Or d'après la théorie de Jacobi, \vec{p} est le gradient (changé de signe) de la fonction de Jacobi (S_0 pour Pauli, S pour nous), d'où :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{p} = 0$$

On en tire :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = \frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial x}; \quad \frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial z} = \frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial y} = \frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial x} + \frac{\epsilon}{c} H$$

L'électron décrivant par hypothèse l'axe des z , les trajectoires de la même "classe" sont des hélices circulaires axées sur oz . La projection de $\vec{\pi}^{(o)}$ sur le plan xoy a pour longueur $\frac{\epsilon}{2c} H r$ et est normale au rayon vecteur \vec{r} dans ce plan. On a donc :

$$\pi_x^{(o)} = \frac{\epsilon}{2c} H r \frac{y}{r} = \frac{\epsilon}{2c} H y; \quad \pi_y^{(o)} = \frac{\epsilon}{2c} H r \left(-\frac{x}{r} \right) = -\frac{\epsilon}{2c} H x$$

d'où :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial y} = -\frac{\epsilon}{c} H; \quad \frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} + \frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial z} = 0$$

Comme $\frac{dp_z}{dt} = v_z \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0$, on a aussi $\frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial z} = 0$ et finalement $\text{div } \vec{\pi}^{(o)} = 0$

Bref les équations de Pauli se réduisent dans le cas $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$ respectivement à :

$$2 \left[\pi_4^{(o)} \frac{1}{c} \frac{\partial C_2}{\partial t} + \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \pi_y^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial y} + \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial z} \right] = +i \frac{\epsilon}{c} H C_2; \quad C_1 = 0$$

$$2 \left[\pi_4^{(o)} \frac{1}{c} \frac{\partial C_1}{\partial t} + \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \pi_y^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial y} + \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right] = -i \frac{\epsilon}{c} H C_1; \quad C_2 = 0$$

Dans le second cas, essayons la solution :

$$C_1 = D_1 e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \int U dt} = D_1 e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \int \frac{U_0}{c^2} \eta (c^2 dt - v_x dx - v_y dy - v_z dz)}; \quad C_2 = 0$$

On trouve :

$$\frac{4\pi}{\hbar} m_0 U_0 = -\frac{\epsilon}{c} H$$

Or pour le mouvement rectiligne uniforme de la particule le long de oz , nous avons d'après les formules (VI,d)

$$\mathcal{M}_z = \int_V \mu_z d\tau = \int_V \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} (|C_1|^2 - |C_2|^2) \frac{2m_0 c}{\Delta} d\tau$$

avec $\Delta = \pi_4^{(o)} + m_0 c$, ce qui donne ici :

$$\mathcal{M}_z = \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} |C_1|^2 \frac{2m_0 c}{\Delta} V$$

Or C_1 est normé par la relation (VI, c)

$$\int_V \rho d\tau = \int_V (|C_1|^2 + |C_2|^2) \frac{2\pi_4^{(0)}}{\Delta} d\tau = |C_1|^2 \frac{2\pi_4^{(0)}}{\Delta} V = 1$$

donc :

$$\mathcal{M}_z = \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} - \frac{m_0 c}{\pi_4^{(0)}}$$

La relation :

$$\frac{4\pi}{h} \eta U m_0 = -\frac{\epsilon}{c} H \quad (\text{avec } U = -\mathcal{M}_z \cdot H)$$

donne :

$$\mathcal{M}_z = \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}$$

et il y a bien accord.

Nous avons donc obtenu la solution $C_1 = D_1 e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt}$, $C_2 = 0$ qui correspond à l'orientation parallèle du champ \vec{H} et du moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ (les composantes \mathcal{M}_x et \mathcal{M}_y étant nulles comme on le vérifie aisément).

On trouverait de même la solution $C_1 = 0$; $C_2 = D_2 e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt}$, qui correspond à une orientation antiparallèle de \vec{H} et de $\vec{\mathcal{M}}$ avec $\mathcal{M}_z = -\frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2} \cdot D_2$, et D_2 sont des constantes si \vec{H} est constant dans l'espace : elles varient lentement si \vec{H} est lentement variable à grande échelle dans l'espace.

Les solutions obtenues sont rigoureuses dans la théorie de Pauli. Elles sont exactes aux termes en U^2 près dans notre théorie, mais ces termes sont supposés négligeables.

Nous remarquerons que notre résultat prouve que, même en théorie de Pauli, l'action du champ électromagnétique sur les moments propres intervient dans l'expression des fonctions C_1 et C_2 , donc dans celles des $b_k^{(0)}$, c'est à dire à l'approximation d'ordre zéro. Cela vient de ce qu'en théorie de Dirac, dès qu'on introduit dans les équations de Dirac les potentiels électromagnétiques, on introduit par là même l'action du champ sur les moments propres. Même en prenant pour fonction de Jacobi la fonction S_0 de l'électron sans spin, on voit apparaître cette action. Mais les termes en U apparaissant dans l'expression d'une exponentielle imaginaire s'éliminent quand on forme les grandeurs quadratiques à signification physique tels que ρ et \bar{F} , et à ce point de vue le raisonnement de Pauli n'en paraît pas ébranlé.

Dans la théorie de Pauli, le résultat obtenu donne :

$$\psi_k = C_k e^{\frac{2\pi i}{h} (S_0 + \int U dt)}$$

dans la nôtre :

$$\psi_k = C_k e^{\frac{2\pi i}{h} (S_0 + \int U dt)} = C_k e^{\frac{2\pi i}{h} S}$$

mais la vitesse $v = \beta c$ qui figure dans la fonction de phase n'est pas la même. La fonction de phase peut s'écrire dans les deux cas :

$$\int \left\{ \left[\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{U_0}{c \sqrt{1-\beta^2}} \right] dt - \sum_{i=1}^{i=3} \left[\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\epsilon}{c} A_i + \frac{U_0}{c^2} \cdot \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] dx_i \right\}$$

mais dans le cas de Pauli $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ tandis que dans notre cas on a :

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} \cdot H \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

C'est ici, semble-t-il, qu'apparaît un premier avantage de notre point de vue sur celui de Pauli. En effet, la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff fait correspondre tout naturellement la vitesse v qu'elle admet à la fonction de Jacobi $S = S_0 + \int U dt$ comme on le voit en se reportant aux formules que nous avons développées. On peut encore dire que la vitesse v est la "vitesse de groupe" correspondant à la phase définie par S . Au contraire dans la conception de Pauli, la vitesse v que l'on adopte correspond à la fonction de Jacobi S_0 de la particule sans spin et non à la fonction $S_0 + \int U dt$ qui figure dans l'exposant de l'exponentielle des ψ_k : cette vitesse v n'est donc pas égale à la "vitesse de groupe" correspondant à la phase complexe $S_0 + \int U dt$ des ψ_k .

Il semble qu'au point de vue physique la Mécanique de Pauli et la nôtre diffèrent profondément. Supposons que le long de l'axe oz , dans la région (1) qui s'étend de $z = -\infty$ à $z = a$ le champ H soit nul; puis dans la région (2) qui va de $z = a$ à $z = b$, il augmente de 0 à H très lentement à grande échelle; enfin dans la région (3) c'est à dire pour $z > b$ le champ magnétique à la valeur constante H . Dans la première région, arrive le long de l'axe oz un électron représenté par un petit train d'ondes monochromatiques dont le moment magnétique est soit parallèle, soit antiparallèle à oz . L'énergie W de l'électron restera constante lorsqu'il traverse la région (2) et parvient à la région (3). D'après la théorie de Pauli, sa vitesse (vitesse du train d'ondes) resterait aussi la même puisqu'à l'approximation de la Mécanique ponctuelle l'action du champ sur le moment propre ne devrait pas se faire sentir. A notre point de vue qui adopte la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff, la vitesse d'ensemble du train d'ondes varie lentement pendant la traversée de la région (2) et prend dans la région (3) une valeur constante différente de sa valeur initiale, cette valeur finale étant plus petite ou plus grande que la valeur initiale selon que le moment magnétique de l'électron est antiparallèle ou parallèle au champ. Les prévisions des deux théories paraissent donc physiquement différentes.

7. RETOUR SUR LE PASSAGE A L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE EN THÉORIE DE DIRAC

Lorsque nous avons étudié, au paragraphe 3 de ce chapitre le passage à l'approximation de l'optique géométrique en théorie de Dirac, nous avons trouvé l'équation rigoureuse:

$$\pi_4^2 - \pi^2 + F(a_k) + G(a_k) = m_0^2 c^2 + 2 m_0 \eta U$$

les a_k étant les amplitudes des ψ_k :

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i s}{\hbar}}$$

Les fonctions $F(a_k)$ et $G(a_k)$ ont pour expressions :

$$F(a_k) = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\int \sum_{j=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^* \alpha_4 \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_k^*}{\partial x_j} \alpha_4 a_k \right) \pi_j d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$G(a_k) = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2} \frac{\int \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^* \alpha_4 \square a_k - \square a_k^* \alpha_4 a_k \right) d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(où : $x_4 = ct, \dots$)

Le terme $G(a_k)$ qui est de l'ordre de \hbar^2 est certainement négligeable quand les conditions de l'optique géométrique sont vérifiées. En est-il de même de $F(a_k)$ qui, à l'approximation d'ordre zéro dans la Mécanique ponctuelle que nous adoptons, a pour expression :

$$F(a_k^{(0)}) = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\int \sum_{j=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} \left(a_k^{(0)} \alpha_4 \frac{\partial a_k^{(0)}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_k^{(0)*}}{\partial x_j} \alpha_4 a_k^{(0)} \right) \pi_j^{(0)} d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Supposons que nous ayons écrit le développement des ψ_k sous la forme :

$$\psi_k = \left(b_k^{(0)} + \frac{\hbar}{2\pi i} b_k^{(1)} + \dots \right) e^{\frac{2\pi i s}{\hbar}}$$

nous aurions obtenu en négligeant les termes en \hbar^2 :

$$\pi_4^{(0)2} - \pi^{(0)2} + F(b_k^{(0)}) = m_0^2 c^2 + 2 m_0 \eta U$$

$F(b_k^{(0)})$ ayant la même expression que $F(a_k^{(0)})$ avec substitution des $b_k^{(0)}$ aux $a_k^{(0)}$. Si $F(b_k^{(0)})$ était négligeable, nous obtiendrions :

$$\pi_4^{(0)2} - \pi^{(0)2} = m_0^2 c^2 + 2 m_0 \eta U$$

relation qui est inexacte, même en supposant K négligeable. Pour avoir une relation exacte, il faut avoir :

$$(X, i) \quad F(b_k^{(0)}) = 2 m_0 \eta U = 2 m_0 U.$$

ce qui alors donnera bien la relation exacte $\pi_4^{(0)2} - \pi^{(0)2} = m_0^2 c^2$.

Si l'on admet l'hypothèse exprimée par la relation (X,i) , $F(a_k^{(0)})$ sera nul car on démontre aisément, puisque :

$$b_k^{(0)} = a_k^{(0)} e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt} + \text{termes de l'ordre de } \frac{h}{2\pi i}$$

que :

$$F(b_k^{(0)}) = F(a_k^{(0)}) + 2m_0\eta U$$

d'où $F(a_k^{(0)}) = 0$. L'hypothèse faite dans la déduction de l'équation de Jacobi en négligeant le terme $F(a_k^{(0)})$ est donc alors vérifiée. Il nous reste à examiner si la relation (X,i) est bien exacte.

Avant de faire cet examen, nous ferons la remarque suivante. Si, au lieu de raisonner, comme nous venons de le faire, avec la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff, nous avions pris le point

$$\text{de vue de Pauli et son développement } \Psi_k = (b_k^{(0)} + \frac{h}{2\pi i} b_k^{(1)} + \dots) e^{\frac{2\pi i}{h} S_0}$$

où S_0 est la fonction de Jacobi de l'électron sans spin, le passage à l'approximation de l'optique géométrique nous aurait fourni l'équation (à l'approximation d'ordre zéro)

$$\pi_4^{(0)2} - \pi^{(0)2} + F(b_k^{(0)}) = m_0^2 c^2 + 2m_0\eta U$$

avec :

$$\pi_4^{(0)} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad \pi^{(0)} = \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

la vitesse βc n'ayant pas ici, toutes choses égales d'ailleurs, la même valeur que dans la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff. Or nous avons évidemment encore $\pi_4^{(0)2} - \pi^{(0)2} = m_0^2 c^2$; il faut donc que l'on ait aussi dans la théorie de Pauli :

$$(X,j) \quad F(b_k^{(0)}) = 2m_0\eta U$$

Bref, en admettant le point de vue de Pauli, il faut avoir l'équation (X,j) , tandis qu'en admettant notre point de vue et la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff, il faut avoir la relation (X,i) pour pouvoir négliger $F(a_k^{(0)})$ dans l'équation de Jacobi. La vérification des relations (X,i) et (X,j) dans des cas particuliers est difficile en raison de la complication des calculs effectifs. Nous allons l'indiquer dans trois cas particuliers simples.

I° - Mouvement longitudinal dans un champ magnétique uniforme.

Ce cas simple est celui que nous avons précédemment étudié. Nous avons trouvé avec notre point de vue :

$$\Psi_k = C_k e^{\frac{2\pi i}{h} S_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt}$$

à l'approximation d'ordre zéro et en négligeant les termes en U^2 ; d'où :

$$b_k^{(0)} = C_k e^{\frac{2\pi i}{h} \int \left[\frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}} dt - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{U_i}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} v_i dx_i \right]}$$

avec $C_k = A_k$ ou B_k suivant que le moment magnétique propre de l'électron est parallèle ou antiparallèle au champ, A_k et B_k étant convenablement normés.

En substituant cette expression des $b_k^{(0)}$ dans $F(b_k^{(0)})$, on trouve aisément :

$$F(b_k^{(0)}) = 2m_0\eta U$$

Si on se place au contraire au point de vue de Pauli, on doit poser :

$$\Psi_k = C_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \int U dt} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S}$$

où S est la fonction de Jacobi de la particule sans spin. On a donc :

$$b_k^{(0)} = C_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \int \left[\frac{U_0}{\sqrt{1-\beta^2}} dt - \sum_{i=1}^{i=3} \frac{U_0}{C^2 \sqrt{1-\beta^2}} v_i dx_i \right]}$$

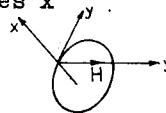
avec toujours $C_k = A_k$ ou B_k ; mais aussi β correspond à la vitesse dans la Mécanique ponctuelle de la particule sans spin. La substitution des $b_k^{(0)}$ dans $F(b_k^{(0)})$ donne encore :

$$F(b_k^{(0)}) = 2m_0\eta U$$

Les relations (X,i) et (X,j) sont donc bien vérifiées dans le cas actuel.

2° - Mouvement transversal dans un champ magnétique uniforme.

Dans un champ magnétique uniforme, considérons une trajectoire électronique circulaire dans un plan normal au champ. Nous allons faire le calcul de F en un point O de la trajectoire. Nous prendrons la tangente à la trajectoire comme axe des z , la direction du champ magnétique uniforme comme axe des y , la normale à la trajectoire comme axe des x .



Nous commencerons ici par faire le calcul en adoptant le point de vue de Pauli, c'est à dire la Mécanique ponctuelle d'une particule sans spin. Les équations de condition de Pauli prennent ici la forme simple (la classe des mouvements considérés correspond à des trajectoires circulaires planes axées sur le champ H).

$$\frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{1}{2\pi z^{(0)}} \frac{\epsilon}{c} H C_2 - \frac{\pi_z^{(0)}}{\pi_z^{(0)}} \frac{1}{c} \frac{\partial C_1}{\partial t} - C_1 \operatorname{div} \vec{\pi}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{1}{2\pi z^{(0)}} \frac{\epsilon}{c} H C_1 - \frac{\pi_z^{(0)}}{\pi_z^{(0)}} \frac{1}{c} \frac{\partial C_2}{\partial t} - C_2 \operatorname{div} \vec{\pi}$$

Nous faisons le calcul au point O où

$$\pi_x^{(0)} = 0, \pi_y^{(0)} = 0$$

et où :

$$\frac{\partial \pi_z^{(0)}}{\partial z} = 0 \left(\text{car } \frac{d\pi_z^{(0)}}{dt} = 0 = v_z \frac{\partial \pi_z^{(0)}}{\partial z} \right)$$

Or nous voulons calculer l'expression :

$$F(b_k^{(o)}) = \frac{h\eta}{2\pi i} \int d\tau \sum_{j=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} \left(b_k^{(o)*} \alpha_j \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x_j} - \frac{\partial b_k^{(o)*}}{\partial x_j} \alpha_j b_k^{(o)} \right) \pi_j^{(o)}$$

Il est aisé de vérifier que dans cette expression les termes contenant les dérivées $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ ainsi que les termes en div $\bar{\pi}^{(o)}$ se compensent; ils sont d'ailleurs nuls comme nous le verrons ci-dessous. Il suffit donc, pour calculer $F(b_k^{(o)})$ en 0, de poser :

$$\frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{1}{2\pi_z^{(o)}} \frac{\varepsilon}{c} H C_2; \quad \frac{\partial C_2}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi_z^{(o)}} \frac{\varepsilon}{c} H C_1$$

Pour le mouvement considéré, $\pi_y^{(o)} = 0$ et l'on a (avec $\Delta = \pi_4^{(o)} + m_o c$)

$$b_1^{(o)} = \frac{1}{\Delta} \left[-\pi_z^{(o)} C_1 - \pi_x^{(o)} C_2 \right]; \quad b_2^{(o)} = \frac{1}{\Delta} \left[\pi_z^{(o)} C_2 - \pi_x^{(o)} C_1 \right]; \quad b_3^{(o)} = C_1; \quad b_4^{(o)} = C_2$$

d'où :

$$(X, k) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial b_1^{(o)}}{\partial z} = \frac{1}{\Delta} \left[-C_2 \frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial z} - \pi_z^{(o)} \frac{\partial C_2}{\partial z} \right] = \frac{1}{\Delta} \frac{C_2}{2} \frac{\varepsilon}{c} H \\ \frac{\partial b_2^{(o)}}{\partial z} = \frac{1}{\Delta} \left[-C_1 \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} - \pi_x^{(o)} \frac{\partial C_1}{\partial z} \right] = \frac{1}{\Delta} \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon}{c} H \end{array} \right.$$

car on a en 0 :

$$\pi_x^{(o)} = 0; \quad \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \pi_x^{(o)} = v_z \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{c} v_z H$$

d'où :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{c} H$$

On trouve alors :

$$F(b_k^{(o)}) = \frac{h\eta}{2\pi i} \int \pi_z^{(o)} d\tau \left\{ \left[\left(b_1^{(o)} * \frac{1}{\Delta} \frac{C_2}{2} + b_2^{(o)} * \frac{1}{\Delta} \frac{C_1}{2} \right) \frac{\varepsilon}{c} H - b_3^{(o)} * \frac{\partial C_1}{\partial z} - b_4^{(o)} * \frac{\partial C_2}{\partial z} \right] \right. \\ \left. + \text{terme identique} \right\}$$

Soit :

$$(X, 1) \quad F(b_k^{(o)}) = -\frac{h\eta}{2\pi i} \int d\tau \pi_z^{(o)} \left[-\frac{\pi_z^{(o)}}{\Delta^2} C_1^* C_2 + \frac{\pi_z^{(o)}}{\Delta^2} C_2^* C_1 - \frac{C_1^* C_2}{\pi_z^{(o)}} - \frac{C_2^* C_1}{\pi_z^{(o)}} \right] \frac{\varepsilon}{c} H \\ = -\frac{h\eta}{2\pi} i \int d\tau \left(C_1^* C_2 - C_2^* C_1 \right) \left(1 + \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} \right) \frac{\varepsilon}{c} H$$

Or :

$$\frac{1 + \pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} = \frac{\pi_4^{(o)2} - m_o^2 c^2}{(\pi_4^{(o)} + m_o c)^2} + 1 = \frac{2\pi_4^{(o)}}{\Delta}$$

d'où :

$$F(b_k^{(o)}) = -2m_o \eta H i \int \frac{eh}{4\pi m_o c} \left(C_1^* C_2 - C_2^* C_1 \right) \frac{2\pi_4^{(o)}}{\Delta} d\tau$$

Les formules (VI, d) donnent :

$$\mu_y = i \left(C_1^* C_2 - C_2^* C_1 \right) \frac{eh}{4\pi m_o c} \cdot \frac{2\pi_4^{(o)}}{\Delta} \quad \left(\text{avec } \mathcal{M}_y = \int \mu_y d\tau \right)$$

Il vient donc :

$$F(b_k^{(o)}) = -2m_o \eta \mathcal{M}_y H$$

et comme $U = -M_y H$, on a bien :

$$F(b_k^{(o)}) = 2m_0\eta U = 2m_0 U.$$

La relation (X,j) est bien vérifiée.

Si maintenant nous reprenons ce calcul en nous plaçant à notre point de vue, c'est à dire en adoptant la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff, le raisonnement restera le même sauf qu'ici nous aurons à poser :

$$\vec{p} = \vec{\pi}^{(o)} + \frac{U_0 \eta}{c^2} \vec{v} \text{ et } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}.$$

On en tirera :

$$v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(n_z^{(o)} + \frac{U_0}{c^2} \eta v_z \right) = 0$$

d'où encore :

$$\frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial z} = 0$$

car v_z reste constante au premier ordre sur la trajectoire; puis

$$v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\pi_x^{(o)} + \frac{U_0 \eta}{c^2} v_x \right) = -\frac{\varepsilon}{c} v_z H$$

d'où

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{c} H - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{U_0 \eta v_x}{c^2} \right)$$

au lieu de :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon H}{c}$$

Ceci nous introduira au dernier membre des équations (X,j), en plus des termes en $\frac{\varepsilon}{c} H$, des termes en U . Nous obtiendrons donc pour $F(b_k^{(o)})$ une expression de même forme que celle de $F(b_k^{(o)})$ donnée ci-dessus, mais où le facteur $\frac{\varepsilon}{c} H$ sera remplacé par $\frac{\varepsilon}{c} H + \text{terme en } U$. Dans l'expression de $F(b_k^{(o)})$, ces termes nous donnent donc en supplément des termes en h^2 qui sont négligeables. Nous aurons donc aussi :

$$F(b_k^{(o)}) = 2m_0\eta U$$

et la relation (X,i) sera vérifiée. [Plus précisément nous trouvons $F(b_k^{(o)}) = 2m_0\eta U(1 + \frac{U}{m_0 c^2})$ et nous négligeons les termes en U^2].

On peut facilement intégrer les équations différentielles en C_1 et C_2 données au début de l'étude de ce second cas particulier. On a $\frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \pi_y^{(o)}}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} = 0$ pour la classe de mouvement qui comprend toutes les trajectoires circulaires planes axées sur \vec{H} .

Les équations en C_1 et C_2 peuvent donc s'écrire (puisque $\text{div } \vec{\pi}^{(o)} = 0$):

$$m_0\eta \frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{c} H C_2 \quad ; \quad m_0\eta \frac{\partial C_2}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{c} H C_1$$

et l'on trouve comme solution :

$$C_1 = D e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt \sqrt{1-\beta^2}} ; \quad C_2 = \pm i C_1$$

Il faut prendre dans la seconde équation le signe + ou le signe - suivant que le moment magnétique propre est parallèle ou anti-parallèle à \vec{H} .

Il pourrait sembler qu'en introduisant les expressions précédentes dans celle de $F(b_k^{(o)})$ [ou de $F(b_k'^{(o)})$], on devrait obtenir, contrairement au résultat obtenu ci-dessus,

$$F(b_k^{(o)}) = 2m_o \eta U \sqrt{1-\beta^2} = 2m_o U$$

mais il n'en est rien parce qu'il faut tenir compte des termes en $\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z}$ qui expriment la variation de $\pi_x^{(o)}$. Pour mieux nous rendre compte de ce qui se passe, reprenons la formule (X,1) et écrivons la sous la forme :

$$F(b_k^{(o)}) = -\frac{h\eta}{2\pi} i \int d\tau (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \left(1 - \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} + 2 \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} \right) \frac{\epsilon}{c} H$$

Le terme $1 - \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2}$ est celui qu'on obtiendrait si $\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z}$ était nul comme on le voit en reprenant des calculs déjà effectués sur ce cas particulier : c'est donc le terme dû à la variation des C_i , tandis que le terme en $\frac{2\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2}$ provient de la variation des A_k et B_k .

Le premier terme donne, comme on devait s'y attendre :

$$2m_o \eta U \frac{1 - \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2}}{\frac{2\pi_4^{(o)}}{\Delta}} = 2m_o \eta U \frac{\Delta}{\frac{2\pi_4^{(o)}}{\Delta}} = 2m_o \eta U \sqrt{1-\beta^2} = 2m_o U$$

mais le second terme donne :

$$2m_o \eta U \frac{2\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} \cdot \frac{\Delta}{\frac{2\pi_4^{(o)}}{\Delta}} = 2m_o U \frac{\eta \pi_z^{(o)2}}{\Delta \pi_4^{(o)2}}$$

de sorte qu'au total on a :

$$F(b_k^{(o)}) = 2m_o U \left(1 + \eta \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta \pi_4^{(o)2}} \right)$$

Or :

$$1 + \frac{\eta \pi_z^{(o)2}}{\Delta \pi_4^{(o)2}} = 1 + \eta \frac{\frac{\pi_4^{(o)2} - m_o^2 c^2}{\pi_4^{(o)2} + m_o c \pi_4^{(o)}}}{\frac{\pi_4^{(o)2} + m_o c \pi_4^{(o)}}{\pi_4^{(o)2}}} = 1 + \eta \frac{m_o^2 c^2 (\eta^2 - 1)}{m_o^2 c^2 \eta (\eta + 1)} = 1 + \frac{\eta^2 - 1}{\eta + 1} = \eta$$

car $\eta_4^{(o)} = m_o c \eta$ d'où finalement :

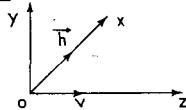
$$F(b_k^{(o)}) = 2m_o \eta U$$

[aux termes en U^2 près, on obtient le même résultat pour $F(b_k'^{(o)})$]

3°- Mouvement transversal dans un champ électrique uniforme

Nous allons supposer que le mouvement s'opère dans un champ électrique \vec{E} dont nous prendrons la direction pour axe ox . Nous

supposons qu'au point o considéré de la trajectoire, le mouvement s'opère suivant l'axe oz



La trajectoire est une parabole dans le plan xoz tangente à oz en son sommet o. Nous prenons comme classe de mouvements paraboliques ceux obtenus par déplacement parallèle de celui-ci le long de oz et le long de oy. Dans le plan yoz, l'axe oz est une caustique, ce qui donnera lieu à quelques singularités.

Ici nous avons :

$$\pi_y^{(o)} = 0 \quad ; \quad V = -h_x \cdot x \quad ; \quad -\frac{\partial V}{\partial x} = h_x = h$$

$$b_1^{(o)} = -\frac{1}{\Delta} \left(\pi_z^{(o)} C_1 + \pi_x^{(o)} C_2 \right) \quad ; \quad b_2^{(o)} = \frac{1}{\Delta} \left(\pi_z^{(o)} C_2 - \pi_x^{(o)} C_1 \right) \quad ; \quad b_3^{(o)} = C_1 \quad ; \quad b_4^{(o)} = C_2$$

Il faudra tenir compte de la variation de $\Delta = \pi_4^{(o)} + m_0 c$ par suite de l'action du champ électrique sur la particule. La fonction S_o est ici :

$$S_o = Wt - \int \sqrt{\left(\frac{W}{C} + \frac{\epsilon}{C} h_x x \right)^2 - \pi_z^{(o)2} - m_0^2 c^2} dx - \int \pi_z^{(o)} dz$$

avec $\pi_z^{(o)} = C^{te}$, les intégrales étant prises le long de la trajectoire. On trouve :

$$\pi_x^{(o)} = \sqrt{\left(\pi_4^{(o)} + \frac{\epsilon}{C} h_x x \right)^2 - \pi_z^{(o)2} - m_0^2 c^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} = \frac{\pi_4^{(o)}}{\pi_x^{(o)}} \frac{\epsilon}{C} h_x$$

$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x}$ est infini à l'origine à cause du rôle de caustique de l'axe oz (car à l'origine o, $\pi_x^{(o)} = 0$).

Remarque. - On peut retrouver les relations précédentes de la façon suivante. Sur la trajectoire parabolique, on a :

$$z = v_z t \quad \text{avec} \quad v_z = C^{te} \quad ; \quad x = \frac{1}{2} \frac{\epsilon h_x}{m} t^2 \quad \text{d'où} \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\epsilon h_x}{m} t$$

On a donc :

$$z^2 = 2 \frac{m v_z^2}{\epsilon h_x} x = 2 p x \quad \text{avec} \quad p = \frac{m v_z^2}{\epsilon h_x}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{p}{z}$$

On trouve aussi :

$$\pi_z^{(o)} = m_0 \eta v_z \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \pi_z^{(o)}}{\partial z} = 0 \quad \text{en o}$$

puis :

$$\frac{d\pi_x^{(o)}}{dt} = \epsilon h_x = v_z \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z}$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} = \frac{\epsilon h_x}{v_z}$$

De là on tire :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} = \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{\varepsilon h_x}{v_z} \frac{p}{z} = \frac{mv_z}{z} = \frac{m}{t}$$

Or en 0 :

$$\frac{\pi_4^{(o)}}{\pi_x^{(o)}} \frac{\varepsilon}{c} h_x = \frac{m_0 \eta c}{m_0 \eta v_x} \frac{\varepsilon h_x}{c} = \frac{\varepsilon h_x}{v_x} = \frac{m}{t}$$

d'où :

$$\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} = \frac{\pi_4^{(o)}}{\pi_x^{(o)}} \frac{\varepsilon}{c} h_x$$

Ce qu'il fallait démontrer.

D'autre part :

$$\Delta = \pi_4^{(o)} + m_0 c = \left[\frac{W}{c} + \frac{\varepsilon}{c} h_x x \right]$$

d'où :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c} h_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0$$

Nous avons maintenant à écrire les équations de Pauli : elles ne sont pas ici données par les formules (X, f) parce que, $\pi_4^{(o)}$ variant, il faut tenir compte des dérivées de Δ . On trouve :

$$\frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{C_1}{2\pi_z^{(o)}} \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} + \frac{1}{2\pi_z^{(o)} \Delta} \left(\pi_z^{(o)} C_2 - \pi_x^{(o)} C_1 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{\pi_4^{(o)}}{\pi_z^{(o)}} \frac{1}{c} \frac{\partial C_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial z} = -\frac{C_2}{2\pi_z^{(o)}} \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x} - \frac{1}{2\pi_z^{(o)} \Delta} \left(\pi_z^{(o)} C_1 + \pi_x^{(o)} C_2 \right) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{\pi_4^{(o)}}{\pi_z^{(o)}} \frac{1}{c} \frac{\partial C_2}{\partial t}$$

Ici encore les termes en $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ se compenseront quand on formera $F(b_k^{(o)})$ et nous aurons à employer les expressions précédentes de $\frac{\partial C_1}{\partial z}$ et $\frac{\partial C_2}{\partial z}$ en laissant de côté les derniers termes. Il viendra ainsi :

$$F(b_k^{(o)}) = \frac{\hbar \eta}{2\pi i} \int \left[\pi_x^{(o)} \left(\sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} \alpha_4 \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial x} - \text{conj.} \right) + \pi_z^{(o)} \left(\sum_{k=1}^{k=4} b_k^{(o)*} \alpha_4 \frac{\partial b_k^{(o)}}{\partial z} - \text{conj.} \right) \right] d\tau$$

On pourrait croire que le premier terme du crochet est nul parce qu'en 0, $\pi_x^{(o)} = 0$. Il n'en est rien car $\frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x}$ est proportionnel

à $\frac{1}{\pi_x^{(o)}}$ de sorte que le produit $\pi_x^{(o)} \cdot \frac{\partial \pi_x^{(o)}}{\partial x}$ reste fini et égal à $\pi_4^{(o)} \frac{\varepsilon}{c} h_x$

quand $\pi_x^{(o)}$ tend vers zéro. Les termes en $\frac{\partial}{\partial x}$ donnent donc :

$$-2 \left(C_1^* C_2 - C_2^* C_1 \right) \frac{\pi_4^{(o)} \pi_z^{(o)}}{\Delta^2} \frac{\varepsilon}{c} h_x$$

tandis que les termes en $\frac{\partial}{\partial z}$ donnent, pour $\pi_x^{(o)}$ tendant vers zéro

$$\left(-\frac{1}{\Delta^2} \pi_z^{(o)2} C_1^* \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{1}{\Delta^2} \pi_z^{(o)2} C_2^* \frac{\partial C_2}{\partial z} + C_1^* \frac{\partial C_1}{\partial z} + C_2^* \frac{\partial C_2}{\partial z} \right) \pi_z^{(o)}$$

ce qui, compte tenu des valeurs de $\frac{\partial C_1}{\partial z}$ et $\frac{\partial C_2}{\partial z}$, devient :

$$-\left(C_1^* C_2 - C_2^* C_1 \right) \left(\frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} - 1 \right) \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \pi_z^{(o)}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 F(b_k^{(o)}) &= -\frac{h\eta}{2\pi i} \int d\tau (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \left[\left(\frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} - 1 \right) \frac{\pi_z^{(o)}}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{2\pi_z^{(o)} \pi_4^{(o)}}{\Delta^2} \frac{\epsilon}{c} h_x \right] \\
 &= -\frac{h\eta}{2\pi} \int i (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \left[\left(1 - \frac{\pi_z^{(o)2}}{\Delta^2} \right) \frac{\pi_z^{(o)}}{\Delta} + \frac{2\pi_z^{(o)} \pi_4^{(o)}}{\Delta^2} \right] \frac{\epsilon}{c} h_x d\tau \\
 &= -2m_0\eta \int i (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} h_x \left(\frac{2m_0 c}{\Delta} \frac{\pi_z^{(o)}}{\Delta} + \frac{2\pi_z^{(o)} \pi_4^{(o)}}{\Delta^2} \right) d\tau \\
 &= -2m_0\eta h_x \int i (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} \cdot \frac{2\pi_z^{(o)}}{\Delta} \cdot d\tau
 \end{aligned}$$

Or, on a [voir formules (VI,d)] :

$$\mathcal{F}_x = \int \pi_x d\tau = \int i (C_1^* C_2 - C_2^* C_1) \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} \cdot \frac{2\pi_z^{(o)}}{\Delta} \cdot d\tau$$

d'où :

$$F(b_k^{(o)}) = -2m_0\eta \mathcal{F}_x h_x = 2m_0\eta U = 2m_0 U_0$$

ce qui est encore la relation (X,j). On montrerait aisément qu'en adoptant la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff et en négligeant les termes en U^2 , on obtient également la relation (X,i) c'est à dire $F(b_k^{(o)}) = 2m_0\eta U$.

8. DÉMONSTRATION GÉNÉRALE DES FORMULES (X, i) ET (X, j) A PARTIR DE LA DÉCOMPOSITION DE GORDON

Nous avons pu vérifier les formules (X,i) et (X,j) en étudiant quelques cas particuliers. Nous allons maintenant en indiquer une démonstration générale en faisant appel à la décomposition du vecteur d'espace-temps "densité-courant" donnée par M. Gordon et développée au paragraphe 4 du chapitre VI. Nous allons écrire cette décomposition en considérant le quadrivecteur densité-courant en nombre de particules et non le vecteur densité de charge électrique - densité de courant électrique, ce qui revient à diviser par la charge - e de l'électron les expressions données précédemment à l'endroit indiqué. Nous distinguerons les composantes covariantes des composantes contrevariantes. Nous poserons :

$$f^1 = \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* (-c\alpha_1) \psi_k; f^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* (-c\alpha_2) \psi_k; f^3 = \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* (-c\alpha_3) \psi_k; f^4 = c \sum_{k=1}^{k=4} \psi_k^* \psi_k$$

ce qui définit le vecteur d'espace-temps \vec{f} , puis :

$$(X,m) g^1 = -\frac{h}{4\pi m_0} \sum_{k=1}^{k=4} \left(\psi_k^* \alpha_4 \frac{\partial \psi_k}{\partial x} - \frac{\partial \psi_k^*}{\partial x} \alpha_4 \psi_k \right), \dots, \dots, g^4 = \frac{h}{4\pi m_0} \sum_{k=1}^{k=4} \left(\psi_k^* \alpha_4 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_k^*}{\partial t} \alpha_4 \psi_k \right)$$

ce qui définit le vecteur d'espace-temps \vec{g} . On peut alors écrire la décomposition de Gordon sous la forme suivante :

$$f^j = g^j + \frac{c}{\epsilon} \sum_i \frac{\partial \mu_i^{ij}}{\partial x^i} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

avec :

$\mu^{ij} = -\mu^{ji}$; $\mu^{14} = \pi_x$; $\mu^{24} = \pi_y$; $\mu^{34} = \pi_z$; $\mu^{23} = \mu_x$; $\mu^{31} = \mu_y$; $\mu^{12} = \mu_z$ où $\vec{\pi}$ et $\vec{\mu}$ sont respectivement les vecteurs "densité de moment électrique propre" et "densité de moment magnétique propre".

Posons avec M. Pauli :

$$\Psi_k = \left(b_k^{(o)} + \frac{h}{2\pi_1} b_k^{(1)} + \dots \right) e^{\frac{2\pi i}{h} S_0}$$

Appelons $g_{(S_0)}$ la partie de l'expression de g^j qui contient les dérivées de S_0 et $g_{(b)}$ la partie de l'expression de g^j qui contient les dérivées des b . Nous aurons :

$$g^j = g_{(S_0)}^j + g_{(b)}^j$$

Les $g_{(S_0)}$ ayant la même expression que pour une onde plane, on vérifie aisément que :

$$f^j = g_{(S_0)}^j$$

d'où :

$$g_{(b)}^j = -\frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^{i=4} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i}$$

A l'approximation d'ordre zéro, c'est à dire en ne conservant que les $b_k^{(o)}$, on obtient en multipliant scalairement \vec{g} par $\vec{\pi}^{(o)}$, soit en multipliant la dernière équation par $\pi_j^{(o)}$ et en sommant sur j :

$$\sum_j g_{(b)}^j \pi_j^{(o)} = -\frac{c}{\varepsilon} \sum_{i,j} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i} \pi_j^{(o)}$$

Or, en comparant l'expression (X, m) des $g_{(b)}^j$ à l'approximation d'ordre zéro avec l'expression de $F(b_k^{(o)})$ on trouve :

$$\int \sum_j g_{(b)}^j \pi_j^{(o)} d\tau = -\frac{1}{2m_0\eta} F(b_k^{(o)})$$

d'où :

$$F(b_k^{(o)}) = \frac{2m_0\eta c}{\varepsilon} \int \sum_{i,j} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i} \pi_j^{(o)} d\tau = \frac{2m_0 c}{\varepsilon} \int \sum_{i,j} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i} \pi_j^{(o)} d\tau.$$

car :

$$d\tau = d\tau_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{d\tau_0}{\eta}$$

En développant la théorie de Weyssenhoff, nous avons trouvé la relation (IV, h) :

$$\sum_i \mu^{ij} \pi_j^{(o)} = 0$$

d'où :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\mu^{ij} \pi_j^{(o)} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i,j} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i} \pi_j^{(o)} = - \sum_{i,j} \mu^{ij} \frac{\partial \pi_j^{(o)}}{\partial x^i}$$

Remarquant que $\vec{\pi}^{(o)} = \vec{\text{grad}} S_0 + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}$ et que $\mu^{ij} = -\mu^{ji}$, nous trouvons :

$$\sum_{i,j} \mu^{ij} \frac{\partial \pi_j^{(o)}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu^{ij} \left(\frac{\partial \pi_1^{(o)}}{\partial x^i} - \frac{\partial \pi_i^{(o)}}{\partial x^j} \right) = \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{i,j} \mu^{ij} F_{ij}$$

où les F_{ij} sont les composantes du tenseur "champ électromagnétique", car :

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$$

D'où :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i} \pi_j^{(o)} = -\frac{\epsilon}{c} \sum_{i,j} \frac{1}{2} \mu^{ij} F_{ij}$$

Or nous savons d'après une relation du paragraphe 3 de ce chapitre, que :

$$U_0 = \gamma U = -\frac{1}{2} \int \sum_{i,j} \mu^{ij} F_{ij} d\tau_0$$

d'où :

$$\int \sum_{i,j} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i} \pi_j^{(o)} d\tau_0 = \frac{\epsilon}{c} U_0$$

Nous obtenons donc :

$$F(b_k^{(o)}) = 2m_0 \left(-\frac{1}{2} \int \sum_{i,j} \mu^{ij} F_{ij} d\tau_0 \right) = 2m_0 U_0 = 2m_0 \gamma U$$

et la formule (X,j) est vérifiée.

Si nous reprenions le même calcul en partant du développement :

$$\psi_k = \left(b_k^{(o)} + \frac{\hbar}{2\pi i} b_k^{(1)} + \dots \right) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S'}$$

nous trouverions en négligeant les termes en U^2 la formule (X,i)

$$F(b_k^{(o)}) = 2m_0 \gamma U$$

9. INTERPRÉTATION DE LA CONDITION $F(a_k^{(o)}) = 0$.

En résumé, d'après ce qui précède, la condition qui caractérise l'emploi de la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff pour l'électron de Dirac et qui paraît le justifier du point de vue de la Mécanique ondulatoire, c'est la condition :

$$(X,n) \quad F(a_k^{(o)}) = 0$$

les $a_k^{(o)}$ étant définis par le développement :

$$\psi_k = \left(a_k^{(o)} + \frac{\hbar}{2\pi i} a_k^{(1)} + \dots \right) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S}$$

où S est la fonction de Jacobi de la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff. Quelle est la signification physique de cette condition ?

Pour le voir, reprenons la formule :

$$f^j = g^j + \sum_i \frac{c}{\epsilon} \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i}$$

écrite plus haut et décomposons le quadrivecteur \bar{g} de la façon suivante :

$$g^j = g_{(s)}^j + g_{(a)}^j$$

où $g_{(s)}^j$ est la partie de g^j provenant de la variation de S et $g_{(a)}^j$ celle qui provient des variations des a_k et qui se réduit à $g_{(a)}^j$ à l'approximation d'ordre zéro. On vérifie alors aisément que la condition (X, n) est équivalente à la suivante :

$$\int \sum_j g_{(a)}^j \pi_j^{(o)} d\tau = 0$$

ou pour un très petit paquet d'ondes :

$$\sum_j g_{(a)}^j \pi_j^{(o)} = 0$$

Comme les $\pi_j^{(o)}$ sont proportionnels aux composantes u_j de la vitesse d'univers de la particule puisque $\pi_j^{(o)} = m_0 c u_j$, on a aussi

$$\sum_j g_{(a)}^j u_j = 0$$

Or le premier membre de cette formule représente le produit scalaire dans l'espace-temps du quadrivecteur $\bar{g}_{(a)}$ par la vitesse d'Univers u : il est donc égal à la composante de temps ($g_{(a)}^4$), de $\bar{g}_{(a)}$ dans le système propre de la particule.

Finalement nous parvenons à la conclusion suivante : Dans le système propre de la particule, la composante de temps du quadrivecteur \bar{g} est la même que si les $a_k^{(o)}$ étaient des constantes. En réalité les $a_k^{(o)}$ ne sont pas constantes en général puisqu'ils sont de la forme :

$$a_k^{(o)} = b_k^{(o)} e^{-\frac{2\pi i}{h} \int U dt} = (C_1 A_k + C_2 B_k) e^{-\frac{2\pi i}{h} \int U dt} - \frac{2\pi i}{h} \int U dt$$

et que les facteurs C_1 , C_2 , A_k , B_k , $e^{-\frac{2\pi i}{h} \int U dt}$ ne sont pas en général constants, mais dans l'expression de $(g_{(a)}^4)_o$, les variations de ces divers facteurs se compensent. Nous le vérifierons dans le prochain paragraphe en reprenant en détail l'étude du mouvement longitudinal et du mouvement transversal dans un champ magnétique uniforme. On peut remarquer qu'en général, la partie spatiale de $\bar{g}_{(a)}$ dans le système propre n'est pas nulle.

Revenons maintenant à l'équation :

$$f^j = g^j + \frac{c}{\epsilon} \sum_i \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i}$$

que nous écrivons :

$$\bar{f} = \bar{g} + \bar{h}$$

en introduisant un quadrivecteur \bar{h} défini par $h^j = \frac{c}{\epsilon} \sum_i \frac{\partial \mu^{ij}}{\partial x^i}$

Le quadrivecteur \bar{f} décrit le mouvement total à l'échelle fine de la probabilité de présence de la particule tandis que le quadrivecteur \bar{g} correspond au mouvement d'ensemble de la particule tel qu'il est imaginé par la Mécanique ponctuelle. \bar{f} est la somme de \bar{g} et de \bar{h} , ce dernier quadrivecteur correspondant à une sorte de

mouvement interne dû au spin. C'est ce que l'on peut voir par exemple en étudiant le mouvement du globule de probabilité de Darwin (voir le livre de l'Auteur : "L'Electron Magnétique" p. 169).

La composante g^4 représente une sorte de densité de probabilité "moyenne" obtenue en négligeant le mouvement interne lié au spin, mouvement auquel la Mécanique ponctuelle ne s'intéresse pas. Par suite d'une compensation des effets du champ électromagnétique, cette densité de probabilité moyenne g^4 , quand elle est évaluée dans le système propre de la particule défini par la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff, se trouve être la même que pour un globule de probabilité en l'absence de champ. C'est cette propriété qui nous paraît être la caractéristique essentielle de la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff et en justifier l'emploi pour l'électron de Dirac.

10. VÉRIFICATION DE LA RELATION $(g_{(a_0)}^4)_0 = 0$ DANS DEUX CAS PARTICULIERS SIMPLES

Il est facile de vérifier la relation $(g_{(a_0)}^4)_0 = 0$ dans les deux cas particuliers simples du mouvement longitudinal et du mouvement transversal dans un champ magnétique uniforme qui ont été précédemment étudiés.

Dans le cas du mouvement longitudinal (paragraphe 6 de ce chapitre et premier exemple du paragraphe 7 du même chapitre), on a trouvé :

$$\text{soit } \psi_k = DA_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S} \quad \text{soit } \psi_k = DB_k e^{\frac{2\pi i}{\hbar} S}$$

avec D constant suivant que le moment magnétique est orienté parallèlement ou antiparallèlement au champ magnétique. Les calculs sont immédiats et donnent :

$$g_{(S)}^4 = \rho \frac{m'}{m_0} \quad ; \quad g_{(S)}^3 = \rho \beta c \frac{m'}{m_0} \quad ; \quad g_{(S)}^1 = g_{(S)}^2 = 0$$

$$g_{(a_0)}^1 = g_{(a_0)}^2 = g_{(a_0)}^3 = g_{(a_0)}^4 = 0$$

Ici le quadrivecteur $\vec{g}_{(a_0)}$ est nul. On a donc bien dans le système propre la relation $(g_{(a_0)}^4)_0 = 0$

Dans le cas du champ magnétique transversal (deuxième exemple du paragraphe 7 de ce chapitre) les calculs sont un peu plus compliqués. On a alors :

$$b'_k^{(0)} = C_1 A_k + C_2 B_k$$

avec $C_2 = \pm i C_1$, et $C_1 = D e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \int U dt \sqrt{1-\beta^2}}$, $D = C^{\frac{1}{2}}$,

d'où :

$$a_k^{(0)} = D (A_k \pm i B_k) e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt (\sqrt{1-\beta^2} - 1)}$$

Le calcul donne encore :

$$g_{(s)}^4 = \rho \frac{m'_0}{m_0} ; \quad g_{(s)}^3 = \rho \beta c \frac{m'_0}{m_0} ; \quad g_{(s)}^1 = g_{(s)}^2 = 0$$

puis on trouve :

$$g_{(a_0)}^4 = \rho \frac{U_0}{m_0 c^2} \left[\sqrt{1-\beta^2} - 1 \right]$$

$$g_{(a_0)}^1 = g_{(a_0)}^2 = 0$$

$$\begin{aligned} g_{(a_0)}^3 &= \rho \beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \left[\sqrt{1-\beta^2} - 1 \right] - \frac{1}{\Delta} \beta U_0 \sqrt{1-\beta^2} \rho \\ &= \rho \beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \left[(\sqrt{1-\beta^2} - 1) - \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2} + 1} \right] \\ &= - \rho \beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2} + 1} \end{aligned}$$

Les deux termes dans la première expression de $g_{(a_0)}^3$ correspondent respectivement aux variations de l'exponentielle figurant dans les $a_k^{(0)}$ et aux variations des A_k et des B_k .

On passera du système de l'observateur (qui est un système galiléen bien déterminé puisque le champ électromagnétique s'y réduit par hypothèse à un champ magnétostatique) au système propre du corpuscule par une transformation de Lorentz qui, appliquée aux composantes du quadrivecteur $\bar{g}_{(a_0)}$ donne :

$$\begin{aligned} (g_{(a_0)}^4)_0 &= \frac{g_{(a_0)}^4 - \frac{\beta}{c} g_{(a_0)}^3}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[(\sqrt{1-\beta^2} - 1) + \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2} + 1} \right] = 0 \\ (g_{(a_0)}^1)_0 &= g_{(a_0)}^1 = 0 ; \quad (g_{(a_0)}^2)_0 = g_{(a_0)}^2 = 0 \\ (g_{(a_0)}^3)_0 &= \frac{g_{(a_0)}^3 - \beta c g_{(a_0)}^4}{\sqrt{1-\beta^2}} = \rho \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[-\frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2} + 1} - \beta c (\sqrt{1-\beta^2} - 1) \right] \\ &= - \rho \beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2} + 1} = - \rho_0 \beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2} + 1} \end{aligned}$$

La relation $(g_{(a_0)}^4)_0 = 0$ est donc bien vérifiée.

On pourrait s'étonner de voir β figurer dans l'expression de $(g_{(a_0)}^3)_0$ qui est relative au système propre, mais il faut remarquer que la vitesse βc a ici un sens absolu car c'est la vitesse relative du système propre du corpuscule par rapport au système où le champ électromagnétique est purement magnétique. Dans un système Galiléen possédant (dans le sens des z) une vitesse re-

lative quelconque $\beta'c$ par rapport au système propre, on aurait d'après la transformation des composantes de $\vec{g}_{(a_0)}$

$$g_{(a_0)}^4 = -\rho\beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}+1} \cdot \frac{\beta'}{c \sqrt{1-\beta'^2}}$$

$$g_{(a_0)}^1 = 0 \quad ; \quad g_{(a_0)}^2 = 0$$

$$g_{(a_0)}^3 = -\rho\beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}+1} \frac{1}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

Pour $\beta' = 0$, on retrouve naturellement :

$$(g_{(a_0)}^4)_0 = 0$$

Pour $\beta' = \beta$, on retrouve les valeurs du système de l'observateur

$$g_{(a_0)}^4 = -\rho\beta \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}+1} = \rho \frac{U_0}{m_0 c^2} (\sqrt{1-\beta^2}-1) \text{ et } g_{(a_0)}^3 = -\rho\beta c \frac{U_0}{m_0 c^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}+1}$$

II. CONCLUSION. VALEURS NUMÉRIQUES

En résumé, l'ensemble des calculs que nous venons de développer nous semble prouver que le passage à l'optique géométrique en théorie de Dirac nous conduit à la Mécanique ponctuelle de M. Weyssenhoff où l'existence du spin apparaît, plutôt qu'à la Mécanique ponctuelle sans spin de M. Pauli. Il semble donc que nous ne puissions pas exclure a priori la possibilité de mettre en évidence le moment magnétique (ou électrique) propre d'une particule de Dirac.

Cependant, il est difficile de trouver des raisons décisives pour choisir entre le point de vue de M. Pauli et celui que nous avons développé plus haut. En réalité la difficulté du problème provient des incertitudes d'application de la méthode W.K.B. signalées au paragraphe 2 de ce chapitre. Si en effet, on écrit :

$$\psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} s} = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \int \frac{m_0 c^2}{\eta} dt + \dots} e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt}$$

et si l'on admet que les moments propres étant proportionnels à $\frac{h}{2\pi i}$, la quantité $\frac{2\pi i}{h} \int U dt$ est d'ordre zéro en $\frac{h}{2\pi i}$, on est amené à écrire avec Pauli :

$$\psi_k = b_k e^{\frac{2\pi i}{h} \int \frac{m_0 c^2}{\eta} dt + \dots}$$

avec :

$$b_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \int U dt} = b_k^{(0)} + \frac{h}{2\pi i} b_k^{(1)} + \dots + \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^n b_k^{(n)} + \dots$$

Si au contraire on admet que, bien que les moments propres soient de l'ordre de $\frac{h}{2\pi i}$, le terme U est assez grand pour que $\frac{2\pi i}{h} \int U dt$ ne soit pas négligeable devant $\frac{2\pi i}{h} \int \frac{m_e c^2}{\eta} dt$, on sera amené à appliquer la méthode W.K.B. comme nous l'avons fait au paragraphe 5 de ce chapitre. Or cette manière de voir revient à dire que l'on considère le quotient $K = \frac{\eta U}{m_e c^2}$ comme n'étant pas négligeable devant l'unité bien que son carré puisse être considéré comme négligeable. Naturellement, supposer K négligeable devant l'unité revient à négliger l'existence des moments propres et cela nous ramène au point de vue de Pauli. Mais si nous supposons que K , tout en étant petit devant l'unité n'est pas négligeable devant elle, nous retrouvons comme nous l'avons vu la Mécanique ponctuelle de Weyssenhoff et le raisonnement de M. Pauli n'apparaît plus comme probant.

Par contre, le raisonnement de M. Bohr fondé sur les relations d'incertitude montre bien cette impossibilité, mais seulement dans le cas des vitesses petites devant la vitesse de la lumière. Pour des particules animées de vitesses voisines de c ($\eta \gg 1$), une telle impossibilité de principe ne paraît plus exister.

Demandons-nous maintenant quelles valeurs numériques il faut attribuer aux quantités ε , m_e et η pour qu'on puisse observer un phénomène de déviation par action du gradient du champ magnétique sur le moment magnétique conforme aux images de la Mécanique ponctuelle.

Trois conditions sont à réaliser. Il faut d'abord, pour avoir une Mécanique ponctuelle, que la quantité $K = \frac{U\eta}{m_e c^2}$ soit petite, ce qui nous donne la première condition :

$$(I) \quad \frac{\varepsilon h \eta}{4\pi m_e^2 c^3} H \ll 1$$

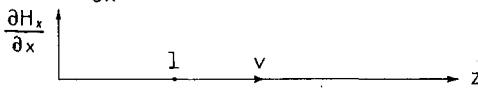
Il faut ensuite, pour pouvoir avoir un groupe d'ondes ponctuel à notre échelle, que la longueur d'onde soit très petite à notre échelle, égale par exemple à 10^{-4} ou 10^{-5} cm., ce qui nous donne la seconde condition :

$$(II) \quad \frac{h}{m_e c \eta} \simeq 10^{-4} \text{ à } 10^{-5} \text{ cm.}$$

Il faut d'ailleurs aussi que $\frac{h}{m_e c}$ ne soit pas trop petit comme nous l'avons montré au paragraphe 2 du chapitre IX. Dans la relation (II), nous avons mis c au dénominateur au lieu de v parce que nous supposons $v \sim c$ pour ne pas tomber sous le coup du raisonnement de Bohr.

Enfin, il faut encore que la déviation produite par l'action du gradient du champ magnétique sur le moment propre soit observable. Supposons que la particule fasse un trajet de lon-

gueur l le long de l'axe oz en étant soumise à un gradient transversal de champ $\frac{\partial H_x}{\partial x}$.



On aura :

$$\frac{d\pi_x}{dt} = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} \frac{\partial H_x}{\partial x}$$

et à la fin du parcours :

$$\pi_x = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} \cdot \frac{l}{c} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x}$$

d'où pour la déviation supposée petite :

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c^2} \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{l}{\pi_z^{(0)}} = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c^2} \frac{\partial H_x}{\partial x} \frac{1}{m_0 c \eta}$$

car $\tan \alpha = \frac{\pi_x^{(0)}}{\pi_z^{(0)}}$ ou encore :

$$\alpha = \frac{\varepsilon h H}{4\pi m_0^2 c^3 \eta} \frac{\partial H_x}{H} l = \frac{K}{\eta^2} \cdot \frac{H'}{H} \cdot l$$

Comme $\eta > 1$, le premier facteur est très petit d'après (I) et il faudra, pour obtenir une déviation observable, avoir :

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} \cdot l \gg H_x$$

condition qui paraît difficile à réaliser.

S'il n'y a pas d'impossibilité de principe à obtenir une déviation observable, cela paraît bien difficile en pratique. Voyons les résultats numériques.

Nous ne pouvons pas prendre η inférieur à 10^2 sous peine de tomber sous l'argument de Bohr. Avec $\eta = 10^2$, il faut prendre au moins $m_0 = 10^{-35}$ gr. sous peine d'avoir une longueur d'onde trop grande ($\lambda > 10^{-4}$ cm.). Avec $\eta = 10^2$, $m_0 = 10^{-35}$ gr., on peut prendre $\varepsilon = 10^{-16}$ u.e.s. pour avoir $K \approx 10^{-2}$ avec $H \approx 10^2$ gauss. La déviation $\alpha = \frac{K}{\eta^2} \frac{H'}{H} l = 10^{-6} \frac{H'}{H} l$ ne doit guère descendre, pour avoir un phénomène observable, au-dessous de 10^{-2} (un centimètre à un mètre). D'où $H' l \gg 10^4 H$. En prenant le trajet $l = 1$ mètre, ce qui est déjà bien grand, on voit que le champ H devait varier de sa valeur sur $\frac{1}{10}$ mm. Tout cela est sans doute bien difficilement réalisable.

Le rapport $\frac{\text{force due au gradient}}{\text{force de Laplace}} = \frac{h}{4\pi m_0 c} \frac{H'}{H} = \frac{\eta \lambda}{4\pi} \frac{H'}{H} \approx 10^{-3} \frac{H'}{H}$

si nous admettons la valeur bien grande 10^2 pour le rapport $\frac{H'}{H}$, aurait la valeur $\frac{1}{10}$, ce qui paraît acceptable.

(1) L'énergie $m_0 c^2 \eta$ est alors de l'ordre de 10^{-12} c.g.s. ou 1 e.v.

Bref les données $\eta = 10^2$, $m_c = 10^{-35}$ gr.⁽¹⁾, $\varepsilon = 10^{-16}$ u.e.s. $\sim 10^{-6}$ e donnent les valeurs à la rigueur acceptables : $\lambda = 10^{-4}$ cm., $K = 10^{-2}$ avec une déviation encore bien faible $\alpha = 10^{-2}$. Nous sommes à la limite des possibilités et cependant ces valeurs sont, semble-t-il, les meilleures que l'on puisse avoir.

Pour pouvoir mettre en évidence par une déviation de ce genre le moment magnétique propre d'une particule de Dirac, il faudrait d'abord que cette particule voulût bien avoir précisément les caractéristiques indiquées plus haut et même en ce cas sa détection ne serait pas facile.

M. Jean Thibaud⁽¹⁾ a donné pour les électrinos qu'il pense avoir observés dans ses expériences $\eta = 10^7$, $m_c = 10^{-38}$ gr., $\varepsilon = 10^{-10}$ à 10^{-14} u.e.s., ce qui donne pour la longueur d'onde la valeur acceptable $\lambda = 10^{-6}$ cm et un rapport des forces de l'ordre de 1 si H varie de sa valeur sur 1 cm (c'est à dire si $\frac{H'}{H} \sim 1$). Malheureusement on trouve alors K de l'ordre de 10^{11} à 10^{15} . Le rapport $\frac{K}{\eta^2}$ serait de l'ordre de 1 et la déviation serait grande, ce qui est favorable. Mais une valeur aussi élevée de K paraît tout à fait inconciliable avec la validité de la Mécanique ponctuelle dont M. Thibaud fait usage pour l'interprétation de ses résultats expérimentaux.

Pour des valeurs suffisamment grandes de η telles que $\eta \gg c$, la difficulté qui se présente ici pour la mise en évidence du moment magnétique propre est une difficulté d'ordre pratique liée à la possibilité effective et à la précision des mesures, mais ce n'est peut-être pas une impossibilité théorique a priori comme semblaient l'indiquer les raisonnements de M.M. Bohr et Pauli.

(1) Dans les expériences de M. Thibaud, $H \sim 3000$ gauss, $\frac{H'}{H} \sim \frac{1}{3}$ en c.g.s.

INDEX ALPHABÉTIQUE

	<i>Pages</i>
A.	
Anticommutateur	20, 23
Approximation de l'optique géométrique	9, 117, 120
Approximation W.K.B. (méthode d')	119
B.	
Becker	85
Blackett	97
Bohr	20, 36, 52, 71, 107
C.	
Centre de gravité de la probabilité de présence	101
Commutateur	20, 23
Compton (longueur d'onde de)	92, 106
Conditions de Pauli	127, 128, 131
Constante de mouvement	26
Coordonnées d'espace-temps	39, 40
Coordonnées d'Univers	39
Costa de Beauregard	47, 54, 55, 56, 78
D.	
Décomposition de Gordon	83, 85, 144
Densité d'éléments de matrices	25, 76
Densité de moment cinétique propre	46, 47, 54
Densité de moments magnétique et électrique propres	51, 58, 82, 145
Densité propre d'impulsion linéaire	55
Densité de spin	50, 51, 53
Densité de valeur moyenne	25, 76, 90
Dérivation lagrangienne	56
Dérivation par rapport au temps propre	56
Dérivation (pour les densités)	56
Différentielle propre	14, 19, 104
Dirac	16, 61
Divergence quadridimensionnelle	49

	Pages
E.	
Ehrenfest (théorème d')	103
Einstein (relations d')	6
Ensemble orthogonal	13
Equation I,a	9
I,b	12
I,c	15
II,a	27
II,b	27
II,c	27
III,a	30
IV,a	43
IV,b	43
IV,c	44
IV,d	45
IV,e	52
IV,f	54
IV,g	58
IV,h	60
V,a	62
V,b	63
V,c	65
V,d	67
V,e	67
V,f	71
V,g	71
VI,a	77
VI,b	78
VI,c	81
VI,d	82
VII,a	89
VII,b	90
VII,c	90
X,a	117
X,b	117
X,c	118
X,d	118
X,e	127
X,f	128
X,g	130
X,h	130
X,i	136
X,j	137
X,k	139
X,l	139
X,m	144
X,n	146
Equation de continuité	9, 125
Equation de Jacobi	118, 120, 122
Equation de Dirac	63, 64, 65, 66, 68

	Pages
F.	
Fonction δ de Dirac	16, 19
Fonction de Jacobi	133, 135
Fonction de Lagrange	124
Fonction hamiltonienne	8
Fonction normée	13
Fonction propre	12, 75
Fonctions de base	22
Force de Lorentz (à quatre dimensions)	59, 110
Fusion (procédé de)	37
G.	
Globule de probabilité	119
Gordon (décomposition de)	83, 85, 144
Goudsmit	36, 52, 71
Grandeurs de champ	25, 46, 76
Grandeurs canoniquement conjuguées	28
Groupe des rotations spatiales	31
H.	
Heisenberg (inégalités d'incertitude de)	19, 26
" (matrices de)	23, 75, 101
I.	
Inégalités d'incertitude de Heisenberg	19, 26
Intégrales premières	25, 26, 69
Invariance relativiste	69
J.	
Joliot	97
K.	
Klein (paradoxe de)	91, 92
L.	
Larmor (rotation de)	113
Longueur d'onde de Compton	92, 106
Lorentz (transformation de)	6, 69, 149
" (force de)	59
M.	
Magnéton de Bohr	36, 52, 71
Matrice adjointe	21
" antihermitienne	21
" de Dirac	64
" de Heisenberg	23, 75, 101
" de von Neumann	66

	Pages
Matrice de Schrödinger	23
" diagonale	20
" hermitienne	21, 62, 76
" inverse	21
" transposée	21
" unitaire	21, 63
Minkowski (variables de)	39
Moment cinétique propre	39, 43, 47
orbital	29, 40, 41, 69
Moment de rotation	29
Moment d'impulsion	29
Moment magnétique propre	51, 107
O.	
Occchialini	97
Onde plane à énergie négative	83, 89, 95
Onde plane monochromatique	10, 14, 78, 79, 80, 122
Opérateur adjoint	27
" complet	11
" de spin total	36
" incomplet	11
" hamiltonien	11, 15, 18
" hermitien	11
" linéaire	11
Optique géométrique (approximation de l')	9, 117, 120
P.	
Paradoxe de Klein	91, 92
Pauli	26, 107, 110, 126, 129
Petiau	92
Positon	97
Probabilité de valeur propre	18
Q.	
Quadrivecteur densité-courant	83
" densité de spin	82
" densité-flux	73, 77, 81, 117
R.	
Représentation	64
Rotations spatiales (groupe des)	31
S.	
Schrödinger (matrices de)	23
" (tremblement de)	101, 103
Spectre continu	13
Spectre de raies	12

	Pages
Spin	35, 46, 61, 69, 70, 80, 107, 114
Spineurs	66
Système complet (ou incomplet)	14, 19, 74, 94
Système orthonormal	13
Système propre	45, 53
T.	
Tenseur densité d'énergie-impulsion	85
Thibaud	97, 109, 115, 143
Trace d'une matrice	22
Transformation canonique	22, 67
Tremblement de Schrödinger	101, 103
Trous (théorie des)	96
Tube d'Univers	47, 48
U.	
Uhlenbeck	36, 52, 71
V.	
Valeur moyenne	33
Valeur propre	12, 33
Valeur propre multiple (ou dégénérée)	13, 18
Vitesse d'Univers	54
Volume propre	57
W.	
Weyssenhoff	46, 50, 54, 78, 129, 140

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
CHAPITRE I	
LA MECANIQUE ONDULATOIRE NON RELATIVISTE A UNE FONCTION D'ONDE	5
1. Idées et équations générales de la Mécanique Ondulatoire	5
2. Equations d'onde de la Mécanique Ondulatoire	8
3. Nouvelle conception des grandeurs attachées à un corpuscule	10
4. Valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur linéaire et hermitien	12
5. Spectre continu de l'opérateur hamiltonien d'un corpuscule libre	15
CHAPITRE II	
INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA MECANIQUE ONDULATOIRE	17
1. Principes généraux	17
2. Les matrices algébriques et leurs propriétés	20
3. Opérateurs et matrices en Mécanique Ondulatoire	22
4. Valeurs moyennes et grandeurs de champ en Mécanique Ondulatoire	24
5. Intégrales premières en Mécanique Ondulatoire	25
6. Forme précise des relations d'incertitude	26
CHAPITRE III	
THEORIE QUANTIQUE DES MOMENTS CINETIQUES ET DES SPINS	29
1. Moment cinétique orbital	29
2. Le moment cinétique et le groupe des rotations spatiales	31

	Pages
3. Résultats généraux relatifs aux valeurs propres d'opérateurs satisfaisant aux relations de non-commutation (III,a)	33
4. Le spin	35

CHAPITRE IV

LES MOMENTS CINETIQUES PROPRES DU POINT DE VUE RELATIVISTE	39
1. Généralités	39
2. Représentation relativiste du moment cinétique orbital	40
3. Etude du moment cinétique propre du point de vue relativiste	42
4. Théorie relativiste générale des moments cinétiques propres	47
5. Aspect relativiste des moments magnétiques propres	51
6. Rapport entre les moment magnétoco-électrique et le spin	52
7. Théorie de M. Jan. v. Weyssenhoff	54

CHAPITRE V

LA THEORIE DE L'ELECTRON A SPIN DE DIRAC	61
1. Les équations d'ondes de l'électron à spin	61
2. Invariance relativiste des équations de Dirac	65
3. Le spin de l'électron en théorie de Dirac	69

CHAPITRE VI

FORMALISME ET INTERPRETATION PHYSIQUE DE LA THEORIE DE DIRAC	73
1. Formalisme général de la Mécanique Ondulatoire relativiste de l'électron de Dirac	73
2. Les grandeurs de champ définies par la théorie de Dirac	76
3. Les ondes planes monochromatiques en théorie de DIRAC	79
4. Le quadrivecteur densité-courant et sa décomposition	83

	Pages
CHAPITRE VII	
LES SOLUTIONS A ENERGIE NEGATIVE EN THEORIE DE DIRAC	89
1. L'onde plane à énergie négative	89
2. Caractère incomplet du système des ondes à énergie positive	92
3. La théorie des "trous" de Dirac	96
CHAPITRE VIII	
LE TREMBLEMENT DE SCHRODINGER	101
1. Le centre de gravité de la probabilité dans les Mécaniques Ondulatoires	101
2. Le théorème d'Ehrenfest	103
3. Le tremblement de Schrödinger	103
CHAPITRE IX	
POSSIBILITE DE MESURER LE SPIN DE L'ELECTRON	107
1. Idées actuelles sur la question	107
2. Action d'un champ magnétique sur le moment magnétique propre	107
3. Mesure du champ magnétique produit par l'électron ..	109
4. Compensation de la force de Lorentz par un champ électrique	110
5. Arrêt d'un électron orienté par un gradient de champ magnétique	112
6. Mesure du moment cinétique propre (spin)	114
7. Conclusion	114
CHAPITRE X	
PASSAGE A L'APPROXIMATION DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE EN MECHANIQUE ONDULATOIRE RELATIVISTE	117
1. L'approximation de l'optique géométrique	117
2. La méthode W.K.B. d'approximations successives	119
3. Passage à l'optique géométrique en théorie de Dirac	121
4. La méthode W.K.B. en théorie de Dirac	126

	Pages
5. Application du mode de raisonnement de Pauli quand on part de la mécanique ponctuelle de Weyssenhoff ..	129
6. Calcul des fonctions C_1 et C_2 dans le cas du mouvement d'un électron dans la direction d'un champ magnétique permanent et homogène	132
7. Retour sur le passage à l'optique géométrique en théorie de Dirac	136
8. Démonstration générale des formules $[X, i]$ et $[X, j]$ à partir de la décomposition de Gordon	144
9. Interprétation de la condition $F(a_k^*) = 0$	146
10. Vérification de la relation $(g_{(a_0)}^4)_0 = 0$ dans deux cas particuliers simples	148
11. Conclusion. Valeurs numériques	150
INDEX ALPHABETIQUE	155

ACHEVÉ D'IMPRIMER
LE 15 SEPTEMBRE 1951
SUR LES PRESSES DE
J. & R. SENNAC
IMPRIMEURS
54, FBG. MONTMARTRE
PARIS (9^e)

Dépôt légal Imprimeur N° 2669
Dépôt légal Éditeur N° 373