

III.

ÉLÉMENTS

DE

THÉORIE DES QUANTA

ET DE

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

## OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

---

- La physique quantique restera-t-elle inderministe?** Exposé du problème suivi de la reproduction de certains documents et d'une contribution de M. J. P. VIGIER. In-8 (16-25), VII-113 pages, 4 figures; 1953.
- Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques.** In-8 (16-25), VI-113 pages, 14 figures; 1950.
- Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs.** In-8 (16-25), 208 pages. 2<sup>o</sup> Édition légèrement modifiée; 1957.
- La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules.** In-8 (16-25), VI-224 pages; 1950.
- Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion.** In-8 (16-25), VI-210 pages, 7 figures. 2<sup>o</sup> Édition revue et corrigée; 1954.
- La théorie des particules à spin 1/2 (Électrons de Dirac).** In-8 (16-25), 164 pages; 1952.
- Une tentative d'interprétation causale de la mécanique ondulatoire.** In-8 (16-25), VII-297 pages, 20 figures; 1956.
- La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire.** In-8 (16-25), VI-130 pages, 7 figure; 1957.
- 

## OUVRAGE DE MM. M. ET L. DE BROGLIE

---

- Introduction à la Physique des rayons X et des rayons gamma.** In-8 (16-25), 201 pages, 27 figures et 11 planches hors texte.
-

TRAITÉ DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

OUVRAGES RÉUNIS PAR JEAN-LOUIS DESTOUCHES

---

III.

ÉLÉMENTS

DE

THÉORIE DES QUANTA

ET DE

MÉCANIQUE ONDULATOIRE

PAR

Louis de BROGLIE

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES  
PROFESSEUR A LA SORBONNE



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1959

*Nouveau tirage*

© 1959 by Gauthier-Villars.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

---

## PRÉFACE.

---

Ce volume reproduit l'essentiel du cours que j'ai professé à l'École Normale Supérieure de 1934 à 1956. Il contient l'exposé des principales questions qui figurent dans la partie fixe du programme du certificat de Théories physiques de la Faculté des Sciences de Paris. Seules ont été laissées de côté quelques questions, telles que la Relativité généralisée, la théorie quantique de la Chimie, la théorie quantique des solides et des liquides et l'étude des phénomènes nucléaires sur lesquelles le programme demande seulement aux candidats de posséder quelques notions, ainsi que les preuves expérimentales de l'existence des atomes, des molécules et des électrons qui sont aujourd'hui connues de tous les étudiants en sciences.

Nous n'avons pas fait une étude détaillée approfondie des théories de la nouvelle Physique quantique car, le présent Ouvrage étant destiné aux candidats au certificat de Théories physiques et à ceux qui veulent s'initier à la Mécanique ondulatoire, il doit partir des connaissances que tout étudiant qui a suivi les cours de Physique générale doit posséder et montrer comment et pourquoi se sont introduites des idées fondamentales de la Physique contemporaine. C'est seulement ainsi que l'on peut être amené à bien comprendre ces idées très subtiles qui sont souvent encore mal interprétées. C'est seulement ensuite que l'étudiant avancé pourra entreprendre avec fruit l'étude plus approfondie des prolongements actuels de la Physique quantique et, en particulier, des théories encore très mouvantes et très mal assurées qui s'efforcent de rendre

compte de la nature des champs, de la structure des particules de l'échelle atomique et des interactions à l'intérieur des noyaux.

Nous avons fait suivre chaque chapitre d'une courte bibliographie où nous avons fait figurer principalement des Ouvrages écrits ou traduits en français. Ces bibliographies sont évidemment très incomplètes : elles n'ont d'ailleurs pour but que de permettre au lecteur d'approfondir certains points qui n'ont pu qu'être effleurés dans le texte.

LOUIS DE BROGLIE.

---

---

**PROGRAMME**  
**DU CERTIFICAT D'ÉTUDES SUPÉRIEURES**  
**DE THÉORIES PHYSIQUES**

---

**PARTIE FIXE.**

Électromagnétisme, équation de Maxwell; théorie de Lorentz.

Théorie de la Relativité restreinte; notions sur les théorie de la Relativité généralisée.

Notions de thermodynamique. Mécanique statistique classique.

Structure discontinue de la matière, molécules, atomes, électrons.

Base de la théorie des quanta; corps noir, loi de Planck; émission des raies spectrales, atome de Bohr, théorie de Sommerfeld.

Principe de correspondance.

Structure de la lumière, ondes et photons.

Mécanique ondulatoire, principes fondamentaux, relations d'incertitude, vérifications expérimentales, optique électronique.

Mécanique ondulatoire des systèmes, théorèmes fondamentaux; méthodes d'intégration, notion sur les méthodes d'approximation et de perturbation.

Spin, principe de Pauli, symétrie et antisymétrie.

Applications à la théorie des atomes et des molécules. Atome d'hélium, molécule d'hydrogène; notions sur la théorie quantique de la Chimie.

Statistique quantique, théorie des gaz, des solides, des métaux, notions sur les liquides.

Notions sur la Mécanique ondulatoire relativiste; électrons de Dirac, nucléons, photon.

Théorie des phénomènes nucléaires.

**PARTIE MOBILE.**

Cours des Professeurs et Maîtres de conférences de Théories physiques et de Relativité et Quanta pendant le semestre qui a précédé la session d'examen.

**ÉPREUVE PRATIQUE.**

Calculs analytiques et numériques se rattachant au programme ci-dessus.



ÉLÉMENTS  
DE  
THÉORIE DES QUANTA  
ET DE  
MÉCANIQUE ONDULATOIRE

---

CHAPITRE I.

RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DE MAXWELL  
ET DE LA THÉORIE DES ÉLECTRONS.

---

1. **Grandes lignes de la Théorie de Maxwell.** — La théorie électromagnétique élaborée par le savant anglais James Clerk Maxwell vers 1870 repose sur un groupe d'équations fondamentales à l'aide desquelles Maxwell a représenté l'ensemble des faits expérimentaux macroscopiques concernant l'Électricité et le Magnétisme qui étaient connus de son temps.

Pour décrire le champ électromagnétique dans les phénomènes à grande échelle, il est nécessaire d'introduire quatre vecteurs définis en chaque point de l'espace. Ce sont, d'une part, les vecteurs champ électrique  $\mathbf{h}$  et champ magnétique  $\mathbf{H}$ ; d'autre part, les vecteurs induction électrique  $\mathbf{b}$  et induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Dans le vide et dans les milieux qui, au point de vue électromagnétique, se comportent à peu près comme le vide (l'air par exemple), il est permis de confondre chaque induction avec le champ correspondant en posant  $\mathbf{b} = \mathbf{h}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . Mais dans la plupart des milieux matériels, il y a lieu de distinguer les inductions des champs. Tous les traités de Physique exposent la manière de définir les champs et les inductions au moyen d'une sorte d'expérience idéale en distinguant la forme allongée ou aplatie de la cavité creusée dans un corps matériel et à l'intérieur de laquelle on mesure l'action subie par une charge électrique ou par un pôle magnétique. La différence

entre l'induction et le champ provient de la manière dont le milieu réagit *en se polarisant* sous l'influence du champ qui lui est imposé.

Pour décrire les charges et les courants, il faut introduire la densité de charge électrique  $\delta$  en chaque point d'un milieu matériel et la densité de courant électrique  $\mathbf{i}$  qui représente en chaque point la charge qui passe par unité de temps à travers une surface unité placée perpendiculairement à la direction du mouvement local de l'électricité.

Les équations de Maxwell expriment les relations qui lient les champs, les inductions, les charges et les courants. Elles ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \text{rot } \mathbf{h} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ (2) \quad & \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + 4\pi \frac{\mathbf{i}}{c}, \\ (3) \quad & \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ (4) \quad & \text{div } \mathbf{b} = 4\pi\delta, \end{aligned}$$

$c$  est ici le rapport entre les unités de charge dans les systèmes d'unités électromagnétiques et électrostatiques. Les équations (1) à (4) sont écrites dans le système d'unités mixtes de Lorentz qui exprime le champ et l'induction électriques ainsi que les densités de charge et de courant en u. e. s., le champ et l'induction magnétiques en u. e. m.

L'équation (1) traduit la loi de l'induction de Faraday. L'équation (4) est fournie par la loi de Coulomb et le théorème de Gauss. L'équation (2) exprime la liaison entre le champ magnétique et les courants : les faits expérimentaux connus du temps de Maxwell ne permettaient d'écrire que la relation de circulation d'Ampère

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \frac{\mathbf{i}}{c}$$

qui traduit l'ensemble des lois de Biot et Savart et de Laplace; l'idée géniale de Maxwell fut d'ajouter le terme  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$  au second membre de cette équation, terme représentant une nouvelle sorte de courant, le *courant de déplacement*, qui existe dans les milieux diélectriques et même dans le vide et grâce auquel il y a toujours, même dans un circuit coupé par un condensateur (circuit ouvert), conservation du courant total. Ce fut bien là une idée géniale, car c'est elle qui a permis le développement de la théorie électromagnétique de la lumière dont la découverte par Hertz des ondes qui portent son nom est venue, vingt ans plus tard, apporter une éclatante confirmation.

Enfin l'équation (3) exprime qu'il n'y a pas de magnétisme vrai, qu'il est impossible d'isoler un pôle d'aimant.

Les équations de Maxwell ne permettent de définir l'évolution du champ électromagnétique que si l'on admet certaines relations entre les inductions et les champs. Ces relations dépendent naturellement des propriétés des milieux envisagés. Dans un grand nombre de milieux isotropes, on peut se contenter des relations vectorielles linéaires suivantes :

$$(5) \quad \mathbf{b} = k\mathbf{h}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

$k$  et  $\mu$  étant des constantes, c'est-à-dire des quantités indépendantes des champs, que l'on nomme respectivement « la constante diélectrique » et la « perméabilité magnétique ». Bien entendu, dans les milieux non homogènes,  $k$  et  $\mu$  sont des fonctions du point considéré : ces quantités peuvent même être variables avec le temps si le milieu n'est pas dans un état stationnaire. Pour le vide et approximativement pour certains milieux comme l'air, il est permis de poser les constantes  $k$  et  $\mu$  égales à 1.

Les équations de Maxwell ont comme conséquence, quelles que soient les relations entre les inductions et les champs, que l'on a

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{i} = 0.$$

Cette équation, du type de l'équation hydrodynamique de continuité, exprime la conservation de l'électricité. C'est pour obtenir cette relation de conservation que Maxwell a introduit le terme « courant de déplacement » dans ces équations.

Il est également utile de rappeler que le courant dans les conducteurs est relié au champ électrique par une relation qui, dans beaucoup de cas, peut se mettre sous la forme simple

$$\mathbf{i} = \sigma\mathbf{h} \quad (\text{loi d'Ohm}),$$

$\sigma$  étant la conductivité du milieu envisagé.

Terminons ce rapide coup d'œil sur la théorie de Maxwell par des considérations énergétiques.

Soit un volume  $\mathcal{V}$  d'un seul tenant limité par une surface  $S$ . Évaluons le travail effectué par le champ électromagnétique pendant un temps  $dt$  sur les charges contenues dans  $\mathcal{V}$  : on voit aisément qu'il est égal à  $\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}) d\tau dt$ . Si alors on calcule la valeur de ce travail à l'aide des

équations de Maxwell en admettant les relations linéaires (5) entre champs et inductions, on voit que tout se passe comme si, dans le champ électromagnétique, l'énergie se trouvait localisée avec la densité spatiale

$$(6) \quad w = \frac{1}{8\pi} [kh^2 + \mu H^2]$$

et de plus que le vecteur

$$(7) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{h} \times \mathbf{H}]$$

dit « vecteur radiant de Poynting » représente en chaque point le flux de l'énergie électromagnétique par unité de surface. Max Abraham et Henri Poincaré ont montré que le vecteur  $\frac{1}{c^2} \mathbf{S}$  représente la quantité de mouvement du champ électromagnétique par unité de volume.

**2. Théorie électromagnétique de la Lumière.** — Par définition, la constante  $c$  figurant dans les équations de Maxwell est égale au rapport de l'unité u. e. m. à l'unité u. e. s. de charge électrique. L'une des conséquences remarquables de la théorie de Maxwell est que  $c$  doit aussi être égale à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

Maxwell a eu, en effet, l'idée admirable que l'on pouvait regarder la lumière comme une perturbation électromagnétique et il a ainsi réuni en une vaste synthèse les domaines jusqu'alors totalement séparés de l'Optique et de l'Électromagnétisme. Pour voir comment les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide ou dans les milieux électromagnétiquement équivalents au vide, nous remarquerons que si l'on y fait  $\mathbf{i} = \delta = 0$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{h}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ , les équations de Maxwell admettent des solutions de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{h}_0 \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right], \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right], \end{aligned}$$

avec

$$|\mathbf{h}_0| = |\mathbf{H}_0|, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Les vecteurs  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{H}$  sont d'ailleurs perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Une telle solution représente une onde électromagnétique plane et monochromatique se propageant dans la direction de cosinus directeurs  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . D'après Maxwell, la lumière est constituée par des ondes de ce type appartenant à un certain domaine de longueurs d'ondes. On voit donc

que dans le vide la lumière, et plus généralement toutes les ondes électromagnétiques, se propagent avec la vitesse  $c$ . D'ailleurs dans le vide les équations de Maxwell entraînent comme conséquence les relations  $\square \mathbf{h} = 0$  et  $\square \mathbf{H} = 0$ , avec  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ , équations qui expriment que dans le vide les champs électromagnétiques se propagent toujours avec la vitesse  $c$ . L'expérience a, en effet, montré que la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques et lumineuses est numériquement égale à  $c$ , ce qui a apporté une belle confirmation des idées de Maxwell.

Dans un milieu matériel isolant ( $\mathbf{i} = \delta = 0$ ), où les relations (5) entre champs et inductions sont valables, on trouve des solutions de la forme

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right],$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos 2\pi\nu \left[ t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right],$$

avec

$$V = \frac{c}{\sqrt{k\mu}}; \quad \mu \mathbf{H}_0^2 = k h_0^2.$$

Un grand nombre de milieux matériels sont sensiblement non magnétiques, c'est-à-dire qu'on peut y poser sensiblement  $\mu = 1$ . On a alors simplement  $V = \frac{c}{\sqrt{k}}$  et, comme par définition, l'indice de réfraction

d'un corps est  $n = \frac{c}{V}$ , on trouve la célèbre relation de Maxwell

$$k = n^2$$

qui se vérifie bien quand on a soin de mesurer  $k$  et  $n$  dans des conditions comparables.

Si l'on applique à une onde plane monochromatique dans un milieu non dispersif de constante diélectrique  $k$  les expressions (6) et (7) de la densité et du flux de l'énergie, on trouve en moyenne dans le temps

$$\bar{w} = \frac{1}{8\pi} k h_0^2, \quad \bar{\mathbf{S}} = \bar{w} V \mathbf{u},$$

$\mathbf{u}$  étant le vecteur unité porté dans la direction de propagation  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dans les milieux non dispersifs, où  $k$  et  $V$  ne sont pas fonction de la fréquence, l'énergie électromagnétique se propage donc avec la vitesse  $V$  et le vecteur  $\mathbf{S}$  donne bien le flux de l'énergie. Dans les

milieux dispersifs, la question est plus compliquée parce qu'il y a localisation partielle de l'énergie dans le milieu même (1).

On peut encore remarquer que dans le vide la quantité de mouvement transportée par l'onde plane est par unité de volume,  $\frac{\bar{S}}{c^2} = \frac{\bar{w}}{c}$  en moyenne.

**3. Théorie des électrons (H. A. Lorentz).** — Des expériences de plus en plus nombreuses et précises ont suggéré aux physiciens vers 1880-1890 l'idée d'une structure corpusculaire de l'électricité. A la suite de la découverte de l'électron, on a été amené à admettre que la matière contient un nombre énorme de petites particules électrisées. Quand la matière est électriquement neutre, cela signifie donc qu'elle contient autant de particules positives que de particules négatives; quand elle est chargée, cela signifie qu'il y a excès de particules d'un certain signe; quand elle est le siège d'un courant, cela veut dire qu'il y a un déplacement d'ensemble des particules d'un certain signe par rapport à celles de l'autre signe, etc.

La conception d'une structure discontinue de l'électricité a conduit le physicien hollandais H. A. Lorentz vers 1895 à développer la théorie électromagnétique sous une forme nouvelle qu'on a appelée « Théorie des Électrons ». Au lieu de se contenter des champs électriques et magnétiques observables à grande échelle, Lorentz cherche à définir les champs tels qu'ils doivent exister dans la matière, soit entre les particules électrisées, soit même à l'intérieur de ces particules. Il prétend ainsi donner une description du champ électromagnétique plus détaillée, plus fine, que celle qui est fournie par la théorie de Maxwell. Il décrit donc le champ électromagnétique fin par deux champs  $\mathbf{h}'$  et  $\mathbf{H}'$  qui sont les champs microscopiques : il n'y a plus lieu de définir des inductions, car les inductions sont seulement des apparences macroscopiques.

Pour préciser la forme des champs microscopiques, Lorentz a admis que ces champs obéissent à des équations de même forme que celles de Maxwell, et cela, même à l'intérieur des électrons. Il écrit donc

$$(1') \quad \text{rot } \mathbf{h}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t},$$

$$(2') \quad \text{rot } \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}'}{\partial t} + 4\pi\rho \frac{\mathbf{v}}{c},$$

$$(3') \quad \text{div } \mathbf{H}' = 0,$$

$$(4') \quad \text{div } \mathbf{h}' = 4\pi\rho.$$

(1) LÉON BRILLOUIN, *Conférence-rapport sur la Théorie des Quanta*, Presses universitaires, chapitre I.

Ici  $\rho$  est la densité microscopique de l'électricité qui est nulle entre les électrons et a des valeurs non nulles à l'intérieur de ceux-ci, par opposition à la densité macroscopique  $\delta$  qui est définie par l'excès de particules d'un certain signe contenues dans un élément de volume très petit à notre échelle, mais renfermant néanmoins un très grand nombre de particules.  $\mathbf{v}$  est la vitesse locale de l'électricité en chaque point à l'intérieur des charges de sorte que  $\rho \mathbf{v}$  est la densité de courant microscopique remplaçant ici la densité macroscopique  $\mathbf{i}$ .

Quand on a affaire à un nombre immense de charges électriques élémentaires en mouvement, on ne peut observer que les valeurs moyennes des champs : ces valeurs moyennes diffèrent d'ailleurs suivant la méthode de mesure (cavité plate ou cavité allongée), ce qui permet de définir les champs et les inductions figurant dans les équations de Maxwell. On peut démontrer <sup>(1)</sup> que, si les équations de Lorentz sont exactes microscopiquement, celles de Maxwell s'en déduisent pour les grandeurs macroscopiques par le jeu des moyennes et cela était évidemment nécessaire pour que les équations de la théorie des électrons soient acceptables.

En plus des équations écrites plus haut, la théorie des Électrons admet une équation complémentaire appelée « équation de la force de Lorentz » qui exprime la force « microscopique » agissant sur un élément de charge  $\rho d\tau$  animé de la vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ électromagnétique défini par les vecteurs  $\mathbf{h}'$  et  $\mathbf{H}'$ . Cette force est donnée par

$$\mathbf{f} d\tau = \rho d\tau \left[ \mathbf{h}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}'] \right].$$

Cette expression de la force de Lorentz est choisie, elle aussi, par une extrapolation du macroscopique au microscopique. Elle est telle qu'en repassant aux phénomènes à grande échelle, on retrouve la définition usuelle de la force électrique et la loi d'action des champs magnétiques sur l'électricité en mouvement (loi de Laplace).

En combinant les équations de Lorentz, on trouve facilement qu'en dehors des électrons ( $\rho = 0$ ), les champs  $\mathbf{h}'$  et  $\mathbf{H}'$  se propagent suivant les équations

$$\square \mathbf{h}' = 0, \quad \square \mathbf{H}' = 0$$

qui expriment que ces champs fins se propagent dans le vide et aussi

(1) Voir, par exemple, le livre de R. BECKER (bibliographie [5], p. 121 et suiv.)

entre les électrons de la matière avec la vitesse  $c$ . On retrouve aussi la conservation de l'électricité sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

et l'on obtient les expressions *microscopiques* de la densité et du flux de l'énergie sous la forme

$$\omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{h}'^2 + \mathbf{H}'^2), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{h}' \times \mathbf{H}']$$

Nous devons remarquer ici que la théorie des Électrons n'est jamais parvenue à donner un modèle satisfaisant de l'électron lui-même. Formé d'électricité d'un seul signe, l'électron devrait faire explosion. Henri Poincaré a démontré que pour assurer sa stabilité il fallait introduire une pression, la *pression de Poincaré*, dont la nature est restée inconnue. Il est certain aujourd'hui que le problème de l'existence des particules élémentaires est d'une nature très profonde et doit faire intervenir les quanta, mais sa solution ne paraît pas encore prochaine.

**4. Les potentiels électromagnétiques. Formule des potentiels retardés.** — Aussi bien dans la théorie de Maxwell que dans celle de Lorentz, il est très commode de faire intervenir des grandeurs nommées « potentiels ». Plaçons-nous dans le cadre de la théorie des Électrons. Le champ électromagnétique  $\mathbf{y}$  est défini par les six grandeurs (que nous écrivons en supprimant les accents)  $h_x, h_y, h_z, H_x, H_y, H_z$ . Au lieu de considérer ces six grandeurs, il est possible de considérer seulement quatre grandeurs, les « potentiels électromagnétiques » dont l'une est une grandeur scalaire, le potentiel scalaire  $V$ , et dont les autres sont les composantes d'une grandeur vectorielle, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . La liaison entre les champs et les potentiels est exprimée par les relations de définition

$$(8) \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V.$$

Il est évident que ces définitions assurent l'exactitude des deux équations de Lorentz « sans second membre »

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Les potentiels seront déterminés en fonction des charges et des courants

en introduisant les définitions (8) dans les équations avec second membre

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + 4\pi\rho \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

En se servant des formules suivantes de calcul vectoriel :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \Delta V, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

on obtient ainsi les équations

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta V - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{A}) = 4\pi\rho, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad} \left[ \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right] = 4\pi\rho \frac{\mathbf{v}}{c}. \end{array} \right.$$

Lorentz a trouvé une manière ingénieuse de donner à ces équations une forme plus intuitive. Il est parti de la remarque que, si l'on considère les champs comme étant les véritables grandeurs physiques, les potentiels sont de simples artifices mathématiques permettant de calculer les champs. Dès lors, on est libre de choisir pour les potentiels les fonctions que l'on préfère à condition que les champs s'en déduisent par les formules (8). Il en résulte que, si l'on a trouvé des potentiels  $V$  et  $\mathbf{A}$  répondant à la question, on peut tout aussi bien prendre pour les potentiels les fonctions

$$V' = V + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} F,$$

$F$  étant une fonction arbitraire de  $x, y, z, t$ , car les valeurs des champs données par (8) restent les mêmes. De là découle que l'on peut imposer aux potentiels de satisfaire à une certaine relation; il suffit pour cela de choisir convenablement la fonction  $F$ . Profitant de cette circonstance, Lorentz a imposé aux potentiels la relation suivante :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

dite « relation de Lorentz entre les potentiels ». Il a choisi cette condition parce qu'elle donne aux équations (9) la forme très simple

$$(10) \quad \square V = 4\pi\rho, \quad \square \mathbf{A} = 4\pi\rho \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Dans le vide où  $\rho = 0$ , on a alors simplement  $\square V = 0$  et  $\square \mathbf{A} = 0$ , équations qui expriment que les potentiels ainsi déterminés se propagent

dans le vide avec la vitesse  $c$  tout comme les champs. Ceci donne aux potentiels de Lorentz un sens physique particulier.

Les équations (10) expriment alors la façon dont les potentiels sont créés par la présence et le mouvement des charges et permettent de calculer les potentiels et, par suite, les champs, quand on connaît  $\rho$  et  $\mathbf{v}$  en fonction de  $x, y, z, t$ . La solution du problème est donnée, conformément à un raisonnement classique de Kirchhoff par les formules dites « des potentiels retardés ».

Considérons les potentiels créés en un point P par une distribution de charges en mouvement donnée. Soit  $d\tau_M$  l'élément de volume entourant un point M situé à la distance  $r_{PM}$  de P.

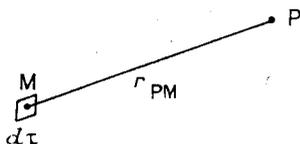


Fig. 1.

Les potentiels retardés sont donnés par les formules

$$(11) \quad V(P, t) = \iiint \frac{[\rho]_{t - \frac{r_{PM}}{c}}}{r} d\tau_M, \quad \mathbf{A}(P, t) = \iiint \frac{1}{c} \frac{[\rho \mathbf{v}]_{t - \frac{r_{PM}}{c}}}{r} d\tau_M.$$

Les quantités  $[\rho]$  et  $[\rho \mathbf{v}]$  sont les valeurs de la densité de charge et de la densité de courant au point M, non pas à l'instant  $t$ , mais à l'instant  $t - \frac{r_{PM}}{c}$ , c'est-à-dire à l'instant où une perturbation électromagnétique doit partir de M pour parvenir en P à l'instant  $t$  : le retardement tient donc compte de la propagation avec une vitesse finie  $c$  de toutes les perturbations électromagnétiques.

Notons qu'on pourrait obtenir une autre solution, les « potentiels avancés », en changeant  $c$  en  $-c$ , car l'équation de propagation ne dépend que de  $c^2$ . Cette solution est *en général* considérée comme physiquement inacceptable parce qu'elle ferait dépendre le présent de l'avenir.

**§. Calcul du potentiel créé par une distribution statique.** — L'emploi des potentiels retardés va nous permettre de calculer les champs qui entourent une distribution d'électricité dont la densité  $\rho$  et la vitesse  $\mathbf{v}$  sont connues en chaque point.

Nous commencerons par considérer le cas très simple d'une distri-

bution statique ( $\mathbf{V} = 0$ ) limitée à un domaine de dimensions finies. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  étant nul, nous calculerons le potentiel scalaire  $V$  en un point  $P$  très éloigné de la distribution. Si nous prenons dans la distribution une origine  $O$  arbitraire, pour tout point  $M$  de la distribution les rapports  $\frac{x}{R}$ ,  $\frac{y}{R}$ ,  $\frac{z}{R}$ , seront très petits.

La première formule (11) nous donne alors pour  $V$  le développement suivant qu'il est très important de connaître :

$$V = \frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{R^2} (\alpha P_x + \beta P_y + \gamma P_z) + \frac{1}{2R^3} \times [(3\alpha^2 - 1)P_{xx} + (3\beta^2 - 1)P_{yy} + (3\gamma^2 - 1)P_{zz} + 6\alpha\beta P_{xy} + 6\beta\gamma P_{yz} + 6\gamma\alpha P_{zx}] + \dots$$

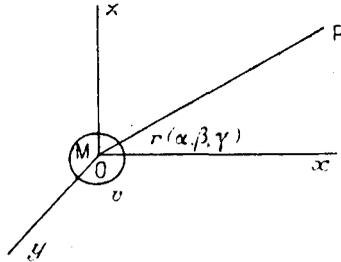


Fig. 2.

avec les définitions

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_v \rho \, d\tau, & P_x &= \int_v \rho x \, d\tau, & P_y &= \int_v \rho y \, d\tau, & P_z &= \int_v \rho z \, d\tau, \\ P_{xx} &= \int_v \rho x^2 \, d\tau, & \dots & & P_{zz} &= P_{zz} = \int_v \rho z^2 \, d\tau; \end{aligned}$$

$\varepsilon$  est donc la charge totale constante de la distribution. Le vecteur  $\vec{\mathcal{D}}$  de composantes  $\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{D}_y$ ,  $\mathcal{D}_z$  est son « moment dipolaire » ; le tenseur  $\vec{\mathcal{Q}}$  symétrique de composantes  $\mathcal{Q}_{xx}$ , ...,  $\mathcal{Q}_{zz}$ , est son « moment quadripolaire ». Les termes non écrits du développement feraient intervenir des moments d'ordre supérieur (moments  $2^n$  polaires) : ces termes interviennent assez rarement dans la pratique.

Pour une distribution de charge totale non nulle, le terme  $\frac{\varepsilon}{R}$  est le terme prépondérant à grande distance. Pour une distribution dont la charge totale est nulle et le moment dipolaire non nul, les termes en  $\vec{\mathcal{D}}$  sont prépondérants : c'est le cas pour un dipôle électrique formé par deux charges ponctuelles très voisines. Si la charge totale et le moment dipolaire sont nuls, ce sont les termes en  $\vec{\mathcal{Q}}$  qui sont prépondérants, etc.

**6. Distribution non statique. Rayonnement.** — Une distribution statique comme celle que nous venons d'envisager ne rayonne pas d'énergie vers l'infini. Il en est autrement d'une distribution variable qui rayonne de l'énergie vers l'extérieur, tandis que son mouvement s'amortit. Naturellement, comme la charge totale d'une distribution doit rester constante en vertu de la conservation de l'électricité, c'est dans les variations des moments dipolaires, quadrupolaires, etc., qu'il faut chercher l'origine du rayonnement. Dans le cas général où le moment dipolaire n'est pas nul, ce sont les variations de ce moment qui provoquent la partie de beaucoup la plus importante de l'émission, de sorte que pratiquement dans la théorie de l'émission on a guère à se préoccuper des rayonnements quadrupolaires ou d'ordre supérieur. Nous les laisserons ici de côté.

Une distribution quelconque a un moment dipolaire (moment électrique) qui peut toujours se développer en série ou en intégrale de Fourier par rapport au temps, de sorte que l'on a, soit

$$(12) \quad \mathcal{E}_x = \sum_1^{\infty} \mathcal{E}_x^{(n)} \cos 2\pi(n\nu t + \varphi_x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_x^{(n)} e^{2\pi i n \nu t}, \quad \text{avec} \quad p_x^{(n)*} = p_x^{(n)},$$

soit

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_x = \int_0^x \mathcal{E}_x(\nu) \cos 2\pi[\nu t + \varphi(\nu)] d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu. \\ \text{avec} \quad p_x^*(\nu) = p_x(\nu), \end{array} \right.$$

Mais il est inutile de traiter le cas général, car on démontre les deux théorèmes suivants :

1° *Le rayonnement émis par la distribution est la somme des rayonnements correspondant aux composantes  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_y$ ,  $\mathcal{E}_z$  considérées isolément;*

2° *Le rayonnement émis, par exemple, par  $\mathcal{E}_x$  est la somme des rayonnements émis par chaque composante du développement de Fourier de  $\mathcal{E}$  considérée isolément.*

Si donc on sait calculer le rayonnement correspondant à un moment électrique rectiligne et harmonique, on saura résoudre le problème général par simple addition.

Considérons donc le moment électrique

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0, \quad \mathcal{E}_z = A_0 \cos 2\pi(\nu t + \varphi).$$

Le calcul montre qu'en un point P situé à une grande distance R de

la distribution, le champ de rayonnement se compose d'un champ électrique  $\mathbf{h}$  tangent au méridien en P et d'un champ magnétique  $\mathbf{H}$  tangent au parallèle. La grandeur de ces champs est

$$h = H = \frac{4\pi^2 v^2}{c^2 R} \sin \theta A_0 \cos 2\pi \left[ v \left( t - \frac{R}{c} \right) + \varphi \right].$$

L'expression du vecteur de Poynting permet d'évaluer la valeur moyenne par unité de surface du flux de l'énergie électromagnétique en P. L'on trouve

$$\bar{S}_P = \frac{2\pi^3}{c^3} \frac{v^4}{R^2} \sin^2 \theta A_0^2.$$

En intégrant sur toute la sphère de rayon R, on obtient pour le montant total de l'énergie rayonnée par seconde vers l'infini

$$\Delta W = \frac{16\pi^4 v^4}{3c^3} A_0^2.$$

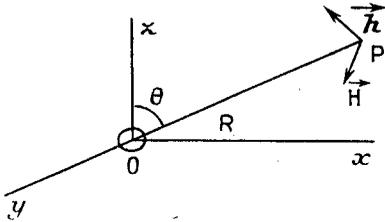


Fig. 3.

Cette expression est indépendante de R comme on devait s'y attendre.

Dans le cas où le moment électrique est représenté par une série de Fourier du type (12), on obtient pour l'énergie rayonnée sous forme de fréquence  $n\nu$

$$(14) \quad (\Delta W)_{n\nu} = \frac{64\pi^4 (n\nu)^4}{3c^3} |p_z^{(n)}|^2.$$

Dans le cas où le moment électrique est représenté par une intégrale de Fourier du type (13), le rayonnement dans l'intervalle de fréquence  $(\nu, \nu + d\nu)$  est donné par

$$(15) \quad (\Delta W)_{d\nu} = \frac{64\pi^4 \nu^4}{3c^3} |p_z(\nu)|^2 d\nu.$$

Les formules (14) et (15) nous seront utiles dans la suite.

**7. Phénomènes de polarisation. Théorie de la dispersion.** — La théorie de Lorentz, reprenant d'ailleurs des conceptions qui avaient été intro-

duites dans l'ancienne théorie de l'Électricité, a interprété la différence entre le champ et l'induction macroscopiques comme étant le résultat de l'état de polarisation créé par le champ dans ces milieux. Suivant cette vue, la polarisation d'un milieu matériel consiste en ce que chaque élément de volume  $d\tau$  du milieu devient un petit doublet électrique de moment  $\mathbf{P} d\tau$ , par suite du déplacement sous l'influence du champ des charges électriques qu'il contient.  $\mathbf{P}$  est, par définition, le vecteur « polarisation » ou « densité de moment électrique » au point où est situé  $d\tau$ . On démontre dans tous les traités de Physique qu'un milieu polarisé (supposé électriquement neutre dans sa masse) se comporte comme si chacun des éléments de sa surface extérieure portait une densité de charge superficielle égale à la composante normale  $P_n$  du vecteur  $\mathbf{P}$  et comme si l'intérieur de son volume était le siège d'une densité de charge électrique  $\delta$  et d'une densité de courant  $\mathbf{i}$  égales à

$$\delta = -\operatorname{div}\mathbf{P}, \quad \mathbf{i} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}.$$

Suivant l'ancienne terminologie, ces charges et ces courants représentent de l'électricité libre et non de l'électricité vraie : ceci veut dire qu'à grande échelle ces quantités sont inobservables et ne correspondent pas à une véritable charge globale. Or, l'intervention de ces charges et de ces courants de polarisation conduit à écrire les équations microscopiques de Lorentz dans un milieu diélectrique polarisable sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, & -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\mathbf{h}; \\ \operatorname{div}\mathbf{h} &= -4\pi \operatorname{div}\mathbf{P}, & \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Mais, si l'on repasse au point de vue macroscopique de Maxwell, on doit considérer les charges et courants de polarisation comme inobservables directement, ce qui conduit à considérer les termes supplémentaires des équations précédentes comme devant s'incorporer aux premiers membres pour définir une grandeur nouvelle, l'induction électrique, et à écrire les équations de Maxwell pour un milieu non magnétisable

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\mathbf{H}, & -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\mathbf{h}; \\ \operatorname{div}\mathbf{b} &= 0, & \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{P},$$

relation qui donne l'expression de l'induction électrique en fonction du

champ et de la polarisation. Des considérations analogues pourraient servir à interpréter la différence entre le champ et l'induction magnétiques dans le cas des milieux magnétiquement polarisables.

La polarisation étant produite dans un milieu diélectrique par l'action du champ, on doit avoir une relation vectorielle du type  $\mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{h})$  et, par suite,  $\mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{h})$ . L'hypothèse la plus simple valable dans beaucoup de milieux isotropes consiste à poser

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{h} \quad (\alpha \text{ constant}).$$

On a alors

$$\mathbf{b} = (1 + 4\pi\alpha)\mathbf{h} = k\mathbf{h},$$

avec

$$k = 1 + 4\pi\alpha.$$

La constante diélectrique  $k$  se trouve ainsi exprimée en fonction de la « susceptibilité »  $\alpha$ . Si le corps est non magnétique, la relation de Maxwell donne pour l'indice  $n$ ,

$$n^2 = k = 1 + 4\pi\alpha.$$

Considérons le cas simple d'un corps homogène contenant  $N$  molécules par unité de volume. On peut, en première approximation, admettre que, sous l'action d'un champ électrique extérieur  $\mathbf{h}$ , chaque molécule acquiert un moment électrique  $\vec{\mathcal{E}}$  proportionnel au champ

$$\vec{\mathcal{E}} = \alpha' \mathbf{h};$$

$\alpha'$  est la « polarisabilité » du genre de molécule considéré. On a évidemment

$$\mathbf{P} = N \vec{\mathcal{E}} = N \alpha' \mathbf{h},$$

d'où

$$\alpha = N \alpha', \quad n^2 = 1 + 4\pi N \alpha'.$$

La constante  $\alpha'$  dépend du corps envisagé, mais est indépendante de sa densité  $D$  qui est proportionnelle à  $N$ . On a donc

$$n^2 - 1 = CD \quad (\text{loi de Laplace})$$

et pour les corps d'indice voisin de l'unité [ $n^2 - 1 \simeq 2(n - 1)$ ], il vient

$$n - 1 = C'D \quad (\text{loi de Gladstone-Dale}).$$

Cependant, les formules précédentes ne sont pas rigoureuses parce que chaque molécule est soumise, non pas à l'action du champ extérieur  $\mathbf{h}$ , mais à celle de la somme du champ  $\mathbf{h}$  et des champs créés par

la polarisation des molécules voisines. Un calcul plus exact donne la relation

$$x = \frac{N\alpha'}{1 + \frac{4\pi}{3}N\alpha'}$$

d'où

$$n^2 = 1 + 4\pi x = 1 + \frac{4\pi N\alpha'}{1 + \frac{4\pi}{3}N\alpha'}$$

et l'on en tire une formule obtenue presque simultanément par le hollandais H.-A. Lorentz et par le danois Louis Lorenz

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N\alpha'}{3} = \text{const. } D \quad (\text{loi de Lorentz-Lorenz}).$$

Cette loi se montre dans beaucoup de cas plus exacte que celles de Laplace et de Gladstone-Dale : elle les admet, d'ailleurs, comme formes approximatives quand  $n$  est voisin de 1 ( $n^2 + 2 \simeq 3$ ).

Si la connaissance de la structure de l'atome ou de la molécule permet d'évaluer la polarisabilité  $\alpha'$ , les formules précédentes donneront la valeur de l'indice en fonction de la fréquence, c'est-à-dire la formule de dispersion pour la substance envisagée.

La théorie des Électrons était parvenue à trouver (ou plutôt à retrouver, car des théories plus anciennes l'avaient déjà obtenue) une formule qui en gros représente bien les phénomènes de dispersion. Pour cela, il suffit de supposer avec Lorentz que les atomes contiennent des électrons susceptibles d'osciller autour d'une position d'équilibre sous l'action d'une force de rappel proportionnelle à l'élongation. Si l'on suppose que la liaison de chaque électron à sa position d'équilibre est isotrope, chacun d'eux a une fréquence d'oscillation bien définie. Adoptons ce modèle simple et supposons que chaque molécule du milieu réfringent contienne  $n_1$  électrons de fréquence  $\nu_1$ , ...,  $n_i$  électrons de fréquence  $\nu_i$ , .... On trouve alors, si  $\nu$  est assez différent de tous les  $\nu_i$ ,

$$\alpha' = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2},$$

$e$  et  $m$  étant la charge et la masse de l'électron. Quand on peut se contenter de l'approximation de Laplace, on en déduit

$$(16) \quad n^2 = 1 + \frac{N e^2}{\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}.$$

Telle est la formule de dispersion prévue par la théorie des Électrons quand  $n$  n'est pas trop différent de 1 et que la fréquence  $\nu$  n'est pas trop voisine de l'un des valeurs critiques  $\nu_i$ .

Les fréquences  $\nu_i$  sont très souvent des fréquences de l'ultraviolet, c'est-à-dire beaucoup plus élevées que la fréquence  $\nu$  si celle-ci appartient au spectre visible. On a alors approximativement

$$\frac{1}{\nu_i^2 - \nu^2} = \frac{1}{\nu_i^2} \left( 1 - \frac{\nu^2}{\nu_i^2} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\nu_i^2} + \frac{\nu^2}{\nu_i^4} + \dots$$

et l'on obtient dans ces conditions la formule de Cauchy

$$n^2 = A. + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$$

généralement valable pour le spectre visible.

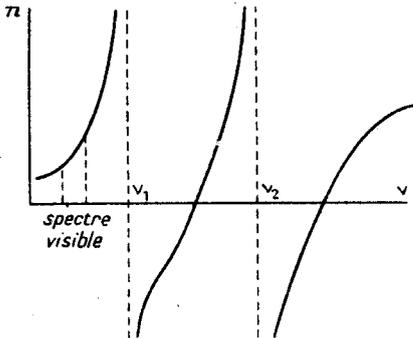


Fig. 4.

L'allure générale de la courbe de dispersion correspondant à la formule (16) est bien connue.

Naturellement,  $n$  ne devient pas réellement infini pour les fréquences critiques  $\nu_i$ . Au voisinage de ces fréquences, la formule ne s'applique plus, car le mouvement des électrons devient trop violent et il faut tenir compte du rayonnement et de l'absorption de la radiation incidente qui en résulte. En tenant compte de cette absorption, on obtient une loi de dispersion valable même dans le voisinage des fréquences critiques : cette loi a une forme acceptable, mais ne rend pas bien compte de la valeur numérique des coefficients d'absorption.

Une autre difficulté de la théorie électronique de la dispersion est relative aux nombres  $n_i$ . La comparaison de la formule (16) avec les courbes expérimentales conduit pour les  $n_i$  à des nombres généralement

fractionnaires, ce qui est contraire à leur signification physique. Nous verrons que la théorie quantique de la dispersion a pu lever cette difficulté.

**8. Succès et échecs de la théorie de Lorentz.** — En introduisant systématiquement dans la théorie électromagnétique la notion d'électron, Lorentz et ses continuateurs (Drude, Langevin, etc.) ont pu traiter d'une façon satisfaisante un grand nombre de problèmes d'interaction. Non seulement ils ont obtenu la théorie de la dispersion dont nous venons de parler, mais ils ont pu trouver ou retrouver les lois d'absorption dans les corps éteignants, les lois de la réflexion vitreuse dues à Fresnel, des théories exactes des effets électro- et magnéto-optiques, du diamagnétisme, du paramagnétisme, etc. Le plus grand succès de Lorentz fut la prévision de l'effet Zeeman normal : nous aurons l'occasion d'y revenir. Mais toutes ces fructueuses théories sont venues se heurter à des difficultés fondamentales quand on a voulu analyser de près les processus de l'échelle atomique. La théorie électromagnétique, complétée par la conception classique des électrons, est venue échouer devant les processus atomiques où les quanta interviennent. Nous aurons à revenir longuement sur ce sujet.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. POINCARÉ, *Électricité et Optique*, Gauthier-Villars, Paris, 1901.
- [2] H.-A. LORENTZ, *Theory of Electrons*, Teubner, Leipzig, 1916.
- [3] P. DRUDE, *Précis d'Optique*, Gauthier-Villars, Paris, 1911.
- [4] M. BORN, *Optik*, Springer, Berlin, 1933.
- [5] R. BECKER, *Théorie des Électrons*, Alcan, Paris, 1938.