OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Éléments de théorie des Quanta et de Mécanique ondulatoire (*Traité de Physique théorique et de Physique mathématique*, ouvrages réunis par M. Jean-Louis Destouches). In-8 (16-25), de VIII-302 pages; 1953.

Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. 2e édition; 1951.

Ondes et Mouvements (*Collection de Physique mathématique*) (*Épuisé.*)

La Mécanique ondulatoire (*Mémorial des Sciences physiques*) (*Épuisé.*)

Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion. In-8 de 210 pages; 1943.

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs. In-8 de VI-208 pages; 1949.

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*). In-8 de VI-224 pages; 1950.

La théorie des particules de spin 1/2 (Électrons de Dirac). In-8 (16-25), de 164 pages; 1951.

EN COLLABORATION AVEC MAURICE DE BROGLIE

Introduction à la Physique des rayons X et des rayons γ. In-8 de 201 pages, avec 27 figures et 11 planches. (*Sous presse.*)

LES GRANDS PROBLÈMES DES SCIENCES

OUVRAGES RÉUNIS PAR Mme DESTOUCHES-FÉVRIER

I.

LA PHYSIQUE QUANTIQUE RESTERA-T-ELLE INDÉTERMINISTE ?

PAR

Louis de BROGLIE

de l'Académie française

Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences

Professeur à la Sorbonne

Exposé du problème

suivi de la reproduction de certains documents

et d'une contribution de M. Jean-Pierre Vigier

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1953

INTRODUCTION

Depuis vingt-cinq ans, la Physique quantique, et en particulier sa forme la plus caractéristique, la Mécanique ondulatoire, a reçu de la part de la grande majorité des physiciens une interprétation purement probabiliste qui excluait l'application au monde de l'échelle atomique des images claires et précises dans le cadre de l'espace et du temps qui, jusque-là, étaient traditionnelles dans la Science moderne, ainsi que le déterminisme qui en découlait.

Cette interprétation purement probabiliste à laquelle les noms de MM. Born, Bohr et Heisenberg restent attachés est fort curieuse et introduit des conceptions tout à fait nouvelles sur la causalité, les incertitudes, l'indiscernabilité des particules, la nature des lois de probabilités, etc. L'auteur de cet Ouvrage, qui depuis 1928 avait adhéré sans restrictions à l'interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire, l'avait maintes fois exposée, le plus clairement qu'il lui était possible, dans ses cours et dans ses livres à caractère moins technique. Cette interprétation ne correspondait cependant pas à la première orientation de sa pensée, car il avait proposé, dans les années 1924-1927 qui suivirent immédiatement la découverte de la Mécanique ondulatoire, une autre interprétation plus conforme aux idées traditionnelles de la Physique théorique, mais découragé par les difficultés que le développement de cette interprétation comportait et par le peu d'audience qu'elle obtenait de la part des autres théoriciens de la Physique, il y avait renoncé.

Les travaux récents de divers théoriciens qui tendent à reprendre en les approfondissant de différentes manières des idées analogues à celles émises par l'auteur il y a vingt-cinq ans, ont provoqué dans différents milieux, et notamment dans les milieux scientifiques français où le culte de la clarté cartésienne reste toujours en honneur, un mouvement d'intérêt très marqué. Reconsidérant la question en collaboration avec l'un des jeunes théoriciens qui travaillent avec lui à l'Institut Henri Poincaré, M. Jean-Pierre Vigier, dont les travaux ont apporté sur ce problème des vues nouvelles et originales, l'auteur a repris depuis un an un nouvel examen de ses conceptions de 1927. Bien que de graves objections ou difficultés restent encore à lever, bien qu'il soit encore impossible de prédire le succès final de ces tentatives, ce nouvel examen a donné quelques résultats encourageants et mérite certainement d'être poursuivi.

C'est pourquoi, d'accord avec M. Vigier, l'auteur s'est décidé à publier dans le présent opuscule une série de documents relatifs à cette question et susceptibles de donner au lecteur une vue d'ensemble de l'état actuel du problème. On trouvera au début la reproduction d'une conférence faite par l'auteur le 31 octobre 1952 au Centre de synthèse de M. Berr qui fut répétée le 3 décembre suivant au Collège philosophique que dirige M. Wahl : cette conférence, complétée par quelques notes, sert ici d'exposé général préliminaire. Ensuite sont reproduits quelques Notes ou Mémoires anciens publiés par l'auteur entre 1924 et 1927 : en particulier, on y trouvera le texte de l'article du *Journal de Physique* de mai 1927, où se trouvaient exposées dans leur ensemble les idées de l'auteur sur la double solution. Ce texte est suivi de commentaires ajoutés par l'auteur pour le présent livre, commentaires où se trouvent développés ou rectifiés certains points du travail de 1927 d'après les conclusions du nouvel examen récent de la question dont nous avons parlé plus haut.

La reproduction de sept Notes publiées entre septembre 1951 et décembre 1952, les unes par l'auteur, les autres par M. Vigier, servira d'illustration à ce qui a été dit précédemment dans l'exposé général et permettra au lecteur de suivre quelques-unes des étapes du travail actuellement en cours.

Enfin, une contribution de M. Jean-Pierre Vigier contenant un résumé très clair de ses idées au sujet de la réconciliation possible entre la théorie des Quanta et la théorie de la Relativité généralisée donnera un aperçu des efforts que ce jeune savant poursuit en ce moment avec beaucoup d'ardeur et d'originalité de pensée.

La réinterprétation de la Mécanique ondulatoire dans le sens indiqué dans le présent Ouvrage, même si elle devait finalement aboutir à un succès, ce qui est encore loin d'être certain à l'heure actuelle, exigerait des efforts longs et prolongés dont l'exposé qui suit ne peut donner qu'une faible idée. Elle se heurterait d'ailleurs pendant longtemps à l'hostilité des nombreux et éminents théoriciens qui, convaincus de la victoire définitive de la belle conception de la « complémentarité » due à M. Bohr, persistent à attribuer à l'interprétation probabiliste actuelle de la Mécanique ondulatoire le caractère d'une théorie *complète* de la réalité microphysique. Mais cette réinterprétation pourrait peut-être ouvrir à la Physique théorique des voies nouvelles et fructueuses, notamment en ce qui concerne la théorie des phénomènes nucléaires et celle de la structure des particules élémentaires ou complexes : elle mérite donc, croyons-nous, malgré la possibilité d'un échec final, d'être tentée et poursuivie. Dans la science comme dans la vie quotidienne, la Fortune sourit souvent aux audacieux.

10 janvier 1953.

LOUIS DE BROGLIE.

LA PHYSIQUE QUANTIQUE RESTERA-T-ELLE INDÉTERMINISTE ?

EXPOSÉ GÉNÉRAL

Dans un article paru dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* sous le titre *Souvenirs personnels sur les débuts de la Mécanique ondulatoire*, reproduit ensuite dans mon livre *Physique et Microphysique*, j'ai rappelé par quels états d'esprit j'avais passé entre 1923 et 1928 en ce qui concerne l'interprétation de la Mécanique ondulatoire et j'ai expliqué qu'après avoir tenté de développer une interprétation concrète et déterministe conforme dans ses grandes lignes aux conceptions traditionnelles de la Physique, j'avais fini, en présence des difficultés que je rencontrais et des objections qui m'étaient faites, par me rallier au point de vue probabiliste et indéterministe de MM. Bohr et Heisenberg. Pendant près de vingt-cinq ans, je suis resté fidèle à cette manière de voir d'ailleurs adoptée par la presque unanimité des théoriciens de la Physique et je l'ai exposée dans mon enseignement, mes conférences et mes livres. Dans l'été de 1951, j'ai eu connaissance, par une aimable communication personnelle de l'auteur, d'un Mémoire d'un jeune physicien américain M. David Bohm, Mémoire qui a paru ensuite dans le numéro du 15 janvier 1952 de la *Physical Review*. Dans ce Mémoire M. Bohm reprend intégralement, tout au moins sous l'une des formes que je leur avais données, mes conceptions de 1927, en les complétant d'une façon intéressante sur certains points. Ensuite M. J.-P. Vigier a signalé à mon attention la ressemblance qui existe entre une démonstration donnée par Einstein sur le mouvement des particules en Relativité généralisée et une démonstration que j'avais donnée tout à fait indépendamment en 1927 dans la tentative que j'avais appelée « théorie de la double solution ». Toutes ces circonstances ont ramené dans ces derniers temps mon attention sur ces questions et, sans que je veuille affirmer qu'il soit possible de rétablir une conception déterministe de la Mécanique ondulatoire dans le sens de mes idées primitives, je crois cependant que l'on doit réexaminer la question en se gardant de toute idée philosophique préconçue et en se préoccupant seulement de savoir si une interprétation cohérente de tous les faits bien établis pourrait être ainsi obtenue. Pour exposer le problème tel qu'il se pose aujourd'hui, il me paraît utile de suivre le développement historique des conceptions nouvelles de la Physique quantique.

Le grand drame de la Microphysique contemporaine a été, on le sait, la découverte de la dualité des ondes et des corpuscules. C'est d'abord dans l'étude des propriétés de la lumière que cette dualité s'est manifestée. Pendant longtemps, il avait été naturel de penser que la lumière est formée de corpuscules en mouvement rapide. L'existence des rayons lumineux, rectilignes dans les milieux homogènes, la réflexion sur les miroirs analogue au rebondissement d'une balle sur un mur, la réfraction au passage d'un milieu dans un autre peuvent aisément s'expliquer ainsi d'une façon très intuitive. Aussi cette théorie corpusculaire de la lumière, à laquelle Newton se ralliait, a-t-elle été adoptée par la plupart des physiciens jusqu'au début du XIX^e^ siècle. Il faut cependant noter que dès la fin du XVII^e^ siècle, le grand savant hollandais Christian Huyghens avait proposé une théorie ondulatoire de la lumière et donné de remarquables explications, encore classiques aujourd'hui, des phénomènes de réflexion, de réfraction et de double réfraction à l'aide de la conception des ondes et du principe qui porte son nom, sans parvenir cependant à interpréter l'existence des rayons lumineux. Il faut noter aussi que Newton, après avoir découvert le phénomène d'interférences qu'on nomme depuis lors « les anneaux de Newton » avait tenté une fort intéressante synthèse du point de vue des ondes et de celui des corpuscules dans sa « théorie des accès » restée malheureusement embryonnaire, et rapidement oubliée. Au début du XIX^e^ siècle, les travaux du médecin anglais Thomas Young ramenèrent l'attention sur les phénomènes d'interférences et, peu après, Malus découvrait l'existence de la polarisation de la lumière. Ayant repris l'étude expérimentale des interférences ainsi que celle de la diffraction connue depuis le XVII^e^ siècle, mais peu étudiée jusque-là, Augustin Fresnel montra que ces phénomènes s'interprètent entièrement par la théorie ondulatoire de la lumière alors que la théorie corpusculaire paraît totalement incapable d'en rendre compte. Complétant sur ce point l'œuvre de Huyghens, il montre aussi que la théorie des ondes explique la propagation rectiligne des rayons lumineux dans les milieux homogènes. Puis, lorsque après une lutte très âpre il a convaincu ses adversaires, Fresnel, en introduisant l'hypothèse que dans l'onde lumineuse la vibration est transversale à la direction de propagation, donne aussi une théorie complète, toujours classique aujourd'hui, des phénomènes de polarisation et de double réfraction. Fresnel meurt phtisique à 39 ans en 1827, paraissant avoir établi sur des bases inébranlables la théorie ondulatoire de la lumière. Quarante ans plus tard, Maxwell donnera des ondes de Fresnel une interprétation électromagnétique et, montrant ainsi que toute onde lumineuse est une perturbation électromagnétique d'un type particulier, il fera rentrer toute l'Optique dans l'Électromagnétisme. Mais la géniale synthèse de Maxwell, si elle a changé l'idée que l'on se faisait de la nature des ondes lumineuses, a laissé intacte la croyance, commune dès lors à tous les physiciens, que la lumière est formée d'ondes où l'énergie est répartie d'une façon continue.

C'est alors, dans les dernières années du XIX^e siècle, que le drame commence. La découverte de l'effet photoélectrique par Hertz en 1887 apporte le premier exemple d'un phénomène d'action de la lumière sur la matière que la conception ondulatoire de la lumière n'est pas capable d'interpréter. En 1905, Albert Einstein, qui vient de découvrir la théorie de la Relativité, montre qu'on peut interpréter l'effet photoélectrique en revenant au moins partiellement à une théorie corpusculaire de la lumière, en admettant que dans toute onde lumineuse de fréquence ν l'énergie est concentrée en « grains » de valeur $h\nu$, où h est la constante des quanta introduite par Planck dans la théorie du rayonnement noir : ces grains de lumière que Einstein appelait « quanta de lumière », nous les appelons aujourd'hui « photons ». D'ailleurs Einstein voit bien que sa théorie n'est pas une théorie strictement corpusculaire, car elle fait intervenir la notion de fréquence qui est d'origine ondulatoire. Une théorie strictement granulaire ne peut du reste interpréter les phénomènes d'interférences et de diffraction, et Einstein pressent qu'il faut conserver les ondes lumineuses et établir entre les ondes et les grains une sorte de correspondance statistique, idée très profonde nous le verrons.

La théorie d'Einstein est vivement critiquée, on en montre facilement les difficultés. Mais sa valeur vient de ce qu'elle se rattache très intimement à un grand courant d'idées qui est alors en train de bouleverser toute la Physique de l'échelle atomique : la théorie des Quanta. Je rappelle rapidement que l'étude expérimentale du rayonnement du corps noir avait montré que la composition spectrale de ce rayonnement n'est pas du tout celle que pouvaient faire prévoir les théories classiques.

S'étant bien assuré que la discordance était totale et irrémédiable, Planck avait introduit en 1900 l'hypothèse des quanta, tout à fait étrangère à toutes les conceptions classiques et même inconciliable avec elles, qui lui avait permis de trouver une loi de répartition spectrale pour le rayonnement du corps noir, bien en accord avec les faits expérimentaux. Cette hypothèse des quanta impliquait une sorte d'atomicité de l'action au sens de la Mécanique, conception nouvelle et peu conforme à nos intuitions physiques. Le quantum d'action est mesuré par la fameuse « constante de Planck » h dont Planck avait pu déduire la valeur numérique à partir des résultats expérimentaux sur le corps noir. Rapidement l'hypothèse des quanta, si étrange qu'elle pût paraître au premier abord, s'était montrée d'une très grande portée dans le domaine des phénomènes de l'échelle atomique. Einstein l'avait utilisée dans sa théorie des quanta de lumière : il en avait aussi montré l'importance dans le domaine des chaleurs spécifiques. Bientôt Bohr et ses continuateurs immédiats, dont le principal fut Sommerfeld, allaient montrer qu'en introduisant les quanta dans la théorie de l'atome conçu suivant la suggestion de Rutherford comme un système solaire en miniature, on pouvait obtenir une interprétation remarquable des propriétés des atomes et en particulier des lois qui régissent leurs émissions spectrales. Il résultait de ces théories sur lesquelles je ne puis m'étendre ici que, à très petite échelle, les électrons et autres corpuscules matériels ne suivaient pas, comme on le croyait jusque-là, les lois de la Mécanique classique, mais qu'ils ne pouvaient avoir que certains états de mouvement (les états stationnaires de Bohr) satisfaisant à certaines « conditions de quanta » où figuraient, à côté naturellement de la constante h, des nombres entiers, les nombres quantiques. Cette apparition de nombres entiers dans les problèmes de Micromécanique pouvait paraître fort surprenante, mais, comme les nombres entiers apparaissent fréquemment en théorie des ondes dans le calcul des phénomènes d'interférences ou de résonance, on pouvait apercevoir là une indication en faveur de l'idée que, pour les électrons et autres corpuscules matériels, existe comme pour les photons et les ondes lumineuses une dualité onde-corpuscule. C'est une des idées qui m'ont guidé dans mes premières recherches sur la Mécanique ondulatoire.

Vers 1920, à l'époque où, après une longue période de mobilisation, je me remettais à la recherche scientifique, la situation était donc la suivante. D'une part l'existence des photons, qui devait bientôt recevoir de nouvelles confirmations par la découverte des effets Compton et Raman apparaissait comme certaine, mais la nécessité d'invoquer la théorie des ondes, pour introduire la fréquence ν qui figure dans la définition du photon et aussi pour rendre compte de l'ensemble des phénomènes d'interférences et de diffraction dont les lois sont établies avec une extrême précision, démontrait la nécessité d'une vue synthétique s'exprimant par la dualité onde-corpuscule pour la lumière. D'autre part, l'existence à très petite échelle des mouvements quantifiés des corpuscules suggérait, je l'ai dit, l'idée d'introduire aussi la dualité onde-corpuscule pour les électrons et autres éléments de la matière. Il me parut donc évident qu'il fallait réaliser une synthèse générale, applicable à la matière comme à la lumière et reliant par des formules, où figurerait nécessairement la constante h de Planck, les aspects onde et corpuscule indissolublement liés l'un à l'autre.

C'est cette synthèse dont j'ai jeté les premières bases dans les Notes parues dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* au début de l'automne de 1923 et, d'une façon plus complète, dans ma thèse de doctorat soutenue en novembre 1924. M'inspirant de considérations relativistes et aussi d'idées apparentées à celles qu'Hamilton avait développées un siècle auparavant, j'arrivais à associer au mouvement de tout corpuscule la propagation d'une onde dont la fréquence et la longueur d'onde étaient reliées à l'énergie et à la quantité de mouvement du corpuscule par des formules où figurait la constante h et je montrais que l'on pouvait ainsi comprendre la raison d'être des mouvements quantifiés des électrons dans les atomes. Sans entrer ici dans aucun détail technique, j'insisterai sur le point suivant. J'associais au mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule en l'absence de champ la propagation dans la direction du mouvement d'une onde plane monochromatique ayant une amplitude constante et une phase linéaire en x, y, z, t. Comme j'établissais une relation entre l'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule d'une part, la fréquence et la longueur d'onde de l'onde d'autre part, je reliais en somme l'état de mouvement du corpuscule à la *phase* de l'onde. Mais comment faire correspondre avec l'onde le fait que le corpuscule est localisé, qu'il a une position dans l'espace ? Question difficile à résoudre, car l'onde plane monochromatique, ayant même amplitude en tout point de l'espace, ne permet aucunement de définir à chaque instant un point privilégié qui serait la position du corpuscule à cet instant. Cette difficulté, jointe à quelques autres considérations relativistes sur lesquelles je passe, m'avait fait penser que, si la phase de l'onde plane monochromatique a un sens physique certain, il n'en est pas de même pour l'amplitude constante de cette onde ; la répartition uniforme de cette amplitude dans l'espace signifierait simplement qu'*a priori* le corpuscule peut se trouver en n'importe quel point de l'espace avec une égale probabilité. L'amplitude n'aurait donc qu'un sens de probabilité et la véritable position du corpuscule (car je ne doutais pas alors que cette position dût exister à chaque instant) ne serait pas représentée par elle. Aussi avais-je donné à l'onde que j'introduisais le nom « d'onde de phase » pour bien marquer qu'à mes yeux, c'était essentiellement la phase de cette onde qui possédait un sens physique.

Les idées que j'avais soutenues dans ma thèse et qui avaient d'abord été accueillies avec un étonnement sans doute mêlé d'un peu de scepticisme ne tardèrent pas cependant à recevoir des confirmations éclatantes. Ce furent d'abord du point de vue théorique les admirables travaux de M. Schrödinger qui, en 1926, a complété et étendu de diverses façons mes conceptions, montrant en particulier comment on devait écrire dans le cas général les équations de propagation de l'onde associée et comment on devait calculer rigoureusement à l'aide de ces équations les états stationnaires des électrons dans les systèmes de l'échelle atomique, états qui correspondent à des formes stationnaires de l'onde associée. Il montra aussi que la Mécanique quantique développée en 1925 par M. Heisenberg n'est qu'une transposition mathématique de la Mécanique ondulatoire.

Puis vinrent les non moins admirables expériences de Davisson et Germer qui, aux États-Unis, dans le courant du printemps de 1927, découvrirent le phénomène de la diffraction des électrons par les cristaux, tout à fait analogue au phénomène de la diffraction des rayons X par les cristaux. Ces belles expériences, répétées bientôt par de nombreux physiciens et aujourd'hui entrées dans la pratique courante des laboratoires, apportèrent une preuve expérimentale décisive des conceptions de la Mécanique ondulatoire, ainsi qu'une vérification quantitative de ses formules. Le mouvement de l'électron est donc bien associé à la propagation d'une onde et nous savons aujourd'hui qu'il en est de même pour les autres constituants de la matière (proton, neutron, noyaux d'atomes, etc.) qui, eux aussi, peuvent donner lieu à des phénomènes de diffraction quantitativement conformes aux prévisions de la Mécanique ondulatoire.

Dans cette période qui va de la soutenance de ma thèse en novembre 1924 à la réunion du 5[e] Conseil de Physique Solvay en octobre 1927, j'ai naturellement suivi avec un intérêt passionné toutes ces étapes successives du développement de la Mécanique ondulatoire. Mais j'ai été continuellement tracassé par la question de l'interprétation physique du formalisme de la nouvelle théorie, et du sens réel du dualisme onde-corpuscule. Trois interprétations possibles de ce dualisme ont été, à ma connaissance, envisagées. Une interprétation qui paraît avoir toujours la préférence de M. Schrödinger consiste à nier la réalité du dualisme en contestant l'existence des corpuscules. Seules les ondes auraient une signification physique analogue à celles des ondes des théories classiques. Dans certains cas, la propagation des ondes donnerait lieu à des apparences corpusculaires, mais ce ne serait là que des apparences. Au début, pour préciser cette idée, M. Schrödinger avait voulu assimiler le corpuscule à un petit train d'ondes, mais cette interprétation ne peut se soutenir, ne serait-ce que parce qu'un train d'ondes a toujours une tendance à s'étaler rapidement et sans cesse davantage dans l'espace et ne saurait par suite représenter un corpuscule doué d'une stabilité prolongée. Bien que M. Schrödinger paraisse encore s'attacher à des interprétations de ce type, je ne crois pas pour ma part qu'elles soient acceptables et je pense qu'il faut admettre comme un fait physique la dualité onde-corpuscule. Or, précisément, les deux autres interprétations auxquelles j'ai fait allusion admettent cette dualité comme réelle, mais elles l'envisagent à des points de vue très différents.

La première, celle à laquelle je suis resté attaché jusqu'en 1928, consiste à donner à la dualité onde-corpuscule une signification concrète, conforme aux idées traditionnelles de la Physique et pour cela à l'interpréter en considérant le corpuscule comme une sorte de singularité au sein d'un phénomène ondulatoire étendu dont il serait le centre. La difficulté est alors de comprendre pourquoi la Mécanique ondulatoire fait usage avec succès d'ondes *continues* sans singularités du type des ondes continues de la théorie classique de la lumière. Je dirai tout à l'heure sous quelle forme j'avais essayé de développer cette manière de voir.

La seconde interprétation du dualisme onde-corpuscule consiste à ne considérer que les idées de corpuscule et d'onde continue et à les regarder comme des « faces complémentaires de la réalité » au sens que Bohr donne à cette expression. Je résumerai également tout à l'heure cette doctrine subtile, tout à fait différente des idées de la Physique classique, qui constitue depuis vingt-cinq ans l'interprétation « orthodoxe » de la Mécanique ondulatoire.

Pour l'instant je reviens à mon exposé historique. En 1924, au lendemain de la soutenance de ma thèse, j'étais tout imprégné des conceptions de la physique classique et c'est dans le cadre de ces conceptions, c'est-à-dire dans le cadre de la représentation cartésienne des phénomènes

« par figures et par mouvements », que je cherchais à interpréter les idées nouvelles que j'avais introduites. Il me paraissait certain que le corpuscule devait avoir à chaque instant une position dans l'espace et une vitesse, par suite qu'il décrivait au cours du temps une trajectoire. Mais j'étais aussi convaincu qu'il était lié à un phénomène périodique et ondulatoire permettant de définir une fréquence et une longueur d'onde associées. Je m'imaginais donc tout naturellement le corpuscule comme une sorte de singularité au sein d'un phénomène ondulatoire étendu, le tout ne formant qu'une seule réalité physique. Le mouvement de la singularité étant lié à l'évolution du phénomène ondulatoire dont elle était le centre se trouverait dépendre de toutes les circonstances que ce phénomène ondulatoire rencontrerait dans sa propagation dans l'espace. Pour cette raison le mouvement du corpuscule ne suivrait point les lois de la Mécanique classique, qui est une Mécanique purement ponctuelle où le corpuscule subit seulement l'action des forces qui s'exercent sur lui le long de sa trajectoire sans subir aucune répercussion de l'existence des obstacles qui peuvent se trouver au loin en dehors de sa trajectoire : dans ma conception, au contraire, le mouvement de la singularité subirait l'influence de tous les obstacles qui influeraient sur la propagation du phénomène ondulatoire dont elle est solidaire et ainsi s'expliquerait l'existence des interférences et de la diffraction.

Mais la difficulté était alors de comprendre pourquoi la Mécanique ondulatoire s'était développée en envisageant uniquement des solutions continues, sans singularités, des équations de propagation, solutions qu'il est d'usage de désigner par la lettre grecque Ψ. Déjà je l'ai dit, lorsque j'avais associé au mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule la propagation d'une onde, d'une onde Ψ plane et monochromatique, je m'étais heurté à cette difficulté : la phase de l'onde qui me permettait de définir la fréquence et la longueur d'onde associées au corpuscule me paraissait bien avoir un sens physique direct, tandis que l'amplitude constante de l'onde ne pouvait être, à mes yeux, qu'une représentation statistique des positions possibles du corpuscule. Il y avait là un mélange de l'individuel et de la statistique qui m'intriguait et qu'il me paraissait urgent d'éclaircir.

Si l'on se reporte aux Notes que j'ai publiées de 1924 à 1927 sur ce sujet [1], on voit ma pensée s'orienter peu à peu vers ce que j'ai appelé alors « la théorie de la double solution ». J'en ai fait un exposé d'ensemble

---

[1] On trouvera plus loin, le texte de ces Notes formant les documents A.1, A.2 et A.3.

dans un article paru en mai 1927 dans le *Journal de Physique* (t. 8, 1927, p. 225), qui reste le seul document complet sur cette question.

Dans ce Mémoire (¹) je postulais hardiment que toute solution continue des équations de la Mécanique ondulatoire était en quelque sorte doublée par une solution à singularité u comportant une singularité en général mobile (le corpuscule !) et ayant la même phase que la solution Ψ. Les deux solutions u et Ψ auraient donc toutes deux la forme d'une onde, la phase étant la même fonction de x, y, z, t, mais l'amplitude étant tout à fait différente puisque celle de u comporterait une singularité et que celle de Ψ serait continue. Partant de l'équation de propagation supposée la même pour u et pour Ψ, je démontrais alors un théorème fondamental : la singularité mobile de u devait au cours du temps décrire une trajectoire telle qu'en chaque point la vitesse soit proportionnelle au gradient de la phase. Ainsi se traduirait, pouvait-on dire, la réaction de la propagation du phénomène ondulatoire sur la singularité qui en formait le centre. Je montrais aussi que cette réaction pouvait s'exprimer en considérant le corpuscule-singularité comme soumis à un « potentiel quantique » qui était précisément l'expression mathématique de la réaction de l'onde sur lui. Je rejoignais ainsi une idée des protagonistes de l'ancienne théorie corpusculaire de la lumière qui disaient que, dans la diffraction de la lumière par le bord d'un écran, le corpuscule de lumière subit une action de ce bord d'écran et est par suite dévié de sa route rectiligne.

L'onde u avec sa singularité mobile constituant ainsi le corpuscule et le phénomène ondulatoire qui l'entoure, quel était le sens de l'onde Ψ ? Pour moi, elle n'avait aucune signification physique réelle, la réalité physique étant décrite par l'onde u. Mais comme l'onde u était supposée avoir même phase que l'onde Ψ et que le corpuscule-singularité se déplaçait toujours en suivant le gradient de la phase, les trajectoires possibles du corpuscule coïncidaient avec les courbes orthogonales aux surfaces d'égale phase de Ψ et je montrais alors aisément que cela conduisait à considérer la probabilité de trouver le corpuscule en un point comme égale au carré de l'amplitude, à l'intensité de l'onde Ψ. Or c'était bien là la première caractéristique essentielle que l'on avait été amené à attribuer à l'onde Ψ : le carré de son amplitude $|\Psi|^2$ en un point devait donner la probabilité de présence du corpuscule associé en ce point. Ce principe, admis dès le début de la Mécanique ondulatoire,

---

(¹) Il est reproduit plus loin comme document A.4 et suivi d'un commentaire de l'auteur.

et nécessaire pour donner la théorie de la diffraction des électrons, n'était d'ailleurs qu'une transposition directe de ce qui était admis depuis longtemps en Optique. Un des principes essentiels de la théorie ondulatoire de la lumière était, en effet, que la densité de l'énergie radiante est donnée par le carré de l'amplitude de l'onde lumineuse et, si l'on introduit alors l'idée de photon, ceci ne peut signifier qu'une chose, comme Einstein l'avait très bien vu dès ses premiers travaux de 1905 : la probabilité pour qu'un photon soit présent en un point de l'espace est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde lumineuse qui lui est associée.

Ainsi l'onde Ψ couramment utilisée par la Mécanique ondulatoire m'apparaissait comme une onde purement fictive, simple représentation de probabilités et par suite brusquement modifiée par tout renseignement qui modifie nos connaissances sur l'état du corpuscule. C'était bien là le caractère de l'onde Ψ tel qu'il se dégageait de plus en plus des progrès de la Mécanique ondulatoire. Mais pour moi, il existait, cachée pour ainsi dire derrière l'onde continue Ψ, l'onde u à singularité qui décrivait réellement le corpuscule centre d'un phénomène ondulatoire étendu. Si l'on pouvait avoir l'impression que l'onde Ψ suffisait pour décrire entièrement le comportement du corpuscule tel qu'on pouvait l'observer expérimentalement, c'était en raison de cette coïncidence des phases qui était la clef de ma théorie.

Telle était la subtile et curieuse interprétation de la Mécanique ondulatoire que j'essayais de développer en 1927. Je ne tardais pas à me rendre compte que sa justification se heurtait à de très grandes difficultés mathématiques. Il fallait en effet démontrer que, dans un problème de Mécanique ondulatoire bien posé avec ses conditions aux limites et où l'on connaît la solution du type Ψ, il existe également des solutions du type u à singularité mobile. Il fallait aussi refaire la théorie des phénomènes d'interférences, par exemple les trous de Young, en utilisant *uniquement* l'onde u à singularité, seule réalité physique, sans faire appel aux ondes continues Ψ considérées comme fictives. Il fallait interpréter à l'aide des ondes u la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules développée dans le cadre de l'espace de configuration par M. Schrödinger, etc. Mais je ne me sentais pas capable de résoudre ces difficiles problèmes mathématiques comportant toujours l'étude ardue de solutions à singularité.

A l'heure actuelle, le nouvel examen que j'ai fait depuis quelques mois de mes idées de 1927 m'a amené à proposer une modification de la définition de l'onde u. En 1927, je la considérais comme une solution avec singularité des équations *linéaires* admises par la Mécanique ondulatoire pour l'onde Ψ. Diverses considérations, et en particulier le rapprochement avec la théorie de la Relativité généralisée dont je parlerai plus loin, m'ont fait penser que la véritable équation de propagation de l'onde u pourrait être *non linéaire* comme celles que l'on rencontre dans la théorie de la gravitation d'Einstein, équation non linéaire qui admettrait comme forme approximative l'équation de la Mécanique ondulatoire quand les valeurs de u seraient assez faibles. Si ce point de vue était exact, on pourrait même admettre que l'onde u ne comporte pas une singularité mobile au sens strict du mot singularité, mais simplement une très petite région singulière mobile (de dimensions sans doute de l'ordre de 10^{-13} cm) à l'intérieur de laquelle les valeurs de u seraient assez grandes pour que l'approximation linéaire ne soit plus valable, bien qu'elle soit valable dans tout l'espace en dehors de cette très petite région. Malheureusement ce changement de point de vue ne facilite pas la résolution des problèmes mathématiques qui se posent car, si l'étude des solutions à singularités des équations linéaires est souvent difficile, celle des solutions des équations non linéaires est plus difficile encore.

Revenons à 1927. Lorentz m'avait demandé au printemps de préparer un rapport sur la Mécanique ondulatoire pour le 5e Conseil de Physique Solvay qui devait se tenir à Bruxelles au mois d'octobre suivant. Conscient des difficultés que j'aurais eu à surmonter pour faire un exposé, à peu près satisfaisant du point de vue de la rigueur mathématique, de mes idées sur la double solution, je me résolus à adopter un point de vue simple dont j'avais indiqué la possibilité à la fin de mon article au *Journal de Physique*. Comme avec mes idées d'alors le mouvement du corpuscule est défini par le gradient de la phase qui est commune aux solutions u et Ψ, tout se passe en apparence comme si le corpuscule était « guidé » par l'onde continue Ψ. On pouvait donc, me semblait-il, se placer au point de vue suivant : postuler l'existence du corpuscule comme une réalité indépendante et admettre que le corpuscule est guidé dans son mouvement par l'onde Ψ suivant la formule « vitesse proportionnelle au gradient de la phase ». Cette manière de présenter les choses, je l'avais désignée par le nom expressif de « théorie de l'onde-pilote » et ce fut celle que je développai dans mon rapport et qui a figuré dans les comptes rendus du 5e Conseil de Physique Solvay (1).

(1) Ces Comptes rendus ont été publiés sous le titre *Électrons et Photons* (Gauthier-Villars, 1928).

Je ne me suis pas aperçu à ce moment qu'en adoptant cette sorte de ligne de repli, j'affaiblissais beaucoup ma position. En effet, si l'hypothèse de la double solution est difficile à justifier mathématiquement, elle est cependant susceptible, en cas de succès, d'offrir une vue très profonde de la constitution de la matière et de la dualité des ondes et des corpuscules et même peut-être, nous le verrons, de permettre un rapprochement des conceptions quantiques et des conceptions relativistes. La théorie simplifiée de l'onde-pilote, bien qu'elle soit en quelque sorte une conséquence de la théorie de la double solution, n'a aucun de ces avantages. Comme le caractère statistique et purement fictif de l'onde Ψ est quelque chose de bien établi et admis, semble-t-il, par tout le monde, la théorie de l'onde-pilote aboutit à ce résultat inacceptable de faire déterminer le mouvement du corpuscule par une grandeur, l'onde continue Ψ, qui n'a aucune signification physique réelle, qui dépend de l'état des connaissances de celui qui l'emploie et qui doit varier brusquement lorsqu'une information vient modifier ces connaissances. Si les conceptions que j'ai énoncées en 1927 devaient un jour ressusciter de leurs cendres, ce ne pourrait être que sous la forme subtile de la double solution et non sous la forme tronquée et inacceptable de l'onde-pilote.

Au Conseil Solvay d'octobre 1927, mon exposé sur l'onde-pilote trouva peu d'audience. M. Pauli fit à mes conceptions de sérieuses objections auxquelles j'entrevoyais une réponse possible, mais sans pouvoir la préciser entièrement (1). M. Schrödinger, ne croyant pas à l'existence des corpuscules, ne pouvait me suivre. MM. Bohr, Heisenberg, Born, Pauli, Dirac, etc. développaient l'interprétation purement probabiliste que j'ai déjà désignée plus haut sous le nom d'interprétation actuellement orthodoxe. Lorentz, président du Conseil, ne pouvait admettre une semblable interprétation et réaffirmait avec force sa conviction que la Physique théorique devait rester déterministe et continuer à employer des images claires dans le cadre classique de l'espace et du temps (2). Einstein critiquait l'interprétation probabiliste et lui opposait des objections un peu troublantes : il m'encourageait dans la voie où je m'étais engagé, mais sans cependant approuver nettement ma tentative.

Je revins à Paris très troublé par ces discussions et, en méditant sur

---

(1) Voir *Électrons et Photons*, p. 280 à 283.

(2) On trouvera une partie de la déclaration de Lorentz sur ce sujet reproduite au début de l'exposé de M. Vigier.

ce sujet, j'arrivai à la conviction que, pour la raison que j'ai exposée plus haut et quelques autres encore, la théorie de l'onde-pilote était indéfendable. N'osant pas en revenir à la double solution à cause de ses difficultés mathématiques, je me découragеai et me ralliai à l'interprétation purement probabiliste de Bohr et Heisenberg (1). Depuis vingt-cinq ans, je l'ai adoptée comme base de mon enseignement et exposée dans mes livres et mes conférences. J'ai cherché à en préciser clairement les divers aspects et je puis affirmer par expérience que ce n'est pas toujours là une tâche facile. Je vais à nouveau essayer d'en donner un bref résumé.

Dans la conception de Bohr et Heisenberg, il n'y a que le corpuscule et l'onde continue Ψ, mais ni l'un, ni l'autre ne peuvent se représenter à la manière classique. On ne peut en général attribuer au corpuscule ni position, ni vitesse, ni trajectoire bien déterminées : il peut seulement se révéler, au moment où l'on fait une observation ou une mesure, comme ayant telle position ou telle vitesse. Il possède pour ainsi dire à chaque instant toute une série de positions ou d'états de mouvement possibles, ces diverses potentialités pouvant s'actualiser au moment de la mesure avec certaines probabilités. C'est ici qu'intervient l'onde Ψ associée : elle est une sorte de représentation de l'ensemble des potentialités du corpuscule avec leurs probabilités respectives. C'est ainsi que l'extension de l'onde Ψ dans l'espace représente l'indétermination de la position du corpuscule qui peut se révéler présent en un point quelconque de la région occupée par l'onde avec une probabilité proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde en ce point. De même pour les états de mouvement : l'onde Ψ a une décomposition « spectrale » en série ou intégrale de Fourier et cette décomposition représente tous les résultats possibles d'une mesure de la quantité de mouvement, la probabilité de chaque résultat possible d'une telle mesure étant donnée par le carré du coefficient correspondant de la décomposition de Fourier. Et l'interprétation se développe sous une forme très générale applicable à toute grandeur mesurable ; elle prend une forme mathématiquement très élégante, faisant intervenir toutes les ressources de l'analyse linéaire : la théorie des fonctions et valeurs propres, les développements en série de fonctions propres, les matrices, l'espace de Hilbert, etc. Et l'on montre que ce formalisme a pour conséquence inéluctable les « incertitudes d'Heisenberg », suivant lesquelles nous ne pouvons jamais connaître exactement et simultanément la position et

(1) La première idée de cette interprétation paraît due à M. Born.

l'état de mouvement d'un corpuscule, toute observation ou expérience qui augmente notre connaissance de la position ayant comme contre-partie une diminution de notre connaissance de la quantité de mouvement et inversement.

L'interprétation de la Mécanique ondulatoire de Bohr et Heisenberg a de nombreuses conséquences qui ouvrent des perspectives philosophiques nouvelles. Le corpuscule n'est plus un objet bien défini dans le cadre de l'espace et du temps; il n'est plus qu'un ensemble de potentialités affectées de probabilités, il n'est plus qu'une entité qui se manifeste à nous d'une façon fugitive tantôt sous un aspect, tantôt sous un autre.

M. Bohr, qui est l'un des plus grands savants de notre époque, mais qui est un peu le Rembrandt de la Physique contemporaine, car il manifeste parfois certain goût pour le « clair obscur », a dit des corpuscules qu'ils sont « unsharply defined individuals within finite space-time limits ». Quant à l'onde, elle perd aussi, plus totalement encore que le corpuscule, sa signification physique ancienne : elle n'est plus qu'une représentation de probabilités (un élément de prévision, dit M. Destouches) dépendant des connaissances acquises par celui qui l'emploie. Elle est personnelle et subjective comme le sont les répartitions de probabilité et, comme elles, elle se modifie brusquement quand l'utilisateur acquiert de nouvelles informations : c'est là ce que M. Heisenberg a appelé la « réduction du paquet d'ondes par la mesure », réduction qui suffirait à elle seule à démontrer le caractère non physique de l'onde Ψ.

Du même coup, disparaît le déterminisme des phénomènes admis par l'ancienne Physique et qui était lié à la possibilité de se faire une image précise de la réalité physique dans le cadre de l'espace et du temps. On ne peut plus en général prévoir avec certitude les phénomènes qui vont avoir lieu : seules les probabilités des divers phénomènes possibles sont accessibles à nos calculs. Il est vrai qu'entre chaque mesure les probabilités ont une évolution rigoureuse réglée par l'équation d'ondes, mais chaque mesure ou observation nouvelle, par les informations qu'elle nous apporte, rompt le cours de ce déterminisme des probabilités.

L'interprétation de Bohr et Heisenberg non seulement ramène toute la Physique à la probabilité, mais elle donne à cette notion un sens qui est tout nouveau dans la Science. Tandis que tous les grands maîtres de l'époque classique, depuis Laplace jusqu'à Henri Poincaré, ont toujours proclamé que les phénomènes naturels étaient déterminés et que la probabilité, quand elle s'introduit dans les théories scientifiques, résultait de notre ignorance ou de notre incapacité à suivre un déterminisme trop compliqué, dans l'interprétation actuellement admise de la Physique quantique, nous avons affaire à de la « probabilité pure » qui ne résulterait pas d'un déterminisme caché. Dans des théories classiques comme la théorie cinétique des gaz, les lois de probabilités étaient considérées comme résultant de notre ignorance des mouvements entièrement déterminés, mais désordonnés et complexes, des innombrables molécules du gaz : la connaissance des positions et des vitesses des molécules nous aurait en principe permis de calculer rigoureusement toute l'évolution du gaz, mais en pratique les probabilités s'introduisent par suite de notre ignorance de la valeur de ces paramètres cachés. Or l'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire rejette une telle interprétation des lois de probabilités qu'elle fournit : ces lois ne résulteraient pas de notre ignorance des paramètres cachés qui seraient les coordonnées et la vitesse du corpuscule, car ces paramètres cachés n'existeraient pas, le corpuscule ne pouvant se manifester avec une position *ou* avec une vitesse bien définie que fugitivement au moment d'une observation ou d'une mesure. La probabilité en Physique quantique ne résulterait plus d'une ignorance : elle serait de la contingence pure.

Par un raisonnement célèbre, M. von Neumann a démontré, il y a une vingtaine d'années, que la forme des lois de probabilité de la Mécanique ondulatoire vérifiées par l'expérience est incompatible avec l'existence de paramètres cachés. Ainsi les ponts seraient définitivement coupés : il serait impossible de revenir en arrière et, en rendant au corpuscule sa définition classique, d'interpréter à l'aide de paramètres cachés le formalisme de la Mécanique quantique. La démonstration de von Neumann, abstraite et élégante, est très impressionnante. Je l'ai crue longtemps irréfutable. Je dirai tout à l'heure pourquoi j'ai aujourd'hui des doutes sur sa validité.

Depuis vingt-cinq ans, la presque totalité des physiciens s'est ralliée à l'interprétation purement probabiliste de Bohr et Heisenberg. Il y a eu cependant quelques exceptions très notables, des savants aussi éminents que MM. Einstein et Schrödinger ayant toujours refusé de l'accepter et lui ayant opposé des objections troublantes. Dès le Conseil Solvay de 1927, Einstein avait développé l'objection suivante [1] : considérons un écran plan percé d'un trou sur lequel tombe normalement un corpuscule avec son onde Ψ associée. L'onde Ψ est diffractée lors de son passage à travers le trou et prend derrière l'écran la forme d'une

---

[1] Voir *Électrons et Photons*, p. 253 à 256.

onde sphérique divergente. Si l'on dispose derrière l'écran un film ayant la forme d'un hémisphère, on pourra enregistrer par une impression photographique la localisation du corpuscule en un point P de cet hémisphère. La Mécanique ondulatoire nous apprend (tout le monde est d'accord sur ce point) que la probabilité d'une localisation en P est donnée par le carré de l'amplitude de l'onde Ψ en P. S'il existe à chaque instant une localisation du corpuscule permettant de définir une trajectoire (à l'aide de variables cachées), on conçoit très bien que notre ignorance de la trajectoire du corpuscule nous permette seulement de définir une probabilité pour que la trajectoire passe par tel ou tel point de l'écran; le fait que le corpuscule produise une action photographique en P nous apprend que la trajectoire de ce corpuscule passait par P et, dès que nous avons ce renseignement, les probabilités pour que la trajectoire passe par les autres points du film s'évanouissent. Cette explication est très claire, mais ce n'est pas du tout celle que donne l'interprétation purement probabiliste. Suivant celle-ci, avant l'impression photographique, le corpuscule est potentiellement présent en tous points de la région postérieure à l'écran, avec une probabilité égale au carré de l'amplitude de l'onde Ψ. Dès que l'impression photographique se produit en P, le corpuscule se localise, se condense pourrait-on dire, au point P et *instantanément* la probabilité de sa présence en tout autre point du film tombe à zéro. Or, disait Einstein, une telle interprétation est incompatible avec toutes nos idées sur l'espace et sur le temps (même présentées sous la forme de l'espace-temps relativiste) et avec l'idée d'une propagation de proche en proche à vitesse finie des actions physiques dans l'espace. Et il ne suffirait pas de dire que nos concepts d'espace et de temps tirés de l'expérience macroscopique peuvent fort bien être en défaut à l'échelle atomique : en effet, le film a des dimensions macroscopiques (il peut avoir une surface de 1 m^2) et il s'agirait bien ici d'une insuffisance des notions d'espace et de temps, même à l'échelle macroscopique, ce qui paraît vraiment difficile à accepter. A cette objection d'Einstein à laquelle, à ma connaissance, on n'a pas fait de réponse satisfaisante, s'en sont ajoutées d'autres, faites ensuite par Schrödinger (1) et encore par Einstein, et portant sur les phénomènes d'interactions et les états « correlés » qui en résultent. Je ne puis exposer ici ces arguments, je dirai seulement que, comme celui d'Einstein en 1927, ils conduisent à des conclusions paradoxales, en particulier à mettre en doute, même à l'échelle macroscopique, nos

(1) *Voir* l'exposé de M. Vigier page 103.

notions anciennes d'espace et de temps. Évidemment, M. Bohr a répondu aux critiques qu'on a adressées à sa manière de voir par des considérations qui sont très fines et très intéressantes à étudier; mais ses réponses sont un peu entourées de ce clair-obscur dont je parlais tout à l'heure et pour cette raison elles peuvent ne pas paraître à tous entièrement convaincantes.

La situation en était là, à peu près stabilisée depuis un quart de siècle, quand a paru, il y a quelques mois, l'article de M. Bohm dont j'ai parlé au début. Cet article ne contient rien d'essentiellement nouveau, puisqu'il ne fait que reprendre la théorie de l'onde-pilote que j'avais exposée au Conseil Solvay, théorie qui, ne faisant intervenir que l'onde de probabilité Ψ et non l'onde à singularité u introduite par l'hypothèse de la double solution, me paraît toujours se heurter à d'insurmontables difficultés. Néanmoins, en dehors du mérite d'avoir ramené l'attention sur ces questions, M. Bohm a eu aussi celui de faire un certain nombre de remarques intéressantes et, en particulier, de faire une analyse des processus de mesure envisagés du point de vue de l'onde-pilote qui paraît permettre d'écarter les objections opposées à mes idées par M. Pauli en 1927. Dès que j'ai eu connaissance du Mémoire de M. Bohm et des idées de M. Vigier dont je vais parler dans un instant, j'ai résumé mes observations à leur sujet dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* parues en septembre 1951 et en janvier 1952 (1). L'un des points qui ont attiré mon attention est le suivant : la démonstration de M. von Neumann prétend interdire toute interprétation des distributions de probabilités de la Mécanique ondulatoire par une théorie causale à paramètres cachés; or les théories de la double solution et de l'onde-pilote, si elles ne peuvent être considérées comme prouvées, *existent* cependant et l'on peut se demander comment leur existence est conciliable avec le théorème de von Neumann. Cette remarque m'a conduit à examiner de nouveau la démonstration de ce théorème et je me suis alors aperçu que cette démonstration reposait essentiellement sur le postulat suivant : toutes les répartitions de probabilités admises par la Mécanique ondulatoire ont une existence physique *avant même que l'on ait fait l'expérience qui fait entrer en jeu l'une de ces répartitions*. Ainsi les répartitions de probabilités, déduites de la connaissance de l'onde Ψ et relatives à la position et à l'état de mouvement, existeraient avant les expériences de mesure qui peuvent permettre de connaître exactement la position ou l'état de mouvement. Or on peut

(1) On trouvera plus loin le texte de ces Notes constituant les documents B.1 et B.2.

très bien admettre au contraire (et ceci est même tout à fait en accord avec le rôle essentiel que tous les physiciens quantistes attribuent aujourd'hui aux actes de mesure) que ces distributions de probabilités, ou du moins certaines d'entre elles, peuvent être créées par l'exécution de la mesure et n'exister que quand la mesure a été effectuée, mais qu'on n'a pas encore eu connaissance de son résultat. Dans les théories de la double solution et de l'onde-pilote, qui sur ce point ne sont pas distinctes, on admet que la distribution de probabilité relative à la position, donnée par le carré de l'amplitude de l'onde continue Ψ, existe avant toute mesure, mais d'autres répartitions de probabilités (par exemple celle relative aux quantités de mouvement) seraient créées par la mesure; le postulat qui est à la base du raisonnement de von Neumann ne leur est donc pas applicable et ceci fait tomber la conclusion de ce raisonnement. L'interprétation purement probabiliste admet l'équivalence absolue de toutes les répartitions de probabilités et c'est pourquoi M. von Neumann a admis cette équivalence comme postulat, mais ce faisant, il a simplement montré que, si l'on admet les conceptions de base de l'interprétation purement probabiliste, on ne peut plus échapper à cette interprétation. Il y a donc là une sorte de cercle vicieux et le théorème de M. von Neumann ne me paraît plus avoir la portée que je lui attribuais moi-même dans ces dernières années.

A la suite de la tentative de M. Bohm, M. Jean-Pierre Vigier, qui travaille à l'Institut Henri Poincaré, a eu l'idée très intéressante d'établir un rapprochement entre la théorie de la double solution et un théorème démontré par Einstein [1] (également en 1927, mais tout à fait indépendamment de mes recherches, car je faisais alors des travaux sur les quanta sans m'occuper de Relativité généralisée, tandis qu'Einstein concentrait son attention sur la Relativité généralisée sans s'occuper des quanta). Pour comprendre l'intérêt de ce rapprochement, il faut savoir que les physiciens théoriciens sont actuellement répartis entre deux tendances qui paraissent inconciliables. D'une part Einstein et ses élèves forment un petit groupe qui poursuit le développement des idées relativistes en cherchant à développer les conceptions de la Relativité généralisée. D'autre part, la grande majorité des théoriciens attirés par l'intérêt des problèmes atomiques font des efforts pour faire progresser la Physique quantique sans se préoccuper aucunement des idées de la Relativité

---

[1] Il convient de noter qu'un résultat tout à fait analogue avait été obtenu dès 1926 par M. Georges Darmois [*voir* G. Darmois, *Les équations de la Gravitation einsteinienne* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, Gauthier-Villars, 1927)].

généralisée. Assurément la Mécanique ondulatoire a tenu compte des conceptions de la Relativité restreinte et a cherché à les englober : la théorie de l'électron à spin de Dirac et plus récemment les belles théories de Tomonaga, Schwinger, Feynman et Dyson ont utilisé les idées de covariance relativiste. Mais c'est toujours de Relativité restreinte qu'il s'agit. Or on sait que la relativité restreinte ne se suffit pas à elle-même et qu'il est nécessaire de la généraliser comme l'avait fait Einstein en 1916. Il est dès lors paradoxal que les deux grandes théories de la Physique contemporaine, la théorie de la Relativité générale et celle des Quanta, soient aujourd'hui sans aucun contact et s'ignorent mutuellement. Il faudra bien qu'un jour on parvienne à en faire une synthèse.

Après avoir développé les grandes lignes de la Relativité généralisée, Einstein s'était préoccupé de la façon dont on pourrait représenter la structure atomique de la matière par des singularités du champ de gravitation. D'autre part, il s'était aussi préoccupé du point suivant : en Relativité généralisée, on admet que le mouvement d'un corps est représenté dans l'espace-temps courbe par une géodésique de cet espace-temps et ce postulat avait permis à Einstein de retrouver le mouvement des planètes autour du Soleil en interprétant, en outre, le déplacement séculaire du périhélie de Mercure. Mais si l'on veut définir les particules élémentaires de la matière par l'existence de singularités dans le champ de gravitation, il devrait être possible de démontrer, *à partir des seules équations du champ de gravitation*, que le mouvement des singularités a lieu suivant les géodésiques de l'espace-temps, sans avoir à introduire ce résultat comme postulat indépendant. Cette question a longtemps préoccupé Einstein qui a réussi en 1927, dans un travail en collaboration avec Grommer (1), à démontrer le théorème qu'il avait en vue. Cette démonstration a été ensuite reprise et étendue de diverses façons par Einstein lui-même et ses collaborateurs Infeld (2) et Hoffmann. Il est certain que la démonstration du théorème d'Einstein présente une certaine analogie avec celle que j'ai donnée en 1927 pour prouver qu'un corpuscule doit toujours avoir sa vitesse dirigée suivant le gradient de la phase de l'onde u dont il constitue une singularité. M. Vigier poursuit avec beaucoup d'ardeur des tentatives pour préciser cette analogie en cherchant à introduire les fonctions d'onde u dans la définition de la métrique de l'espace-temps. Bien que ces tentatives ne soient pas encore parvenues à leur plein achèvement, il est certain que la voie dans

(1) *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, t. I, 1929.
(2) *Rev. Mod. Phys.*, t. 21, 1949, p. 408.

laquelle il s'est engagé est très intéressante, car elle pourrait conduire à une unification des idées de la Relativité généralisée et de la Mécanique ondulatoire. En se représentant les corpuscules matériels (et également les photons) comme des singularités dans la métrique de l'espace-temps entourées d'un champ ondulatoire dont elles feraient partie et dont la définition introduirait la constante de Planck, on devrait parvenir à unir les conceptions d'Einstein sur les particules et celles de ma théorie de la double solution. L'avenir dira si cette grandiose synthèse de la Relativité et des Quanta est vraiment possible.

Une chose me paraît certaine, c'est que dans une telle synthèse on devra retrouver et justifier tous les résultats, tous les modes de calcul employés par la Mécanique ondulatoire dans son interprétation actuelle, y compris l'impossibilité de prévoir en général le résultat exact d'une mesure microphysique, les incertitudes d'Heisenberg, la quantification des systèmes atomiques, etc. Mais alors, dira-t-on, pourquoi modifier l'interprétation actuelle si elle suffit à rendre compte de tous les phénomènes observables, pourquoi introduire toutes ces complications inutiles de double solution, de solutions à singularité, etc., en s'exposant ainsi à se fourvoyer dans des impasses ? A cela, on peut d'abord répondre que le retour à des conceptions claires, cartésiennes, respectant la validité du cadre de l'espace et du temps, satisferait certainement beaucoup d'esprits et permettrait non seulement de lever les objections troublantes d'Einstein et de Schrödinger, mais aussi d'éviter certaines conséquences étranges de l'interprétation actuelle. En effet, cette interprétation, en cherchant à décrire les phénomènes quantiques uniquement à l'aide de la fonction continue Ψ dont le caractère statistique est certain, aboutit logiquement à une sorte de « subjectivisme » apparenté à l'idéalisme au sens des philosophes et elle tend à nier l'existence d'une réalité physique indépendante de l'observateur. Or le physicien reste instinctivement, comme Meyerson l'a naguère fortement souligné, un « réaliste » et il a pour cela quelques bonnes raisons : les interprétations subjectivistes lui causeront toujours une impression de malaise et je crois que finalement il serait heureux de s'en affranchir.

Mais on peut aussi penser avec M. Bohm que, si l'interprétation actuelle suffit à la prévision des phénomènes à l'échelle atomique (10^{-8} à 10^{-11} cm), il pourrait ne pas en être de même à l'échelle nucléaire (10^{-13} cm), car alors les zones singulières des divers corpuscules pourraient empiéter et ne plus pouvoir être considérées comme isolées. Il faut bien avouer qu'à l'heure actuelle, la théorie des phénomènes nucléaires et en particulier des forces qui maintiennent la stabilité du noyau est dans un état très peu satisfaisant. De plus, une théorie des corpuscules de matière nous fait en ce moment d'autant plus cruellement défaut qu'on découvre presque chaque mois de nouveaux types de mésons. Il semble que la Physique ait un besoin urgent de pouvoir définir une structure des particules et notamment de pouvoir introduire un « rayon » de l'électron comme dans l'ancienne théorie de Lorentz. Or elle se trouve fort empêchée de le faire par l'emploi exclusif, pour la description des particules, de l'onde statistique Ψ qui lui interdit d'employer aucune image structurale de ces particules. Il est permis de croire qu'un changement de point de vue comportant un retour aux images spatiotemporelles améliorerait la situation; évidemment ce n'est là qu'une espérance, un chèque en blanc dirait M. Pauli, mais cette possibilité ne doit pas, pensons-nous, être *a priori* complètement exclue et il faut éviter le danger qu'une foi trop grande dans l'interprétation purement probabiliste de la Physique quantique ne finisse par la rendre stérile.

La question qui se pose est finalement de savoir, Einstein l'a souvent souligné, si l'interprétation actuelle qui utilise uniquement l'onde Ψ à caractère statistique est une description « complète » de la réalité, auquel cas il faut admettre l'indéterminisme et l'impossibilité de représenter les réalités de l'échelle atomique d'une façon précise dans le cadre de l'espace et du temps, ou si, au contraire, cette interprétation est « incomplète » et cache derrière elle, comme les anciennes théories statistiques de la Physique classique, une réalité parfaitement déterminée et descriptible dans le cadre de l'espace et du temps par des variables qui nous seraient cachées, c'est-à-dire qui échapperaient à nos déterminations expérimentales. Si cette seconde hypothèse devait se montrer fructueuse, c'est, me semble-t-il, sous la forme d'une théorie à double solution, plus ou moins amendée et sans doute mise en relation avec la Relativité généralisée, qu'il faudrait l'expliciter. Mais je n'ignore pas (et une révision récente de toute la question me l'a encore prouvé) à quelles difficultés très grandes, peut-être même insurmontables, une telle tentative va se heurter et quelles difficiles justifications mathématiques seraient nécessaires pour l'établir solidement. Si l'entreprise se montrait inexécutable, il faudrait alors en revenir à l'interprétation purement probabiliste, mais à l'heure actuelle un nouvel examen de la question ne me paraît pas superflu.

Sans doute, après m'avoir vu abandonner mes premières tentatives et exposer dans tous mes écrits depuis vingt-cinq ans l'interprétation de Bohr et Heisenberg, certains m'accuseront peut-être d'inconstance en me voyant éprouver quelques nouveaux doutes à son sujet et me demander si ma première orientation après tout n'était pas la bonne. A cela, si je voulais badiner, je pourrai répondre avec Voltaire : « L'homme stupide est celui qui ne change pas ». Mais une réponse plus sérieuse est possible. L'histoire des sciences montre que les progrès de la Science ont été constamment entravés par l'influence tyrannique de certaines conceptions que l'on avait fini par considérer comme des dogmes. Pour cette raison, il convient de soumettre périodiquement à un examen très approfondi les principes que l'on a fini par admettre sans plus les discuter. L'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire a certainement depuis un quart de siècle rendu des services aux physiciens, parce qu'elle les a empêchés de s'enliser dans l'étude de problèmes très ardus et difficilement solubles comme ceux que pose la conception des doubles solutions et leur a ainsi permis de marcher résolument dans la voie des applications qui ont été nombreuses et fructueuses. Mais aujourd'hui le pouvoir explicatif de la Mécanique ondulatoire, telle qu'elle est enseignée, paraît en grande partie épuisé. Tout le monde le reconnaît et les partisans de l'interprétation probabiliste eux-mêmes cherchent, sans beaucoup de succès, semble-t-il, à introduire des conceptions nouvelles encore plus abstraites et plus éloignées des images classiques telles que matrices S, longueur minimum, champs non localisés, etc. Sans nier l'intérêt de ces tentatives, on peut se demander si ce n'est pas plutôt vers un retour à la clarté des représentations spatiotemporelles qu'il faudrait s'orienter. En tout cas, il est certainement utile de reprendre le problème très difficile de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire afin de voir si celle qui est actuellement orthodoxe est vraiment la seule que l'on puisse adopter.

A.

DOCUMENTS ANCIENS (1924-1927)

Ces documents comprennent d'abord trois Notes publiées par l'auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1924 à 1927, où l'on voit s'esquisser les idées de la théorie de la double solution appliquées d'abord au cas de la lumière, puis généralisées dans la dernière Note pour tous les corpuscules.

Puis vient la reproduction du Mémoire publié par l'auteur dans le *Journal de Physique* au printemps de 1927, où la théorie de la double solution est entièrement développée. L'auteur a ajouté pour le présent Ouvrage quelques commentaires complétant le texte primitif.

Enfin, on trouvera le texte d'une Note de novembre 1927 montrant comment on peut définir un tenseur énergie-impulsion de nature *statistique* pour l'ensemble des mouvements corpusculaires que la conception de l'onde-pilote associe à une même onde Ψ.

A.1. — SUR LA DYNAMIQUE DU QUANTUM DE LUMIÈRE ET LES INTERFÉRENCES

Note (1) de M. Louis de Broglie

Présentée par M. Maurice de Broglie

Dans mes travaux antérieurs sur la théorie des Quanta, j'ai cherché à montrer comment les énigmes soulevées par cette théorie pouvaient obtenir une interprétation raisonnable par une conception nouvelle des rapports de la Dynamique et de la théorie des Ondes; mais dans ces

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 17 novembre 1924, p. 1039-1041.

travaux, je n'étais pas parvenu à une explication vraiment satisfaisante des phénomènes de l'Optique ondulatoire qui, en principe, se ramènent tous aux interférences. Je m'étais borné à invoquer une certaine liaison entre l'état d'interférence des ondes et la probabilité d'absorption des atomes lumineux par la matière. Cette manière de voir me paraît maintenant un peu factice et je tends à en adopter une autre plus en harmonie avec les grandes lignes mêmes de ma théorie.

L'essentiel de mes idées consiste en effet à associer au déplacement de tout point matériel la propagation d'une onde dont le vecteur caractéristique en chaque point et pour chaque direction de l'espace-temps est proportionnel à la valeur correspondante du vecteur énergie-quantité de mouvement du mobile. En variant légèrement la fréquence de cette onde, on définit un groupe d'ondes et la vitesse du mobile en chaque point de sa trajectoire est égale à la vitesse de groupe de ces ondes. Cette propriété, conséquence directe des équations d'Hamilton, permet de considérer le point matériel comme une singularité du groupe d'ondes dont le déplacement est régi par le principe d'Hamilton-Fermat.

Ces conceptions sont valables quand les ondes se propagent librement, mais qu'arrive-t-il si un obstacle vient troubler leur progression comme dans les phénomènes d'interférences ou de diffraction, ou bien, si en passant sur un corps matériel (électron ou atome) elles provoquent l'émission d'ondes secondaires venant se superposer aux ondes primaires ? Dans tous les cas, les théories ondulatoires nous apprennent à déterminer la vitesse et la trajectoire des points de concordance de phase; il est tout naturel d'admettre que le mobile coïncide toujours avec l'un de ces points comme dans le cas de la propagation libre. Comme je l'avais fait pressentir dans des Notes antérieures, on obtient ainsi une dynamique nouvelle qui est à l'ancienne ce que l'Optique ondulatoire est à l'Optique géométrique.

Les rayons prévus par les théories ondulatoires seraient donc dans tous les cas les trajectoires possibles du quantum. Dans les phénomènes d'interférences les rayons se concentrent dans les régions dites « franges brillantes » et se raréfient dans les régions dites « franges obscures ». Dans ma première explication des interférences, les franges obscures étaient obscures parce que l'action des grains de lumière sur la matière y était nulle; dans mon explication actuelle, ces franges sont noires parce que le nombre des quanta les traversant est faible ou nul.

Citons un exemple précis. Dans l'expérience des trous de Young, les surfaces équiphases sont des ellipsoïdes homofocaux. Les rayons, qui leur sont normaux, sont concentrés dans les hyperboloïdes homofocaux sur lesquels les perturbations issues des deux trous ont même phase. Soient r_1 et r_2 les distances d'un point de l'espace aux deux trous et ψ la fonction $\frac{r_1 + r_2}{2}$ constante sur chaque surface d'égale phase. On montre *aisément que la vitesse de phase des ondes le long du rayon est égale à* la valeur qu'elle aurait dans le cas de la propagation libre divisée par la dérivée de ψ prise le long du rayon; quant à la vitesse du quantum elle serait égale à la vitesse du mouvement libre multipliée par la même dérivée. On peut dire que les interférences introduisent des termes supplémentaires dans l'énergie et la quantité de mouvement, à moins qu'on ne préfère parler d'une modification de la masse propre de l'atome de lumière.

L'application de cette méthode doit permettre l'étude de la diffusion et de la dispersion, bien qu'il y ait lieu alors de faire intervenir les réactions des ondes lumineuses sur la matière, réaction dont l'électromagnétisme dans son état actuel ne semble pas donner une représentation exacte. Enfin, en tenant compte des interférences entre les ondes de même fréquence, on pourra consolider les bases de ma démonstration de la loi de Planck et par suite interpréter les fluctuations d'énergie dans le rayonnement noir. Mais toute la théorie ne deviendra vraiment claire que si l'on parvient à définir la structure de l'onde lumineuse et la nature de la singularité constituée par le quantum dont le mouvement devrait pouvoir être prévu en se plaçant *uniquement* au point de vue ondulatoire.

A.2. — SUR LA POSSIBILITÉ DE RELIER LES PHÉNOMÈNES D'INTERFÉRENCES ET DE DIFFRACTION A LA THÉORIE DES QUANTA DE LUMIÈRE

Note [1] de M. Louis de Broglie

Transmise par M. Maurice de Broglie.

La propagation des ondes lumineuses est régie par l'équation

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 28 août 1926, p. 447.

Pour chaque problème d'interférences ou de diffraction, l'Optique classique cherche une solution de la forme

$$u = a(x, y, z)\, e^{i\omega[t - \varphi(x,y,z)]} \tag{2}$$

satisfaisant aux conditions aux limites imposées par la présence des écrans ou autres obstacles rencontrés par l'onde. La nouvelle optique des quanta de lumière envisage une solution à amplitude variable de la forme

$$u = f(x, y, z, t)\, e^{i\omega[t - \varphi(x,y,z)]} \tag{3}$$

où φ est la même fonction que dans (2). La fonction f comporte des singularités mobiles le long des courbes normales aux surfaces $\varphi = \text{const.}$; ces singularités constituent les quanta d'énergie radiante. La vitesse du quantum passant au point M à l'instant t est nécessairement

$$\mathrm{U} = \left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial n}} \right)_{\mathrm{M}}, \tag{4}$$

la variable n étant comptée le long de la trajectoire et les dérivées étant prises en M à l'instant t.

En substituant les solutions (2) et (3) dans l'équation (1) et en annulant la partie imaginaire des relations obtenues, on trouve les équations suivantes qui lient l'amplitude classique a et l'amplitude réelle f à la fonction φ :

$$\frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial a^2}{\partial n} = - \frac{\triangle \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial f}{\partial n} + \frac{1}{2} f \triangle \varphi = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{6}$$

Pour des raisons que je ne puis exposer ici, il est probable que si l'on s'approche à temps constant d'une particule de lumière en suivant sa trajectoire, la fonction f varie comme l'inverse (d'une puissance) de la distance à la particule : par suite, en M le quotient de f par $\frac{\partial f}{\partial n}$ est nul. Il en résulte par (4) et (6) que la vitesse d'un quantum en un point M est

$$\mathrm{U} = c^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\mathrm{M}}. \tag{7}$$

La phase φ joue donc le rôle d'un potentiel des vitesses.

Considérons un tube infiniment délié de trajectoires dont σ désigne la section. Le flux des corpuscules lumineux devant être conservatif, on doit avoir le long du tube

$$\rho U \sigma = \text{const.}, \tag{8}$$

ρ désignant la densité en volume des corpuscules. En prenant la dérivée logarithmique, on trouve

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} + \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial n} = 0. \tag{9}$$

D'après un théorème connu [1], le dernier terme est égal au double de la courbure moyenne de la surface $\varphi = \text{const.}$ au point considéré, quantité qui a pour expression

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\triangle\varphi - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}}. \tag{10}$$

Grâce à (10) et à (7), l'équation (9) prend la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} = -\frac{\triangle\varphi}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}}. \tag{11}$$

En comparant avec (5) on trouve

$$\rho = \text{const.} \times a^2. \tag{12}$$

La densité des quanta de lumière est proportionnelle à l'intensité de la théorie classique. Les phénomènes d'interférences et de diffraction sont donc bien explicables à l'aide de la conception corpusculaire de la lumière.

A.3. — LA STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIÈRE ET DU RAYONNEMENT ET LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Note [2] de M. Louis de Broglie

Transmise par M. Maurice de Broglie

La nouvelle Mécanique assimile le point matériel dans un champ *donné* à un phénomène ondulatoire dont l'équation de propagation

---

(1) H. Poincaré, *Capillarité*, p. 51.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 184, 31 janvier 1927, p. 273-274.

contient la fonction potentielle $F(x, y, z, t)$ (¹). Il semble physiquement probable que cette équation admet dans chaque cas une solution de la forme

$$f(x, y, z, t) \cos\varphi(x, y, z, t),$$

la fonction f comportant une singularité ponctuelle, en général mobile, qui traduit analytiquement l'existence du point matériel. Au degré d'approximation des anciennes mécaniques, on démontre que la vitesse de cette singularité est à chaque instant normale à la surface $\varphi = \text{const.}$ et il doit vraisemblablement en être de même quand les mécaniques anciennes ne sont plus applicables. Admettons cette propositon et considérons un nuage de points auxquels correspond la même fonction φ; leurs vitesses seront à chaque instant normales aux surfaces de la famille $\varphi = \text{const.}$ et l'on prouve que le mouvement *global* du nuage peut être représenté par une solution *à amplitude continue* $a(x, y, z, t)\cos\varphi(x, y, z, t)$ de l'équation de propagation de telle sorte que la densité du nuage soit donnée par la formule

$$\rho(x, y, z, t) = \text{const.}\, a^2(x, y, z, t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{2\pi}{h}F(x, y, z, t)\right],$$

le crochet pouvant d'ailleurs être considéré comme constant à l'approximation newtonienne.

Cette représentation du mouvement d'un nuage de points à l'aide d'une onde continue conduit à l'interprétation des interférences que j'ai précédemment proposée (²). Elle pourrait peut-être conduire à comprendre le rôle que jouent les solutions continues (Eigenfunktionen) dans la nouvelle Mécanique. Ces solutions ne représenteraient pas réellement les phénomènes atomiques, mais le carré de leur amplitude donnerait, *à l'approximation newtonienne*, les probabilités d'états et de transition comme le pense M. Born. Pour la dynamique des systèmes, les équations admises par Schrödinger qui font intervenir la notion abstraite d'espace de configuration ne seraient pas de véritables équations de propagation mais détermineraient seulement des probabilités de présence. On pourrait alors comprendre pourquoi, dans le cas des interactions nulles, elles admettent comme solutions le *produit* des amplitudes des ondes continues relatives aux divers points.

Malgré les difficultés que présente leur mise au point, il nous paraît intéressant de signaler ces idées que l'on peut résumer comme suit : en

(¹) Cf. *J. Phys. Rad.*, 6ᵉ série, t. 7, 1926, p. 321-337.
(²) Voir *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 447.

Micromécanique comme en Optique, les solutions continues des équations de propagation ne doivent fournir qu'une représentation statistique, la description microscopique exacte des phénomènes exigeant sans doute l'emploi de solutions à singularités traduisant la nature atomique de la matière et du rayonnement.

A.4 — LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET LA STRUCTURE ATOMIQUE DE LA MATIÈRE ET DU RAYONNEMENT (1)

Par M. Louis de Broglie

Sommaire. — M. Schrödinger et la plupart des auteurs qui se sont occupés de Mécanique ondulatoire ont cherché à représenter les phénomènes dynamiques par des propagations d'ondes à amplitude continue du type classique en Optique. Au premier abord, il est difficile de comprendre comment ce point de vue peut se concilier avec la structure atomique de la matière et du rayonnement, structure qui n'est plus guère contestée aujourd'hui. Le but du présent Mémoire est de montrer que les solutions continues fournissent, en réalité, seulement une certaine vue statistique des phénomènes dynamiques dont la description exacte exige sans doute la considération d'ondes comportant des singularités. En particulier, ce genre de conceptions permet de donner un sens clair à l'équation proposée par Schrödinger pour la dynamique des systèmes.

I. — Introduction (2).

Le but de la Mécanique ondulatoire est d'opérer une synthèse entre la dynamique du point matériel et la théorie des ondes conçue à la façon de Fresnel. D'une part, cette synthèse doit avoir pour effet de faire admettre en Optique la notion de points de concentration de l'énergie radiante, notion qui semble aujourd'hui imposée par les données récentes de la Physique expérimentale; d'autre part, elle doit aussi introduire les conceptions de la théorie des Ondes dans l'image que nous nous faisons des points matériels, afin de rendre compte de l'intervention des quanta en Mécanique et des phénomènes intraatomiques.

La nouvelle Mécanique définit les mouvements possibles des points matériels à l'aide d'équations de propagation dont la forme dépend des

(1) *J. Phys. Rad.*, série VI, t. 8, n° 5, mai 1927, p. 225-241.

(2) Ce Mémoire est le développement de deux Notes parues aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 183, 1926, p. 447 et t. 184, 1927, p. 273.

fonctions potentielles. Doit-on, pour représenter le mouvement d'un point matériel (électron, proton ou photon), adopter une solution continue sans singularités de l'équation de propagation analogue à celles qu'utilise l'Optique de Fresnel? De telles solutions ne rendent évidemment aucun compte de la structure atomique de la matière; il me paraît physiquement préférable de chercher à représenter chaque point matériel par une solution de l'équation de propagation correspondante dont l'amplitude comporte une singularité ponctuelle, traduction analytique de l'existence du point matériel. Cependant, en Optique, l'emploi des solutions continues a permis, pendant un siècle, aux physiciens de prévoir des phénomènes très précis et, par ailleurs, M. Schrödinger vient de se servir avec succès des solutions continues pour représenter les états stationnaires de la Micromécanique. Ces constatations amènent à se demander s'il n'existerait pas, entre les solutions continues et les solutions à singularités des équations de propagation, un lien qui s'exprimerait en gros de la façon suivante : les solutions continues donneraient une image statistique du déplacement des singularités correspondant aux solutions réelles et, par suite, elles permettraient de prévoir la « probabilité de présence » d'une singularité dans un volume donné de l'espace où s'opère le mouvement.

C'est cette idée que je vais chercher à développer et à préciser ici en mettant nettement en évidence les postulats que j'admets et dont il serait souhaitable de trouver une justification. Ma conception se rapproche de celle qui a été brillamment soutenue par M. Born en ceci qu'elle conduit à considérer les solutions continues comme donnant des probabilités de présence, mais elle en diffère sur un point essentiel. Pour M. Born, en effet, il n'y a que des probabilités; le déterminisme des phénomènes individuels devrait être abandonné, la probabilité des phénomènes statistiques étant seule déterminée. Dans la manière de voir adoptée ici, au contraire, le point matériel est une réalité essentielle et son mouvement est entièrement déterminé comme étant celui d'une singularité de l'amplitude dans une onde qui se propage. Seulement, tout comme en Mécanique ancienne, le mouvement du point dépend des conditions initiales, et si l'on ignore (du moins dans une mesure qui sera précisée) ces conditions initiales, on peut parler de la probabilité pour que le point matériel se trouve à un instant donné dans un élément de volume donné de l'espace; c'est cette probabilité qui serait fournie par la considération des ondes continues. Il y aurait donc lieu de conserver la structure atomique de la matière et du rayonnement ainsi que le déterminisme des phénomènes individuels, tout en attribuant aux solutions continues la valeur statistique que M. Born et implicitement M. Schrödinger leur ont reconnue.

II. — Les ondes continues et la dynamique du point matériel.

A. — *Cas de l'absence de champ.*

1. L'équation de propagation et ses solutions. — Considérons un point matériel de masse propre m_0 placé en dehors de tout champ dans un espace où n'existe aucun obstacle. Par rapport à un système galiléen, ce point est en mouvement rectiligne et uniforme (ou en repos) et la Mécanique ondulatoire nous enseigne que ce mouvement doit être assimilé à la propagation d'une onde et représenté par une solution de l'équation suivante (¹) :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2\nu_0^2}{c^2}u, \tag{1}$$

en posant

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}. \tag{2}$$

En raisonnant comme je l'ai fait dans ma thèse, on est amené à chercher des solutions de (1) ayant la forme

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\cos\frac{2\pi\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[t - \frac{\beta z}{c} + \tau\right] \tag{3}$$

ou en posant

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{h}, \qquad V = \frac{c}{\beta}, \tag{4}$$

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\cos 2\pi\nu\left[t - \frac{z}{V} + \tau\right]. \tag{5}$$

Dans la première formule (4), W désigne l'énergie totale du mobile y compris son énergie interne $m_0 c^2$.

Si l'on écrit l'argument du cosinus sous la forme $\frac{2\pi}{h}\varphi(x, y, z, t)$, la fonction φ n'est autre que l'action d'Hamilton.

D'autre part, il résulte de (4) que la vitesse du point matériel est égale à la vitesse de groupe d'ondes planes homogènes de la forme

$$A\cos 2\pi\nu\left[t - \frac{z}{V} + \tau\right]$$

(¹) Voir *J. Phys. Rad.*, serie VI, t. 7, novembre 1926, p. 321-337, équation (49). Je renverrai désormais à ce Mémoire par les lettres J. P.

c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{1}{v} = \frac{\partial\left(\frac{\nu}{V}\right)}{\partial\nu}. \tag{6}$$

Ce fait remarquable fait penser que le point matériel doit être assimilé à un groupe d'ondes monochromatiques. Cette conception, qui avait été la mienne, a été reprise par M. Schrödinger et l'a conduit à considérer le point matériel comme un « Wellenpacket ». Au point de vue didactique, il est très utile d'employer cette image, mais il n'est pas sûr qu'elle corresponde à la réalité car, je vais le montrer, l'équation (6) peut être obtenue sans faire appel à la notion de groupe d'ondes.

Pour préciser ce point, il faut se demander quelle peut être la forme de la fonction $f(x, y, z, t)$ des équations (3) et (5). Il paraît physiquement probable que cette fonction présente une singularité là où se trouve le point matériel et que l'ensemble des valeurs de f se transporte en bloc parallèlement à la direction du mouvement avec la vitesse v. On doit donc l'écrire $f(x, y, z - vt)$ et si l'on substitue la fonction (5) écrite sous forme complexe dans l'équation (1), on trouve, en annulant les termes imaginaires :

$$vV = c^2. \tag{7}$$

Or, cette relation, équivalente à la deuxième équation (4), conduit à (6) et, par suite, la relation (6) se trouve obtenue sans qu'on ait eu aucunement à supposer que la solution de l'équation (1) puisse se représenter par un groupe d'ondes homogènes de fréquences voisines. Cette manière d'interpréter la formule (6) est, au fond, beaucoup mieux en accord avec les considérations dont je me suis servi dans ma thèse que la conception du groupe d'ondes.

En annulant les termes réels après substitution de (5) dans (1), on obtient une seconde équation :

$$\Box f = \Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \tag{8}$$

Cette équation est, on le sait, invariante pour la transformation de Lorentz : la fonction f doit donc satisfaire à l'équation de Laplace dans un système d'axes lié au mobile si l'on suppose que le phénomène ondulatoire est stationnaire dans ce système. L'hypothèse la plus simple consiste alors à admettre que, dans ce système propre, le point matériel possède la symétrie de la sphère ; f n'est alors fonction que du rayon r_0 et l'on a nécessairement

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{C}{r_0}\cos 2\pi\nu_0(t_0 + \tau_0). \tag{9}$$

Si le point matériel, au lieu d'avoir une symétrie sphérique, avait une symétrie cylindrique autour de l'axe x_0, on pourrait prendre pour solution, au lieu de (9), la fonction

$$u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{Cx_0}{r_0^3} \cos 2\pi\nu_0[t_0 + \tau_0]. \tag{10}$$

La fonction u étant ainsi obtenue dans le système propre, il suffit de faire une transformation de Lorentz pour en avoir l'expression dans un autre système galiléen. Si, par exemple, on revient au système dont le mobile décrit l'axe des z avec la vitesse v, la solution (9) prend la forme

$$u(x, y, z, t) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \dfrac{(z - vt)^2}{1 - \beta^2}}} \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{z}{V} + \tau\right]. \tag{11}$$

La solution précédente et les solutions analogues telles que (10) correspondent aux anciennes mécaniques en ce sens que la phase est proportionnelle à l'action hamiltonienne. Il est curieux de constater qu'il existe d'autres solutions de (1) de même forme dont le pendant n'existe pas dans les anciennes mécaniques. Par exemple, plaçons-nous dans le système propre envisagé plus haut et cherchons une solution de la forme $f \sin 2\pi\nu'_0 t$ avec $\nu'_0 \neq \nu_0$; nous aurons à satisfaire la relation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_0^2} = \frac{4\pi^2}{c^2}(\nu_0^2 - \nu_0'^2) f. \tag{12}$$

Nous trouverons alors, comme « solutions à symétrie sphérique », les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{C}{r_0} \cos 2\pi \left[\frac{\sqrt{\nu'^2_0 - \nu_0^2}}{c} r_0 + C'\right] && \text{si } \nu'_0 > \nu_0, \\ f(r_0) &= \frac{1}{r_0} \left[C e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{\nu_0^2 - \nu'^2_0}\, r_0} + C' e^{-\frac{2\pi}{c}\sqrt{\nu_0^2 - \nu'^2_0}\, r_0}\right] && \text{si } \nu_0 > \nu'_0, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

et nous en déduirons, par une transformation de Lorentz, une solution pour un système galiléen quelconque. En prenant toujours la droite du mouvement pour axe des z, cette solution aura la forme

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z - vt) \cos \frac{2\pi\nu'_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[t - \frac{\beta z}{c}\right]. \tag{14}$$

On peut dire que l'on obtient ainsi des mouvements inconnus de l'ancienne dynamique dans lesquels le mobile, au lieu d'avoir sa masse propre normale m_0, aurait une masse propre anormale $\frac{h\nu'_0}{c^2}$. L'écart qui se présente ici par rapport à l'état mécanique normal est caractérisé par une valeur non nulle de $\square f$.

Nous sommes ainsi conduits au point de vue général suivant : la Mécanique ondulatoire du point matériel libre est donnée par l'équation (1), dont *certaines* solutions correspondent aux anciennes dynamiques; mais il existe d'autres solutions dont les formules (13) donnent des exemples. Ces autres solutions indiquent comme possibles des états de mouvement non prévus par les anciennes théories; le contenu de l'équation (1) est donc beaucoup plus riche que celui des équations différentielles des anciennes dynamiques.

2. Représentation d'un nuage de points par une onde continue. — Considérons un nuage de points matériels de même nature qui ne sont soumis à aucune force extérieure ou mutuelle et qui sont tous animés d'une même vitesse v dans une même direction Oz. Si le phénomène ondulatoire équivalent à chaque point a la forme normale (5), le phénomène global sera représenté par la fonction

$$U(x, y, z, t) = \sum_i f_i(x, y, z - vt) \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{vz}{c^2} + \tau_i \right]. \tag{15}$$

Nous ferons l'hypothèse simplificatrice (à laquelle, nous le verrons plus loin, il ne faut pas attacher trop d'importance) que les quantités τ_i sont égales. Les points matériels ont alors même phase et l'on peut écrire

$$U = \left[\sum_i f_i(x, y, z - vt) \right] \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{vz}{c^2} \right]. \tag{16}$$

L'amplitude donnée par le terme entre crochets comporte un grand nombre de singularités mobiles avec la vitesse v parallèlement à Oz.

Maintenant, l'équation (1) admet aussi la solution continue [1].

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos 2\pi\nu \left[t - \frac{vz}{c^2} \right]. \tag{17}$$

Nous dirons que cette solution continue correspond à la solution à singularité donnée par (5). Nous appellerons densité du nuage le nombre de corpuscules par unité de volume et nous supposerons que cette

---

[1] Nous désignerons toujours ici par Ψ les solutions continues des équations de propagation : nos fonctions Ψ sont donc identiques à celles que Schrödinger désigne par cette lettre.

densité a partout la valeur constante ρ. La constante a de la solution continue (17) pouvant être choisie arbitrairement, nous poserons

$$\rho = K a^2, \tag{18}$$

K étant une constante donnée à l'avance. Nous voyons que la solution continue donnera, par son facteur trigonométrique, la répartition des phases dans le nuage de points tandis que le carré de son amplitude mesurera la densité du nuage.

Dans un fluide où la densité au point xyz est $\rho(x, y, z)$, la probabilité pour qu'une molécule prise au hasard soit dans un élément de volume dv entourant le point considéré est $\rho(x, y, z)\,dv$. Cette remarque va nous permettre de présenter ce qui précède sous une forme différente. Considérons un *seul* point matériel en mouvement rectiligne et uniforme; supposons sa vitesse connue en grandeur et direction, mais inconnue sa position. Alors le produit $a^2\,dv$ mesurera la probabilité pour que le point se trouve à un instant quelconque dans l'élément dv. On voit ainsi que la condition d'égalité des τ_i, admise précédemment, n'est pas essentielle puisque le nuage de points envisagé plus haut peut être maintenant considéré comme formé par l'ensemble des positions possibles d'un même point.

B. *Cas des champs constants.*

3. **Propagation d'un point matériel dans un champ constant.** — Nous envisageons d'abord le cas d'un champ constant défini par une fonction potentielle $F(x, y, z)$. La Mécanique ondulatoire admet alors l'équation de propagation à laquelle doit satisfaire l'onde écrite sous forme complexe :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{F(x, y, z)}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right] u = 0. \tag{19}$$

Nous imaginerons que le mobile commence par se déplacer dans une région R_0 de l'espace où la fonction F est nulle, puis pénètre dans la région R où règne le champ considéré. Dans la région R_0, l'équation (19) se réduit à (1) et le point matériel est alors, selon nous, représenté par la fonction

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi. \tag{20}$$

La fonction f comporte une singularité mobile et la fonction φ est l'action hamiltonienne des anciennes Mécaniques. Pour obtenir la représentation ondulatoire du point matériel là où règne le champ de forces, il faut prolonger la solution (20) dans la région R. Voyons à quelles relations doivent y satisfaire les fonctions f et φ. Pour cela, écrivons (20) sous forme complexe, substituons dans (19) et séparons le réel de l'imaginaire; nous obtenons les deux équations

$$(21_1)\quad \frac{1}{f}\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2F}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(m_0^2c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right)\right],$$

$$(21_2)\quad \sum_{xyz}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}f\Box\varphi + \frac{F}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Le champ étant constant, la région R est analogue à un milieu réfringent à propriétés constantes et, en y pénétrant, l'onde restera monochromatique avec la fréquence $\nu = \frac{W}{h}$ qu'elle possède dans R_0; dans la nouvelle Mécanique, ceci exprime le fait que, dans un champ constant, l'énergie reste constante. On aura donc

$$(22)\quad \varphi(x, y, z, t) = Wt - \varphi_1(x, y, z); \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = W = h\nu; \qquad \Box\varphi = \Delta\varphi.$$

L'équation (21_1) s'écrira donc

$$(23)\quad \frac{1}{f}\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(W - F)^2 + m_0^2c^2\right].$$

Si le premier membre était négligeable, cette relation serait identique à l'équation de Jacobi dans la Dynamique relativiste des champs constants et φ_1 serait la fonction de Jacobi. L'écart avec les anciennes Mécaniques apparaît donc ici comme lié à la valeur non nulle de $\Box f$.

A l'approximation ancienne, la vitesse du point matériel passant en un point M est dirigée dans le sens du vecteur grad φ_1 en ce point. Nous *admettrons* qu'il en est de même quand on détermine rigoureusement f et φ.

D'après nos conceptions, le point matériel est une singularité de la fonction f où celle-ci devient infinie en raison inverse d'une certaine puissance de la distance. On a donc, en désignant par n une variable comptée dans une direction quelconque passant par la position M du mobile à l'instant t :

$$(24)\quad \left[\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial n}}\right]_{M,t} = 0.$$

Comptons n suivant la normale en M à la surface $\varphi_1(x, y, z) = \text{const.}$ et appliquons l'équation (21_2) en tenant compte de (22) et de (24); il vient

$$\left[- \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial n}} \right]_{M,t} = \frac{c^2 \operatorname{grad} \varphi_1}{W - F}. \tag{25}$$

En raison de l'hypothèse faite sur la direction de la vitesse, celle-ci est donc égale à

$$\vec{v}_M = \frac{c^2 \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi_1}}{W - F}. \tag{26}$$

A l'approximation des Mécaniques anciennes, φ_1 se confond avec la fonction de Jacobi et la relation (26) est alors celle qui lie la quantité de mouvement et la vitesse dans la dynamique d'Einstein. Les raisonnements qui précèdent ont pour but de rendre vraisemblable que la relation (26) est valable en toute rigueur dans la nouvelle Mécanique.

Nous préciserons plus loin (section III) ce qu'il faut entendre, en Mécanique ondulatoire, par approximation newtonienne et nous verrons qu'à ce degré d'approximation, le dénominateur de (26) peut être remplacé par $m_0 c^2$, de sorte qu'on a alors simplement

$$\vec{v}_M = \frac{1}{m_0} \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi_1}. \tag{26'}$$

4. **Propagation d'un nuage de points dans un champ constant.** — Soient maintenant des points matériels identiques et sans actions mutuelles qui, au début de leur mouvement, traversent la région R_0 en étant animés de la même vitesse dans la même direction. Si ces points ont même phase, au sens expliqué précédemment, on pourra représenter le nuage dans R_0 par la fonction (16). Nous admettrons que le prolongement de cette fonction dans la région R possède encore un facteur de phase unique, en d'autres termes que la fonction $\varphi_1(x, y, z)$ du paragraphe précédent est la même pour tous les points du nuage. Ces points posséderont alors des vitesses définies par la relation (26) et leur mouvement est comparable au mouvement permanent des molécules d'un fluide, car la vitesse d'une particule, lors de son passage en un point, dépend seulement de la position de ce point et non de l'époque du passage. Lorsqu'il suffit d'employer la relation (26'), la fonction φ_1 joue le rôle de potentiel des vitesses.

D'après nos conceptions, les vitesses sont toujours tangentes aux courbes orthogonales de la famille de surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$; ces courbes sont donc les lignes de courant et elles forment des tubes à l'intérieur desquels les particules se déplacent. Comme ces tubes n'ont pas une section constante dans la région R, la densité ρ du fluide y varie d'un point à l'autre tout en restant constante en chaque point, puisque le mouvement est permanent. Dès lors, l'équation de continuité hydrodynamique nous donne une relation à laquelle doit satisfaire la fonction $\rho(x, y, z)$:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \tag{27}$$

En tenant compte de (26), on peut écrire (27) :

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\log\left(\frac{\rho}{W - F}\right)\right] = -\frac{\triangle \varphi_1}{\operatorname{grad} \varphi_1}. \tag{28}$$

Comme dans le cas du mouvement uniforme, nous allons chercher à représenter le nuage de points par une onde continue. Dans la région R_0, le nuage peut être représenté par l'onde continue (17), la densité étant reliée à l'amplitude par la relation (18). L'onde continue (17) pénétrant dans la région R, où la propagation est régie par (19), va y être représentée par une fonction de la forme

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= a(x, y, z) \cos \frac{2\pi}{h} \varphi'(x, y, z, t) \\ &= a(x, y, z) \cos 2\pi \left[\nu t - \frac{1}{h} \varphi'_1(x, y, z)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

La région R_0 est analogue à un milieu réfringent homogène, la région R à un milieu réfringent non homogène ; la détermination des fonctions a et φ'_1 revient donc à la résolution d'un problème d'Optique classique.

Si nous écrivons la solution (29) sous forme complexe et si nous la substituons dans l'équation (19), nous obtenons deux relations en séparant le réel de l'imaginaire :

$$\frac{1}{a}\triangle a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right)^2 + \frac{2F}{c^2}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \left(m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right)\right], \tag{30_1}$$

$$\sum_{xyz} \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{1}{2} a \triangle \varphi' = 0. \tag{30_2}$$

La forme de φ' permet d'écrire, à la place de (30_1) :

$$\frac{1}{a}\triangle a = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial \varphi'_1}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(h\nu - F)^2 + m_0^2 c^2\right]. \tag{31}$$

Si le premier membre est négligeable, on obtient l'équation de l'optique géométrique relative à l'équation de propagation (19). En comparant les équations (23) et (31), on voit que, si les premiers membres en sont négligeables, on obtient d'une part la Mécanique ancienne, d'autre part l'Optique géométrique. Les fonctions φ_1 et φ'_1 sont alors identiques; elles se confondent avec la fonction de Jacobi.

Nous ferons maintenant l'hypothèse essentielle que φ_1 et φ'_1 sont encore identiques lorsque les premiers membres des équations (23) et (31) ne peuvent plus être négligés. Évidemment, ceci exige que l'on ait

$$\frac{1}{a}\triangle a = \frac{1}{f}\Box f. \tag{32}$$

Nous désignerons ce postulat sous le nom de « principe de la double solution », parce qu'il implique l'existence de deux solutions sinusoïdales de l'équation (19) ayant même facteur de phase, l'une comportant une singularité ponctuelle et l'autre ayant, au contraire, une amplitude continue. Naturellement, ce principe est provisoire en ce sens qu'il doit pouvoir être confirmé ou infirmé par des raisonnements rigoureux; mais il est fortement suggéré par la nécessité de concilier la structure atomique de la matière et de la lumière avec les succès de l'Optique classique et de la théorie de Schrödinger.

La fonction φ'_1 étant ainsi identifiée avec φ_1, la relation (30_2) va s'écrire

$$\frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}[\log a^2] = -\frac{\triangle\varphi_1}{\operatorname{grad}\varphi_1}, \tag{33}$$

d'où, en comparant avec (28), l'on conclut que le long d'un tube de courant la quantité $\frac{\rho}{a^2(W-F)}$ reste constante. Puisque, dans la région R_0 où F est nul, on a la relation (18), on doit avoir dans R :

$$\rho(x, y, z) = K\,a^2(x, y, z)\left[1 - \frac{F(x, y, z)}{W}\right]. \tag{34}$$

La fonction F étant donnée, on voit que la détermination de l'onde continue (29) doit donner la densité du nuage en chaque point.

Quand il est légitime de négliger l'énergie potentielle devant l'énergie totale (approximation newtonienne), on peut écrire la formule approchée

$$\rho(x, y, z) = K\,a^2(x, y, z). \tag{34'}$$

Nous pouvons évidemment envisager ce qui précède sous un angle différent en supposant que les particules du nuage sont seulement *la répétition du même point matériel*. Nous supposons, en effet, la vitesse initiale dans la région R_0 donnée en grandeur et direction; si nous ne savons rien de plus, c'est-à-dire si toutes les *positions* initiales du mobile sont également probables, à chaque hypothèse sur la position initiale correspondra un mouvement et, en juxtaposant par la pensée toutes ces possibilités, nous obtiendrons l'équivalent du mouvement d'un nuage infiniment dense de points identiques. La probabilité pour que le point matériel soit, à un instant donné, effectivement présent dans un élément de volume dv entourant le point de coordonnées x, y, z de la région R est alors évidemment proportionnelle à $\rho(x, y, z)\, dv$; elle est donc donnée en fonction des grandeurs de l'onde continue par les formules (34) ou (34'). La forme des trajectoires est d'ailleurs également déterminée par la connaissance de l'onde continue, puisque ces trajectoires sont orthogonales aux surfaces d'égale phase.

Comme exemple, considérons un nuage de particules électrisées, animées de la même vitesse dans la même direction, qui viennent passer aux environs d'un centre chargé immobile; suivant la distance à ce centre de sa trajectoire rectiligne initiale, chaque particule sera plus ou moins déviée et l'ancienne Mécanique permet de calculer la proportion des particules déviées dans une direction donnée lorsqu'on suppose uniforme la densité du nuage incident : c'est là le calcul fait par Sir E. Rutherford pour prévoir la diffusion des rayons β par la matière. La nouvelle Mécanique adopte un autre point de vue et considère l'espace autour du centre comme présentant un indice de réfraction par rapport aux ondes des électrons incidents. Si les idées proposées plus haut sont exactes, le résultat statistique de la diffusion doit pouvoir s'obtenir comme il suit : on considérera une onde plane continue tombant sur une sphère réfringente dont l'indice varie suivant une loi convenable en fonction de la distance au centre et l'on calculera les intensités diffusées dans les diverses directions; ces intensités doivent donner les proportions relatives d'électrons diffusés dans ces directions. C'est bien ce qui paraît résulter d'un intéressant calcul de G. Wentzel [1], qui a ainsi retrouvé en première approximation la loi de Rutherford.

C. — *Cas des champs variables.*

5. **Équation de propagation.** — L'équation de propagation correspondant au mouvement d'un point de charge électrique e dans un champ

[1] *Z. Physik*, t. 40, 1926, p. 590. J'avais pressenti ce résultat dans mon livre *Ondes et mouvements*, p. 84.

électromagnétique défini par un potentiel scalaire $\mathcal{V}(x, y, z, t)$ et un potentiel vecteur $\vec{A}(x, y, z, t)$ est [1]

$$(35)\quad \Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h}\frac{e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4\pi i}{h}\sum_{xyz}\frac{e}{c}A_x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\mathcal{V}^2 - A^2)\right]u = 0.$$

En principe, il faut toujours introduire les termes contenant le potentiel vecteur, car, d'après la relation de Lorentz, le potentiel vecteur ne peut pas être nul si le potentiel scalaire est variable. Si, néanmoins, l'influence de ces termes est négligeable, on pourra se contenter d'écrire, en posant $F(x, y, z, t) = e\mathcal{V}$:

$$(35')\qquad \Box u + \frac{4\pi i}{h}\frac{F}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_0^2c^2 - \frac{F^2}{c^2}\right]u = 0.$$

Nous allons toujours supposer que le mobile envisagé commence par se déplacer dans une région R_0 de l'espace où les potentiels sont nuls puis pénètre dans la région R où existe le champ variable considéré. Nous cherchons encore à prolonger la solution du type (5), valable dans R_0, par une solution de (35) ayant la forme

$$(36)\qquad u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi(x, y, z, t),$$

f présentant une singularité mobile. En substituant dans (35), on obtient toujours deux équations

$$(37_1)\qquad \frac{1}{f}\Box f = \frac{4\pi^2}{h^2}\left[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{2e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + 2\frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\mathcal{V}^2 - A^2)\right],$$

$$(37_2)\qquad \sum_{xyz}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}f\Box\varphi + \frac{e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Si le premier membre de (37_1) était négligeable, $\varphi(x, y, z, t)$ serait la fonction de Jacobi de la Dynamique relativiste des champs variables. L'écart à partir des anciennes Mécaniques est donc toujours lié à une valeur non nulle de $\Box f$.

A l'approximation des anciennes théories, la vitesse du point matériel

(1) J. P., équation (59).

passant en $M(x, y, z)$ à l'instant t est dirigée dans le sens du vecteur quantité de mouvement qui est défini par la relation

$$\vec{g} = -\left[\overrightarrow{\text{grad}\,\varphi} + \frac{e}{c}\vec{A}\right]. \tag{38}$$

Comme précédemment, nous admettrons qu'il en est encore de même si l'on considère les solutions rigoureuses de l'équation de propagation.

La relation (24) doit évidemment être ici encore valable. Nous l'appliquerons en choisissant pour n la variable comptée à l'instant t et au point M suivant la direction du vecteur $\vec{g}$. L'équation (37_2) devient alors

$$\left[-\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial n}}\right]_{M,t} = \frac{c^2 g}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}, \tag{39}$$

et l'hypothèse faite sur la direction de la vitesse nous donne

$$\vec{v}(M, t) = \frac{c^2 \vec{g}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}. \tag{40}$$

relation donc (26) est évidemment un cas particulier. A l'approximation de l'ancienne Mécanique, l'équation (40) est celle qui lie la quantité de mouvement et la vitesse.

Ici encore, si l'énergie de mouvement est faible devant l'énergie interne $m_0 c^2$, on aura

$$\vec{v}(M, t) = \frac{1}{m_0}\vec{g}. \tag{40'}$$

6. **Propagation d'un nuage de points.** — Il est tout indiqué de transposer dans le cas des champs variables les considérations du paragraphe 4. Nous envisagerons de nouveau un nuage de points identiques, sans actions réciproques et « en phase » qui, au début de leur mouvement, traversent la région R_0 dans la même direction avec la même vitesse. Ce nuage, dont la densité dans R_0 sera supposée uniforme, y sera représenté par la fonction (16); prolongée dans la région R, cette solution présenterait une phase unique si les approximations de la Mécanique ancienne étaient valables, cette phase étant alors donnée par la fonction de Jacobi. Nous admettrons que, dans la solution rigoureuse,

la phase est encore unique, c'est-à-dire que dans R le nuage peut se représenter par la fonction

$$U(x, y, z, t) = \left[\sum_i f_i(x, y, z, t)\right] \cos\frac{2\pi}{h}\varphi(x, y, z, t), \tag{41}$$

la fonction f_i présentant une singularité mobile.

Les vitesses sont données par la formule (40) mais, le mouvement n'étant naturellement pas permanent, l'équation de continuité doit s'écrire

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\frac{\rho c^2\vec{g}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}\right] = 0. \tag{42}$$

Introduisons la notation

$$\rho' = \rho\,\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}}, \tag{43}$$

Nous trouvons facilement, en tenant compte de (38) et de la relation de Lorentz entre les potentiels, l'équation

$$g\,\frac{\partial(\log\rho')}{\partial n} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right]\frac{\partial(\log\rho')}{\partial t} = \Box\varphi. \tag{44}$$

Comme précédemment, nous allons chercher à représenter la propagation d'un nuage par celle d'une onde continue du type classique. Dans R_0 cette onde sera de la forme (17), l'amplitude étant reliée à la densité par la relation (18). La région R joue le rôle d'un milieu réfringent dont l'indice en chaque point varie avec le temps; l'onde continue, en y pénétrant, prendra la forme

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t)\cos\frac{2\pi}{h}\varphi'(x, y, z, t). \tag{45}$$

(45) diffère de (29) parce que a dépend du temps et que φ' n'est plus linéaire en t. Naturellement, Ψ doit satisfaire à l'équation de propagation (35), ce qui nous conduit, comme d'habitude, à deux relations

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\Box a = \frac{4\pi^2}{h^2}\Bigg[\sum_{xyz}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2 + 2\,\frac{e\mathcal{V}}{c^2}\,\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\\ - \frac{2e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + m_0^2c^2 - \frac{e^2}{c^2}(\mathcal{V}^2 - A^2)\Bigg],\end{aligned} \tag{46$_1$}$$

$$\sum_{xyz}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} + \frac{1}{2}a\Box\varphi' + \frac{e\mathcal{V}}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{e}{c}\sum_{xyz}A_x\frac{\partial a}{\partial x} = 0. \tag{46$_2$}$$

Nous introduirons encore le principe de la double solution en supposant que la fonction φ' est identique à la fonction φ, c'est-à-dire qu'à la solution (41), dont l'amplitude comporte des singularités, doit correspondre une solution à amplitude continue ayant même facteur de phase. Ceci entraîne d'ailleurs, par comparaison entre (37_1) et (46_1), l'égalité

$$\frac{1}{a}\Box a = \frac{1}{f}\Box f. \tag{47}$$

Ceci admis, l'équation (46_2) nous donne

$$g\frac{\partial(\log a^2)}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathrm{V}\right]\frac{\partial(\log a^2)}{\partial t} = \Box\varphi. \tag{48}$$

En comparant avec (44), on voit qu'en suivant le mouvement des mêmes particules du nuage, le quotient $\frac{\rho'}{a^2}$ reste constant. Puisque, dans R_0, la relation (18) est valable, on a en tout point de R et à tout instant :

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}_0}a^2(x, y, z, t)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right] = \mathrm{K}'a^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right]. \tag{49}$$

Si l'énergie cinétique est faible devant l'énergie interne m_0c^2, on peut ici encore considérer la densité du nuage comme proportionnelle au carré de l'amplitude de Ψ.

On peut naturellement regarder le nuage comme étant formé par l'ensemble de toutes les positions possibles d'un même point matériel dont on connaît seulement la vitesse dans R_0 en grandeur et direction. La probabilité pour que le mobile se trouve à l'instant t dans un volume dv entourant le point xyz est $\rho(x, y, z, t)\,dv$ et elle est déterminée par l'équation (49) en fonction des grandeurs de l'onde continue.

7. **Le vecteur courant dans le nuage de points électrisés.** — Suivant le procédé bien connu, nous pouvons définir en chaque point de notre nuage et à chaque instant un quadrivecteur courant dont les composantes seront, en posant $ict = x_4$:

$$s_1 = \rho e\frac{v_x}{c}, \qquad s_2 = \rho e\frac{v_y}{c}, \qquad s_3 = \rho e\frac{v_z}{c}, \qquad s_4 = i\rho e. \tag{50}$$

En tenant compte de (38), (40) et (49), on trouve aisément

$$s_1 = -\mathrm{K}'ea^2c\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{e}{c}\mathrm{A}_x\right], \qquad \ldots, \qquad s_4 = ie\mathrm{K}'a^2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right]. \tag{51}$$

Introduisons le quadrivecteur $\vec{P}$ de composantes :

$$P_1 = A_x, \qquad P_2 = A_y, \qquad P_3 = A_z, \qquad P_4 = i\mathcal{V}. \tag{52}$$

On a alors

$$s_\alpha = - K' e a^2 c \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{c} P_\alpha \right]. \tag{53}$$

Cette expression du courant d'Univers coïncide avec celle qu'ont proposée MM. Gordon [1] et Schrödinger [2]. En effet, ces auteurs partent d'une fonction qui s'écrit avec nos notations :

$$L = \sum_{1}^{4}{}_{\alpha} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} + \frac{2\pi e}{hc} i P_\alpha \overline{\Psi} \right) \left(\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x_\alpha} - \frac{2\pi e}{hc} i P_\alpha \overline{\Psi} \right) + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} \Psi \overline{\Psi} \right], \tag{54}$$

où Ψ désigne ici l'onde continue écrite sous forme complexe et $\overline{\Psi}$ la fonction conjuguée; puis ils définissent le quadrivecteur courant par la formule

$$s_\alpha = - \lambda \frac{\partial L}{\partial P_\alpha}, \tag{55}$$

λ étant une constante d'homogénéité. Or il est facile de vérifier que les expressions (53) et (55) concordent.

III. — Passage des anciennes mécaniques a la nouvelle.

8. Les équations de Lagrange en Mécanique ondulatoire. — Si nous jetons les yeux sur les équations générales (37_1) et (46_1) en tenant compte du principe de la double solution et de l'équation (47) qui en découle, nous voyons qu'on peut écrire *rigoureusement* l'équation de Jacobi sous sa forme habituelle, à condition d'attribuer au mobile la masse propre variable :

$$M_0(x, y, z, t) = \sqrt{m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\square a}{a}}. \tag{56}$$

Les anciennes Dynamiques négligent le second terme sous le radical, ce qui revient à supposer h infiniment petit.

Cela étant, la nouvelle Mécanique peut faire usage du principe d'Hamilton et des équations de Lagrange à condition d'y introduire la

---

(1) *Z. Physik*, t. 40, 1926, p. 117.

(2) *Ann. Physik*, t. 82. 1927, p. 265. *Voir* aussi O. Klein, *Z. Physik*, t. 41, 1927, p. 407.

masse variable M_0. Nous allons le vérifier en négligeant, pour simplifier, le potentiel vecteur. Le principe d'Hamilton va s'écrire sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0, \tag{57}$$

avec

$$L = -M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} - F. \tag{58}$$

On est conduit, comme de coutume, aux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v_x}\right] = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \cdots \tag{59}$$

et l'on définit les composantes de la quantité de mouvement par les formules

$$g_x = \frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cdots \tag{60}$$

On nommera toujours énergie, l'expression (constante dans un champ constant) :

$$W = \sum_{xyz} g_x v_x - L = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + F. \tag{61}$$

A l'aide des formules (60) et (61), on vérifie qu'en posant

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = W, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -g_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -g_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -g_z, \tag{62}$$

on obtient l'équation de Jacobi :

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F\right)^2 - \sum_{xyz}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = M_0^2 c^2 \tag{63}$$

et cette relation, compte tenu de la définition de M_0, est bien de la forme que prennent (37_1) et (46_1) dans le cas actuel. Notons aussi qu'en combinant (60) et (61), on retrouve tout de suite, pour la vitesse, la formule fondamentale (40).

En résumé, *si l'on suppose connue la fonction* $a(x, y, z, t)$, la théorie de Lagrange-Hamilton permet de calculer la forme des trajectoires et la loi du mouvement des particules du nuage.

Précisons maintenant en quoi consiste, dans la nouvelle Mécanique, l'approximation newtonienne. Elle attribuera à β une valeur assez petite pour qu'on puisse négliger son carré devant l'unité; mais, de plus, elle regardera le second terme sous le radical dans (56) comme suffisamment petit devant le premier pour qu'il soit permis d'écrire

$$(64) \qquad M_0(x, y, z, t) = m_0 + \varepsilon(x, y, z, t),$$

$\frac{\varepsilon}{m_0}$ *étant de l'ordre de* β^2. Dès lors, on aura, pour la quantité de mouvement et l'énergie, les formules approximatives :

$$(65) \qquad g_x = m_0 v_x, \quad g_y = m_0 v_y, \quad g_z = m_0 v_z, \quad W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \varepsilon c^2 + F,$$

et, chaque fois qu'il s'agit de la valeur absolue de W et non de ses variations, nous pourrons la prendre égale à $m_0 c^2$, ce qui légitime, en particulier, le passage de (40) à (40'). Enfin, la fonction de Lagrange (58) prend la forme approchée

$$(66) \qquad L = -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \varepsilon c^2 - F.$$

Tout se passe donc comme s'il existait, outre F, un terme d'énergie potentielle εc^2.

IV. — Cas du mouvement d'un système de points matériels.

9. **Point de vue de M. Schrödinger.** — Dans ses travaux, M. Schrödinger envisage systématiquement les solutions continues des équations de propagation. Nous avons entrevu comment l'exactitude des résultats que l'on obtient ainsi peut se concilier avec l'existence de la structure discontinue de la matière dans le cas d'un seul point matériel.

Passons maintenant au cas d'un système isolé de N points matériels, dont je désignerai les masses *propres* par $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Se limitant à l'approximation newtonienne, Schrödinger considère l'espace de configuration qu'on peut construire avec les 3N coordonnées $x_1, y_1, \ldots, z_N$ des N points et il envisage la propagation d'une onde dans cet hyperespace. E étant l'énergie totale au sens newtonien, et $F(x_1, \ldots, z_N)$, la fonction d'énergie potentielle, la propagation s'effectuerait, d'après Schrödinger, conformément à l'équation

$$(67) \qquad \sum_1^N \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}\right] + \frac{8\pi^2}{h^2}[E - F]u = 0.$$

Cette hypothèse paraît naturelle, car l'équation (19), valable pour un point dans un champ constant, peut s'écrire, à l'approximation newtonienne, en tenant compte de la forme de u et en supprimant l'indice de la masse propre :

$$\frac{1}{m}\triangle u+\frac{8\pi^2}{h^2}[\mathrm{E}-\mathrm{F}]u=0, \tag{67'}$$

forme dont (67) est bien la généralisation.

Mais l'équation (67) soulève deux difficultés. D'abord, dans les idées de Schrödinger, le point matériel formé par un groupe d'ondes n'aurait pas le caractère d'une singularité ponctuelle et, en Micromécanique, on ne pourrait plus parler de sa position ni de sa trajectoire. Mais alors, quel serait le sens des coordonnées $x_1, \ldots, z_{\mathrm{N}}$ avec lesquelles on construit l'espace abstrait de configuration? Cette difficulté disparaît si l'on admet avec nous que la position du point matériel est toujours bien définie.

Mais il y a une autre difficulté. Physiquement, il ne peut, en effet, être question d'une propagation dans l'espace de configuration dont l'existence est purement abstraite : l'image ondulatoire de notre système doit comporter N ondes se propageant dans l'espace réel et non une seule onde se propageant dans l'espace de configuration. Quel est donc le sens véritable de l'équation de Schrödinger? C'est ce qu'il nous faut chercher.

10. Signification de l'équation (67). — Pour simplifier, nous allons considérer un système isolé formé par deux points matériels, l'extension des raisonnements au cas de N points ne présentant aucune difficulté de principe. Pour nous, chacun des deux points constitue une singularité dans un phénomène ondulatoire dont l'espace est le siège. Si nous négligeons les actions magnétiques, la propagation des deux ondes se fait suivant les équations

$$\left\{\begin{aligned}&\square u_1+\frac{4\pi i}{h}\frac{\mathrm{F}_1}{c^2}\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_1^2c^2-\frac{\mathrm{F}_1^2}{c^2}\right]u_1=0,\\&\square u_2+\frac{4\pi i}{h}\frac{\mathrm{F}_2}{c^2}\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{4\pi^2}{h^2}\left[m_2^2c^2-\frac{\mathrm{F}_2^2}{c^2}\right]u_2=0.\end{aligned}\right. \tag{68}$$

Il faut bien distinguer les variables x, y, z, qui repèrent un point quelconque de l'espace, des coordonnées x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 des deux points matériels. Conformément au principe de l'action et de la réaction, nous attribuerons aux fonctions potentielles $\mathrm{F}_1(x, y, z, x_2, y_2, z_2)$ et $\mathrm{F}_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ les formes suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}&\mathrm{F}_1=\mathrm{F}\left[\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}\right],\\&\mathrm{F}_2=\mathrm{F}\left[\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\right],\end{aligned}\right. \tag{69}$$

de telle sorte que la valeur de F_1 au point occupé par le premier mobile est égale à la valeur de F_2 au point occupé par le second ; r étant la distance des deux mobiles, cette valeur commune est $F(r)$. La propagation dans l'espace de chacune des deux ondes dépend donc, en chaque point, de la valeur du potentiel qui correspond à la position simultanée de la singularité dans l'autre onde.

Il faut trouver pour chacune des équations (68) une solution comportant une singularité telle que l'ensemble des deux relations soit satisfait. Adoptons, avec Schrödinger, l'approximation newtonienne. Dans les anciennes Mécaniques, il existe une fonction de Jacobi du système $\varphi(x_1, \ldots, z_2)$ telle que les quantités de mouvement soient

$$(70) \qquad m_1 v_{1x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad m_2 v_{2x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \qquad \ldots.$$

La nouvelle Mécanique peut-elle, à l'approximation newtonienne, définir une telle fonction φ ? Pour un instant, nous allons considérer le mouvement du deuxième point matériel comme connu ; le mouvement du premier s'opère alors dans un champ qui est une fonction connue de x, y, z, t, cas que nous avons examiné. Si l'état initial de vitesse du premier point est supposé donné, nous savons que l'ensemble de ses mouvements possibles est représenté par une onde à amplitude continue

$$a_1(x, y, z, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_1(x, y, z, t)}$$

D'après le dernier paragraphe, on peut alors écrire les équations du mouvement sous la forme de Lagrange :

$$(71) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_1}{dv_{1x}}\right] = \frac{\partial L_1}{\partial x_1}, \qquad \ldots,$$

en posant

$$(72) \qquad L_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \varepsilon_1(x_1, y_1, z_1, t)c^2 - F(r).$$

De même, en considérant le mouvement du premier point comme connu, celui du second point sera déterminé par les équations

$$(73) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L_2}{\partial v_{2x}}\right] = \frac{\partial L_2}{\partial x_2}, \qquad \ldots,$$

avec

$$(74) \qquad L_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \varepsilon_2(x_2, y_2, z_2, t)c^2 - F(r).$$

Il s'agit de résoudre simultanément les équations (71) et (73). En

Mécanique classique, il est possible de trouver une fonction de Lagrange L pour tout le système telle que les équations (71) et (73) s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q'}\right] = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad \left(q' = \frac{dq}{dt}\right), \tag{75}$$

q étant une quelconque des six variables $x_1, \ldots, z_2$; on sait qu'il est alors possible de définir une fonction de Jacobi $\varphi(x_1, \ldots, z_2)$ vérifiant les relations (70). J'ai montré ailleurs (1) que, pour pouvoir obtenir cette fonction L, il faut pouvoir séparer, dans L_1 et L_2, les termes dépendant des actions mutuelles de ceux qui n'en dépendent pas; cette séparation étant supposée réalisée, on prend pour fonction L la somme des termes de la deuxième sorte augmentée de la demi-somme des termes de la première sorte. On peut procéder ainsi en Mécanique classique parce qu'on néglige, dans L_1 et L_2, les termes en ε_1 et ε_2, ce qui permet d'écrire

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - F(r). \tag{76}$$

Pour qu'il puisse en être de même en Mécanique nouvelle, il faut que ε_1 et ε_2 se réduisent à une *même* fonction de la distance r; autrement dit, les termes supplémentaires d'énergie potentielle introduits par les nouvelles conceptions doivent avoir le même caractère mutuel que ceux définis par les fonctions F_1 et F_2. C'est là l'extension naturelle du principe de l'action et de la réaction. Si nous l'admettons, nous pourrons former la fonction de Lagrange du système en ajoutant au second membre de (76) le nouveau terme mutuel $-\varepsilon(r)c^2$ et nous en déduirons, comme d'habitude, l'existence d'une fonction $\varphi(x_1, \ldots, z_2)$ vérifiant les équations (70).

Comme, pour nous, les points matériels ont des coordonnées tout à fait définies, nous pourrons construire un espace de configuration sans ambiguïté. Le système des deux mobiles y sera figuré par un point représentatif dont les six composantes de vitesse seront données par les relations (70). Supposons toujours que les vitesses initiales soient données mais non pas les positions initiales; aux diverses hypothèses que nous pourrons faire sur ces positions initiales correspondront diverses trajectoires du point représentatif et, à l'ensemble de toutes les possibilités conçues simultanément, correspondra un nuage de points

(1) *Ondes et mouvements*, p. 43 et suiv.

représentatifs. Le mouvement de ce nuage est permanent et obéit à l'équation de continuité :

$$\text{(77)} \qquad \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0,$$

où $\rho(x_1, \ldots, z_2)$ est la densité du nuage, et $\vec{v}$ sa vitesse. En tenant compte de (70), cette équation s'écrit, avec des notations dont le sens est évident :

$$\text{(78)} \qquad \sum_{xyz} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial(\log \rho)}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial(\log \rho)}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{m_1} \triangle_1 \varphi + \frac{1}{m_2} \triangle_2 \varphi = 0.$$

Or, si nous considérons l'équation (67) de Schrödinger et si nous en cherchons une solution continue de la forme

$$\text{(79)} \qquad \Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) = \mathrm{A}(x_1, \ldots, z_2)\, e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$$

nous trouvons, en substituant, que A doit satisfaire la relation

$$\text{(80)} \qquad \sum_{xyz} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial(\log \mathrm{A}^2)}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial(\log \mathrm{A}^2)}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{m_1} \triangle_1 \varphi + \frac{1}{m_2} \triangle_2 \varphi = 0.$$

D'après (78) et (80), l'amplitude A de l'onde fictive (79) va donc jouer ici le même rôle que l'amplitude de l'onde continue dans le cas d'un seul point; autrement dit, le produit $\mathrm{A}^2\, dv$ va mesurer en chaque point de l'espace de configuration la probabilité de présence du point représentatif dans l'élément de volume dv.

Cette conclusion est confirmée par la remarque suivante : si les deux points sont sans action mutuelle, l'équation de Schrödinger admet comme solution le *produit* des fonctions continues Ψ relatives aux deux points et, les probabilités de présence des deux points étant alors tout à fait indépendantes, ceci est bien d'accord avec le théorème des probabilités composées.

En résumé :

1° L'équation de Schrödinger n'a de sens que s'il est possible de construire un espace de configuration, c'est-à-dire si les points matériels ont une position bien définie dans l'espace.

2° Cette équation n'est pas une véritable équation de propagation physique, mais elle fournit, par le carré de l'amplitude de la solution appropriée, la probabilité pour que le système soit dans un état donné quand on ignore la position initiale de ses constituants.

J'ajouterai qu'il paraît difficile de trouver une équation jouant un rôle analogue à (67) si l'on ne veut pas se contenter de l'approximation newtonienne.

Le beau calcul de Fermi relatif à la diffusion des électrons par un rotateur peut être regardé comme une illustration de ce qui précède [1].

V. — Résumé et remarques.

11. L'onde-pilote. — Si l'on examine l'ensemble des résultats obtenus dans la seclion II, on voit qu'ils se résument par deux formules fondamentales (40) et (49) :

$$\text{(I)} \qquad \vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi + \frac{e}{c}\vec{A}}{\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}},$$

$$\text{(II)} \qquad \rho(x, y, z, t) = \text{const.} \times a^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e\mathcal{V}\right).$$

Je suis parvenu à la première de ces relations (dont la seconde est une conséquence) par le principe de la double solution. Ce principe se vérifie dans le cas de l'absence de champ, mais reste une hypothèse dans le cas général. Il est, à mon avis, nécessaire de conserver, même en Micromécanique, la notion d'atomicité de la matière, ne serait-ce que pour donner un sens à l'équation (67) de Schrödinger. Mais si l'on ne veut pas invoquer le principe de double solution, il est possible d'adopter le point de vue suivant : on admettra l'existence, en tant que réalités distinctes, du point matériel et de l'onde continue représentée par la fonction Ψ et l'on prendra comme postulat que le mouvement du point est déterminé en fonction de la phase de l'onde par l'équation (I). On conçoit alors l'onde continue comme guidant le mouvement de la particule. C'est une onde-pilote.

En prenant ainsi l'équation (I) comme postulat, on évite d'avoir à la justifier par le principe de double solution; mais ce ne peut être, je crois, qu'une attitude provisoire. Il faudra bien, sans doute, *réincorporer* le corpuscule dans le phénomène ondulatoire et l'on sera probablement ramené à des idées analogues à celles qui ont été développées plus haut.

Je vais indiquer deux des applications les plus importantes des formules (I) et (II).

---

[1] *Z. Physik*, t. 40, 1926, p. 399.

Pour la lumière, l'onde continue Ψ est celle qu'envisage l'Optique classique et puisque, d'après (II), la densité des photons est proportionnelle au carré de l'amplitude, les phénomènes de l'Optique ondulatoire vont être prévus de même par l'ancienne et par la nouvelle théorie de la lumière.

Nos formules fondamentales paraissent aussi conduire à justifier une des hypothèses de M. Schrödinger. Considérons un ensemble d'atomes d'hydrogène dont l'état est défini, au point de vue de Schrödinger, par une même fonction Ψ somme de fonctions fondamentales. Pour nous, l'électron a dans chaque atome une position et une vitesse bien déterminées, mais si, par la pensée, nous superposons tous les atomes, nous obtenons une sorte d'atome moyen où la densité de l'électricité est évidemment donnée, à l'approximation newtonienne, d'après (II), par

$$\delta = e\rho = \text{const.} \times a^2 = \text{const.} \Psi\overline{\Psi}.$$

Cette expression est bien celle qu'a proposée Schrödinger; elle nous apparaît ici comme définissant une sorte de densité moyenne.

Il est du reste aisé de retrouver, en se plaçant à ce point de vue, toutes les formules de la théorie des matrices d'Heisenberg sous la forme qui leur a été donnée par Schrödinger.

12. **Les états contraints du point matériel.** — Dans le Mémoire déjà cité, M. Schrödinger a donné l'expression du tenseur énergie-quantité de mouvement correspondant aux ondes continues Ψ. Si l'on attribue aux ondes continues le sens précisé plus haut, ce tenseur se décompose en un tenseur donnant l'énergie et la quantité de mouvement des particules et en un tenseur qui correspondrait à des tensions existant dans le phénomène ondulatoire autour des particules. Ces tensions sont nulles dans les états mécaniques conformes aux anciennes dynamiques : elles caractérisent les états nouveaux prévus par la Mécanique ondulatoire [ceux des formules (13), par exemple], qui apparaissent ici comme des états contraints du point matériel.

Cette remarque permet de lever une difficulté relative à la pression exercée sur une paroi par un flux de corpuscules. D'ordinaire, on calcule cette pression en supposant que les corpuscules rebondissent sur la paroi et lui communiquent par choc une certaine impulsion; c'est ainsi qu'on prévoit la pression d'un gaz en théorie cinétique ou celle d'un rayonnement noir dans la théorie corpusculaire de la lumière.

Mais, au point de vue de la Mécanique ondulatoire, il existe au voisinage de la paroi un état d'interférence dû à la superposition des ondes incidentes et réfléchies, et l'application de la formule (1) montre que les particules ne viennent plus frapper la paroi. Comment celle-ci subit-elle alors une pression? Ce ne peut être que par l'intermédiaire des tensions qui règnent dans la région d'interférence. Du fait de ces tensions, la paroi doit subir la même pression que si les particules lui communiquaient une impulsion en venant rebondir à sa surface : c'est bien ce que montre un calcul effectué en se servant des formules de Schrödinger.

COMMENTAIRES SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT (A.4) AJOUTÉS PAR L'AUTEUR POUR LE PRÉSENT OUVRAGE

L'article qui précède a été écrit au printemps de 1927 : il résumait les réflexions que je poursuivais depuis quatre ans sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire et qui m'avaient déjà conduit à écrire les trois brèves Notes reproduites en A.1, A.2 et A.3. J'avais aussi écrit à cette époque un fascicule du *Mémorial des Sciences physiques* sous le titre *La Mécanique ondulatoire* (Gauthier-Villars, 1928) où l'on retrouve le même genre d'idées, mais moins complètement développées.

Au moment où j'ai rédigé cet article du *Journal de Physique*, on ne connaissait encore que la forme non relativiste de la Mécanique ondulatoire correspondant à l'équation d'ondes tout à fait classique proposée au début de 1926 par M. Schrödinger et la forme relativiste à une seule fonction d'onde dont l'équation de propagation avait été trouvée presque simultanément en juillet 1926 par de nombreux auteurs (De Donder, Louis de Broglie, Klein, Gordon, Kudar, Fock, etc.). C'est cette équation relativiste contenant un seul Ψ, qui contient comme approximation la forme non relativiste, que j'ai prise pour base dans mon article du *Journal de Physique*. Peu après, M. Dirac a fait connaître sa belle théorie de l'électron à spin qui emploie une fonction d'onde à quatre composantes et qui repose sur un système d'équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre. Comme à cette époque j'avais abandonné ma tentative d'introduire l'idée de double solution, je n'ai pas cherché à l'adapter à la théorie de Dirac. Mais cette adaptation ne paraît pas comporter de difficultés essentielles : on trouvera plus loin dans les documents B.3 et B.4 des indications sur la façon dont elle semble pouvoir être effectuée. La généralisation au cas des particules de spin supérieur à $\frac{h}{4\pi}$ (par exemple aux particules de spin $\frac{h}{2\pi}$ telles que le photon et sans doute certains mésons) paraît aussi devoir se faire assez facilement.

Je voudrais maintenant présenter quelques remarques au sujet du texte de mon Mémoire de 1927.

1° Ainsi que nous l'avons déjà noté dans l'exposé général (p. 10), il y a des raisons de croire que la singularité de l'onde u pourrait être remplacée par une région singulière où la fonction u aurait des valeurs si élevées qu'elle n'obéirait plus, même approximativement, dans cette région à l'équation linéaire qui régit *partout* la propagation de l'onde statistique continue Ψ. Dans la petite région singulière, en général mobile au cours du temps, de l'onde u, celle-ci satisferait à une équation non linéaire. Ce changement de point de vue paraît, en particulier, nécessaire si l'on veut chercher à raccorder la théorie de la double solution avec la théorie de la Relativité généralisée : ce raccord que M. Vigier cherche à effectuer d'une façon précise présenterait, nous l'avons dit à la fin de l'exposé général, un intérêt très grand.

On trouvera de nouvelles précisions sur la question des régions singulières dans le document B.2 et dans l'exposé de M. Vigier à la fin de l'Ouvrage.

2° L'un des points les plus importants de mon Mémoire de 1927 est la démonstration qui aboutit à la formule (26) que je nommerai ici la « formule du guidage »

$$\vec{v}_M = \frac{c^2 \, \overrightarrow{\text{grad}} \, \varphi_1}{W - F},$$

formule qui définit le mouvement du corpuscule-singularité en fonction du gradient de la « phase » φ_1 commune aux ondes u et Ψ.

J'avais développé cette démonstration en admettant *a priori* que la vitesse du corpuscule au point M avait même direction que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi_1$. Cette hypothèse arbitraire pourrait paraître diminuer considérablement la force probante du raisonnement. Je vais montrer, en reprenant rapidement cette démonstration, qu'il est tout à fait superflu d'introduire cette hypothèse.

Nous partons toujours de la remarque que, le corpuscule étant pour nous défini par une région singulière très petite pour l'amplitude f de l'onde u, il est naturel de supposer que, lorsqu'on s'approche du centre de la région singulière, la fonction f croît très rapidement comme l'inverse d'une puissance de la distance à ce centre de sorte que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial s}$ croît plus rapidement encore.

Considérons alors une très petite sphère contenant à son intérieur toute la région singulière de telle sorte qu'à la surface de la sphère la fonction u obéisse encore à la même équation linéaire que l'onde statistique Ψ (*voir* plus haut le 1°). Sur la surface de la sphère, la phase φ_1 a partout sensiblement la même valeur et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_1$ a sensiblement une même direction définie par le vecteur $\vec{n}$ (*fig.* 1).

Soit M un point à la surface de la sphère et $\vec{s}$ la direction de $\overrightarrow{\text{MO}}$. D'après ce qui a été dit plus haut, nous pouvons poser

$$(1) \qquad \left(\frac{f}{\frac{\partial f}{\partial s}}\right)_{\text{M},t} \simeq 0.$$

L'équation (21_2) de A.4 nous donne

$$(2) \qquad \frac{1}{c^2}(\text{W}-\text{F})\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\cos\widehat{ns} = -\frac{1}{2}f\,\Box\,\varphi,$$

puisque

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f\;\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_1 = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\cos\widehat{ns}.$$

Divisons par $\frac{\partial f}{\partial s}$, tenons compte de la relation (1) et remarquons que la vitesse v_s du déplacement le long de $\overline{\text{MO}}$ des valeurs de l'amplitude f en M à l'instant t est donnée par

$$(3) \qquad v_s = \left(\frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial s}}\right)_{\text{M},t}$$

il vient

$$(4) \qquad v_s = \frac{c^2}{\text{W}-\text{F}}\,|\,\text{grad}\,\varphi_1\,|\cos\widehat{ns}.$$

Or ceci est valable pour un point M quelconque de la surface de la petite sphère qui entoure la région singulière mobile. Mais, si $\vec{v}$ désigne la vitesse d'ensemble de la région singulière, nous lisons sur la figure

$$(5) \qquad \overline{\text{PP}'} = v, \qquad \overline{\text{MP}'} = v_s, \qquad v_s = v\cos\widehat{ns}$$

et nous trouvons, sans avoir à faire l'hypothèse inutile signalée plus haut, la formule du guidage

$$\vec{v} = \frac{c^2}{W - F}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_1 = -\frac{c^2}{W - F}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi \tag{6}$$

qui constitue l'extrapolation en dehors du domaine de l'Optique géométrique (c'est-à-dire de la Mécanique classique) de la formule $\vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,S$ de la théorie de Jacobi $\left[\text{car } \frac{W - F}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ et la formule (6) donne } p = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi\right]$.

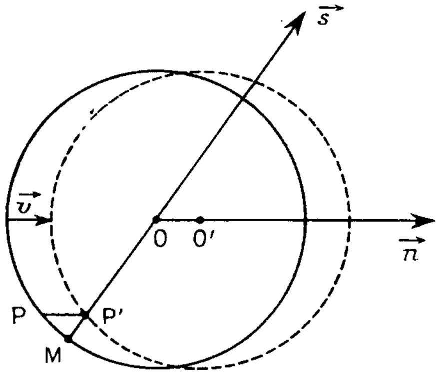

Fig. 1.

A l'approximation newtonienne, nous pouvons poser $W - F \simeq m_0 c^2$ et la formule (6) se réduit à

$$\vec{v} = -\frac{1}{m}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi = \frac{1}{m}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_1. \tag{7}$$

3° Dans le paragraphe 10 de mon Mémoire de 1927, j'avais tenté de justifier, du point de vue de la théorie de la double solution, le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire d'un système de N corpuscules dans l'espace de configuration à 3N dimensions. J'étais parvenu à la conclusion que l'onde Ψ du système dans l'espace de configuration donne seulement une image du mouvement des N corpuscules-singularités, mais qu'il ne fournit pas une description complète de l'évolution du système puisque, d'après mes conceptions, cette évolution devait comporter la propagation simultanée de N ondes u à singularités dans l'espace physique à trois dimensions. Cette manière de considérer la question paraît intéressante, mais, dans mes raisonnements de 1927, j'avais introduit l'hypothèse, arbitraire en apparence, que les potentiels quantiques sont comme les potentiels ordinaires des fonctions de la seule distance des corpuscules, du moins à l'approximation non relativiste qui doit être valable pour que la méthode de l'espace de configuration soit utilisable.

Nous avons récemment essayé, M. Vigier et moi, de perfectionner ce raisonnement en justifiant l'hypothèse arbitrairement introduite dans mon ancien Mémoire. Les résultats obtenus nous paraissent de nature à justifier l'espoir que la théorie de la double solution conduise à mieux comprendre le véritable sens de la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration naguère développée par M. Schrödinger. On se reportera pour le voir aux Notes B.5 et B.6.

Dans la Note B.7 qu'on trouvera plus loin, j'ai appliqué le même genre d'idées au cas, si intéressant en Mécanique ondulatoire, des systèmes formés de particules de même nature physique et j'ai montré que l'on pouvait espérer mieux comprendre de cette façon la question de l'indiscernabilité des particules et la véritable origine du principe d'exclusion de Pauli. Assurément le problème appelle encore de nombreuses recherches avant de pouvoir être considéré comme résolu, mais il semble qu'il y a là une voie qui pourrait être féconde.

En résumé, nos recherches récentes sur le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration me semblent avoir plutôt confirmé les idées que j'avais émises à ce sujet dans mon Mémoire de 1927 et laissent espérer un succès dans cette direction.

4° J'avais fondé, il y a vingt-cinq ans, toute ma théorie de la double solution sur un postulat que l'on pourrait appeler « le postulat de la concordance des phases ». Admettant l'existence, à côté de l'onde continue fictive Ψ, d'une onde u à singularité décrivant la réalité physique, j'écrivais en somme (¹)

$$(8) \qquad \Psi = a(x, y, z, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi(x, y, z, t)}, \qquad u = f(x, y, z, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi'(x, y, z, t)},$$

écriture qui met en évidence le module et l'argument de chaque fonction d'onde et je postulais que l'on avait *pour toutes les valeurs de* x, y, z, t :

$$(9) \qquad \varphi(x, y, z, t) = \varphi'(x, y, z, t).$$

(¹) J'emploie ici la représentation complexe des fonctions d'onde.

Cette concordance des phases s'exprimait ainsi par une condition très stricte et il était très difficile d'affirmer que l'on parviendrait à la justifier mathématiquement.

Or ce postulat n'intervient que dans les démonstrations suivantes : 1° la justification de la formule du guidage donnée dans mon Mémoire de 1927 et reprise plus rigoureusement dans le 2°; 2° la justification du passage à la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration esquissée dans mon Mémoire de 1927 et reprise dans les Notes B.4 et B.5. Si l'on examine ces démonstrations, on s'aperçoit qu'il n'est pas nécessaire pour les établir de postuler l'équation (9). Il suffit de supposer que les fonctions φ et φ' coïncident à chaque instant au voisinage de la région singulière qui constitue le corpuscule. Plus précisément, il suffit de supposer que les fonctions de phase φ et φ' ont, *ainsi que leurs dérivées premières*, les mêmes valeurs sur la petite sphère entourant la région singulière que nous avons introduite dans notre raisonnement du 2°.

Ainsi affaibli le postulat de la concordance des phases constitue une condition beaucoup moins sévère que l'équation (9) et l'on pourrait peut-être espérer que sa justification mathématique en serait rendue plus aisée.

5° Un point très important dans ma tentative de 1927 avait été de justifier du point de vue de la double solution le postulat bien connu de la Mécanique ondulatoire suivant lequel la probabilité de localiser un corpuscule en un point est proportionnelle au carré du module de la fonction d'onde continue Ψ. Constatant que, du moins à l'approximation non relativiste, on avait pour $a^2 = |\Psi|^2$ l'équation de continuité.

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \operatorname{div}\left(a^2 \vec{v}\right) = 0, \tag{10}$$

où $\vec{v}$ est défini par la formule du guidage et que, par ailleurs, la probabilité de présence de la singularité dans un élément $d\tau$ de l'espace égale à $\rho\, d\tau$ obéit aussi à l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0, \tag{11}$$

j'ai posé

$$\rho = \mathrm{K} a^2 = \mathrm{K}\, |\Psi|^2, \tag{12}$$

où la constante K dépend de la normalisation du Ψ.

L'hypothèse (12) peut paraître douteuse puisqu'il semble qu'à l'instant initial l'on puisse se donner arbitrairement la forme initiale $\rho(x, y, z, t_0)$. On peut cependant essayer de justifier l'hypothèse (12), comme je l'avais fait dans mon Mémoire de 1927, en supposant que dans l'état initial l'onde Ψ soit assimilable à une onde plane monochromatique. Alors les rayons parallèles de cette onde plane sont les trajectoires possibles de la singularité et, si l'on ignore laquelle de ces trajectoires est effectivement décrite, on est tout naturellement amené à poser à l'instant t_0 :

$$\rho(x, y, z, t_0) = \mathrm{K}a^2(x, y, z, t_0) \tag{13}$$

et ainsi les équations (10) et (11) entraînent que l'expression (12) de ρ est valable pour tout instant t ultérieur. Le raisonnement se généralise immédiatement au cas de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, le $|\Psi|^2$ étant alors le carré de l'amplitude de l'onde Ψ définie dans l'espace de configuration, ce qui permet d'englober dans la théorie le cas des interactions. Or en partant d'un état initial représenté par une onde plane monochromatique on peut toujours parvenir à atteindre, par le jeu d'interactions convenables, tout état du système qui est compatible avec l'existence de la quantification. Il semble ainsi que l'on puisse considérer la validité de la relation (12) comme justifiée pour tout état du corpuscule ou du système.

Néanmoins on peut ne pas trouver les arguments qui précèdent convaincants et M. Pauli notamment les a critiqués. La question, qui est difficile, demande à être examinée de près, car la formule (12) est une des bases essentielles de la théorie de la double solution (ou de celle de l'onde-pilote). Pour tenter de justifier entièrement la formule (12), il faudrait soit chercher à lever les objections que l'on peut faire au raisonnement exposé dans mon Mémoire de 1927 et précisé plus haut, soit démontrer une sorte de théorème ergodique prouvant que la distribution de probabilité tend à s'établir d'elle-même par le jeu des interactions ou éventuellement d'une certaine variation, inévitable à l'échelle microscopique, des conditions aux limites : c'est cette dernière voie que M. Bohm voudrait suivre en ce moment [1]. Je n'étudierai pas ici ce problème sur lequel je n'ai pas moi-même encore d'opinion définitive. Je garde cependant l'impression que l'hypothèse (12) est si naturelle qu'elle devrait, d'une façon ou d'une autre, pouvoir être justifiée.

---

[1] *Voir* plus loin sur ce point l'exposé de M. Vigier (p. 104).

6° Dans le paragraphe 11 du document A.4, j'avais montré comment l'on pouvait tenter de simplifier la théorie que j'avais obtenue en renonçant à introduire l'onde u à singularité et en se contentant d'admettre l'existence du corpuscule et de supposer que son mouvement était donné par la « formule du guidage ». Mais je sentais bien que cette théorie tronquée n'était pas satisfaisante et j'ajoutais : « Il faudra bien sans doute *réincorporer* le corpuscule dans le phénomène ondulatoire et l'on sera probablement ramené à des idées analogues à celles qui ont été développées plus haut ».

Il est curieux de constater que la théorie de l'onde-pilote à laquelle j'étais ainsi amené coïncidait avec la théorie hydrodynamique de Madelung, mais que je l'avais obtenue d'une manière tout à fait différente puisqu'au lieu de postuler la formule du guidage, je l'avais déduite en partant de l'idée des ondes à singularité. Ce n'est que vingt-cinq ans après que M. Vigier devait apercevoir l'analogie qui existe entre la démonstration que j'avais donnée en 1927 de la formule du guidage et le théorème démontré tout à fait indépendamment la même année par MM. Einstein et Grommer sur le mouvement des singularités en Relativité généralisée, théorème déjà aperçu par M. Georges Darmois.

J'ai expliqué dans l'exposé général qui figure en tête de cet Ouvrage comment j'avais été amené, à l'occasion du 5e Conseil de Physique Solvay, à me rabattre sur la théorie de l'onde-pilote et comment, ayant affaibli ma position par cet abandon de mes idées initiales sur les ondes à singularité, j'avais été finalement amené à renoncer à une théorie qui suppose le corpuscule guidé par une onde purement fictive de probabilité.

Dans mon premier cours à l'Institut Henri Poincaré dans l'année scolaire 1928-1929 [1], j'ai résumé la théorie de l'onde-pilote et j'ai montré les critiques, à mon avis insurmontables, qu'elle soulève. A la suite des travaux de M. Bohm qui reprenait la théorie de l'onde-pilote, j'ai rappelé les raisons qui m'avaient conduit à y renoncer dans une Note qu'on trouvera plus loin en B.1. Mais ainsi que je l'ai dit dans la Note B.2, un retour à la théorie primitive de la double solution ne me paraît plus impossible.

---

[1] Publié sous le titre : *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1930.

A.5. — CORPUSCULES ET ONDES Ψ

Note (¹) de M. Louis de Broglie

Présentée par M. Maurice de Broglie

Dans une Note récente (²), nous avons établi une liaison générale entre le mouvement des corpuscules de matière et de lumière et la propagation des ondes Ψ de la Mécanique ondulatoire. En conservant les mêmes notations, on peut étendre ces résultats. Il est d'abord facile de montrer que les équations de Lagrange dans la nouvelle Mécanique sont

$$(1)\qquad \frac{d}{ds}(M_0 cu_l) = \frac{1}{2} M_0 cu^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + cu^i\left(\frac{\partial P_i}{\partial x^l} - \frac{\partial P_l}{\partial x^i}\right) + c\frac{\partial M_0}{\partial x^l}.$$

On voit figurer au second membre, en plus de la force gravifique et de la force électromagnétique, une force d'un genre nouveau due à la variabilité de la masse propre. Dans les phénomènes de diffraction de la lumière, c'est cette force supplémentaire qui courbe la trajectoire des photons. Les partisans de la théorie de l'émission disaient que le bord d'un écran exerce une force sur le corpuscule de lumière; c'est en somme une idée analogue que nous retrouvons ici.

Supposons le champ gravifique nul et considérons un nuage de corpuscules associés à une même onde Ψ. En multipliant (1) par $M_0 a^2$ et en tenant compte de l'équation de continuité, on trouve aisément

$$(2)\qquad \frac{\partial}{\partial x^k}[T_i^k + \Pi_i^k + S_i^k] = 0,$$

S_i^k est le tenseur des tensions électromagnétiques; T_i^k et Π_i^k sont définis par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} T_i^k = \rho_0 M_0 u_i u^k, \\ \Pi_i^k = g^{kl}\left[2\dfrac{\partial a}{\partial x^i}\dfrac{\partial a}{\partial x^l} - g_{il}\left(g^{mn}\dfrac{\partial a}{\partial x^m}\dfrac{\partial a}{\partial x^n} - a\,\Box\, a\right)\right]. \end{cases}$$

Les T_i^k sont les composantes du tenseur énergie-quantité de mouvement des corpuscules; les Π_i^k représentent, *en moyenne*, des tensions internes existant *autour des corpuscules*. Donc, quand a n'est pas

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 14 novembre 1927, p. 1118-1119.

(²) *C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927, p. 380. *Voir* aussi L. Rosenfeld, *Ac. Belge*, t. 13, 1926, p. 573.

constant, tout se passe comme si une partie de l'énergie des corpuscules se transformait en tensions internes répandues dans l'espace environnant. Ceci nous montre que le corpuscule n'est pas un point isolé, mais le centre d'un phénomène étendu; la description dualiste par corpuscules et ondes Ψ donne un schéma clair et commode, mais qui n'atteint pas la réalité profonde.

Jusqu'ici, la grandeur Ψ a été considérée comme un scalaire. Si on la considère, au contraire, comme un vecteur d'Univers dont chaque composante Ψ_i obéit à l'équation de propagation, on obtient aisément la généralisation des formules précédentes. Il nous semble en particulier que cette théorie généralisée pourrait conduire à adopter le point de vue suivant : la grandeur vectorielle Ψ *pour les photons* serait identique au quadrivecteur potentiel de la théorie électromagnétique comme cela est suggéré par le fait que l'on a pour les photons $\square \Psi_i = 0$. Suivant cette vue, le champ électromagnétique serait formé de photons; selon les cas, ces photons seraient immobiles ou en mouvement et leur énergie se trouverait plus ou moins complètement emmagasinée sous forme de tensions internes.

B

DOCUMENTS RÉCENTS (1951-1952)

Ces documents comprennent d'abord la reproduction des deux Notes publiées par l'auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en septembre 1951 et en janvier 1952 après avoir eu connaissance des travaux de M. David Bohm, puis de ceux de M. Vigier.

Ensuite viennent une Note de l'auteur publiée en septembre 1952 portant sur l'introduction des idées de double solution et d'onde-pilote dans la théorie de l'électron de Dirac et une Note sur le même sujet publiée par M. J.-P. Vigier en novembre 1952 dans laquelle est proposée une autre solution du même problème.

Enfin, on trouvera sous les numéros B.5, B.6 et B.7 trois Notes toutes récentes, deux de l'auteur et une de M. Vigier, sur le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire d'un système de corpuscules dans l'espace de configuration tel qu'il se présente dans la conception de la double solution.

B.1. — REMARQUES SUR LA THÉORIE DE L'ONDE-PILOTE

Note (1) de M. Louis de Broglie

L'auteur résume les raisons qui lui ont fait naguère abandonner son interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de l'onde-pilote. Il compare les résultats de cette théorie avec des travaux bien connus de MM. Einstein, Podolsky et Rosen et de M. von Neumann.

Dans un travail tout récent qui m'a été aimablement communiqué par l'auteur avant sa publication, M. David Bohm reprend exactement la

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 17 septembre 1951, p. 641-644.

théorie de l'onde-pilote que j'avais développée dans une série de travaux entre 1926 et 1928 [1]. Je voudrais rappeler les raisons qui m'ont fait autrefois abandonner cette interprétation de la Mécanique ondulatoire.

J'avais remarqué que, si l'on écrit l'onde Ψ associée à un corpuscule (ou au point figuratif d'un système dans l'espace de configuration) sous la forme $\Psi = ae^{i\varphi}$ où a et φ sont des fonctions réelles des coordonnées de l'espace physique (ou de l'espace de configuration) et si l'on attribue au corpuscule (ou au système) un mouvement défini par l'équation

$$\vec{v} = -\frac{h}{2\pi m}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi,$$

où $\vec{v}$ est à chaque instant la vitesse du corpuscule (ou du point figuratif), on arrive à une interprétation de la Mécanique ondulatoire qui est d'un type classique avec localisation et mouvement bien déterminés à chaque instant. Cette théorie a pour conséquence que, si l'on ignore laquelle des trajectoires possibles se trouve décrite par le corpuscule (ou le point figuratif), la probabilité de le trouver à l'instant t au point M est donnée par $|\Psi(\mathrm{M}, t)|^2$ en accord avec le principe des interférences. J'avais également remarqué que le mouvement ainsi défini est celui qu'aurait le corpuscule, d'après la Mécanique classique, s'il était soumis, en plus des forces dérivant d'un potentiel ordinaire V, à des forces d'un type nouveau dérivant d'un « potentiel quantique »

$$\mathrm{V}_1 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\,\frac{\Box a}{a},$$

tout au moins à l'approximation newtonienne.

Très séduit par cette théorie qui maintenait les conceptions et le caractère déterministe de la Mécanique classique, je l'avais présentée au 5e Conseil de Physique Solvay, en octobre 1927. Elle y fut vivement combattue par les défenseurs de l'interprétation actuelle et notamment par M. Pauli. Je fus très frappé par leurs arguments et, après mûre réflexion, je fus amené à me rallier à leur manière de voir et à renoncer complètement à ma théorie pour des raisons que je vais résumer.

D'abord la théorie de l'onde-pilote conduit, quand on l'applique à des cas particuliers, à attribuer au corpuscule des mouvements peu

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 447; t. 184, 1927, p. 273 et t. 185, 1927, p. 380; *J. Phys. Rad.*, série VI, t. 8, 1927, p. 225; *Électrons et photons* (*Rapport au Ve Conseil de Physique Solvay*, Gauthier-Villars, 1930, p. 115); *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1930 (édition anglaise Methuen, Londres).

vraisemblables : ainsi dans un atome dans un état s, l'électron serait immobile. De plus, dans les franges de Wiener au voisinage d'un miroir, le corpuscule pourrait posséder des vitesses supérieures à celle de la lumière dans le vide. Enfin, M. Pauli avait signalé de sérieuses difficultés en ce qui concerne certains problèmes de collision.

D'autre part, la théorie de l'onde-pilote n'atteint véritablement son but, qui est un retour vers une interprétation de la Mécanique ondulatoire conforme aux conceptions classiques, que si l'onde Ψ, dont dérive le potentiel quantique, est une « réalité physique » susceptible de réagir sur le mouvement du corpuscule ou du système, car si elle n'est qu'une représentation de probabilités comme on l'admet généralement aujourd'hui, le mouvement défini par la théorie de l'onde-pilote dépendrait de possibilités qui ne sont pas réalisées, ce qui est paradoxal et nous écarte complètement des conceptions classiques. Or, il paraît impossible de considérer l'onde Ψ comme une réalité physique. Elle est, en effet, représentée par une fonction essentiellement complexe et, dans le cas général des systèmes, elle se propage dans l'espace de configuration qui est visiblement abstrait et fictif. De plus, toute mesure de localisation réduit brusquement l'étendue de l'onde Ψ et en change la forme, ce qui modifie le potentiel quantique : une mesure effectuée dans une région de l'espace peut ainsi modifier la forme de l'onde Ψ dans des régions éloignées de celles-là. Ces considérations et d'autres analogues paraissent s'opposer absolument à l'attribution à l'onde Ψ du caractère de réalité physique, et ceci me paraît toujours être la plus forte objection contre la théorie de l'onde-pilote.

La théorie de l'onde-pilote, si on l'adopte, lève évidemment les objections élevées contre l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire par MM. Einstein, Podolsky et Rosen [1]. Attribuant au point figuratif d'un système une trajectoire, inobservable peut-être mais bien déterminée, elle établit entre les mouvements des corpuscules à la fin d'une interaction une « corrélation » qui est exactement celle qu'admettaient les théories classiques, et il n'y a plus aucune difficulté. Mais, en compensation, des difficultés surgissent en ce qui concerne l'onde Ψ. En effet, la localisation d'un des corpuscules après l'interaction a pour conséquence de faire disparaître les paquets d'onde qui dans l'espace de configuration représentent les résultats possibles, mais non réalisés, de l'interaction : si l'onde Ψ est une « réalité physique », comment peut-on

---

(1) *Phys. Rev.*, t. 47, 1935, p. 777.

comprendre qu'une mesure faite dans une région de l'espace puisse modifier cette réalité physique dans d'autres régions de l'espace qui peuvent être très éloignées de la première ? Ainsi la difficulté paraît se trouver reportée du corpuscule sur l'onde.

Disons quelques mots des rapports de la théorie de l'onde-pilote avec le célèbre raisonnement par lequel M. von Neumann [1] a tenté de montrer que les distributions de probabilité admises par la Mécanique ondulatoire sont incompatibles avec l'existence de « variables cachées » permettant de rétablir le déterminisme. Il est certain que la théorie de l'onde-pilote, malgré ses difficultés et ses invraisemblances, existe et peut se développer logiquement : or c'est une théorie du type classique qui conduit aux répartitions de probabilité admises par la Mécanique ondulatoire. Comment échappe-t-elle au raisonnement de M. von Neumann ? Voici, je crois, l'explication. Le raisonnement en question admet *a priori* que toutes les distributions de probabilité actuellement admises par la Mécanique ondulatoire sont *simultanément* valables à chaque instant. Or dans la théorie de l'onde-pilote, cette hypothèse est inexacte : d'après elle, le corpuscule aurait à chaque instant une localisation et une quantité de mouvement qui seraient des « variables cachées » et, tandis que notre ignorance de la trajectoire cachée du corpuscule introduit d'une façon tout à fait classique une probabilité de localisation égale à $|\Psi|^2$, les composantes de la quantité de mouvement auraient en chaque point de la trajectoire des valeurs bien déterminées quoique inobservables et les répartitions de probabilité fournies pour ces composantes par l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire ne leur seraient aucunement applicables. Ces répartitions de probabilité ne seraient valables qu'*après* l'interaction avec un appareil de mesure approprié quand on ne connaîtrait pas le résultat de la mesure. Les deux répartitions de probabilité données par l'interprétation actuelle pour la localisation et la quantité de mouvement ne seraient donc pas simultanément valables, ce qui ferait tomber le raisonnement de M. von Neumann. Notons que la façon dont la théorie de l'onde-pilote parvient ainsi à éviter les conclusions de M. von Neumann porte atteinte à l'élégante symétrie introduite par l'actuelle théorie des transformations entre la représentation q et la représentation p, l'interprétation physique de ces deux représentations devenant différente.

---

(1) *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*, Alcan, Paris, 1946, p. 216 et suiv.

En résumé, l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de l'onde-pilote, sur laquelle le travail de M. Bohm ramène l'attention, me paraît toujours se heurter à des difficultés insurmontables, principalement en raison de l'impossibilité d'attribuer à l'onde Ψ une réalité physique ou d'admettre que le mouvement d'un corpuscule est déterminé par des mouvements possibles qui ne sont pas réalisés.

B.2. — SUR LA POSSIBILITÉ D'UNE INTERPRÉTATION CAUSALE ET OBJECTIVE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Note (1) de M. Louis de Broglie

L'auteur examine comment il pourrait être possible de reprendre l'interprétation causale et objective de la Mécanique ondulatoire qu'il avait proposée en 1927 sous le nom de « théorie de la double solution ».

Développant une remarque que j'ai récemment ajoutée à une Note de M. J.-P. Vigier (2), je voudrais expliquer pourquoi ma pensée se reporte en ce moment vers une tentative que j'avais faite autrefois et ensuite abandonnée.

En 1926-1927 (3), j'avais essayé de développer une interprétation causale et objective de la Mécanique ondulatoire en admettant l'hypothèse de la « double solution » suivant laquelle les équations linéaires de la Mécanique ondulatoire admettraient deux sortes de solutions : les solutions Ψ continues habituellement envisagées dont la nature statistique commençait alors à apparaître nettement et des solutions à singularité qui auraient une signification physique concrète et représenteraient des corpuscules bien localisés entourés d'un champ ondulatoire.

Arrêté par les difficultés mathématiques que présentait le développement complet de cette hypothèse, je m'étais ensuite rabattu sur une théorie plus simple (théorie de l'onde-pilote) où je considérais l'existence des corpuscules comme une donnée et je me contentais de déterminer le mouvement des corpuscules à partir de l'onde Ψ. J'ai exposé cette théorie de l'onde-pilote au Conseil de Physique Solvay de 1927 où elle fut l'objet de nombreuses critiques et par la suite je fus amené à l'aban-

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 14 janvier 1952, p. 265-268.
(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1010.
(3) *J. Phys. Rad.*, t. 8, 1927, p. 225.

donner. Ainsi que je l'ai récemment signalé [1], cette théorie vient d'être reprise par M. David Bohm. Le travail de M. Bohm est très intéressant et ses analyses des procédés de mesure semblent de nature à permettre de répondre à certaines des critiques qui m'avaient été adressées en 1927, notamment par M. Pauli. Mais cette théorie de l'onde-pilote me paraît toujours se heurter à la difficulté fondamentale qui, bien plus que les objections de M. Pauli, m'avait conduit à l'abandonner : comme l'onde Ψ n'est certainement pas une réalité physique (ne serait-ce que parce que sa normalisation est arbitraire et qu'elle se propage en général dans un espace fictif de configuration) et qu'elle est seulement une représentation de probabilités dépendant de l'état de nos connaissances, je crois impossible d'obtenir une véritable interprétation causale et objective de la Mécanique ondulatoire en supposant que le corpuscule est guidé par l'onde Ψ.

Il en est différemment dans la théorie de la double solution dont je vais rappeler le principe. Si $\Psi = ae^{i\varphi}$ est une solution complexe du type continu de l'équation d'ondes, nous admettons qu'il existe aussi une solution de la forme

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\, e^{i\varphi(x, y, z, t)}, \tag{1}$$

où $\varphi(x, y, z, t)$ est la *même* fonction que dans Ψ et où f présente une singularité en général mobile. La substitution de la solution Ψ dans l'équation d'ondes conduit à la relation de continuité, classique en Mécanique ondulatoire, qui exprime la conservation du fluide de probabilité et permet la normalisation permanente du Ψ. La substitution de la solution u dans l'équation d'ondes conduit exactement de même à la relation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial n}\frac{1}{m}\left|\operatorname{grad}\varphi\right| + \frac{1}{2m} f \triangle \varphi = 0, \tag{2}$$

du moins dans le cas non relativiste ; la variable n est comptée suivant la normale à la surface $\varphi = \text{const.}$ Il est naturel de supposer que, si l'on s'approche de la singularité en suivant cette normale, f et $\frac{\partial f}{\partial n}$ sont très grands et que $\frac{\partial f}{\partial n} \gg f$. On trouve alors pour la vitesse $\vec{v}$ du corpuscule la formule fondamentale

$$\vec{v} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial t}}{\dfrac{\partial f}{\partial n}} = -\frac{1}{m}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi. \tag{3}$$

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 641.

Tout se passe donc *en apparence* comme si le corpuscule était guidé par l'onde Ψ, mais, comme φ serait *aussi* la phase de l'onde physique u, on obtiendrait ainsi une véritable théorie causale et objective de la Mécanique ondulatoire. De plus, on démontre que si l'on ignore quelle est la trajectoire suivie par le corpuscule, la probabilité de le trouver en un point M à un instant t sera $|\Psi(M, t)|^2$.

Mais il faudrait établir l'existence des solutions du type u. Or un raisonnement donné par Sommerfeld (¹) montre qu'il ne peut pas exister, dans un problème d'états quantifiés de solutions à singularité des équations d'ondes linéaires ayant la même fréquence qu'une onde Ψ stationnaire. Ce résultat prouve qu'il n'est pas possible de considérer, comme je le faisais en 1927, l'onde u comme une solution des équations linéaires de la Mécanique ondulatoire possédant une singularité au sens mathématique usuel du mot. Mais on pourrait peut-être échapper à cette objection en appelant « singularité » une très petite région singulière, en général mobile, où la fonction u prendrait une valeur si grande que l'équation d'ondes y changerait de forme, par exemple deviendrait *non linéaire*, l'équation linéaire usuelle n'étant valable pour u qu'en dehors de cette région singulière. Le raisonnement qui conduit à la formule (3) appliqué au voisinage immédiat de la région singulière paraît pouvoir subsister. Il y aurait donc quelque espoir de pouvoir ainsi raccorder la théorie de la double solution avec les idées de M. Einstein qui a toujours cherché à représenter les particules comme des régions singulières du champ et peut-être aussi de la raccorder à la théorie électromagnétique non linéaire de M. Born.

Un point important serait de justifier la formule (3) dans le cas d'un système de corpuscules en interaction, φ étant alors la phase de l'onde Ψ dans l'espace de configuration. Il faudrait montrer que ceci résulte des interactions entre les singularités d'ondes du type u se propageant dans l'espace à trois dimensions. J'avais esquissé une démonstration de ce genre dans mon article du *Journal de Physique* (²) *en considérant l'espace de configuration comme défini par les coordonnées des singularités.* Si l'on parvenait à consolider cette démonstration, on pourrait se représenter le mouvement des singularités en interaction comme s'accomplissant dans l'espace physique sans être obligé de faire appel à l'espace fictif de configuration. Poursuivant dans cette voie, on

---

(¹) Il est reproduit dans mon livre : *De la Mécanique ondulatoire à la théorie du noyau*, Paris, Hermann, t. III, 1946, p. 42 et 43.

(²) *Loc. cit.*, § 10 (voir p. 48).

pourrait obtenir une interprétation physique du principe de Pauli si l'on parvenait à montrer que pour les fermions l'onde u ne peut comporter qu'une singularité tandis qu'elle pourrait en comporter plusieurs dans le cas de bosons.

L'existence de régions singulières du champ u permettrait sans doute de rendre à l'électron une structure dont les théories quantiques paraissent présentement ressentir le besoin. Il se pourrait aussi, en accord avec une idée de M. Bohm, que dans le noyau se présentent des circonstances non prévues par les théories actuelles et qui seraient dues, dans notre manière de voir, à un empiètement des régions singulières.

Tout ceci ne constitue assurément qu'un programme assez vague dont la réalisation se heurterait à bien des difficultés. Néanmoins il ne serait pas inutile de chercher à reprendre les idées que je viens de rappeler pour voir si, plus ou moins complétées ou modifiées, elles ne pourraient pas fournir une interprétation causale et objective de la Mécanique ondulatoire conforme aux idées maintes fois développées par M. Einstein (1).

B.3. — SUR L'INTRODUCTION DES IDÉES D'ONDE-PILOTE ET DE DOUBLE SOLUTION DANS LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC

Note (2) de M. Louis de Broglie

L'auteur montre comment on pourrait essayer d'introduire ses anciennes conceptions sur l'onde-pilote et la double solution dans la théorie de l'électron de Dirac.

Comme nous l'avons rappelé dans des Notes récentes (3), nous avions développé en 1927 une interprétation causale de la Mécanique ondulatoire sous le nom de « théorie de l'onde-pilote », interprétation qui a été reprise récemment par M. David Bohm (4). Nous lui avions donné une forme particulière que nous avions nommée « théorie de la double solution » qui est la seule, nous semble-t-il, qui pourrait être acceptable.

Dans l'article du *Journal de Physique* où nous avions résumé nos conceptions (5), nous n'avions naturellement pas cherché à les appliquer

(1) *Voir* en particulier l'article final de M. Einstein dans le livre « *Albert Einstein philosopher and scientist* » (Library of living philosophers, Evanston, Illinois, 1949).

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 15 septembre 1952, p. 557-560.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 641, et t. 234, 1952, p. 265.

(4) *Phys. Rev.*, 85, 1952, p. 166 et 180.

(5) *J. Phys. Rad.*, t. 8, 1927, p. 225.

à la théorie de l'électron de Dirac qui n'existait pas encore. Si l'on cherche à le faire, on se heurte tout de suite à deux difficultés. Voici la première d'entre elles. Dans la théorie de l'onde-pilote, on fait jouer le rôle de fonction de Jacobi à la phase φ de l'onde Ψ écrite sous la forme $\Psi = a\,e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ avec a et φ réels et l'on détermine le mouvement du corpuscule par la « formule de guidage »

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}} \tag{1}$$

qui donne $\vec{v} = -\frac{1}{m}\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ à l'approximation newtonienne. La fonction φ est bien déterminée puisque, au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près, elle est égale à l'argument de la fonction complexe Ψ. Mais, en théorie de Dirac, il y a quatre composantes complexes Ψ_k de la fonction d'onde qui ont en général des arguments différents. Si nous posons

$$\Psi_k = a_k\,e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} = b_k\,e^{\frac{2\pi i}{h}\Phi_k} = b_k\,e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_k}\,e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}, \tag{2}$$

avec $a_k = b_k\,e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_k}$ et $\Phi_k = \varphi_k + \varphi$, où a_k est une fonction complexe, b_k, Φ_k, φ_k et φ étant réelles, on aura introduit une « phase commune » φ, mais cette fonction φ sera entièrement indéterminée car, si l'on choisit φ arbitrairement, il suffira de prendre pour φ_k la différence entre l'argument Φ_k de Ψ_k et φ. Pour pouvoir définir la vitesse du corpuscule par une formule analogue à (1), il faut d'abord parvenir à définir sans ambiguïté la fonction φ.

Une seconde difficulté provient de ce que, en théorie de Dirac, il y a deux quadrivecteurs courant-densité $\vec{j}$ et $\vec{j}^{(1)}$ qui, en employant les matrices γ de von Neumann et la notation $\Psi^+ = \Psi^*\gamma_4$ sont donnés par

$$\left\{\begin{aligned} j_i &= -c\sum_{1}^{4}{}_k\,\Psi_k^+\gamma_i\Psi_k, \\ j_i^{(1)} &= \frac{h}{4\pi i m_0}\sum_{1}^{4}{}_k\left(\Psi_k^+\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\Psi_k^+}{\partial x_i}\Psi_k\right) - \frac{\varepsilon}{m_0}A_i\sum_{1}^{4}{}_k\,\Psi_k^+\Psi_k. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

La « décomposition de Gordon » [1] donne $\vec{j} = \vec{j}^{(1)} + \vec{j}^{(2)}$ où $\vec{j}^{(2)}$ se

---

[1] L. DE BROGLIE, *Théorie des particules de spin $\frac{1}{2}$*, Gauthier-Villars, 1952, p. 83 et suiv.

définit à partir des densités des moments électriques et magnétiques propres de l'électron. Chacun des trois quadrivecteurs $\vec{j}$, $\vec{j}^{(1)}$ et $\vec{j}^{(2)}$ obéit à l'équation de conservation $\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \vec{j}}{\partial x^i} = 0$ et la difficulté est de savoir si l'on doit définir la vitesse du corpuscule à partir de $\vec{j}$ ou à partir de $\vec{j}^{(1)}$.

Dans notre Ouvrage sur les particules de spin $\frac{1}{2}$, nous avons montré (1) comment on pouvait former en théorie de Dirac une équation de Jacobi (J) et une équation de continuité (C) à partir des équations du second ordre en Ψ_k, en admettant l'existence d'une phase commune φ. Nous contentant de traiter le cas de l'absence de champs électromagnétiques, nous écrirons ces équations avec les notations ici employées (2) :

$$\text{(J)} \quad \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - \operatorname{grad}^2 \varphi - m_0^2 c^2\right] \sum_{k=1}^{4} a_k^+ a_k - \frac{h^2}{8\pi^2} \sum_{k=1}^{4} (a_k^+ \square a_k + \square a_k^+ a_k)$$
$$= -\frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{4} \left[\left(a_k^+ \frac{1}{c} \frac{\partial a_k}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial a_k^+}{\partial t} a_k\right) \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(a_k^+ \frac{\partial a_k}{\partial x} - \frac{\partial a_k^+}{\partial x} a_k\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right.$$
$$\left. + \left(a_k^+ \frac{\partial a_k}{\partial y} - \frac{\partial a_k^+}{\partial y} a_k\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(a_k^+ \frac{\partial a_k}{\partial z} - \frac{\partial a_k^+}{\partial z} a_k\right) \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right].$$

$$\text{(C)} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \varphi}{\partial t} a_k^+ a_k + \operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \sum_{k=1}^{4} a_k^+ a_k\right)$$
$$= -\frac{h}{2\pi i} \sum_{k=1}^{4} (a_k^+ \square a_k - \square a_k^+ a_k).$$

Dans (J) le dernier terme du premier membre correspond au potentiel quantique en h^2. Le second membre en h peut paraître surprenant : il provient en réalité de l'indétermination de la phase commune φ et l'on peut évidemment l'annuler en imposant aux phases φ_k des a_k les quatre conditions

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{4} b_k^+ b_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Si l'on admet qu'elles peuvent être vérifiées, on trouve

$$(5) \qquad j_i^{(1)} = \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^{4} b_k^+ b_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{4} b_k^+ b_k,$$

(1) *Loc. cit.*, p. 121-122.

(2) Ici on a posé $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

parce que $\Phi_k = \varphi_k + \varphi$. La valeur des $j_i^{(1)}$ étant parfaitement déterminée quand on connaît les Ψ_k, comme on le voit sur la première expression, la phase commune φ se trouve maintenant parfaitement définie (à une constante près).

Or, compte tenu de (4), le second membre de (C) se trouve être nul et l'on peut écrire (C) sous la forme

$$\sum_1^4{}_i \frac{\partial j_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Ceci nous semble prouver que c'est le quadrivecteur $\vec{j}^{(1)}$, et non le quadrivecteur $\vec{j}$, qui devrait servir à définir la vitesse $\vec{v}$ du corpuscule, car on aurait alors

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\sum_1^4{}_k \left(\Psi_k^+ \overrightarrow{\text{grad}}\, \Psi_k - \overrightarrow{\text{grad}}\, \Psi_k^+ \Psi_k\right)}{\sum_1^4{}_k \left(\Psi_k^+ \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_k^+}{\partial t} \Psi_k\right)} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \tag{7}$$

en accord avec la formule (1).

Si nous passons maintenant à la théorie de la double solution, nous devons introduire, à côté de la solution continue Ψ, une solution u à singularité de composantes

$$u_k = f_k\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} = g_k\, e^{\frac{2\pi i}{h}\Phi_k} = g_k\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi_k}\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

où f_k est une fonction complexe, Φ_k, φ_k, φ et g_k étant réelles. Nous obtiendrons encore des équations de la forme (J) et (C), mais où les f_k, amplitudes à singularité, remplaceront les a_k. Du moins, en sera-t-il ainsi dans les régions de l'espace-temps où les équations de propagation des u_k sont linéaires et identiques à celles des Ψ_k (¹). Nous imposerons aux φ_k les conditions

$$\sum_1^4{}_k g_k^+ g_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

qui nous débarrasseront encore des seconds membres de (J) et de (C) et assureront la détermination de la phase commune φ. Si, comme le postule le principe de la double solution, la phase φ est la même pour

(¹) *Voir* sur ce point : *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 265.

l'onde Ψ et pour l'onde u, il en résultera, en comparant les équations (J) pour les deux ondes, que l'on devra avoir comme expressions équivalentes du potentiel quantique

$$(10)\qquad \frac{\frac{1}{2}\sum_{1}^{4}{}_{k}(a_k^{+}\Box a_k+\Box a_k^{+}a_k)}{\sum_{1}^{4}{}_{k}a_k^{+}a_k}=\frac{\frac{1}{2}\sum_{1}^{4}{}_{k}(f_k^{+}\Box f_k+\Box f_k^{+}f_k)}{\sum_{1}^{4}{}_{k}f_k^{+}f_k}.$$

Dans la Mécanique ondulatoire relativiste à un seul Ψ, on a une seule valeur pour k et l'on peut poser $\gamma_4=1$. En écrivant a pour $|a_k|$ et f pour $|f_k|$, la relation (10) devient identique à la relation $\frac{\Box a}{a}=\frac{\Box f}{f}$ de mon Mémoire de 1927.

Les considérations qui précèdent manquent de rigueur sur certains points et ne sont que provisoires. Elles demanderaient à être approfondies et étendues s'il se montrait vraiment utile de revenir à mes idées de 1927.

B.4. — FORCES S'EXCERÇANT SUR LES LIGNES DE COURANT USUELLES DES PARTICULES DE SPIN 0, $\frac{1}{2}$ ET 1 EN THÉORIE DE L'ONDE-PILOTE

Note (1) de M. Jean-Pierre Vigier

Présentée par M. Louis de Broglie

On étend les calculs de M. L. de Broglie (2) sur le courant de Gordon aux courants $\varphi^{+}\beta^{\mu}\varphi$ tirés des équations $\frac{\hbar}{i}\beta^{\mu}D_{\mu}\varphi+\mu\varphi=0$ où les β^{μ} satisfont aux relations de commutations habituelles. On en déduit des expressions simples pour les forces qui permettent de passer à l'interprétation de la double solution en théorie unitaire.

Dans une Note récente, M. Louis de Broglie (3) a étendu ses anciennes conceptions de l'onde-pilote en choisissant comme lignes de courant des lignes différentes des lignes de courant habituelles, tangentes en chaque point au courant de Dirac.

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 10 novembre 1952, p. 1107-1109.
(2) L. de Broglie, *C. R. Acad. Sc.*, t. 187, 1927, p. 1118.
(3) L. de Broglie, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 557.

A l'exemple de M. D. Bohm [1], nous proposons au contraire de considérer ces lignes de courant comme trajectoires réelles possibles et d'étendre le calcul au cas des particules de spin o et 1.

Partons des équations d'ondes écrites sous la forme $\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$

$$\frac{\hbar}{i} D_\nu \beta^\nu \varphi + \mu\varphi = 0, \tag{1}$$

avec $D_\nu = \partial_\nu - i\varepsilon A_\nu$, $\mu = m_0 c$ et $\varepsilon = \frac{e}{\hbar c}$. Les courants correspondants $j^\nu = \varphi^+ \beta^\nu \varphi$ transformés à l'aide des équations (1) et compte tenu des relations de commutation s'écriront si l'on pose $I^{\mu\nu} = \beta^\mu\beta^\nu - \beta^\nu\beta^\mu$ et $F_{\nu\rho} = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu$:

$$j_\nu = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\hbar}{2i}(\partial_\nu\varphi^+\varphi - \varphi^+\partial_\nu\varphi) + eA_\nu\varphi^+\varphi + \frac{\hbar}{4i}\partial_\alpha\varphi^+ I^\alpha{}_\nu\varphi\right] \tag{2}$$

dans le cas des particules de Dirac ($\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu = 2\delta^{\mu\nu}$) ou

$$j_\nu = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\hbar}{2i}(\partial_\nu\varphi^+\varphi - \varphi^+\partial_\nu\varphi) + 2eA_\nu\varphi^+\varphi + \frac{\hbar}{i}\partial_\alpha\varphi^+ I^\alpha{}_\nu\varphi + \frac{i\varepsilon\hbar^2}{\mu}F_{\alpha\rho}\varphi^+\beta_\alpha\beta_\nu\beta_\rho\varphi\right] \tag{3}$$

dans le cas des particules de Petiau-Kemmer pour lesquelles

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\rho + \beta^\rho\beta^\nu\beta^\mu = \beta^\mu\delta^{\nu\rho} + \beta^\rho\delta^{\nu\mu}.$$

Dans tous les cas, introduisons avec MM. de Broglie et Bohm une fonction auxiliaire S à l'aide des relations

$$\Psi_k = a_k e^{-i\frac{S+\Theta_k}{\hbar}} = e^{-i\frac{S}{\hbar}}\Phi_k, \tag{4}$$

où k désigne les composantes des spineurs. Les courants s'écriront alors :

$$j_\nu = \frac{\varphi^+\varphi}{\mu}\left[\partial_\nu S + \left\{eA_\nu + \frac{\hbar}{2i\varphi^+\varphi}(\partial_\nu\Phi^+\Phi - \Phi^+\partial_\nu\Phi) - \frac{\hbar}{4i\varphi^+\varphi}\partial_\alpha\varphi^+ I^\alpha{}_\nu\varphi\right\}\right] \tag{5}$$

et

$$j_\nu = \frac{\varphi^+\varphi}{\mu}\left[\partial_\nu S + \left\{eA_\nu + \frac{\hbar}{2i\varphi^+\varphi}(\partial_\nu\Phi^+\Phi - \Phi^+\partial_\nu\Phi) - \frac{\hbar}{2\varphi^+\varphi}\partial_\alpha\varphi^+ I^\alpha{}_\nu\varphi + \frac{\varepsilon\hbar^2}{i\mu\varphi^+\varphi}F_{\alpha\rho}\varphi^+\beta^\alpha\beta^\nu\beta^\rho\varphi\right\}\right] \tag{6}$$

soit, en introduisant la vitesse d'Univers u_ν colinéaire à $j_\nu (u^\nu u_\nu = 1)$,

---

[1] D. Bohm, Communication privée.

en posant $P_\nu =$ termes $\{ \quad \}$ dans (5) et (6) et en écrivant à l'exemple de M. de Broglie

$$M_0 = [(\varphi^+ \beta_\nu \varphi)(\varphi^+ \beta^\nu \varphi)]^{\frac{1}{2}} (\varphi^+ \varphi)^{-1} \mu'$$

($\mu' = \mu$ pour Dirac et 2μ dans les autres cas) :

$$M_0 u_\nu = \partial_\nu S + P_\nu.$$

On en déduit tout de suite l'équation de Lagrange. En effet

$$\frac{d}{ds} M_0 u_\nu = u^i \partial_i M_0 u_\nu = u^i \partial_i(\partial_\nu S + P_\nu) = u^i \partial_\nu(\partial_i S + P_i) + u^i(\partial_i P_\nu - \partial_\nu P_i)$$
$$= \partial_\nu M_0 + u^i(\partial_i P_\nu - \partial_\nu P_i),$$

compte tenu de la définition des u_ν. Il en résulte que tout se passe comme si la particule était soumise à :

— un potentiel invariant M_0;
— un potentiel quadrivecteur P_ν.

Dans le cas de Dirac on retrouve bien l'expression simple de Bohm :

$$M_0 = [(\varphi^+ \varphi)^2 + (\varphi_+ \beta^5 \varphi)^2]^{\frac{1}{2}} (\varphi^+ \varphi)^{-1} \mu,$$

compte tenu des identités de Pauli.

Passons maintenant à l'interprétation de la double solution [1]. Introduisons l'onde physique à singularité U qui définit une particule liée aux $g_{\mu\nu}$ de l'espace par la relation

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \lambda \theta_{\mu\nu}(u^+, u),$$

où $\varepsilon_{\mu\nu}$ désigne les valeurs galiléennes des $g_{\mu\nu}$, λ une fonction de forme, $\theta_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion canonique symétrique de Belinfante-Rosenfeld. Posons

$$U_k = \left[a_k(r) + \frac{b_k(r)}{r}\right] \exp\left(-i\frac{S + \theta_k}{\hbar}\right); \qquad \text{où} \quad \varphi_k = a_k \exp\left(-i\frac{S + \theta_k}{\hbar}\right)$$

satisfait à (1), r désignant la distance d'Univers à une ligne singulière L; les b_k étant déterminés de telle façon que

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} - \gamma \varepsilon_{\nu\mu} \frac{2m}{r} + \lambda \theta_{\mu\nu}(\varphi^+, \varphi).$$

Lorsque ces $g_{\mu\nu}$ satisfont aux équations de la relativité, L coïncide avec

[1] J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 869.

une géodésique de $\mathring{g}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \lambda\theta_{\mu\nu}(\varphi^+, \varphi)$ qui se confond avec la ligne de courant $\varphi^+\beta^\nu\varphi$ pourvu que $\lambda(L) = \mu'(\varphi^+\varphi M_0)^{-1}$.

De tels $g_{\mu\nu}$ définissent des particules élémentaires conformes aux conceptions de M. de Broglie. On passe au point de vue statistique en désignant par φ_L l'onde physique liée à une trajectoire L et en construisant une onde régulière $\Psi_k = A_k \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\alpha_k\right]$ telle que

$$A_k(L) = a_k(L), \qquad \partial_\mu A_k(L) = \partial_\mu a_k(L),$$
$$\alpha_k(L) = S + \theta_k \qquad \text{et} \qquad \partial_\mu \alpha_k = \partial_\mu(S + \theta_k),$$

sur chaque trajectoire L possible. On peut montrer alors que cette onde décrit correctement l'ensemble statistique des particules astreintes à suivre la congruence des trajectoires L.

B.5. — SUR L'INTERPRÉTATION DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES DANS L'ESPACE DE CONFIGURATION PAR LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION

Note (1) de M. Louis de Broglie

Approfondissant un raisonnement indiqué dans un Mémoire de 1927, l'auteur précise comment il paraît possible, dans la théorie de la double solution onde-pilote, de justifier le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration.

L'une des grandes difficultés de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par les idées de double solution et d'onde-pilote est de justifier le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration. Nous avions esquissé une démonstration de la possibilité de ce passage dans notre Mémoire de 1927 sur la double solution (2). Nous allons essayer de préciser certains points de cette démonstration en nous bornant au cas d'un système de deux corpuscules, le passage au cas de plus de deux corpuscules ne paraissant pas comporter de difficultés supplémentaires.

Nous utiliserons le lemme mathématique suivant : soient deux variables x et y et une certaine fonction u de x et de y. Considérons

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1er décembre 1952, p. 1345-1348.
(2) *J. Phys. Rad.*, série VI, t. 8, 1927, p. 225.

trois fonctions $F_1(x, u)$, $F_2(y, u)$ et $F(x, y, u)$ et supposons que nous ayons entre ces fonctions les relations

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_y, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_x.$$

Alors on a nécessairement

$$(1) \qquad F_1(x, u) = F_{11}(x) + F_{12}(u), \qquad F_2(y, u) = F_{22}(y) + F_{21}(u),$$

avec $F_{12} = F_{21}$ et

$$(2) \qquad F(x, y, u) = F_{11}(x) + F_{22}(y) + F_{12}(u).$$

Ce lemme, dont la démonstration est aisée, étant admis, envisageons un système de deux corpuscules de nature différente dans l'espace physique à trois dimensions. Chaque point de cet espace sera repéré par le rayon-vecteur $\vec{R}$ qui le joint à l'origine des coordonnées. $\vec{R}_1(t)$ et $\vec{R}_2(t)$ définissent donc les positions à l'instant t des deux corpuscules. Les vecteurs

$$\vec{r}_1(t) = \vec{R} - \vec{R}_1(t) \qquad \text{et} \qquad \vec{r}_2(t) = \vec{R} - \vec{R}_2(t)$$

définissent de même la position du point $\vec{R}$ par rapport à chacun des deux corpuscules à l'instant t. Enfin nous posons

$$\vec{r}_{12}(t) = \vec{R}_1(t) - \vec{R}_2(t).$$

Nous supposons valables pour le mouvement de chacun des corpuscules dans un champ donné les idées de la théorie de la double solution. Si donc nous supposons connu le mouvement $\vec{R}_2(t)$ du second corpuscule, nous pourrons écrire pour le premier corpuscule l'équation de Jacobi généralisée au point $\vec{R} = \vec{R}_1$:

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \equiv E_1 = \frac{1}{2m_1}(\text{grad}_1\,\varphi_1)^2 + F_1 + F_{12} + Q_1,$$

où Q_1 est le potentiel quantique égal, à l'approximation newtonienne que la Mécanique ondulatoire de l'espace de configuration suppose implicitement valable, à

$$Q_1 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_1}\left(\frac{\Delta a_1}{a_1}\right)_{\vec{R}=\vec{R}_1}.$$

Dans cette équation $\varphi_1\left(\vec{R}, \vec{r}_{12}, t\right)$ est la phase des ondes u_1 et Ψ_1 du premier corpuscule dans le champ de force connu créé par le second, compte tenu s'il y a lieu de la présence d'obstacles provoquant interférences et diffraction. $a_1\left(\vec{R}, \vec{r}_{12}, t\right)$ est l'amplitude de l'onde continue Ψ_1. Le symbole $\text{grad}_1 \varphi_1$ signifie $(\text{grad}\,\varphi_1)_{\vec{R}=\vec{R}_1}$. La fonction $F_1\left(\vec{R}, t\right)$ est un potentiel extérieur agissant éventuellement sur le premier corpuscule, $F_{12}\left(\vec{r}_{12}\right)$ est le potentiel représentant l'action du second corpuscule sur le premier. L'énergie E_1 n'est pas constante en général.

Mais nous pouvons au contraire supposer connu le mouvement $\vec{R}_1(t)$ du premier corpuscule et écrire l'équation de Jacobi généralisée pour le second corpuscule au point $\vec{R} = \vec{R}_2(t)$:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = E_2 = \frac{1}{2m_2}(\text{grad}_2\, \varphi_2)^2 + F_2 + F_{21} + Q_2, \tag{4}$$

où Q_2 est le potentiel quantique $Q_2 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_2}\left(\frac{\Delta a_2}{a_2}\right)_{\vec{R}=\vec{R}_2}$. Le sens des autres symboles figurant dans (4) est évident. Précisons seulement que $F_{21}\left(\vec{r}_{12}\right)$ est le potentiel représentant l'action du premier corpuscule sur le second et que l'on suppose toujours $F_{21} = F_{12}$. L'énergie E_2 n'est pas constante en général.

Passons maintenant au point de vue de l'espace de configuration où les coordonnées x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 deviennent des variables indépendantes. Si nous admettons la validité de l'équation de Schrödinger pour l'onde Ψ dans l'espace de configuration, nous pouvons écrire l'équation de Jacobi au point $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ de l'espace de configuration

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = E = \frac{1}{2m_1}(\text{grad}_1\, \varphi)^2 + \frac{1}{2m_2}(\text{grad}_2\, \varphi)^2 + F_1 + F_{12} + F_2 + Q, \tag{5}$$

où le potentiel quantique Q est donné par

$$Q = -\frac{h^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{m_1}\frac{\Delta_1 a}{a} + \frac{1}{m_2}\frac{\Delta_2 a}{a}\right)_{\vec{R}_1, \vec{R}_2}. \tag{6}$$

Dans (5), $\varphi\left(\vec{R}, \vec{R}_2, t\right)$ est la phase de l'onde Ψ dans l'espace de configuration, $a\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t\right)$ son amplitude ; F_1, F_2 et F_{12} ont les mêmes significations que précédemment.

Du point de vue de la théorie de la double solution, la représentation du système dans l'espace physique à trois dimensions est la seule qui représente la réalité physique et la représentation dans l'espace de configuration est purement fictive. Mais, comme elles doivent être compatibles, il faut avoir

$$(7)\qquad m_1\vec{v}_1 = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_1\varphi_1 = -\overrightarrow{\mathbf{grad}}_1\varphi, \qquad m_2\vec{v}_2 = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_2\varphi_2 = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_2\varphi.$$

Or, d'après (1) et (2), ceci entraîne pour les phases les formes suivantes :

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\varphi_1\left(\vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t\right) = \varphi_{11}\left(\vec{R}_1, t\right) + \varphi_{12}\left(\vec{r}_{12}, t\right) \\ \varphi_2\left(\vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t\right) = \varphi_{22}\left(\vec{R}_2, t\right) + \varphi_{21}\left(\vec{r}_{12}, t\right)\end{array}\right\} \varphi_{12} = \varphi_{21}, \\ \varphi\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t\right) = \varphi_{11}\left(\vec{R}_1, t\right) + \varphi_{22}\left(\vec{R}_2, t\right) + \varphi_{12}\left(\vec{r}_{12}, t\right). \end{array}\right.$$

Ainsi se trouve précisée, même dans le cas général où il existe des champs extérieurs et des obstacles à la propagation des ondes, la forme générale des phases φ_1 et φ_2 des ondes individuelles (u ou Ψ) et de la phase φ de l'onde fictive Ψ dans l'espace de configuration.

D'autre part, les « forces quantiques » doivent avoir la même valeur qu'on les calcule dans l'espace ordinaire ou dans l'espace de configuration, ce qui nous donne les conditions

$$(9)\qquad \overrightarrow{\mathbf{grad}}_1 Q_1 = \overrightarrow{\mathbf{grad}}_1 Q, \qquad \overrightarrow{\mathbf{grad}}_2 Q_2 = \overrightarrow{\mathbf{grad}}_2 Q,$$

d'où, par application des formules (1) et (2) :

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}Q_1\left(\vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t\right) = Q_{11}\left(\vec{R}_1, t\right) + Q_{12}\left(\vec{r}_{12}, t\right) \\ Q_2\left(\vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t\right) = Q_{22}\left(\vec{R}_2, t\right) + Q_{21}\left(\vec{r}_{12}, t\right)\end{array}\right\} Q_{12} = Q_{21}, \\ Q\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t\right) = Q_{11}\left(\vec{R}_1, t\right) + Q_{22}\left(\vec{R}_1, t\right) + Q_{12}\left(\vec{r}_{12}, t\right). \end{array}\right.$$

Nous voyons ainsi que le passage de Q_1 et Q_2 à Q se fait comme en Mécanique classique le passage de E_1 et E_2 à E, c'est-à-dire en ne prenant qu'une fois le terme d'énergie mutuelle.

Maintenant, en comparant (3), (4) et (5) et en tenant compte de (8), on obtient

$$(11)\qquad E = E_1 + E_2 - F_{12} + Q - Q_1 - Q_2,$$

puis, d'après (10),

$$(12)\qquad \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 - F_{12} - Q_{12} \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + F_1 + F_2 + F_{12} + Q_1 + Q_2 + Q_{12}. \end{aligned}$$

La formule (12) paraît satisfaisante parce qu'elle traite symétrique ment le potentiel ordinaire d'interaction F_{12} et le potentiel quantique d'interaction Q_{12} [1].

Le raisonnement précédent précise celui que nous avions donné en 1927. Il contient encore, du moins en apparence, une sorte de cercle vicieux parce que nous avons admis la validité de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration au lieu de la démontrer. M. J.-P. Vigier a évité cet inconvénient en démontrant que la validité de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration découle de la conservation du flux de particules [2].

Ce que nous avons dit dans cette Note s'applique au cas des particules de nature différente ($m_1 \neq m_2$). Nous comptons étudier dans une prochaine communication le cas des particules de même nature qui est, on le sait, très important.

B.6. — MÉCANIQUE ONDULATOIRE DANS L'ESPACE DE CONFIGURATION

Note [3] de M. JEAN-PIERRE VIGIER

Présentée par M. Louis de Broglie

L'emploi de la théorie unitaire [4] et du théorème établi par M. Régnier, sur la conservation de la charge [5], permet de justifier les hypothèses introduites par M. Louis de Broglie [6] pour démontrer la validité de l'équation de Schrödinger à plusieurs particules dans la nouvelle interprétation.

L'emploi de la théorie unitaire permet de compléter les considérations développées par M. Louis de Broglie pour retrouver l'équation de Schrödinger dans la nouvelle interprétation.

Comme M. de Broglie, nous nous limiterons au cas de deux particules chargées, à l'approximation newtonienne, en négligeant les effets de spin.

---

(1) On peut remarquer que, d'après les formules (8) et (10), φ_{12} et Q_{12} doivent dépendre des composantes du vecteur $\vec{r}_{12}$; mais il ne paraît pas nécessaire qu'elles dépendent seulement de la distance $|\vec{r}_{12}|$ des deux corpuscules.

(2) *Voir* J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1372.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, 1er décembre 1952, p. 1372.

(4) J.-P. VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1107.

(5) A. RÉGNIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1370.

(6) L. DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1345, dont nous utilisons les notations et désignons les formules (n) par les symboles B(n).

A. Conformément à cette théorie, nous pouvons lier ces particules (numérotées **1** et **2**) à deux ondes à singularité $U_j (j = 1, 2)$:

$$(1) \qquad U_j = \left(a_j + \frac{b_j}{r_j}\right) e^{+i\frac{\varphi_j}{\hbar}} = \Phi_j + \frac{b_j}{r_j} e^{+i\frac{\varphi_j}{\hbar}}.$$

telles que l'on ait

$$(2) \qquad \begin{cases} g_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(\Phi_j \Phi_j^{+}) - \sum_j \varepsilon_{\mu\nu} \dfrac{2\, m_j \gamma}{r_j}, \\ \text{avec sur les deux trajectoires singulières } L_j : \\ \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(L_j) = \varepsilon_{\mu\nu} + 2 Q_j U_{j\mu} U_{j\nu} - \varepsilon (A_{j\mu} U_{j\nu} + A_{j\nu} U_{j\mu}), \end{cases}$$

où Q_j désigne les potentiels quantiques appliqués à la particule j; r_j représente la distance d'Univers la plus courte entre le point courant et L_j; $A_{j\mu}$ et $U_{j\mu}$ sont respectivement les composantes du champ électromagnétique agissant sur la particule j ($A_1 = F_1 + F_{12}$ par exemple) et de la vitesse d'Univers de la particule j.

Ceci entraîne, comme nous l'avons vu, que les lignes du courant $U_{j\mu}$ suivent des géodésiques de la métrique continue $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ pourvu que les $g_{\mu\nu}$ satisfassent aux équations relativistes

$$(3) \qquad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi\gamma T_{\mu\nu}.$$

B. Nous allons ensuite simplifier l'étude de leurs mouvements :

1° En remarquant avec M. de Broglie que si l'on introduit les coordonnées $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ des deux lignes singulières on peut admettre, au moins à l'approximation newtonienne, qu'il existe pour chaque particule une fonction de Jacobi φ_j dont le gradient est colinéaire à l'impulsion, ce que nous écrirons

$$(4) \qquad m_j \vec{V}_j = -\overrightarrow{\text{grad}}_j \varphi_j.$$

2° En généralisant au cas considéré le procédé utilisé pour décrire l'ensemble des mouvements possibles d'une particule; c'est-à-dire en construisant une onde-enveloppe Ψ_{L_2} qui, L_2 étant fixe, enveloppe dans l'espace réel les ondes Φ_1 attachées à toutes les trajectoires L_1 possibles compatibles avec L_2.

A cause de 1°, on admettra que φ_{L_2} existe toujours et satisfait pour tout R_1 à (4).

On voit tout de suite qu'il est impossible en général de construire dans l'espace réel une phase unique $\varphi(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t)$ qui satisfasse à (4).

On passe donc obligatoirement à l'espace de configuration construit sur $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ et t et nous allons y chercher une solution particulière φ telle que

$$m_j \vec{V}_j = -\overrightarrow{\text{grad}}_j \varphi_j = -\overrightarrow{\text{grad}}_j \varphi. \tag{5}$$

Ceci constitue une nouvelle hypothèse justifiée *a posteriori* par sa réussite. φ permet de décrire simultanément dans l'espace de configuration les deux classes de mouvements considérés.

3° En imposant aux mouvements précédents deux conditions nécessaires :

I. Ils doivent satisfaire séparément à une équation de continuité car ils suivent des trajectoires géodésiques.

II. S'il existe une onde unique $\Psi\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t\right) = a \exp\left(+\frac{i\varphi}{\hbar}\right)$ capable de les décrire (donc permettant de calculer des $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ satisfaisant à 2° et 3°), elle doit obéir à une équation linéaire puisqu'ils présentent le même caractère.

C. Ces hypothèses jointes au théorème de M. Régnier [1] déterminent l'équation sur Ψ. En effet φ étant supposé existant, on peut toujours introduire une amplitude $a\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, t\right)$ satisfaisant à l'équation de continuité

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \sum_j \sum_\alpha \frac{\hbar}{m_j} \frac{\partial}{\partial x_{j\alpha}} \left(a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j\nu}}\right) = 0. \tag{6}$$

Comme

$$a^2 = \Psi^* \Psi \qquad \text{et} \qquad \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x_{j\alpha}} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x_{j\alpha}} = -\frac{2i}{\hbar} a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j\alpha}},$$

on obtient par substitution l'égalité

$$\Psi\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2i} \sum_j \sum_\alpha \frac{1}{m_j} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x_{j\alpha}^2}\right) + \text{conj} = 0$$

qui admet comme solution générale

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2i} \sum_j \sum_\alpha \frac{1}{m_j} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_{j\alpha}^2} = i K \Psi, \tag{7}$$

où K est une fonction de $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, t seulement qui multiplie Ψ à cause du caractère nécessairement linéaire de l'équation de champ. Comme par hypothèse les mouvements décrits sont identiques aux mouvements

---

[1] *Loc. cit.*

réels, il suffit de couper (7) en parties réelles et imaginaires pour retrouver l'équation (6) d'une part et d'autre part l'équation de Jacobi généralisée B (5). Cette dernière se réduit à l'équation classique lorsque $\hbar \to 0$, ce qui entraîne

$$K = \frac{1}{\hbar}(F_1 + F_2 + F_{12}).$$

D. On précise encore les choses en remarquant que les mouvements décrits dans l'espace de configuration coïncident avec les mouvements réels. (4) redonne alors les relations B(3) et B(4); le potentiel quantique Q est donné par B(6), et B(9) conduit aux égalités B(10). A partir de ces résultats on peut : 1° calculer les valeurs $\overline{g}_{\mu\nu}(L_j)$; 2° démontrer comme l'a fait M. D. Bohm [1] que a^2 décrit bien la densité statistique de particules qui suivent les congruences L_j.

B.7. — LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE PARTICULES DE MÊME NATURE ET LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION

Note [2] de M. LOUIS DE BROGLIE

Étendant au cas des particules de même nature les résultats obtenus dans une Note précédente, l'auteur montre qu'en théorie de la double solution le fait que les diverses singularités d'une même onde sont interchangeables doit entraîner le caractère symétrique ou antisymétrique de l'onde dans l'espace de configuration.

Dans une Note récente [3] nous avons analysé le passage de la Mécanique ondulatoire dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration quand on adopte le point de vue de la double solution. Nous avions raisonné sur un système de deux corpuscules de nature différente ($m_1 \neq m_2$). Nous voulons analyser ce qui se passe dans le cas de deux corpuscules de même nature ($m_1 = m_2 = m$).

L'étude d'un tel système en Mécanique ondulatoire usuelle montre que, si les régions de présence possible des deux particules empiètent l'une sur l'autre, il est nécessaire de supposer que l'onde Ψ du système dans l'espace de configuration est soit symétrique, soit antisymétrique [4].

---

(1) Communication privée à paraître dans *Physical Review*.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 10 décembre 1952, p. 1453-1455.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1345.

(4) Voir *Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules*, 2e édit., Gauthier-Villars, 1950, p. 131 et suiv.

Comme les équations d'ondes des deux particules sont les mêmes, il est naturel de supposer que, si les trains d'ondes u empiètent en partie, les ondes u se superposent et forment finalement une seule onde que l'on peut écrire sous la forme

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\, e^{\frac{2\pi i \varphi(x, y, z, t)}{h}},$$

l'amplitude f ayant ici deux singularités ponctuelles distinctes. En d'autres termes, les ondes individuelles des deux particules $u_1\left(\vec{R}, \vec{r}_{12}, t\right)$ et $u_2\left(\vec{R}, \vec{r}_{12}, t\right)$ doivent se superposer pour former une onde unique à deux singularités.

Employons les notations de la Note citée au début; supposons l'une des singularités située au point $\vec{R}_i$ et l'autre à la distance $\vec{r}_{12}$ de $\vec{R}_i$. Nous devrons avoir

$$\varphi_1\left(\vec{R}_i, \vec{r}_{12}, t\right) = \varphi_2\left(\vec{R}_i, \vec{r}_{12}, t\right) \quad \text{pour } i = 1, 2, \tag{1}$$

d'où d'après les formules (8) de la Note précédente.

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_{11}\left(\vec{R}_i, t\right) = \varphi_{22}\left(\vec{R}_i, t\right); \\ &\varphi\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t\right) = \varphi_{11}\left(\vec{R}_1, t\right) + \varphi_{11}\left(\vec{R}_2, t\right) + \varphi_{12}\left(\vec{r}_{12}, t\right), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$\varphi\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t\right)$ désignant la phase de l'onde Ψ du système dans l'espace de configuration.

De même pour les amplitudes des ondes Ψ individuelles (définies quand on suppose connu pour chaque corpuscule le mouvement de l'autre corpuscule), on devra avoir

$$a_1\left(\vec{R}_i, \vec{r}_{12}, t\right) = a_2\left(\vec{R}_i, \vec{r}_{12}, t\right) \quad \text{pour } i = 1, 2 \tag{3}$$

et l'on tire alors de la définition des potentiels quantiques et des formules (10) de la Note précédente

$$\left\{\begin{aligned} &Q_{11}\left(\vec{R}_i, t\right) = Q_{22}\left(\vec{R}_i, t\right); \\ &Q\left(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t\right) = Q_{11}\left(\vec{R}_1, t\right) + Q_{11}\left(\vec{R}_2, t\right) + Q_{12}\left(\vec{r}_{12}, t\right). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Ces formules, comme les formules (2), résultent d'ailleurs du fait que les deux singularités sont sans individualité et peuvent être échangées sans que rien ne soit modifié dans l'état ondulatoire.

Donc le potentiel quantique dans l'espace de configuration

$$(5) \qquad Q(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{(\triangle_1 + \triangle_2)\, a(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t)}{a(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t)}$$

doit être symétrique en $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$.

Si $A(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t)$ est l'amplitude d'une solution quelconque (non symétrique) de l'équation de propagation des ondes Ψ dans l'espace de configuration, on doit former une combinaison linéaire de la forme

$$(6) \qquad a(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) = CA(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) + DA(\vec{R}_2, \vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t),$$

où C et D sont des constantes complexes, telles que la quantité (où $\triangle = \triangle_1 + \triangle_2$)

$$\frac{C \triangle A(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) + D \triangle A(\vec{R}_2, \vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t)}{CA(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{r}_{12}, t) + DA(\vec{R}_2, \vec{R}_1, \vec{r}_{12}, t)} \sim Q$$

soit insensible à la permutation de $\vec{R}_1$ et de $\vec{R}_2$, c'est-à-dire à l'échange des positions des deux singularités. En écrivant explicitement cette condition, on trouve aisément $C^2 = D^2$, c'est-à-dire

$$|C| = |D| \qquad \text{et} \qquad 2 \arg C = 2 \arg D + 2n\pi,$$

d'où

$$(7) \qquad C = |C| e^{i\alpha}, \qquad D = \pm |C| e^{i\alpha} = \pm C.$$

Ces formules expriment qu'on ne doit admettre pour l'onde Ψ dans l'espace de configuration que les formes symétriques ou les formes antisymétriques, conformément au résultat classique de la Mécanique ondulatoire des systèmes formés de particules de même nature. Mais ici, en accord avec l'idée que nous avions développée dans une Note antérieure [1], ce résultat apparaît comme découlant du fait que les ondes u de corpuscules de même nature, quand elles empiètent dans l'espace, doivent se fondre en une onde unique comportant plusieurs singularités dont les rôles sont interchangeables parce que des singularités appartenant à une même onde ne possèdent pas d'individualité.

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 265.

PHYSIQUE RELATIVISTE ET PHYSIQUE QUANTIQUE

Par M. J.-P. VIGIER

Le lecteur trouvera dans l'exposé général de M. Louis de Broglie une analyse remarquable du bouleversement des idées classiques qui a suivi la découverte de la Mécanique ondulatoire.

Nous allons revenir en détail sur quelques points particuliers afin de préciser la nature des travaux qui se poursuivent actuellement à l'Institut Henri Poincaré.

Commençons par souligner avec M. L. de Broglie le caractère antagoniste des conceptions de base de la théorie des Quanta et de celles de la Relativité générale, théories qui s'opposent tant par leurs principes que par l'orientation même des recherches qu'elles *inspirent*.

Pour apprécier correctement ce caractère, revenons brièvement sur les fondements de la Physique dite classique, à la fois préquantique et prérelativiste.

1. Le modèle classique. — Admettant l'existence d'une réalité physique extérieure indépendante de l'observateur, l'immense majorité des physiciens classiques de Newton à Laplace et Maxwell ont progressivement mis au point une représentation de cette réalité qui se résume en un petit nombre de notions fondamentales.

A la base, on trouve d'abord la définition d'une sorte de cadre général où se déroulent les phénomènes : l'espace-temps euclidien classique.

Cette « scène » où évolue la matière (1) en est supposée indépendante et permet une description spatiotemporelle des phénomènes naturels.

La matière est ensuite conçue classiquement dans ce cadre comme un assemblage de particules ou points matériels en mouvement (supposés dotés d'une masse et d'un volume négligeable). Bien entendu, il ne

(1) C'est en somme le « Weltbild » des auteurs allemands (Planck).

s'agit là que d'une abstraction, d'un « modèle » pour reprendre l'expression de Descartes, à l'aide duquel les physiciens vont s'efforcer de comprendre l'évolution du monde physique réel. Ces points matériels, éléments ultimes de la matière, en constituent en quelque sorte une représentation approchée.

Enfin, dernier maillon de cette chaîne de concepts, les accélérations des corps sont attribuées à des champs de forces dont on ne s'explique pas la nature, mais qui sont rendus responsables des mouvements de la matière.

Dans ce schéma, la tâche essentielle du physicien se ramène à la découverte des deux classes de lois qui le gouvernent : lois de champ d'abord qui permettront de comprendre le mouvement des particules soumises à leur action, lois de mouvement ensuite, qui déterminent le mouvement des corps dans un champ donné. La loi de Newton et celle de Maxwell font partie de la première. Elles permettent de calculer la valeur du champ de gravitation et du champ électromagnétique dans des conditions aux limites données. Après quoi, l'expression mathématique des lois de mouvement associées $\vec{f} = m\vec{\gamma}$ et $h^{\nu} = f^{\mu\nu} j_{\mu}$ détermine le mouvement de corps placés dans les champs précédents.

Une telle conception est essentiellement déterministe, puisqu'il suffit en principe de connaître la position et la vitesse d'un point matériel à l'instant initial dans un champ de forces pour connaître son mouvement ultérieur. Cela résulte en particulier de l'expression générale différentielle donnée par Hamilton aux lois de la Mécanique. Les ambitions des physiciens classiques s'expriment notamment dans la déclaration faite par H. A. Lorentz au Congrès Solvay, face aux partisans de l'indéterminisme :

« L'image que je veux me former des phénomènes doit être absolument nette et définie et il me semble que nous ne pouvons nous former une pareille image que dans le système de l'espace et du temps. Pour moi, un électron est un corpuscule qui, à un instant donné, se trouve en un point déterminé de l'espace. Et si cet électron rencontre un atome et y pénètre et qu'après plusieurs aventures il quitte cet atome, je me forge une théorie dans laquelle cet électron conserve son individualité, c'est-à-dire que j'imagine une ligne suivant laquelle cet électron a passé à travers cet atome ».

D'étonnants succès expérimentaux vinrent d'abord confirmer cette conception. Nous ne pouvons les énumérer tous. En Astronomie notamment, la plus célèbre, la découverte de Neptune grâce aux lois de Newton, a prouvé définitivement le caractère objectif des lois de la gravitation universelle. De ce point de vue, la Mécanique classique constitue certainement une étape essentielle dans la marche de l'humanité vers la compréhension et la domination de la Nature. Mais, comme toute théorie elle finit par atteindre ses limites tant expérimentales que logiques. Nous n'insisterons pas sur les premières pour développer les secondes qui se rapportent à notre sujet.

En premier lieu, la notion même de champ a quelque chose d'inexplicable et de choquant dans le cadre du schéma précédent. Comme l'a remarqué M. L. de Broglie, l'œuvre de Maxwell, qui représentait le champ électromagnétique à l'aide de vecteurs abstraits et d'équations aux dérivées partielles, restait classique dans sa forme mais semblait difficilement conciliable avec « l'idéal cartésien d'explication par figures et mouvements ».

Pour surmonter cette difficulté, nombre de modèles à base de milieux continus fictifs, genre « éther », furent proposés, susceptibles de transmettre des actions de proche en proche. Malheureusement, le calcul et l'*expérience ont montré qu'il était impossible de mettre en évidence ou* de décrire pareil milieu dans le cas du champ électromagnétique. Cet échec retentissant, mis en évidence par Michelson, a marqué le départ des travaux d'Einstein, rompant avec le schéma classique. Ces difficultés constituent ce qu'on pourrait appeler : « l'impossibilité de décrire les champs physiques ».

En second lieu, le modèle classique ne permet pas de comprendre de façon satisfaisante la nature des lois de mouvement, c'est-à-dire, en fait, l'interaction entre les champs et les particules. Les expérimentateurs en particulier, peu disposés à se contenter d'un formalisme mathématique, soulevèrent des objections exprimées par Faraday en ces termes :

« J'éprouve une grande difficulté à concevoir des atomes de matière supposés dans les solides, fluides et vapeurs, plus ou moins séparés les uns des autres et baignant dans un espace non occupé par des atomes; et j'aperçois de grandes contradictions découlant d'un tel point de vue. Je ne peux imaginer de différence entre une petite particule dure et les forces qui l'entourent. La matière d'un atome touche celle de son voisin. La matière est par là continue d'un bout à l'autre. La matière remplit tout l'espace, ou du moins tout l'espace où s'étend la gravitation ».

Le modèle classique s'est enfin montré trop étroit pour décrire les phénomènes quantiques. Si les champs n'étaient pas constitués par des milieux matériels se développant dans l'espace-temps, comment expliquer les changements qualitatifs qui transforment du rayonnement en matière, les échanges d'énergie entre champs et particules, tels l'effet photoélectrique ou l'effet Compton, et de façon plus générale l'interaction universelle des corps ?

Ces conclusions ont ouvert la célèbre crise de la Physique classique. Elle se résume en ces quelques mots : le « modèle » classique est incapable non seulement de rendre compte de l'expérience tant macroscopique que microscopique, mais encore de décrire de façon satisfaisante son propre fonctionnement.

Une révision de ses fondements s'imposait donc. C'est à quoi se sont employées en des directions différentes la théorie de la Relativité générale et la théorie des Quanta.

2. **La Relativité générale.** — Pour surmonter les difficultés précédentes, A. Einstein eut, le premier, l'audace de bouleverser le cadre du schéma classique que nous venons d'analyser. Sa théorie de la gravitation revient en effet à fondre en une seule deux notions physiques réelles précédemment distinctes : l'espace-temps et le champ. Maintenant la conception d'un monde extérieur réel indépendant de l'observateur, la théorie de la Relativité générale abandonne l'espace-temps classique au profit d'un espace-temps décrit par une géométrie de Riemann (influencé par les corps qui s'y trouvent plongés) qui va jouer le rôle du champ classique de gravitation puisque les $g_{\mu\nu}$ qui définissent cet espace jouent aussi le rôle de potentiels de gravitation.

A notre avis, on peut interpréter cette idée comme suit : le champ n'est pas un milieu réel dans l'espace-temps extérieur ; il se confond avec lui. Ils relèvent tous deux de la même discipline mathématique : la Géométrie de Riemann. Ce schéma supprime manifestement la notion d'actions à distance.

Dans une première version, Einstein maintenait toutefois la représentation classique de la matière conçue comme assemblage de particules plongées dans ce « milieu ».

Naturellement, le problème de la détermination des lois naturelles se trouve simplifié, le choix d'une Géométrie riemannienne particulière correspondant à l'expérience déterminant du même coup les lois du champ de gravitation. Il suffit alors de définir géométriquement les trajectoires des particules pour recouvrir les deux systèmes de lois classiques. Ils restent donc ici encore logiquement indépendants; mais l'idée s'impose déjà d'un lien organique entre le champ et la matière.

Pour définir la Géométrie naturelle, Einstein, guidé par des considérations de simplicité, choisit la loi célèbre $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$, où les $R_{\mu\nu}$ dénotent le tenseur de courbure contracté.

Pour fixer les lois de mouvement, il postula que les corps suivaient les géodésiques de l'espace-temps extérieur [1]. Cela revenait, comme l'a montré Élie Cartan, à généraliser le principe d'inertie classique suivant lequel, en l'absence de forces, les corps se déplacent en ligne droite. Remarquons encore, avec Einstein, le caractère quadratique des équations de champ. On en déduit que le champ résultant de la présence de plusieurs particules dans l'espace n'est pas la somme des champs des particules individuelles isolées. La déformation de l'espace-temps induite par une particule s'intègre si profondément dans la déformation de l'espace produite par les autres particules qu'il est impossible en toute rigueur de les séparer. La détermination du champ d'un corps ne peut se faire qu'en y étudiant le mouvement d'une autre particule de masse suffisamment faible pour le perturber de façon négligeable (« test particles »). Comme en Mécanique quantique, une expérience réelle trouble nécessairement le système observé.

Ainsi cette première version de la théorie de la Relativité générale substitue au modèle classique un modèle nouveau. L'Univers serait constitué par une substance (descriptible mathématiquement comme étendue du genre espace) en perpétuelle transformation où baignent les corps matériels. Ses formes successives peuvent être décrites à l'aide d'un espace-temps quadridimensionnel où les particules suivent des lignes particulières (géodésiques). Un tel modèle ne comporte pas de système privilégié de coordonnées, ce qui entraîne la covariance des lois naturelles (les équations qui les expriment ont la même forme quel que soit le système de coordonnées curvilignes choisi). Il est déterministe puisque la donnée de conditions initiales convenables sur une surface du genre espace suffit, comme l'ont montré les études faites sur le problème de Cauchy, pour déterminer son évolution ultérieure.

Dans une série de travaux, les physiciens relativistes ont compliqué ensuite de diverses façons la géométrie du milieu afin d'y introduire les forces électromagnétiques. Cela peut se faire en particulier en utilisant les espaces affines de Cartan où l'on ajoute à la courbure riemannienne

---

(1) On appelle courbe géodésique dans un espace métrique une courbe de longueur stationnaire entre deux points P_1 et P_2, donc déterminée par la condition $\delta \int_{P_1}^{P_2} ds = 0$.

une « torsion » liée au potentiel vecteur électromagnétique. Nous reviendrons ultérieurement sur cette question.

Il est inutile de rappeler les succès expérimentaux de cette théorie, en particulier l'étonnante prévision de la déviation de la lumière par les corps célestes. Insistons plutôt sur certains caractères théoriques du nouveau modèle proposé.

Il supprime évidemment les difficultés classiques de la notion de champ. Représentés par la géométrie d'un espace-temps réel lui-même assimilable à une sorte d'éther en mouvement, les champs s'expliquent tout naturellement. Ils décrivent en somme l'interaction entre la matière sous forme de particules et la substance où elle se meut.

Comme la Mécanique classique, il laisse par contre subsister intactes les difficultés fondamentales sur lesquelles celle-ci était venue se briser. Amélioration du schéma classique, la Relativité générale ne rendait encore compte ni des phénomènes quantiques, ni de l'interaction entre les champs et les particules.

Nous reviendrons sur la première de ces difficultés.

La seconde a fait, dès 1926, l'objet des travaux de M. G. Darmois suivis en 1927 par le Mémoire d'Einstein et Grommer cité par M. L. de Broglie. Le problème posé et la solution proposée ont fait ensuite l'objet de nombreux travaux de MM. Einstein, Infeld, Wallace et Schild.

Cette solution repose sur une modification du schéma précédent et constitue ce que l'on pourrait appeler la seconde version de la Relativité générale, ou théorie de la Relativité généralisée. Elle revient à abandonner la définition de la matière, considérée comme assemblage de particules baignant dans l'espace-temps, pour lui substituer l'idée que les particules sont décrites par des singularités à symétrie spatiale sphériques en $\frac{1}{r}$ de l'espace-temps, elles-mêmes solutions des équations de champ, connues sous le nom de singularités de Schwarzschild. Il résulte alors du caractère quadratique de ces équations qu'on ne peut superposer en général deux solutions particulières, pour obtenir une nouvelle solution, sans satisfaire certaines conditions supplémentaires; il n'est possible en particulier de superposer une solution continue et une solution singulière du type précédent qu'à la condition que son centre soit disposé le long d'une géodésique du champ continu. Ainsi, les conditions supplémentaires précédentes, qui expriment en somme la compatibilité entre le champ-matériel singulier et le champ extérieur continu, sont précisément équivalentes aux lois de mouvement. C'est là un résultat remarquable, qui constitue à notre avis une des plus importantes contributions de la Relativité à l'histoire des idées en Physique. Il supprime en effet la dualité classique, qui semblait irréductible, entre lois de champ et lois de mouvement, puisque les secondes résultent automatiquement des premières, pourvu qu'on adopte une définition convenable des particules.

En outre, dans ce schéma il n'existe réellement rien d'autre qu'une substance unique du genre espace descriptible géométriquement et contenant des singularités-particules. Cette substance constitue ce que l'on pourrait appeler la matière; sa partie continue forme le champ matériel, ses singularités représentent les particules. Le champ et les particules ne sont que des aspects différents, ou, si l'on préfère, des modes d'existence distincts de la matière en mouvement.

L'évolution de cette matière peut être représentée à l'aide d'un espace-temps à quatre dimensions.

Des lois de champ, équivalentes à une définition de l'espace-temps particulier correspondant à l'espace-temps réel, complètent la description du modèle relativiste. Etant données des conditions initiales, son évolution s'ensuit automatiquement. Il est donc déterministe et permet une description simultanée des champs et des trajectoires des singularités-particules.

On peut développer ces conceptions dans le cadre de la Géométrie affine. Cela conduit à adjoindre, avec des équations voisines de la théorie quadratique électromagnétique de Born-Infeld, aux singularités gravifiques, des singularités finies du champ électromagnétique, permettant ainsi de compléter la description des champs classiques.

Mais, comme l'a noté M. de Broglie, ce « modèle » essentiellement continu est longtemps resté incapable de décrire les phénomènes quantiques. Les espoirs d'Einstein qui l'avait introduit précisément pour rendre compte de ces phénomènes ne se sont pas réalisés. Les phénomènes microscopiques lui échappant, on a été naturellement conduit à le classer dans la catégorie des modèles macroscopiques, approximations grossières d'un domaine microscopique soumis à des théories entièrement différentes : les théories quantiques.

Nous terminerons ce trop bref résumé de ce que l'on pourrait appeler la théorie classique de la Relativité générale en indiquant que toutes les tentatives pour la quantifier conformément aux idées de la théorie des quanta avaient échoué jusqu'ici. Cela tient précisément au caractère quadratique des équations qui la gouvernent, caractère incompatible avec des procédés de quantification valables seulement dans le cas des équations linéaires. C'est du reste cette même raison qui avait fait rejeter par la majorité des physiciens la théorie de Born-Infeld.

3. La théorie des Quanta. — Avant d'aborder la question des rapports entre la théorie dite de l'onde-pilote sous la forme de la double solution et la Relativité générale, nous rappellerons brièvement les principales propriétés du nouveau « modèle » proposé aux physiciens par la théorie des Quanta, telle qu'elle a été élaborée par l'École de Copenhague, théorie dont l'exposé précédent de M. de Broglie retrace les principes et le développement historique.

En premier lieu l'objectif même de la Mécanique quantique dans l'interprétation de N. Bohr s'oppose aux objectifs de la Mécanique classique et de la théorie de la Relativité. Il ne s'agit pas pour les physiciens quantistes de concevoir un « modèle » capable de reproduire les propriétés de la réalité objective, mais bien de construire un symbolisme *mathématique qui permette de prévoir les résultats expérimentaux* dans le domaine de la Microphysique. C'est là la transposition dans le domaine de la Physique d'une position connue en Philosophie sous le nom de positivisme et qui se rapproche du point de vue phénoménologique de Kirchhoff. Elle s'exprime notamment dans la déclaration de N. Bohr [1] citant Heisenberg :

« ... les phénomènes (microscopiques) sont en quelque sorte engendrés par des observations répétées » ;

ou de Jordan :

« le positivisme nous enseigne à penser que la véritable réalité physique ne réside que dans l'ensemble des résultats expérimentaux ».

C'est cette position qui conduit M. Pauli à rejeter comme « métaphysique » toute grandeur que l'expérience ne peut atteindre directement à l'heure actuelle.

De plus, dans cette interprétation, la théorie des Quanta ne se propose évidemment pas de construire un « modèle » susceptible d'une description complète en termes d'espace et de temps. Cela serait contraire à la notion même de complémentarité, et résulte immédiatement de l'analyse du phénomène de diffraction d'une onde plane de probabilité liée à une particule par une fente percée dans un écran. L'onde s'étale après son

(1) N. Bohr, *La théorie atomique et la description des phénomènes*, Gauthier-Villars, Paris, 1932.

passage à travers la fente et peut être recueillie sur un film photographique où elle se trouve répartie avec une intensité décroissante depuis le centre de l'ombre géométrique. La probabilité d'apparition du corpuscule sur l'écran est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde de Schrödinger diffractée. Mais l'apparition du corpuscule en un point A de l'écran photographique lui interdit manifestement d'apparaître en tout autre point. « Or », comme l'a remarqué M. de Broglie (1), « avec nos idées habituelles d'espace et de temps, il est impossible de comprendre comment le fait qu'un effet photographique qui s'est produit en A empêche instantanément la production d'un effet en tout autre point B du film, à moins d'admettre que le corpuscule est en réalité localisé et occupe à chaque instant un point bien défini dans l'onde associée. Toute autre conception paraît être inconciliable avec l'idée que

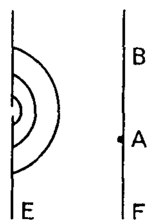

Fig. 2.

les phénomènes physiques peuvent être entièrement représentés dans le cadre de l'espace et du temps ou même de l'espace-temps einsteinien ».

Le modèle quantique comporte ensuite des particules dont on ne peut se former de représentation individuelle rigoureuse dans l'espace-temps, compte tenu de la notion de complémentarité. On trouvera dans l'exposé de M. de Broglie une analyse de cette conception et de ses conséquences. Soulignons toutefois le point suivant : tout ce que l'observateur peut connaître des propriétés des particules élémentaires lui est fourni par des fonctions d'état Ψ assimilables à des ondes de probabilité. Elles constituent des « champs quantiques » dont les propriétés (interaction avec les appareils de mesure) et l'évolution (fournie par les équations d'ondes de Schrödinger, Dirac, etc.) épuisent tout ce que nous pouvons savoir des particules qui leur sont associées.

En ce sens, on peut dire que le « modèle » quantique fait disparaître la notion de champ classique, puisque ces champs sont assimilés

(1) *Introduction à la Mécanique ondulatoire*, p. 161.

désormais à des ensembles de particules (le champ électromagnétique sera considéré comme une collection de photons, le champ nucléaire comme un ensemble de mésons, etc.)

Le système des lois se trouve ainsi ramené à des lois de champ statistiques portant sur chaque classe de particules considérées. Il ne saurait évidemment plus être question de mouvements dans une interprétation de ce type.

Ainsi la dualité classique entre champ et particules s'évanouit, au profit de la conception nouvelle d'ensemble statistique de particules, seule capable dans ce schéma de décrire les résultats expérimentaux.

Cette interprétation est complétée par une théorie de la mesure adaptée aux considérations précédentes. L'appareil de mesure y est considéré comme une sorte d'analyseur spectral au sens statistique du terme. Son interaction avec un système observé dans l'état Ψ est imprévisible ; mais il donne automatiquement comme valeur observée une des valeurs propres λ_i de l'observable A, obtenue lors d'un ensemble de mesures indépendantes, et avec une probabilité égale au carré du coefficient de Fourier du développement de Ψ suivant les fonctions propres Ψ_i ($A\Psi_i = \lambda_i \Psi_i$) de A considéré comme opérateur.

De très importants succès expérimentaux confirment l'exactitude des résultats statistiques prévus par cette interprétation de la théorie des quanta. C'est ainsi que, par exemple, Vavilov, dans des expériences d'interférence faites avec des faisceaux lumineux de très faible intensité, a mis en évidence des fluctuations d'éclat des franges brillantes (dues à l'arrivée des photons individuels) conformes aux prévisions statistiques. De la même façon on a réalisé des expériences de diffraction d'électrons à l'aide d'appareils où ne se trouvait jamais plus d'un électron à la fois. Ici encore, l'expérience a montré que l'équation de Schrödinger permettait bien de prévoir la répartition statistique de ces particules sur la figure de diffraction.

Toutefois, après une période d'éclatante réussite, la Mécanique quantique est entrée dans une période de crise. Ses succès dans le domaine atomique ont été suivis d'échecs sérieux dans le domaine nucléaire. On n'a pu fournir jusqu'ici, en particulier, de théorie satisfaisante des champs mésiques découverts expérimentalement ces dernières années. De plus, les calculs d'énergie propre des particules conduisent toujours à des énergies infinies, ce qui est physiquement inadmissible. Il semble bien que le formalisme linéaire de la théorie, conséquence nécessaire de l'interprétation statistique, et le caractère ponctuel attribué aux particules soient à la base de ces difficultés.

C'est pourquoi, comme l'a souligné M. de Broglie, il semble légitime de remettre en cause les fondements mêmes du modèle quantique. Aux critiques d'Einstein et de Schrödinger contre l'interprétation de Bohr sont venues récemment s'ajouter, dans un sens différent, celles d'un certain nombre de physiciens soviétiques parmi lesquels Fock, Blokhinzev et Frenkel. Leur discussion [1] concluait à la nécessité de faire une théorie des propriétés microscopiques de la matière sous-jacentes aux phénomènes analysés de façon probabiliste.

Nous terminerons sur ce sujet en remarquant avec M. de Broglie que toute interprétation nouvelle des phénomènes microscopiques en accord avec l'expérience devra retrouver les résultats obtenus par les lois statistiques quantiques ou en rendre compte. Elle sera donc astreinte à certaines conditions que nous allons énumérer.

— Il lui faudra d'abord expliquer pourquoi une onde statistique Ψ associée à une particule satisfaisant à l'équation de Schrödinger fournit effectivement la densité de probabilité de présence ($\rho = \Psi\Psi^*$) de cette particule dans l'espace.

— Il lui faudra ensuite rendre compte du succès de l'équation de Schrödinger dans l'espace de configuration dans le cas de n particules en interaction.

— Il lui faudra enfin comprendre le succès des équations relativistes, celle de Dirac en particulier, et retrouver les propriétés obtenues à l'aide des statistiques quantiques correspondantes, dites de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac.

4. **L'Onde-pilote (sans singularité).** — Les conditions précédentes forment une sorte de programme imposé à toute nouvelle théorie. A première vue il est difficile de le satisfaire en dehors du cadre de l'interprétation probabiliste. Toutefois diverses tentatives de réinterprétation déterministe des phénomènes quantiques ont été faites; les plus anciennes remontent aux travaux de M. de Broglie en 1927. Ainsi, il y a quelques mois, MM. Janossy en Hongrie, Ioffé et Blokhinzev en U. R. S. S. ont fait de nouveaux essais en ce sens, le premier en sortant résolument du cadre relativiste, le second en considérant les particules comme des excitations d'un champ quantique. Nous ne pouvons les analyser ici, faute de place. Ils ne sont, du reste, pas encore

(1) Traduite dans *Questions scientifiques* (*Physique*) aux Éditions de la Nouvelle Critique, Paris, avril 1952.

suffisamment développés pour qu'il soit possible de préjuger de leur avenir.

Nous discuterons successivement les deux versions possibles de la théorie de l'onde-pilote proposées par M. de Broglie, dont nous allons analyser les développements récents. La première, reprise et développée par M. D. Bohm, constitue un prolongement des idées classiques; comme la Mécanique classique, cette théorie, dite de l'onde-pilote simple, admet d'abord la réalité objective des phénomènes microscopiques et la possibilité pour le physicien d'en fournir une description correcte. Elle adopte ensuite comme cadre indépendant de ces phénomènes l'espace-temps de la Relativité restreinte, et se propose de fournir une description spatiotemporelle complète des phénomènes étudiés. Cette théorie est donc essentiellement déterministe.

L'objet de ses travaux sera, outre les champs classiques, les particules élémentaires précédemment considérées. Elle se propose de décrire les trajectoires réelles, considérées comme sous-jacentes aux phénomènes étudiés jusqu'ici dans le cadre de l'interprétation de Bohr, mais susceptibles d'expliquer la réussite des lois statistiques quantiques.

Il est clair que de telles trajectoires sont différentes des trajectoires classiques. Il est donc nécessaire d'introduire un champ de force d'un type nouveau correspondant au potentiel quantique de MM. de Broglie et Bohm. Nous discuterons plus loin la nature exacte de ce champ. Indiquons seulement qu'on l'obtient à l'approximation newtonienne à l'aide d'une onde $\Psi = a\, e^{-i\frac{\theta}{\hbar}}$, où a et θ sont deux fonctions réelles des coordonnées [1] et où $\hbar$ désigne la constante de Planck divisée par 2π. On retrouve dans ce système les deux types de lois classiques :

— des lois de champ d'abord déterminent Ψ partout, compte tenu des conditions initiales. Dans le cas considéré, on postule que Ψ obéit à l'équation de Schrödinger;

— des lois de mouvement ensuite qui seront fournies par la relation $\vec{v} = \frac{1}{m}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\theta$, où $\vec{v}$ représente la vitesse de la particule de masse m. Elles reviennent à supposer que le champ de force quantique dérive d'un potentiel scalaire proportionnel à $\frac{\Delta a}{a}$.

---

(1) On remarquera que M. Vigier désigne par $-\theta$ ce que nous avons désigné par φ dans l'exposé général. M. Vigier réserve en effet ici la lettre φ pour désigner, comme on le verra plus loin, la partie régulière de l'onde à singularité. (*Note de M. L. de Broglie.*)

On introduit enfin une hypothèse supplémentaire, éliminée ensuite par D. Bohm, destinée à rendre compte des statistiques quantiques. Elle consiste à supposer que la densité statistique d'un ensemble de particules identiques suivant les trajectoires tangentes en chaque point à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\theta$ d'une onde donnée est fournie par la relation $\rho = a^2$.

Sous cette forme la théorie présentée au Congrès Solvay par M. L. de Broglie ne survécut pas aux objections soulevées par M. Pauli, objections dont certaines du reste ont été surmontées ensuite par M. D. Bohm. Elle présente toutefois des difficultés dont on n'entrevoit pas la solution : difficultés classiques d'abord relatives au lien entre champ et particules, difficultés propres ensuite relatives à la nature du champ quantique.

Nous développerons ce dernier point qui fait ressortir la nécessité du recours à la double solution.

Quand on considère le champ Ψ attaché à une particule, deux façons de l'interpréter viennent immédiatement à l'esprit. On peut d'abord, comme l'avait fait M. de Broglie, supposer qu'il est de nature statistique (puisque $\rho = a^2$), lié à un ensemble de particules. Mais alors on ne comprend pas comment il peut déterminer les trajectoires réelles de chacune de ces particules $\left(\text{ce qui est nécessaire puisque } \vec{v} = \frac{1}{m}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\theta \text{ et que } a \text{ détermine aussi le potentiel quantique réel } \frac{\Delta a}{a}\right)$. En effet, l'ensemble des mouvements non réalisés d'un corps modifierait du même coup le mouvement de ce corps, ce qui est difficilement concevable.

On peut aussi avec M. D. Bohm supposer qu'il s'agit d'un champ physique réel déterminant le potentiel quantique. Mais on se heurte alors à une difficulté nouvelle. Soit Ψ_A et Ψ_B deux champs attachés à des particules neutres A et B de masses différentes. Ces champs ont nécessairement dans nombre de cas particuliers des dimensions macroscopiques considérables (dans le cas des ondes quasi-planes par exemple). Alors si A et B se croisent à des distances du même ordre de grandeur on ne comprend pas pourquoi le champ Ψ_A n'agirait pas sur B et réciproquement, s'il s'agit de champs physiques au sens usuel du terme. Or ils ne le font pas, comme on peut le voir en faisant se couper dans une région de l'espace deux jets de particules de masses différentes. Il en résulte que les champs envisagés n'agiraient que sur les particules qu'ils accompagnent. C'est là un caractère nouveau, inconnu des champs classiques, qu'il paraît très difficile d'expliquer convenablement sans sortir, contrairement à l'objectif même de la théorie, des conceptions objectivistes et déterministes.

Toutefois, cette version de la théorie de l'onde-pilote contient trois résultats physiques, théoriquement importants, repris tels quels par la théorie de la double solution.

Le premier, exprimé dès 1927 par M. L. de Broglie, c'est qu'il est possible d'attribuer aux particules élémentaires des familles, non classiques, de trajectoires (orthogonales aux surfaces de phase $\theta =$ const. dans le cas newtonien) capables de rendre compte des statistiques quantiques, pourvu que certaines conditions initiales particulières soient satisfaites. Il ouvre ainsi la porte à une extension du « modèle » classique au domaine microscopique en ajoutant simplement aux champs classiques un champ quantique d'un type nouveau.

Le second résultat, dû à M. David Bohm, constitue un pas en avant très important pour cette théorie. Il permet en effet d'expliquer, dans le cadre de la conception précédente, les résultats prévus par l'interprétation probabiliste de la mesure (en particulier les fameux ensembles discontinus de résultats de mesures indépendantes analysés plus haut), levant ainsi nombre d'objections possibles. Pour ce faire, D. Bohm considère les appareils employés par les physiciens comme des systèmes physiques réels ayant un caractère macroscopique qui jouent, comme on le sait, par rapport au système onde-particule le rôle d'un analyseur spectral. Ils séparent physiquement l'onde incidente en paquets d'ondes correspondant aux valeurs propres de la grandeur physique étudiée avec un appareil convenable. Pour utiliser une image classique, nous dirons que les instruments de mesure se comportent à peu près à la manière d'un prisme qui décompose en ondes lumineuses monochromatiques tout faisceau de lumière incident. Ces paquets se séparent classiquement dans l'espace au cours du temps. L'un d'entre eux contient nécessairement la particule en raison des hypothèses faites plus haut. La mesure porte en fait sur ce paquet particulier avec une probabilité précisément égale à celle que postule l'interprétation de Bohr. On peut alors montrer que cette version de la théorie redonne correctement tous les résultats statistiques prévus par l'interprétation de M. Bohr (sans seconde quantification naturellement).

Notons à ce propos que le caractère inobservable, à l'heure actuelle, des trajectoires des particules élémentaires ne signifie pas que les interprétations probabilistes et causales soient physiquement équivalentes. On doit à M. Schrödinger (¹) la description d'une expérience qui met cette distinction en évidence. Elle fait ressortir du même coup certaines difficultés de l'interprétation probabiliste apparentées aux difficultés classiques sur l'action instantanée à distance.

Considérons deux particules 1 et 2 chargées et de masses différentes, arrivant avec des répartitions de probabilités connues distribuées en trains d'ondes de dimensions limitées.

Les deux directions $\vec{1}$ et $\vec{2}$ se croisent dans une région V hors de laquelle nous pourrons négliger leur interaction.

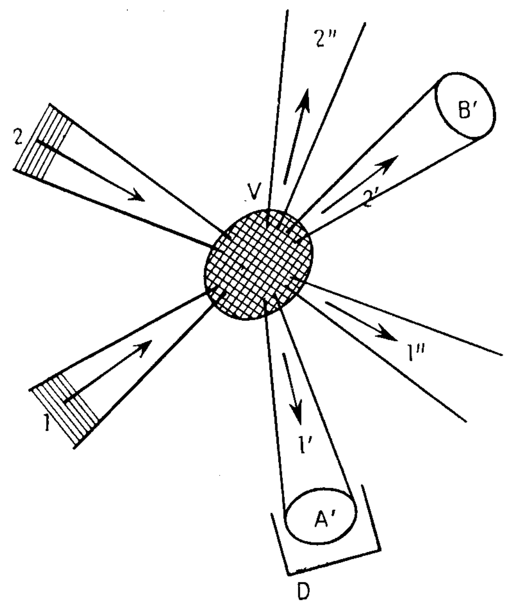

Fig. 3.

Aux directions d'incidence $\vec{1}$ et $\vec{2}$ correspondront à la sortie de V des directions réfractées probables liées deux à deux $\left(\vec{1}' \text{ et } \vec{2}', \vec{1}'' \text{ et } \vec{2}'', \text{etc.}\right)$, calculables à l'avance.

Supposons placé en A' un détecteur D qui enregistre l'arrivée de 1 dans cette région. Nous saurons alors que 2 se trouve en B'.

Dans l'interprétation probabiliste on dira que l'action (non descriptible par définition) de D sur le système des deux particules observé

(¹) *Naturwissenchaft*, t. 23, p. 787, 823 et 844.

sortant de V aura obligé 1 à venir en A′ et 2 en B′. Comme il est possible de séparer V, A′ et B′ par des distances macroscopiques, ceci signifie, comme l'a remarqué M. Schrödinger, que D agit instantanément sur les particules 1 et 2, *même si la seconde est séparée de lui par des distances macroscopiques et cela de la même façon quel que soit le détecteur employé* (plaque, compteur, etc.). C'est là de la « magie » pour reprendre l'expression de Schrödinger, car cela implique, si l'on suppose l'existence réelle des particules hors de l'observateur, l'existence d'actions physiques d'un type nouveau, inconnu jusqu'ici dans la Nature, et d'ailleurs contraire aux idées relativistes.

Dans l'interprétation causale on dira que les deux particules ont suivi des trajectoires réelles, liées en probabilité suivant la façon dont elles auront abordé V. Si la trajectoire de la particule 1 l'amène en A′ la trajectoire liée de 2 amènera celle-ci en B′, etc. L'introduction de D en A′ qui permet d'y constater la présence de 1 *n'agira pas* sur 2, qui se trouve en B′ à cause de l'interaction entre 1 et 2 subie lorsqu'elles ont traversé V. Cela supprime la difficulté précédente.

Le troisième résultat plus récent (1), dû également à David Bohm, consiste à justifier le postulat précédent $\rho = a^2$, ce qui est indispensable si l'on veut donner au champ quantique un caractère réel. Pour cela, D. Bohm considère la famille de trajectoires précédentes dans un champ quantique donné, défini par une onde Ψ. Conformément aux idées classiques, la particule correspondante parcourra ces trajectoires avec une probabilité ρ dépendant de la distribution objective de ses positions initiales. Mais cela n'est vrai en toute rigueur qu'en négligeant les perturbations sans échange d'énergie du système onde-particule avec l'univers extérieur. Si l'on en tient compte on peut montrer par contre que ρ tend rapidement vers a^2. Nous ne pouvons développer ici la démonstration. Elle repose sur des considérations analogues à celles utilisées par Boltzmann pour montrer qu'une distribution quelconque dans un gaz tend rapidement vers la distribution la plus probable (c'est-à-dire la distribution de Maxwell dans le cas stationnaire). Physiquement cela revient à dire que les statistiques quantiques correspondent aux distributions les plus probables, compte tenu de l'interaction universelle des systèmes.

Pour plus de détails on se reportera aux Mémoires de MM. L. de Broglie et D. Bohm. Remarquons pour conclure que sous cette forme la théorie de l'onde-pilote, même sans tenir compte des difficultés relatives à la

(1) *Physical Review*, 89, 1953, p. 458.

notion de champ, ne peut satisfaire aux conditions posées à la fin de la discussion précédente de l'interprétation probabiliste. En particulier on voit mal comment on pourrait expliquer la théorie des ensembles de particules ou les créations et annihilations de paires électron-positron. Il semble donc nécessaire pour rendre viable une interprétation comportant les trajectoires décrites plus haut de passer à la théorie de la double solution.

5. **Théorie de la double solution.** — La première version de cette théorie dont nous allons résumer les traits essentiels fut présentée en 1927 par M. L. de Broglie. Elle s'intègre dans le cadre du modèle classique. Pour lever les difficultés relatives à la nature du champ classique, M. L. de Broglie proposait en effet d'introduire dans l'espace-temps objectif galiléen deux ondes distinctes étroitement liées l'une à l'autre.

La première, l'onde à singularité u, est un phénomène réel, objectif, localisé dans l'espace-temps. Il constitue, si l'on veut, un champ classique d'un type nouveau. M. de Broglie assimile la particule associée à ce phénomène à une singularité spatiale en $\frac{1}{r}$ de l'amplitude de l'onde u. Elle parcourt dans l'espace-temps une ligne d'Univers L qui définit sa trajectoire au sens d'Einstein. La seconde, l'onde continue Ψ *de même phase*, servirait uniquement à décrire la statistique d'un ensemble de particules du type précédent. L'onde Ψ ne représente donc pas un phénomène objectif. Elle joue simplement le rôle attribué habituellement aux ondes statistiques. Le résultat d'une mesure statistique change brusquement Ψ, mais non pas u. Sous cette forme, la théorie n'échappe évidemment pas aux difficultés classiques relatives à la nature même des champs. Toutefois, la distinction introduite entre u et Ψ permet de lever les difficultés analysées précédemment relatives à la nature du champ quantique. En effet, la partie continue de u permet de définir un potentiel quantique réel. Plus précisément on peut admettre que l'équation d'onde sur u définit à la fois l'évolution du champ et le mouvement de sa singularité, mouvements équivalents à l'introduction d'un potentiel nouveau. On peut supposer, de plus, que l'amplitude de u décroît rapidement à partir de L si bien que deux particules séparées par des distances macroscopiques ne peuvent s'influencer mutuellement, en l'absence de potentiels classiques d'interaction. Enfin pour un choix convenable de l'équation d'onde en u, la modification des conditions aux limites, même à distance macroscopique de L, est susceptible de troubler celle-ci violemment. Cela pourrait permettre d'interpréter des expériences du genre des trous d'Young, où la présence d'une fente B par laquelle ne passe qu'une faible fraction de u suffit à modifier l'aspect de L (qui passe par la fente A).

Il résulte nécessairement de cette discussion qualitative que la formulation mathématique de cette théorie doit satisfaire à certaines conditions. En premier lieu si l'on veut utiliser les classes de mouvement définies dans la version continue de l'onde-pilote, il faut déterminer à partir de u des équations de champ capables d'appliquer L, compte tenu des conditions initiales, sur les trajectoires de la version continue. On voit sans peine, comme l'a signalé M. de Broglie, qu'en général, à

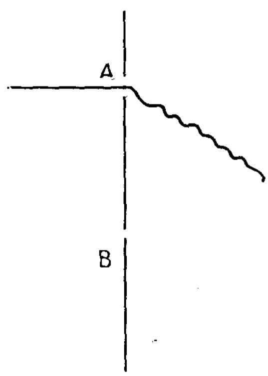

Fig. 4.

l'exception de cas particuliers, ces équations ne se réduisent pas aux équations d'ondes linéaires habituelles. Faute d'avoir pu les écrire à l'époque, sauf dans le cas particulier des ondes planes, M. de Broglie a donc été contraint d'abandonner la théorie.

Il faut montrer en second lieu que ces trajectoires possibles L sont également fournies par une onde continue Ψ obéissant précisément à ces équations linéaires. Cela pose le problème des relations entre u et Ψ.

Pour retrouver enfin la théorie des ensembles statistiques il faut démontrer que $\Psi\Psi^*$ fournit bien la densité statistique associée à cette famille de trajectoires possibles. Comme nous l'avons vu, il suffit de supposer que les deux premières conditions sont satisfaites pour que celle-ci le soit également.

Cette théorie de M. de Broglie présente un caractère remarquable. Elle s'appuie sur une idée physique identique à celle qui inspirait à la même époque les travaux de Darmois, d'Einstein et Grommer qui considéraient le champ et les particules comme des manifestations différentes d'une réalité physique unique. L'analogie va plus loin. Il suffit de se reporter aux Mémoires originaux pour constater que la forme donnée aux singularités et les procédés de démonstration employés sont semblables.

Il est difficile pour un relativiste de ne voir là qu'une coïncidence. Il est frappant que la recherche d'une solution aux difficultés soulevées par les rapports entre le champ gravifique et les particules qui s'y trouvent d'une part, le lien entre l'aspect corpusculaire et l'aspect ondulatoire de la matière d'autre part, conduisent à des tentatives mathématiquement semblables. Ces tentatives s'appuient en somme sur des hypothèses relatives à la structure même des particules élémentaires. Elles tendaient pour la première fois à orienter les recherhes en Physique théorique dans une direction nouvelle, inexplorée jusqu'alors, cherchant ainsi à résoudre les difficultés non par une réinterprétation idéaliste de la notion de connaissance, mais par l'exploration d'une réalité matérielle sous-jacente aux phénomènes étudiés. Dans le même esprit, au siècle dernier, comme l'a noté M. D. Bohm, certains théoriciens avaient supposé l'existence des atomes avant même leur découverte expérimentale.

6. **Rapports entre la double solution et la Relativité généralisée.** — Il y a plus. Une interprétation des phénomènes microscopiques qui attribue aux particules des mouvements réels est visiblement compatible avec l'idée essentielle sur laquelle repose la seconde version du modèle relativiste, tel que nous l'avons interprété précédemment.

Il est donc tentant d'essayer de fondre en une seule deux théories aussi ressemblantes et plus précisément d'intégrer la théorie de la double solution dans le cadre de la Relativité généralisée.

Pour cela, il suffit, en principe, de résoudre les problèmes suivants :

A. Donner des particules élémentaires une définition singulière, particulière, qui satisfasse les équations relativistes et fournisse comme lois de mouvement les trajectoires prévues par la théorie de la double solution.

B. Montrer que ces solutions obéissent aux lois statistiques quantiques et satisfont au programme analysé précédemment.

Leurs solutions constituent précisément l'objet des recherches poursuivies actuellement à l'Institut Henri Poincaré. Nous allons résumer brièvement quelques résultats obtenus, dans le cadre d'une version particulière des théories unitaires relativistes

A. Conformément à une suggestion de M. Infeld, on part d'un espace affine projectivement riemannien dont les coefficients de connexion sont donnés par la formule

$$\Gamma^i_{kl} = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} + \varepsilon\, \delta^i_k \mathrm{A}_l,$$

où les $\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}$ sont les coefficients de Christoffel ordinaires construits à partir des g_{ik} qui définissent la métrique, et où les A_l désignent les composantes du potentiel vecteur, ε étant une constante universelle d'interaction.

Les $g_{\mu\nu}$ sont alors calculés à l'aide d'équations de champs einsteiniens que nous écrirons sous la forme

$$\mathrm{R}_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl}\mathrm{R} = -8\pi\gamma \mathrm{T}_{kl}, \tag{1}$$

où les T_{kl} désigne l'expression $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{kl}}$ construite à partir du lagrangien

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, \log \sqrt{-\,\mathrm{dét}\, |\, g_{kl} + f_{kl}\, |}\,.$$

Dans ce cadre, il est clair que la nouvelle définition des particules-singularités sera plus compliquée que la singularité de Schwarzschild introduite précédemment et définie par un ds^2 de la forme $\left(\mathrm{A} = 1 - \gamma \frac{2m}{r}\right)$:

$$\mathrm{A}\, dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \mathrm{A}^{-1}\, dt^2. \tag{2}$$

Celle-ci suit simplement les géodésiques du champ extérieur, ce qui correspond à la Mécanique relativiste habituelle. La nouvelle singularité dépend évidemment de u. On est alors conduit en première approximation à ajouter au $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ de Schwarzschild une sorte de champ de gravitation supplémentaire $s_{\mu\nu}$, fonction de u, sorte d'onde de gravitation réelle qui accompagne la particule et réagit sur son mouvement.

Cette ondelette doit décroître rapidement à distance de la singularité de façon à n'influencer que la particule elle-même et permettre d'échapper aux difficultés signalées à propos du champ quantique. Elle est nécessairement continue. Si l'on subdivise u en une partie régulière φ et une partie singulière à l'aide d'un procédé bien défini, elle ne pourra donc dépendre que de la partie continue.

L'application du théorème relativiste suivant lequel des singularités en $\frac{1}{r}$ suivent des géodésiques du champ continu suggère alors de donner aux $s_{\mu\nu}$ une forme telle que la géodésique centrale coïncidant avec la singularité se confonde avec une ligne de courant quantique.

Des considérations géométriques, que nous ne pouvons détailler ici, conduisent alors à associer aux particules élémentaires des ondes élémentaires de gravitation liées aux représentations irréductibles du groupe de Lorentz.

Plus précisément on écrira ces solutions dans un système d'axes propres centrés sur L :

$$g_{\mu\nu} = \overset{e}{g}_{\mu\nu} + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} \tag{3}$$

avec

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + s_{\mu\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu} + \lambda \{ \mu, \nu \} \, \theta_{\mu\nu}(u^{+}, u), \\ &\simeq \varepsilon_{\mu\nu} \left(1 - \frac{2m\gamma}{r} \right) + \theta_{\mu\nu}(\varphi^{+}, \varphi) \lambda \{ \mu, \nu \}, \\ &\simeq \varepsilon_{\mu\nu} \left(1 - \frac{2m\gamma}{r} \right) + s_{\mu\nu}(\varphi^{+}, \varphi, \lambda \{ \mu, \nu \}). \end{aligned}$$

Les $\overset{e}{g}_{\mu\nu}$ représentent les champs gravifiques extérieurs, les $\varepsilon_{\mu\nu}$ les valeurs galiléennes des $g_{\mu\nu}$. Les λ sont des fonctions de forme et les $\theta_{\mu\nu}$ les tenseurs canoniques énergie-impulsion symétrisés, attachés aux équations d'ondes linéaires de Dirac et de Petiau-Kemmer, mais construits à partir de spineurs singuliers u de composantes u_k. A l'exemple de M. de Broglie, on décompose alors ces spineurs en une partie continue φ et une partie en $\frac{1}{r}$ en posant

$$u_k = \left(a_k + \frac{b_k}{r} \right) e^{-\frac{i\theta_k}{\hbar}},$$

où a_k, b_k et θ_k sont des fonctions continues.

On peut montrer alors que si l'on veut que les $g_{\mu\nu}$ satisfassent les équations de champ (1), aient bien la forme (3) et correspondent à des u_k bien définis, il faut que les φ_k obéissent aux équations quantiques écrites sous la forme de Bhabha :

$$\alpha^{\mu} \partial_{\mu} \varphi - m \varphi = 0, \tag{4}$$

où m est un coefficient indéterminé. On établit ensuite que l'on peut calculer les λ à partir des φ_k de façon à ce que les $g_{\mu\nu}$ satisfassent aux équations (1), les b_k étant alors déterminés par la définition (3).

Des conditions aux limites qui définissent λ obligent enfin la géodésique centrale à coïncider avec une ligne de courant (tangente en chaque point à $\varphi^{+} \alpha^{\mu} \varphi$) particulière. Nous disposons donc maintenant d'une solution particulière des équations (1), assemblage d'une singularité de Schwarzschild et d'une onde réelle de gravitation, dont la ligne singulière géodésique coïncide avec une ligne de courant d'une onde continue φ obéissant à des équations linéaires du type (4). Ces relations (1), (2), (3) et (4) associent en somme à l'onde u des $g_{\mu\nu}$ singuliers de l'espace-temps assimilables à une définition de la particule élémentaire, qui fournissent pour L une ligne de courant associée à une onde spinorielle continue φ.

Le calcul montre alors (¹) que tout se passe comme si la particule était soumise aux actions combinées d'un potentiel invariant et d'un potentiel quadrivecteur (responsable des effets de spin) d'origine quantique, calculables à partir des φ_k.

B. Ce résultat permet de s'attaquer aux conditions générales posées à la fin du paragraphe précédent.

a. L'emploi de la démonstration précédente de D. Bohm permet alors de montrer que $\Psi\Psi^*$ fournit la probabilité de présence des particules. On justifie bien ainsi l'emploi de Ψ en tant qu'onde statistique capable de décrire simultanément les trajectoires et la densité de probabilité des particules.

b. Partant de là, on peut déduire la théorie statistique quantique des ensembles de particules à l'approximation newtonienne. Considérons en effet, avec M. de Broglie, n particules attachées à n ondes φ_n. Il est manifestement impossible de construire une onde unique Ψ capable de décrire simultanément dans l'espace-temps réel l'ensemble des n mouvements réels possibles. On est donc conduit, comme en mécanique classique, à construire une telle onde dans l'espace de configuration bâti sur les coordonnées des n singularités-particules.

Remarquant alors que ces n mouvements satisfont nécessairement à des équations de continuité : on en déduit que l'onde Ψ satisfait à l'équation de Schrödinger, qui permet à son tour de calculer les forces s'exerçant sur chaque particule (²). On a donc satisfait à la seconde condition générale imposée plus haut. Passons à la troisième. Comme l'a remarqué M. de Broglie, les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein correspondent dans cette théorie à une hypothèse simple. Les ondes φ de spin $\frac{1}{2}$ ne portent qu'une singularité à la fois, celles de spin entier pouvant au contraire en comporter une infinité.

(¹) Dans le cas particulier de l'onde de Dirac le courant en question s'écoule autour du courant proposé par M. de Broglie, qui constitue en somme un courant moyen dépourvu de spin (*Voir* les documents B.3 et B.4).

(²) Le lecteur trouvera dans ce même volume un exposé plus détaillé des calculs (*Voir* documents B.5, B.6 et B.7).

On pourrait essayer de justifier autrement ces statistiques, à l'aide d'*un raisonnement* dont nous nous contenterons d'indiquer les grandes lignes. Si l'on admet, ce qui est la règle en théorie unitaire, que l'essentiel de la masse de l'électron est d'origine électromagnétique, le reliquat étant la masse du photon, on voit que la combinaison d'une paire fait disparaître la masse électromagnétique. Il ne reste donc que deux masses négligeables qui se comportent comme des photons si les ondes réelles précédentes de spin $\frac{1}{2}$ qui accompagnent les deux particules se combinent en une onde de spin 1. Un calcul approché donne alors pour la valeur de la constante de structure fine la valeur $\frac{1}{130}$ proche de la valeur observée $\frac{1}{137}$.

Nous ne retiendrons, en conclusion, de ces résultats, encore trop incomplets et fragmentaires, que la possibilité de développer sans contradiction la théorie de la double solution dans le cadre des théories unitaires relativistes. Ce développement basé sur la réalité du monde extérieur présente à nos yeux l'avantage essentiel d'ouvrir la voie à une explication des transformations qualitatives qui sont à la base des phénomènes quantiques. L'expérience montre en effet que les particules se transforment les unes dans les autres (le rayonnement fournit des paires; les neutrons se décomposent en mésons et en protons, etc.). Cela suggère l'existence, par-delà les différences qualitatives, de quelque chose de commun à toutes ces particules. C'est là, à mon avis, le sens profond qu'il faut donner au point de vue commun d'Einstein et de Louis de Broglie, assimilant les particules aux régions singulières d'un champ matériel.

Je ne puis m'empêcher de croire que le cadre de la Relativité généralisée, interprétée comme nous l'avons fait plus haut, suffit pour rendre compte de ces phénomènes. Conformément au rêve de Descartes, qui vouait la Physique théorique à l'étude géométrique de la matière en mouvement, il réduit la nature à une substance unique, matérielle, descriptible géométriquement, dont les formes successives, en perpétuelle transformation, rendent compte de la prodigieuse diversité des phénomènes élémentaires.

TABLE DES MATIÈRES

IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS - PARIS

143340

Dépôt légal, Imprimeur, 1953, n° 848

Dépôt légal, Éditeur, 1953, n° 490

ACHEVÉ D'IMPRIMER LE 20 AVRIL 1953