UNE

TENTATIVE D'INTERPRÉTATION

CAUSALE ET NON LINÉAIRE

DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION)

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs. In-8 de VI-208 pages; 1949.

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*). In-8 de VI-224 pages; 1950.

La théorie des particules de spin 1/2 (**Électrons de Dirac**). In-8 (16-25), de 164 pages; 1951.

Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. In-8 de VII-120 pages, 14 figures. 2ᵉ édition; 1951.

Éléments de la théorie des Quanta et de la Mécanique ondulatoire (*Collection de Physique théorique et Physique mathématique*). In-8 de 302 pages, 31 figures; 1953.

La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? (Collection « *Les Grands Problèmes des Sciences* »). In-8 de VIII-116 pages, 4 figures; 1953.

EN COLLABORATION AVEC MAURICE DE BROGLIE

Introduction à la Physique des rayons X et des rayons γ. In-8 de 201 pages, avec 27 figures et 11 planches. (*Sous presse.*)

UNE

TENTATIVE D'INTERPRÉTATION
CAUSALE ET NON LINÉAIRE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION)

PAR

Louis de BROGLIE

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA SORBONNE

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1956

PRÉFACE

L'on dit parfois que, sur ses vieux jours, l'homme revient vers ce qui l'a attiré dans sa jeunesse. Peut-être est-ce pour cette raison que, depuis quatre ans environ, s'est posée à mon esprit la question suivante : les conceptions qui avaient orienté mes recherches de 1922 à 1928 lors de mes premiers travaux sur la Mécanique ondulatoire ne seraient-elles pas plus exactes et plus profondes que celles qui ont prévalu depuis ?

Dès 1923, j'avais aperçu clairement qu'il fallait associer la propagation d'une onde au mouvement de tout corpuscule, mais l'onde continue du type de celles de l'Optique classique que j'avais été amené à considérer et qui est devenue l'onde Ψ de la Mécanique ondulatoire usuelle, ne me paraissait pas décrire exactement la réalité physique : seule sa *phase*, directement reliée au mouvement du corpuscule, me semblait avoir une signification profonde et c'est pourquoi j'avais nommé l'onde que j'associais au corpuscule « l'onde de phase », dénomination aujourd'hui bien oubliée, mais qui pour moi avait sa raison d'être. Cependant, au fur et à mesure que les travaux d'autres savants faisaient progresser la Mécanique ondulatoire, il devenait de jour en jour plus évident que l'onde Ψ avec son amplitude continue ne pouvait servir qu'à des prévisions statistiques : aussi s'orientait-on peu à peu vers l'interprétation « purement probabiliste » dont MM. Born, Bohr et Heisenberg furent les principaux promoteurs. Étonné de cette évolution qui ne me paraissait pas conforme à la mission « explicative » de la Physique théorique, j'ai été amené à penser vers 1925-1927 qu'il y avait lieu de considérer dans tout problème de

Mécanique ondulatoire deux solutions couplées de l'équation des ondes : l'une, l'onde Ψ, exacte par sa phase, mais qui, à cause du caractère continu de son amplitude, n'a qu'une signification statistique et subjective; l'autre, l'onde u, ayant même phase que l'onde Ψ, mais dont l'amplitude présente de très hautes valeurs autour d'un point de l'espace et qui, précisément en raison de cette singularité locale (qui peut, d'ailleurs ne pas être une singularité au sens strict des mathématiciens) est susceptible de décrire objectivement le corpuscule. J'obtenais ainsi, en accord avec les conceptions de M. Einstein, ce qu'il m'avait toujours semblé nécessaire de chercher : une image du corpuscule où celui-ci apparaît comme le centre d'un phénomène ondulatoire étendu auquel il est intimement incorporé. Et, grâce au parallélisme postulé par la théorie entre l'onde u et l'onde Ψ, cette dernière conservait, me semblait-il, toutes les propriétés statistiques que l'on venait, à juste titre, de lui attribuer.

Telle est l'idée qui avait germé dans mon esprit et dont la curieuse subtilité m'étonne encore aujourd'hui. Je l'avais appelée la « théorie de la double solution » et c'était elle qui traduisait dans toute sa complexité ma véritable pensée. Mais, pour la commodité de l'exposé, je lui avais parfois donné une forme simplifiée, à mon avis beaucoup moins profonde, que j'avais nommée la « théorie de l'onde-pilote » dans laquelle le corpuscule, supposé donné *a priori*, était considéré comme piloté par l'onde continue Ψ. Découragé par l'accueil peu favorable fait à mes idées par la plupart des physiciens théoriciens que séduisaient l'élégance formelle et l'apparente rigueur de l'interprétation purement probabiliste, je me suis rallié à cette interprétation et je l'ai admise comme exacte pendant plus de vingt ans.

Comme je l'ai dit, depuis 1951, je me suis à nouveau demandé si ma première idée, au fond, n'était pas la bonne. De nouvelles réflexions sur ce problème si ardu m'ont amené à perfectionner sur certains points la forme primitive de la théorie de la double solution et même sur d'autres à la modifier, notamment par l'introduction d'une hypothèse qui me paraît aujourd'hui essentielle : celle que l'équation de propagation de l'onde u est, en principe, non linéaire et, par suite, différente de celle admise pour l'onde Ψ, bien que les deux équations puissent *presque partout* être considérées comme identiques.

L'on trouvera dans le présent Ouvrage, après un résumé de l'interprétation purement probabiliste actuellement « orthodoxe » et des objections qui lui ont été adressées par des savants peu nombreux mais illustres, un exposé d'ensemble de l'état présent de mes réflexions sur la théorie de la double solution. Je me permets d'attirer particulièrement l'attention du lecteur sur les chapitres XVII à XIX qui contiennent des suggestions aventureuses certes, mais qui pourraient avoir une très grande portée. Je souhaite que de jeunes théoriciens doués d'intuition physique et aussi des mathématiciens exercés veuillent bien s'intéresser aux hypothèses que j'ai avancées dans cette fin de mon Ouvrage sans pouvoir en donner de véritables justifications.

J'ai repris cette étude de mes anciennes et primitives conceptions sur la Mécanique ondulatoire sans idées préconçues d'aucune sorte et sans aucun amour-propre d'auteur. Il se peut que j'ai tort de vouloir revenir à des conceptions plus claires que celles qui prévalent actuellement en Physique théorique. Mais je voudrais que l'on examine avec soin si ces chemins, que l'on a abandonnés depuis vingt-cinq ans parce qu'on les considérait comme aboutissant à des impasses, ne seraient pas au contraire ceux qui pourraient déboucher vers la véritable Microphysique de l'Avenir.

Août 1954.

Louis DE BROGLIE.

UNE TENTATIVE D'INTERPRÉTATION
CAUSALE ET NON LINÉAIRE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE
(LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION)

PREMIÈRE PARTIE.

LES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET SON INTERPRÉTATION PUREMENT PROBABILISTE USUELLE.

CHAPITRE I.

LES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

---

1. Point de départ. — L'idée qui, dans mes travaux de 1923-1924, a servi de point de départ à la Mécanique ondulatoire, a été la suivante : puisque, pour la lumière, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire reliés entre eux par la relation énergie $= h \times$ fréquence où figure la constante h des quanta de Planck, il est naturel de supposer que, pour la matière aussi, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire, ce dernier jusque là méconnu. Ces deux aspects doivent être reliés par des formules générales où figure la constante de Planck et doivent contenir comme cas particuliers les relations applicables à la lumière.

Pour développer cette idée, il m'était apparu en 1923 qu'il fallait chercher à associer un élément périodique au concept de corpuscule. Imaginons un corpuscule qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme dans une certaine direction en l'absence de tout champ extérieur. Nous fixerons uniquement notre attention sur l'état de mouvement du corpuscule en faisant abstraction de sa position dans l'espace. Ce mouvement s'effectuera dans une certaine direction que nous prendrons comme axe des z et il sera défini par deux grandeurs, l'énergie et la quantité de mouvement, dont les expressions relativistes en fonction de la masse propre m_0 du corpuscule sont données par les formules

$$(1) \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

dont on déduit la relation

$$(2) \qquad |\mathbf{p}| = p = \frac{W}{c^2}|\mathbf{v}| = \frac{W}{c^2} v.$$

L'état de mouvement se trouve ainsi défini pour un certain observateur A lié à un système de référence galiléen, observateur qui emploie un temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z.

Soit maintenant un autre observateur B qui possède par rapport au premier la vitesse v dans la direction Oz, autrement dit un observateur lié au corpuscule. Nous pouvons supposer que B a choisi un axe $O_0 z_0$ qui glisse sur Oz et des axes $O_0 x_0$ et $O_0 y_0$ respectivement parallèles à Ox et à Oy. Cela étant, les coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 d'espace et de temps de B sont reliées aux coordonnées x, y, z, t de A par les formules bien connues de la transformation simple de Lorentz,

$$(3) \qquad x_0 = x, \qquad y_0 = y, \qquad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_0 = \frac{t - \frac{\beta}{c} z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Or, pour l'observateur B, la vitesse du corpuscule est nulle : il pose donc comme valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement

$$(4) \qquad W = m_0 c^2, \qquad \mathbf{p} = 0.$$

Suivant notre idée de base, nous devons maintenant chercher à introduire un élément périodique et nous tenterons de le définir d'abord dans le système propre du corpuscule, c'est-à-dire dans le système de référence de l'observateur B. Comme dans ce système tout est au repos, il est naturel d'y définir l'élément périodique souhaité sous la forme d'une onde stationnaire. Pour cela, nous définirons l'élément périodique par la grandeur supposée scalaire

$$(5) \qquad \Psi_0 = a_0 \, e^{2\pi i \nu_0 t_0}$$

qui a la forme de la représentation complexe d'une onde stationnaire. Ψ_0 oscille en fonction du temps propre avec une fréquence ν_0 caractéristique de la nature du corpuscule envisagé. Nous admettrons que a_0 est une constante (en général complexe) de sorte que Ψ_0 ait la même valeur en tout point du système propre de l'observateur B à l'instant t_0.

Nous pouvons nous représenter la répartition des valeurs de Ψ_0 en imaginant une infinité de petites horloges disposées en tous les points du système propre du corpuscule, synchronisées entre elles et possédant une période $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. Ces petites horloges représentant en quelque sorte en chaque point la « phase » du phénomène périodique qui est la même partout pour l'observateur B à un même instant t_0 de son temps propre.

Quelle valeur convient-il de donner à la fréquence propre ν_0? Nous devons évidemment chercher à la définir à partir d'une grandeur qui caractérise le corpuscule dans le système propre B : or, dans ce système, nous ne disposons que d'une seule grandeur non nulle, l'énergie $W_0 = m_0 c^2$. Étant donné le rôle joué par la constante de Planck h dans toutes les questions quantiques, il est naturel de poser

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}, \tag{6}$$

analogue à la relation d'Einstein pour les photons.

Comment va se manifester pour l'observateur A l'élément périodique que nous venons de définir pour l'observateur B? En supposant, ce qui est naturel ici, que l'élément Ψ est un invariant, il suffira pour obtenir son expression pour A de substituer dans son expression pour B la valeur de t_0 fournie par la quatrième équation (3) de Lorentz, ce qui donne

$$\Psi(x, y, z, t) = a_0\, e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{V}\right)}, \tag{7}$$

si l'on pose

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}. \tag{8}$$

Ainsi, pour l'observateur A qui voit passer le corpuscule avec la vitesse v dans le sens Oz, les phases du phénomène périodique Ψ sont réparties comme celles d'une onde plane monochromatique dont la fréquence ν et la vitesse de phase V auraient les valeurs (8).

On peut encore exprimer ceci en revenant à l'image d'une infinité de petites horloges distribuées en tous les points de l'espace et ayant la même phase pour l'observateur B. Par suite du phénomène relativiste du ralentissement des horloges en mouvement, chacune de ces horloges apparaît à l'observateur A comme ayant une fréquence *diminuée*,

$$\nu_{11} = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2}, \tag{9}$$

mais la répartition de l'*ensemble* des phases de toutes les horloges est donnée pour A par la formule (7), c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la répartition des phases d'une onde plane monochromatique de fréquence ν et de vitesse de phase V données par (8).

En comparant les formules (8) et (9), on remarquera la différence essentielle entre la fréquence apparente ν_{11} d'une horloge individuelle en mouvement qui est *diminuée* par l'influence du mouvement et la fréquence ν de l'onde associée qui est *augmentée* par cette influence. Cette différence entre les variances relativistes de la fréquence d'une horloge et de la fréquence d'une onde est essentielle : elle avait fortement attiré mon attention et c'est en y réfléchissant que j'avais été orienté dans mes recherches.

On peut résumer ce qui précède en disant que le corpuscule assimilé à l'une des petites horloges glisse par rapport à la phase de l'onde avec la vitesse $V - v = c\,\frac{1-\beta^2}{\beta}$ de façon à rester toujours en phase avec l'onde.

Reprenons cette dernière idée sous une forme plus précise. Parmi l'infinité de petites horloges que nous avions imaginées plus haut, supposons qu'il y en ait une qui joue un rôle particulier. Ce sera l'horloge régulatrice que nous identifierons avec le corpuscule, les autres horloges représentant les phases du phénomène ondulatoire dont le corpuscule serait le centre. Dans le système propre, toutes les horloges sont immobiles et ont la même fréquence ν_0. Dans le système de l'observateur qui voit passer toutes les horloges avec la vitesse v, l'ensemble des phases de ces horloges est donnée par le facteur $\nu\left(t - \frac{z}{V}\right)$ avec les définitions (8). Pendant un temps dt, l'horloge régulatrice se déplace de $v\,dt$ dans le sens Oz et son indication varie de $\nu_0\sqrt{1-\beta^2}\,dt$. La phase de l'onde au point où se trouve cette horloge varie de $\frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(dt - \frac{v\,dt}{V}\right)$. Comme ces deux variations doivent être égales, on doit avoir

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \frac{v}{V}\right) \quad \text{ou} \quad \beta^2 = \frac{v}{V} \tag{10}$$

en accord avec la seconde relation (8).

Laissons maintenant de côté ces images sur lesquelles nous reviendrons plus tard et revenons aux formules obtenues. La comparaison des premières relations (1) et (8) nous donne

$$W = h\nu, \tag{11}$$

relation qui doit évidemment être valable dans tout système galiléen puisque l'observateur A est un observateur galiléen quelconque.

En définissant comme d'habitude par la formule $\lambda = \frac{V}{\nu}$ la longueur d'onde de l'onde Ψ, on lui trouve la valeur

$$\lambda = \frac{c^2}{v}\frac{h}{W} = \frac{h}{p}. \tag{12}$$

On a ainsi trouvé les deux formules fondamentales (11) et (12) qui définissent la fréquence et la longueur d'onde de l'onde associée au corpuscule à partir de l'énergie et de la quantité de mouvement de celui-ci. Pour les vitesses faibles devant celle de la lumière dans le vide, la formule (12) prend la forme approximative

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \tag{13}$$

Pour une particule de vitesse égale à c (ou indiscernable de c), on a

$$v = V = c, \qquad W = h\nu, \qquad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{14}$$

On trouve bien ainsi les formules fondamentales de la théorie des quanta de lumière (Einstein, 1905) applicables aux photons.

Nous pouvons maintenant écrire la grandeur Ψ, évaluée par l'observateur A, sous la forme

$$\Psi = a_0 \, e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - pz)} \tag{15}$$

et, plus généralement, si l'on n'a pas pris la direction de propagation comme axe des z

$$\Psi(x, y, z, t) = a_0 \, e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} = a_0 \, e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \mathbf{p}.\mathbf{r})} \tag{16}$$

formule qui montre que la phase de l'onde Ψ coïncide, au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près, avec l'action hamiltonienne du corpuscule. En constatant cette proportionnalité entre l'action du corpuscule et la phase de l'onde Ψ qui lui est associée, on aperçoit que le principe d'action stationnaire de la Dynamique du corpuscule doit être une traduction du principe de Fermat valable pour l'onde associée. Mais la théorie ondulatoire nous apprend que le principe de Fermat est seulement valable dans le domaine où l'Optique géométrique est utilisable et qu'il n'a plus de sens dans le domaine de l'Optique physique proprement ondulatoire. J'étais ainsi parvenu dès 1923 à l'idée fondamentale que l'ancienne Mécanique (aussi bien sous sa forme relativiste que sous sa forme newtonienne classique) n'est qu'une approximation ayant le même domaine de validité que l'Optique géométrique. Dès lors, j'avais été amené à concevoir la nécessité de construire une nouvelle Mécanique, une Mécanique ondulatoire, « qui serait à la Mécanique ancienne ce que l'Optique ondulatoire est à l'Optique géométrique ». Tel fut le point de départ de la Mécanique ondulatoire.

2. Premiers développements de la Mécanique ondulatoire. — Au moment où les idées que je viens de résumer me sont venues à l'esprit, j'étais imbu des idées classiques sur la possibilité de représenter les phénomènes d'une façon objective et déterministe dans le cadre de l'espace-temps. L'association onde-corpuscule me paraissait donc nécessairement devoir se faire sous la forme suivante : le corpuscule serait une sorte de singularité au sein d'un phénomène ondulatoire étendu dont il serait solidaire et le mouvement de cette singularité, bien que s'effectuant sans doute selon des lois dynamiques nouvelles, devait à mes yeux comporter, conformément aux images classiques, une trajectoire dans l'espace et une vitesse déterminée en chaque point de cette trajectoire.

Il en résultait, dans mon esprit, que l'onde Ψ plane et monochromatique associée dans mes raisonnements primitifs au mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule libre ne pouvait réellement décrire la réalité, mais qu'elle ne devait donner d'une façon exacte que la *phase* du phénomène ondulatoire entourant le corpuscule, l'amplitude constante a_0 ne pouvant représenter la véritable amplitude de ce phénomène. En effet, celle-ci devait à mon sens comporter une singularité, le corpuscule, et sans doute décroître avec la distance à cette singularité. La véritable fonction d'onde représentant l'ensemble du phénomène ondulatoire et de sa singularité me semblait devoir être, dans le cas du mouvement rectiligne et uniforme, de la forme

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi(x, y, z, t)}, \tag{17}$$

φ étant la phase $Wt - \mathbf{p}.\mathbf{r}$ et $f(x, y, z, t)$ une fonction comportant une singularité mobile avec la vitesse v. La fonction d'onde

$$\Psi = a_0\, e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi(x, y, z, t)} \tag{18}$$

aurait une phase φ correcte qui serait celle des petites horloges fictives entraînées par le mouvement du corpuscule, mais son amplitude constante ne décrirait pas la répartition réelle du phénomène ondulatoire dans l'espace. Tout au plus peut-elle représenter une sorte de moyenne statistique quand on ignore totalement laquelle des droites parallèles à la direction du mouvement est effectivement décrite par le corpuscule et en quel point de la trajectoire il se trouve au temps t.

C'est parce que la phase φ me paraissait avoir un sens physique profond relié à des effets de relativité et parce qu'elle me paraissait devoir se retrouver dans la fonction d'onde réelle u, que j'avais appelé la fonction Ψ « l'onde de phase », voulant ainsi réserver à un examen plus approfondi la question de la signification de son amplitude.

Les idées que je viens de rappeler, je les avais adoptées dans tous mes premiers exposés de la Mécanique ondulatoire de 1924 à 1927. Elles devaient me conduire en 1927 à la théorie de la double solution à laquelle sera consacrée la seconde partie de cet Ouvrage. Mais, dans l'intervalle, en 1926, M. Schrödinger était parvenu dans d'admirables travaux à faire considérablement progresser le formalisme mathématique de la nouvelle Mécanique ondulatoire. Il en avait écrit les équations générales et il les avait appliquées au calcul des états stationnaires des systèmes quantifiés, remplaçant ainsi par une théorie rigoureuse la justification intuitive que j'avais donnée dans mes premiers travaux des formules de quantification de l'ancienne théorie des quanta. Enfin, il avait montré l'identité foncière des méthodes de la Mécanique ondulatoire et de la Mécanique quantique des matrices développée en 1927 par M. Heisenberg, identité qui était dissimulée par la différence de leurs aspects mathématiques.

Pour faire ainsi progresser la Mécanique ondulatoire, M. Schrödinger s'est surtout servi de l'analogie entre la Mécanique analytique et l'Optique géométrique signalée par Hamilton, un siècle auparavant, en tenant compte, bien entendu, de l'existence des quanta et en s'inspirant des idées que j'avais mises en avant dans mes premiers travaux et résumées dans ma thèse de Doctorat en 1924.

Je vais exposer maintenant cette seconde manière d'aborder la Mécanique ondulatoire, voie que M. Schrödinger a suivie en s'en tenant à l'approximation newtonienne sans tenir compte des corrections de Relativité.