

UNE
TENTATIVE D'INTERPRÉTATION
CAUSALE ET NON LINÉAIRE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE
(LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION)

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs.
In-8 de vi-208 pages; 1949.

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*). In-8 de vi-224 pages; 1950.

La théorie des particules de spin $1/2$ (Électrons de Dirac). In-8 (16-25), de 164 pages; 1951.

Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques.
In-8 de vii-120 pages, 14 figures. 2^e édition; 1951.

Éléments de la théorie des Quanta et de la Mécanique ondulatoire
(*Collection de Physique théorique et Physique mathématique*).
In-8 de 302 pages, 31 figures; 1953.

La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? (*Collection « Les Grands Problèmes des Sciences »*). In-8 de viii-116 pages, 4 figures; 1953.

EN COLLABORATION AVEC MAURICE DE BROGLIE

Introduction à la Physique des rayons X et des rayons γ . In-8 de 201 pages, avec 27 figures et 11 planches. (*Sous presse.*)

UNE
TENTATIVE D'INTERPRÉTATION
CAUSALE ET NON LINÉAIRE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE
(LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION)

PAR

Louis de BROGLIE

DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PROFESSEUR A LA SORBONNE



SERIE : *Physique Fondamentale*
No DE TITRE : *458*
No CLASSEMENT : *BRO.03*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

1956

© 1956 by Gauthier-Villars.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

PRÉFACE

L'on dit parfois que, sur ses vieux jours, l'homme revient vers ce qui l'a attiré dans sa jeunesse. Peut-être est-ce pour cette raison que, depuis quatre ans environ, s'est posée à mon esprit la question suivante : les conceptions qui avaient orienté mes recherches de 1922 à 1928 lors de mes premiers travaux sur la Mécanique ondulatoire ne seraient-elles pas plus exactes et plus profondes que celles qui ont prévalu depuis ?

Dès 1923, j'avais aperçu clairement qu'il fallait associer la propagation d'une onde au mouvement de tout corpuscule, mais l'onde continue du type de celles de l'Optique classique que j'avais été amené à considérer et qui est devenue l'onde Ψ de la Mécanique ondulatoire usuelle, ne me paraissait pas décrire exactement la réalité physique : seule sa *phase*, directement reliée au mouvement du corpuscule, me semblait avoir une signification profonde et c'est pourquoi j'avais nommé l'onde que j'associais au corpuscule « l'onde de phase », dénomination aujourd'hui bien oubliée, mais qui pour moi avait sa raison d'être. Cependant, au fur et à mesure que les travaux d'autres savants faisaient progresser la Mécanique ondulatoire, il devenait de jour en jour plus évident que l'onde Ψ avec son amplitude continue ne pouvait servir qu'à des prévisions statistiques : aussi s'orientait-on peu à peu vers l'interprétation « purement probabiliste » dont MM. Born, Bohr et Heisenberg furent les principaux promoteurs. Étonné de cette évolution qui ne me paraissait pas conforme à la mission « explicative » de la Physique théorique, j'ai été amené à penser vers 1925-1927 qu'il y avait lieu de considérer dans tout problème de

Mécanique ondulatoire deux solutions couplées de l'équation des ondes : l'une, l'onde Ψ , exacte par sa phase, mais qui, à cause du caractère continu de son amplitude, n'a qu'une signification statistique et subjective; l'autre, l'onde u , ayant même phase que l'onde Ψ , mais dont l'amplitude présente de très hautes valeurs autour d'un point de l'espace et qui, précisément en raison de cette singularité locale (qui peut, d'ailleurs ne pas être une singularité au sens strict des mathématiciens) est susceptible de décrire objectivement le corpuscule. J'obtenais ainsi, en accord avec les conceptions de M. Einstein, ce qu'il m'avait toujours semblé nécessaire de chercher : une image du corpuscule où celui-ci apparaît comme le centre d'un phénomène ondulatoire étendu auquel il est intimement incorporé. Et, grâce au parallélisme postulé par la théorie entre l'onde u et l'onde Ψ , cette dernière conservait, me semblait-il, toutes les propriétés statistiques que l'on venait, à juste titre, de lui attribuer.

Telle est l'idée qui avait germé dans mon esprit et dont la curieuse subtilité m'étonne encore aujourd'hui. Je l'avais appelée la « théorie de la double solution » et c'était elle qui traduisait dans toute sa complexité ma véritable pensée. Mais, pour la commodité de l'exposé, je lui avais parfois donné une forme simplifiée, à mon avis beaucoup moins profonde, que j'avais nommée la « théorie de l'onde-pilote » dans laquelle le corpuscule, supposé donné *a priori*, était considéré comme piloté par l'onde continue Ψ . Découragé par l'accueil peu favorable fait à mes idées par la plupart des physiciens théoriciens que séduisaient l'élégance formelle et l'apparente rigueur de l'interprétation purement probabiliste, je me suis rallié à cette interprétation et je l'ai admise comme exacte pendant plus de vingt ans.

Comme je l'ai dit, depuis 1951, je me suis à nouveau demandé si ma première idée, au fond, n'était pas la bonne. De nouvelles réflexions sur ce problème si ardu m'ont amené à perfectionner sur certains points la forme primitive de la théorie de la double solution et même sur d'autres à la modifier, notamment par l'introduction d'une hypothèse qui me paraît aujourd'hui essentielle : celle que l'équation de propagation de l'onde u est, en principe, non linéaire et, par suite, différente de celle admise pour l'onde Ψ ,

bien que les deux équations puissent *presque partout* être considérées comme identiques.

L'on trouvera dans le présent Ouvrage, après un résumé de l'interprétation purement probabiliste actuellement « orthodoxe » et des objections qui lui ont été adressées par des savants peu nombreux mais illustres, un exposé d'ensemble de l'état présent de mes réflexions sur la théorie de la double solution. Je me permets d'attirer particulièrement l'attention du lecteur sur les chapitres XVII à XIX qui contiennent des suggestions aventureuses certes, mais qui pourraient avoir une très grande portée. Je souhaite que de jeunes théoriciens doués d'intuition physique et aussi des mathématiciens exercés veuillent bien s'intéresser aux hypothèses que j'ai avancées dans cette fin de mon Ouvrage sans pouvoir en donner de véritables justifications.

J'ai repris cette étude de mes anciennes et primitives conceptions sur la Mécanique ondulatoire sans idées préconçues d'aucune sorte et sans aucun amour-propre d'auteur. Il se peut que j'ai tort de vouloir revenir à des conceptions plus claires que celles qui prévalent actuellement en Physique théorique. Mais je voudrais que l'on examine avec soin si ces chemins, que l'on a abandonnés depuis vingt-cinq ans parce qu'on les considérait comme aboutissant à des impasses, ne seraient pas au contraire ceux qui pourraient déboucher vers la véritable Microphysique de l'Avenir.

Août 1954.

LOUIS DE BROGLIE.

UNE TENTATIVE D'INTERPRÉTATION CAUSALE ET NON LINÉAIRE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE (LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION)

PREMIÈRE PARTIE.

LES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE
ET SON INTERPRÉTATION PUREMENT PROBABILISTE USUELLE.

CHAPITRE I.

LES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Point de départ.** — L'idée qui, dans mes travaux de 1923-1924, a servi de point de départ à la Mécanique ondulatoire, a été la suivante : puisque, pour la lumière, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire reliés entre eux par la relation énergie $= h \times$ fréquence où figure la constante h des quanta de Planck, il est naturel de supposer que, pour la matière aussi, il existe un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire, ce dernier jusque là méconnu. Ces deux aspects doivent être reliés par des formules générales où figure la constante de Planck et doivent contenir comme cas particuliers les relations applicables à la lumière.

Pour développer cette idée, il m'était apparu en 1923 qu'il fallait chercher à associer un élément périodique au concept de corpuscule. Imaginons un corpuscule qui se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme dans une certaine direction en l'absence de tout champ extérieur. Nous fixerons uniquement notre attention sur l'état de mouvement

du corpuscule en faisant abstraction de sa position dans l'espace. Ce mouvement s'effectuera dans une certaine direction que nous prendrons comme axe des z et il sera défini par deux grandeurs, l'énergie et la quantité de mouvement, dont les expressions relativistes en fonction de la masse propre m_0 du corpuscule sont données par les formules

$$(1) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

dont on déduit la relation

$$(2) \quad |\mathbf{p}| = p = \frac{W}{c^2} |\mathbf{v}| = \frac{W}{c^2} v.$$

L'état de mouvement se trouve ainsi défini pour un certain observateur A lié à un système de référence galiléen, observateur qui emploie un temps t et des coordonnées rectangulaires x, y, z .

Soit maintenant un autre observateur B qui possède par rapport au premier la vitesse v dans la direction Oz , autrement dit un observateur lié au corpuscule. Nous pouvons supposer que B a choisi un axe $O_0 z_0$ qui glisse sur Oz et des axes $O_0 x_0$ et $O_0 y_0$ respectivement parallèles à Ox et à Oy . Cela étant, les coordonnées x_0, y_0, z_0, t_0 d'espace et de temps de B sont reliées aux coordonnées x, y, z, t de A par les formules bien connues de la transformation simple de Lorentz,

$$(3) \quad x_0 = x, \quad y_0 = y, \quad z_0 = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t_0 = \frac{t - \frac{v}{c} z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Or, pour l'observateur B, la vitesse du corpuscule est nulle : il pose donc comme valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement

$$(4) \quad W = m_0 c^2, \quad \mathbf{p} = 0.$$

Suivant notre idée de base, nous devons maintenant chercher à introduire un élément périodique et nous tenterons de le définir d'abord dans le système propre du corpuscule, c'est-à-dire dans le système de référence de l'observateur B. Comme dans ce système tout est au repos, il est naturel d'y définir l'élément périodique souhaité sous la forme d'une onde stationnaire. Pour cela, nous définirons l'élément périodique par la grandeur supposée scalaire

$$(5) \quad \Psi_0 = a_0 e^{2\pi i \nu_0 t_0}$$

qui a la forme de la représentation complexe d'une onde stationnaire. Ψ_0 oscille en fonction du temps propre avec une fréquence ν_0 caracté-

ristique de la nature du corpuscule envisagé. Nous admettrons que a_0 est une constante (en général complexe) de sorte que Ψ_0 ait la même valeur en tout point du système propre de l'observateur B à l'instant t_0 .

Nous pouvons nous représenter la répartition des valeurs de Ψ_0 en imaginant une infinité de petites horloges disposées en tous les points du système propre du corpuscule, synchronisées entre elles et possédant une période $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$. Ces petites horloges représentant en quelque sorte en chaque point la « phase » du phénomène périodique qui est la même partout pour l'observateur B à un même instant t_0 de son temps propre.

Quelle valeur convient-il de donner à la fréquence propre ν_0 ? Nous devons évidemment chercher à la définir à partir d'une grandeur qui caractérise le corpuscule dans le système propre B : or, dans ce système, nous ne disposons que d'une seule grandeur non nulle, l'énergie $W_0 = m_0 c^2$. Étant donné le rôle joué par la constante de Planck h dans toutes les questions quantiques, il est naturel de poser

$$(6) \quad \nu_0 = \frac{W_0}{h} = \frac{m_0 c^2}{h}.$$

analogue à la relation d'Einstein pour les photons.

Comment va se manifester pour l'observateur A l'élément périodique que nous venons de définir pour l'observateur B? En supposant, ce qui est naturel ici, que l'élément Ψ est un invariant, il suffira pour obtenir son expression pour A de substituer dans son expression pour B la valeur de t_0 fournie par la quatrième équation (3) de Lorentz, ce qui donne

$$(7) \quad \Psi(x, y, z, t) = a_0 e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{V}\right)},$$

si l'on pose

$$(8) \quad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

Ainsi, pour l'observateur A qui voit passer le corpuscule avec la vitesse v dans le sens Oz , les phases du phénomène périodique Ψ sont réparties comme celles d'une onde plane monochromatique dont la fréquence ν et la vitesse de phase V auraient les valeurs (8).

On peut encore exprimer ceci en revenant à l'image d'une infinité de petites horloges distribuées en tous les points de l'espace et ayant la même phase pour l'observateur B. Par suite du phénomène relativiste

du ralentissement des horloges en mouvement, chacune de ces horloges apparaît à l'observateur A comme ayant une fréquence *diminuée*,

$$(9) \quad \nu_{II} = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

mais la répartition de l'ensemble des phases de toutes les horloges est donnée pour A par la formule (7), c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la répartition des phases d'une onde plane monochromatique de fréquence ν et de vitesse de phase V données par (8).

En comparant les formules (8) et (9), on remarquera la différence essentielle entre la fréquence apparente ν_{II} d'une horloge individuelle en mouvement qui est *diminuée* par l'influence du mouvement et la fréquence ν de l'onde associée qui est *augmentée* par cette influence. Cette différence entre les variances relativistes de la fréquence d'une horloge et de la fréquence d'une onde est essentielle : elle avait fortement attiré mon attention et c'est en y réfléchissant que j'avais été orienté dans mes recherches.

On peut résumer ce qui précède en disant que le corpuscule assimilé à l'une des petites horloges glisse par rapport à la phase de l'onde avec la vitesse $V - v = c \frac{1 - \beta^2}{\beta}$ de façon à rester toujours en phase avec l'onde.

Reprenons cette dernière idée sous une forme plus précise. Parmi l'infinité de petites horloges que nous avons imaginées plus haut, supposons qu'il y en ait une qui joue un rôle particulier. Ce sera l'horloge régulatrice que nous identifierons avec le corpuscule, les autres horloges représentant les phases du phénomène ondulatoire dont le corpuscule serait le centre. Dans le système propre, toutes les horloges sont immobiles et ont la même fréquence ν_0 . Dans le système de l'observateur qui voit passer toutes les horloges avec la vitesse v , l'ensemble des phases de ces horloges est donnée par le facteur $\nu \left(t - \frac{z}{V} \right)$ avec les définitions (8). Pendant un temps dt , l'horloge régulatrice se déplace de $v dt$ dans le sens Oz et son indication varie de $\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} dt$. La phase de l'onde au point où se trouve cette horloge varie de $\frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(dt - \frac{v dt}{V} \right)$. Comme ces deux variations doivent être égales, on doit avoir

$$(10) \quad \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(1 - \frac{v}{V} \right) \quad \text{ou} \quad \beta^2 = \frac{v}{V}$$

en accord avec la seconde relation (8).

Laissons maintenant de côté ces images sur lesquelles nous reviendrons plus tard et revenons aux formules obtenues. La comparaison des premières relations (1) et (8) nous donne

$$(11) \quad W = h\nu,$$

relation qui doit évidemment être valable dans tout système galiléen puisque l'observateur A est un observateur galiléen quelconque.

En définissant comme d'habitude par la formule $\lambda = \frac{V}{\nu}$ la longueur d'onde de l'onde Ψ , on lui trouve la valeur

$$(12) \quad \lambda = \frac{c^2}{v} \frac{h}{W} = \frac{h}{p}.$$

On a ainsi trouvé les deux formules fondamentales (11) et (12) qui définissent la fréquence et la longueur d'onde de l'onde associée au corpuscule à partir de l'énergie et de la quantité de mouvement de celui-ci. Pour les vitesses faibles devant celle de la lumière dans le vide, la formule (12) prend la forme approximative

$$(13) \quad \lambda = \frac{h}{mv}.$$

Pour une particule de vitesse égale à c (ou indiscernable de c), on a

$$(14) \quad v = V = c, \quad W = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

On trouve bien ainsi les formules fondamentales de la théorie des quanta de lumière (Einstein, 1905) applicables aux photons.

Nous pouvons maintenant écrire la grandeur Ψ , évaluée par l'observateur A, sous la forme

$$(15) \quad \Psi = a_0 e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - pz)}$$

et, plus généralement, si l'on n'a pas pris la direction de propagation comme axe des z

$$(16) \quad \Psi(x, y, z, t) = a_0 e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p_x x - p_y y - p_z z)} = a_0 e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$$

formule qui montre que la phase de l'onde Ψ coïncide, au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près, avec l'action hamiltonienne du corpuscule. En constatant cette proportionnalité entre l'action du corpuscule et la phase de l'onde Ψ qui lui est associée, on aperçoit que le principe d'action stationnaire de la Dynamique du corpuscule doit être une traduction du principe de Fermat valable pour l'onde associée. Mais la théorie ondulatoire nous apprend

que le principe de Fermat est seulement valable dans le domaine où l'Optique géométrique est utilisable et qu'il n'a plus de sens dans le domaine de l'Optique physique proprement ondulatoire. J'étais ainsi parvenu dès 1923 à l'idée fondamentale que l'ancienne Mécanique (aussi bien sous sa forme relativiste que sous sa forme newtonienne classique) n'est qu'une approximation ayant le même domaine de validité que l'Optique géométrique. Dès lors, j'avais été amené à concevoir la nécessité de construire une nouvelle Mécanique, une Mécanique ondulatoire, « qui serait à la Mécanique ancienne ce que l'Optique ondulatoire est à l'Optique géométrique ». Tel fut le point de départ de la Mécanique ondulatoire.

2. Premiers développements de la Mécanique ondulatoire. — Au moment où les idées que je viens de résumer me sont venues à l'esprit, j'étais imbu des idées classiques sur la possibilité de représenter les phénomènes d'une façon objective et déterministe dans le cadre de l'espace-temps. L'association onde-corpuscule me paraissait donc nécessairement devoir se faire sous la forme suivante : le corpuscule serait une sorte de singularité au sein d'un phénomène ondulatoire étendu dont il serait solidaire et le mouvement de cette singularité, bien que s'effectuant sans doute selon des lois dynamiques nouvelles, devait à mes yeux comporter, conformément aux images classiques, une trajectoire dans l'espace et une vitesse déterminée en chaque point de cette trajectoire.

Il en résultait, dans mon esprit, que l'onde Ψ plane et monochromatique associée dans mes raisonnements primitifs au mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule libre ne pouvait réellement décrire la réalité, mais qu'elle ne devait donner d'une façon exacte que la *phase* du phénomène ondulatoire entourant le corpuscule, l'amplitude constante a_0 ne pouvant représenter la véritable amplitude de ce phénomène. En effet, celle-ci devait à mon sens comporter une singularité, le corpuscule, et sans doute décroître avec la distance à cette singularité. La véritable fonction d'onde représentant l'ensemble du phénomène ondulatoire et de sa singularité me semblait devoir être, dans le cas du mouvement rectiligne et uniforme, de la forme

$$(17) \quad u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)},$$

φ étant la phase $Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ et $f(x, y, z, t)$ une fonction comportant une singularité mobile avec la vitesse v . La fonction d'onde

$$(18) \quad \Psi = a_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

aurait une phase φ correcte qui serait celle des petites horloges fictives entraînées par le mouvement du corpuscule, mais son amplitude constante ne décrirait pas la répartition réelle du phénomène ondulatoire dans l'espace. Tout au plus peut-elle représenter une sorte de moyenne statistique quand on ignore totalement laquelle des droites parallèles à la direction du mouvement est effectivement décrite par le corpuscule et en quel point de la trajectoire il se trouve au temps t .

C'est parce que la phase φ me paraissait avoir un sens physique profond relié à des effets de relativité et parce qu'elle me paraissait devoir se retrouver dans la fonction d'onde réelle u , que j'avais appelé la fonction Ψ « l'onde de phase », voulant ainsi réserver à un examen plus approfondi la question de la signification de son amplitude.

Les idées que je viens de rappeler, je les avais adoptées dans tous mes premiers exposés de la Mécanique ondulatoire de 1924 à 1927. Elles devaient me conduire en 1927 à la théorie de la double solution à laquelle sera consacrée la seconde partie de cet Ouvrage. Mais, dans l'intervalle, en 1926, M. Schrödinger était parvenu dans d'admirables travaux à faire considérablement progresser le formalisme mathématique de la nouvelle Mécanique ondulatoire. Il en avait écrit les équations générales et il les avait appliquées au calcul des états stationnaires des systèmes quantifiés, remplaçant ainsi par une théorie rigoureuse la justification intuitive que j'avais donnée dans mes premiers travaux des formules de quantification de l'ancienne théorie des quanta. Enfin, il avait montré l'identité foncière des méthodes de la Mécanique ondulatoire et de la Mécanique quantique des matrices développée en 1927 par M. Heisenberg, identité qui était dissimulée par la différence de leurs aspects mathématiques.

Pour faire ainsi progresser la Mécanique ondulatoire, M. Schrödinger s'est surtout servi de l'analogie entre la Mécanique analytique et l'Optique géométrique signalée par Hamilton, un siècle auparavant, en tenant compte, bien entendu, de l'existence des quanta et en s'inspirant des idées que j'avais mises en avant dans mes premiers travaux et résumées dans ma thèse de Doctorat en 1924.

Je vais exposer maintenant cette seconde manière d'aborder la Mécanique ondulatoire, voie que M. Schrödinger a suivie en s'en tenant à l'approximation newtonienne sans tenir compte des corrections de Relativité.

CHAPITRE II.

ACCÈS DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE PAR LA MÉTHODE D'HAMILTON.
(ANALOGIE DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE AVEC L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE).

1. Mécanique classique du point matériel. Théorème de Jacobi. — Avec les conceptions anciennes, un corpuscule (point matériel) doit avoir à chaque instant une position bien déterminée dans l'espace au cours du temps : sous l'influence du champ de force auquel il est soumis, il décrit une certaine courbe de l'espace, sa trajectoire. Nous supposons d'ailleurs ici que le champ de force dérive d'un potentiel $V(x, y, z, t)$. A chaque instant, la position du corpuscule est repérée par trois coordonnées d'espace $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Les équations classiques du mouvement sont alors les suivantes :

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial z},$$

m étant une constante caractéristique du corpuscule et nommée sa masse.

Les trois équations différentielles (1) du second ordre en t définissent entièrement les variations des coordonnées au cours du temps, c'est-à-dire son mouvement, quand on se donne six constantes arbitraires représentant les coordonnées et les composantes de la vitesse à un instant donné t_0 dit « instant initial ». Le déterminisme de l'ancienne Mécanique consiste en ce que, l'état initial de position et de vitesse étant supposé connu, les états ultérieurs sont rigoureusement déterminés.

Nous renvoyons aux traités de Mécanique rationnelle pour la démonstration des théorèmes généraux de la Dynamique du point matériel et pour la théorie des équations de Lagrange, de Hamilton, etc. Nous nous bornerons à énoncer le théorème de Jacobi qui nous sera utile pour la suite :

THÉOREME. — *Si l'on parvient à trouver une intégrale complète (c'est-à-dire une solution dépendant de trois constantes arbitraires α, β, γ non additives) de l'équation aux dérivées partielles (équation de Jacobi)*

$$(2) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z, t) = \frac{\partial S}{\partial t},$$

les équations

$$(3) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = a, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = b, \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = c;$$

où a, b, c sont de nouvelles constantes arbitraires, définissent un des mouvements possibles du corpuscule dans le champ de force. Les composantes de la quantité de mouvement du corpuscule quand, en exécutant l'un de ces mouvements, il occupe au temps t la position x, y, z , sont données par les relations

$$(4) \quad p_x = mv_x = -\frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = mv_y = -\frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = mv_z = -\frac{\partial S}{\partial z},$$

soit

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = -\text{grad } S.$$

Nous voyons donc que, d'après ce théorème de Jacobi, les mouvements possibles du corpuscule se divisent en classes, les mouvements d'une même classe correspondant à une même intégrale complète de l'équation de Jacobi $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ avec des valeurs données des « constantes primaires » α, β, γ . Chacune de ces classes contient une infinité de mouvements possibles, chacun d'eux étant caractérisé par la valeur des « constantes secondaires » a, b, c .

Rappelons que l'équation de Jacobi peut s'obtenir en partant de l'expression de l'énergie en fonction des coordonnées et des moments conjugués (ou expression hamiltonienne de l'énergie)

$$(5) \quad E(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t)$$

et, en y remplaçant p_x, p_y, p_z respectivement par $-\frac{\partial S}{\partial x}, -\frac{\partial S}{\partial y}, -\frac{\partial S}{\partial z}$, puis en égalant l'expression ainsi obtenue à $\frac{\partial S}{\partial t}$.

Le théorème de Jacobi prend une forme particulièrement simple dans le cas important où la fonction potentielle V ne dépend pas explicitement du temps : on sait que dans ce cas il y a conservation de l'énergie, c'est-à-dire que, pendant le cours du mouvement, la somme de l'énergie

cinétique et de l'énergie potentielle, $\frac{1}{2} mc^2 + V$, garde une valeur constante E . La constante E joue ici le rôle d'une des constantes primaires, par exemple γ . Si l'on pose alors

$$(6) \quad S(x, y, z, t, \alpha, \beta, E) = Et - S_1(x, y, z, \alpha, \beta, E),$$

où S_1 ne dépend plus du temps, on aura à chercher une intégrale complète dépendant de la constante E et de deux autres constantes α et β de l'équation aux dérivées partielles (dite équation de Jacobi raccourcie)

$$(7) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) = E.$$

Le théorème général de Jacobi appliqué à ce cas particulier nous apprend que, si l'on a trouvé une solution intégrale complète de l'équation (7), le mouvement défini par les équations

$$(8) \quad \frac{\partial S_1}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial S_1}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t - \frac{\partial S_1}{\partial E} = c,$$

où a, b, c sont trois constantes arbitraires, sera un des mouvements possibles du corpuscule dans le champ de forces constant. Quant à la quantité de mouvement du corpuscule lors de son passage au point x, y, z , elle sera donnée par

$$(9) \quad p_x = mv_x = \frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad \dots \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \text{grad } S_1.$$

Les mouvements possibles sont ainsi répartis en classes correspondant chacune à une même valeur de l'énergie et des deux constantes primaires α et β : chaque classe comprend une infinité de mouvements possibles caractérisés chacun par la valeur des trois constantes secondaires a, b, c .

Les deux premières équations (8) ne contiennent pas le temps : elles définissent une courbe de l'espace qui est la trajectoire du corpuscule.

La troisième équation (8), qu'on peut écrire $\frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0$, donne le mouvement le long de la trajectoire (équation de l'horaire). L'on voit ainsi que, dans le cas des champs permanents, l'étude de la trajectoire peut se faire indépendamment de l'étude du mouvement, ce qui n'a pas lieu dans le cas des champs variables avec le temps.

Un autre résultat important valable dans le cas des champs permanents est le suivant : *Les trajectoires d'un même classe correspondant à une même intégrale complète $S_1(x, y, z, \alpha, \beta, E)$ sont orthogonales aux surfaces $S_1 = \text{const}$. Ceci résulte immédiatement de l'équation (9).*

Cette propriété des trajectoires d'être normales aux surfaces $S_1 = \text{const.}$ permet de retrouver le principe de moindre action de Maupertuis. Pour cela, considérons toutes les surfaces $S_1 = \text{const.}$, correspondant à des valeurs infiniment voisines de la constante comprises entre C_1 et C_2 , et représentons-en quelques-unes vues par la tranche.

Soit AEB une trajectoire de la classe correspondant à S_1 et AFB une courbe infiniment voisine de AEB. Si l'on nomme dn l'élément de normale aux surfaces $S_1 = \text{const.}$, l'intégrale $\int \frac{\partial S_1}{\partial n} ds$ prise le long de AEB est égale à $C_2 - C_1$, l'élément de courbe ds étant ici égal à dn . Prenons la même intégrale le long de AFB. La contribution à cette intégrale d'un

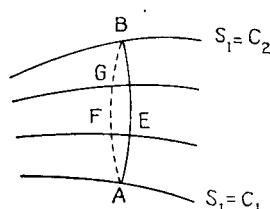


Fig. 1.

petit élément tel que FG est supérieur ou au moins égale à la variation de S_1 de F en G : en effet, si \overline{FG} est normal aux surfaces $S_1 = \text{const.}$ qui passent par ses extrémités, on a $\overline{FG} = dn$ et $\frac{\partial S_1}{\partial n} \overline{FG} = S_1(G) - S_1(F)$, tandis que, si \overline{FG} n'est pas normal aux surfaces $S_1 = \text{const.}$, on a $\overline{FG} > dn$ et $\frac{\partial S_1}{\partial n} \overline{FG}$ est supérieur à $S_1(G) - S_1(F)$. Or tous les éléments de AFB ne peuvent être normaux aux surfaces $S_1 = \text{const.}$, sans quoi AFB coïncident avec la trajectoire AEB : donc l'intégrale $\int_A^B \frac{\partial S_1}{\partial n} ds$ est plus grande le long de AFB que le long de AEB.

D'après l'équation (7), on a

$$(10) \quad \frac{\partial S_1}{\partial x_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{2m[E - V(x, y, z)]}.$$

Nous parvenons donc à l'énoncé suivant : *La trajectoire passant par deux points A et B de l'espace est caractérisée par le fait que l'intégrale $\int_A^B \sqrt{2m(E - V)} ds$ est plus petite pour la trajectoire réelle que*

pour toute courbe infiniment voisine allant de A à B. C'est le principe de moindre action de Maupertuis ⁽¹⁾.

Un exemple très simple permet d'illustrer les considérations précédentes. Envisageons le mouvement d'un corpuscule en l'absence de champ. Alors $V=0$ et, comme il y a conservation de l'énergie, on peut écrire l'équation (7) sous la forme

$$(11) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] = E.$$

On obtient une intégrale complète en posant

$$(12) \quad S_1 = \sqrt{2mE} (\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2.$$

D'après le théorème de Jacobi, on obtient les trajectoires en écrivant

$$(13) \quad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \sqrt{2mE} \left(x - \frac{\alpha}{\gamma} z \right) = a, \quad \frac{\partial S_1}{\partial \beta} = \sqrt{2mE} \left(y - \frac{\beta}{\gamma} z \right) = b.$$

Ce sont donc des droites de cosinus directeurs α, β, γ , normales aux surfaces $S_1 = \text{const.}$ Le mouvement le long d'une de ces droites est défini par l'équation de l'horaire

$$(14) \quad \frac{\partial S_1}{\partial E} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} (\alpha x + \beta y + \gamma z) = t - t_0.$$

Il est donc rectiligne et uniforme et il s'effectue avec la vitesse $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$.

Enfin, on vérifie aisément les relations

$$p_x = mv_x = m \alpha v = \alpha \sqrt{2mE} = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha}, \quad \dots$$

L'intégrale complète envisagée définit donc la classe des mouvements rectilignes et uniformes de direction α, β, γ et de vitesse $\sqrt{\frac{2E}{m}}$.

2. Propagation des ondes dans un milieu isotrope. Approximation de l'Optique géométrique. — Pour amorcer le passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire, faisons maintenant une rapide étude de la propagation des ondes monochromatiques dans un milieu

(1) Notons que la courbe AFB doit être continue ainsi que sa dérivée. Notons aussi que le raisonnement est en défaut quand les trajectoires ont une enveloppe et que AEB touche cette enveloppe entre A et B. L'intégrale de Maupertuis est alors toujours stationnaire, mais elle peut être maximum au lieu d'être minimum.

réfringent, isotrope et dispersif, à propriétés permanentes dans le temps.

Nous admettons que cette propagation est régie par l'équation

$$(15) \quad \Delta \Psi = \frac{1}{\mathfrak{V}^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

Ψ étant la fonction d'onde et \mathfrak{V} une grandeur généralement fonction du point x, y, z et de la fréquence ν de l'onde. \mathfrak{V} est la vitesse de propagation de la phase ou, plus brièvement, la « vitesse de propagation ». Nous écrirons pour une onde monochromatique, c'est-à-dire de fréquence ν bien déterminée

$$(16) \quad \Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{2\pi i \nu t}$$

et nous poserons pour définir l'indice de réfraction n du milieu

$$(17) \quad \frac{1}{\mathfrak{V}} = \frac{n(x, y, z, \nu)}{\mathfrak{V}_0},$$

\mathfrak{V}_0 étant la vitesse de propagation dans un milieu de référence où l'indice de réfraction serait égal à 1. On a alors

$$(18) \quad \Delta \Psi + \frac{4\pi^2 n^2 \nu^2}{\mathfrak{V}_0^2} \Psi = 0.$$

Rigoureusement l'étude de la propagation de l'onde monochromatique dans le milieu dispersif à propriétés permanentes doit se faire en déterminant la solution de l'équation (18) qui correspond aux conditions aux limites imposées, mais il arrive souvent que l'on puisse résoudre le problème par un procédé approximatif qui est à la base de l'Optique géométrique.

Pour bien comprendre le sens de cette approximation, considérons d'abord le cas où l'indice n ne dépend pas de x, y, z (milieu homogène). On obtient alors une solution rigoureuse de l'équation (18) en posant

$$(19) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i \nu}{\mathfrak{V}_0} \left[t - \frac{n(\nu)}{\mathfrak{V}_0} (x\alpha + y\beta + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z) \right]},$$

a étant une constante appelée l'amplitude de l'onde. Cette solution (19) représente une « onde monochromatique plane ». Nous nommerons phase de cette onde la fonction linéaire

$$(20) \quad \varphi(x, y, z, t) = \nu t - \frac{n(\nu)}{\mathfrak{V}_0} (x\alpha + y\beta + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z) = \nu t - \varphi_1(x, y, z).$$

Les surfaces d'égale phase $\varphi = \text{const.}$, nommées aussi « surfaces d'ondes », sont des plans normaux à la direction de cosinus directeurs

$\alpha, \beta, \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$. Au cours du temps, les valeurs de la phase et, par suite, de la fonction Ψ , progresseront dans cette direction avec la vitesse

$$(21) \quad \mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{V}_0}{n(\nu)}.$$

A un instant donné, on retrouvera la même valeur de Ψ sur des plans d'égale phase séparés les uns des autres par la distance

$$(22) \quad \lambda = \frac{\mathfrak{V}_0}{n\nu} = \frac{\mathfrak{V}}{\nu}$$

nommée « longueur d'onde » et, en un point donné, on retrouvera les mêmes valeurs de Ψ à des intervalles de temps égaux à la période $T = \frac{1}{\nu}$.

Considérons maintenant un milieu non homogène où l'indice varie avec x, y, z , mais cependant assez lentement pour rester sensiblement constant à l'échelle de la longueur d'onde. On voit alors aisément que les dérivées de $a(x, y, z)$ seront négligeables en comparaison de celles de $\varphi_1(x, y, z)$ si l'on pose pour l'onde monochromatique avec a réel :

$$(23) \quad \Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{2\pi i[\nu t - \varphi_1(x, y, z)]}$$

et, en introduisant (23) dans (18), on obtiendra une équation approximative qui est connue sous le nom « d'équation de l'Optique géométrique » :

$$(24) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{\nu^2 n^2(x, y, z)}{\mathfrak{V}_0^2}.$$

L'équation (24) permet de déterminer les variations de la phase de l'onde monochromatique (qui ici n'est plus linéaire en x, y, z) sans avoir à se préoccuper des variations, lentes à l'échelle de la longueur d'onde, de l'amplitude $a(x, y, z)$.

Soit alors $\varphi_1(x, y, z, \alpha, \beta, \nu)$ une intégrale complète de l'équation (24) dépendant des trois constantes ν, α, β . La fonction

$$\Psi = a e^{2\pi i[\nu t - \varphi_1(x, y, z, \nu, \alpha, \beta)]},$$

où a est lentement variable à grande échelle, représente donc alors une solution approximative de l'équation de propagation. Par définition, les courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$ sont les « rayons » de l'onde. Comme on a justifié plus haut le principe de moindre action de Maupertuis pour les trajectoires corpusculaires normales aux surfaces

$S_1 = \text{const.}$, on peut ici démontrer de même le « principe de Fermat » suivant lequel, si une courbe C est un rayon d'une propagation d'ondes passant par deux points A et B de l'espace, l'intégrale

$$\int_A^B \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \int_A^B \frac{n \nu}{\mathfrak{V}_0} ds$$

prise le long du rayon C est plus petite que la même intégrale prise le long d'une courbe infiniment voisine de C et joignant les points A et B ⁽¹⁾.

L'Optique géométrique n'est qu'une approximation valable seulement si l'indice n varie peu à l'échelle de la longueur d'onde locale définie par $\lambda = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^{-1}$. Quand la longueur d'onde tend vers zéro, cette approximation tend à devenir rigoureuse.

La présence de la fréquence ν dans l'équation (18) doit retenir notre attention. Au lieu de considérer une onde monochromatique, nous pouvons considérer, puisque l'équation de propagation (15) est linéaire en Ψ , une somme ou, comme l'on dit, une « superposition » d'ondes monochromatiques obéissant chacune à l'équation (18). Il est donc désirable de trouver une forme de l'équation de propagation où la fréquence ne figure pas et à laquelle satisfasse la fonction d'onde, même quand elle est formée d'une superposition d'ondes monochromatiques.

Pour donner un exemple, supposons que l'indice soit donné par une loi de dispersion

$$(25) \quad n(x, y, z, \nu) = \sqrt{1 - \frac{F(x, y, z) \mathfrak{V}_0^2}{4 \pi^2 \nu^2}},$$

où F est une certaine fonction du lieu. Alors, on pourra adopter comme équation de propagation indépendante de ν ,

$$(26) \quad \Delta \Psi - \frac{1}{\mathfrak{V}_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = F(x, y, z) \Psi,$$

car, pour une onde monochromatique de la forme (16), on retrouvera l'équation (18). Nous allons trouver des équations analogues à (26) en Mécanique ondulatoire.

3. Passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire. —

Nous avons pu noter dans les deux premiers paragraphes une grande analogie de forme entre la Dynamique analytique du point matériel et

(¹) Pour éviter toute confusion, précisons que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ est la dérivée de φ_1 le long de la normale à la surface $\varphi_1 = \text{const.}$ (et non la dérivée de φ_1 par rapport à l'indice n).

l'Optique géométrique. Elle avait été aperçue, il y a plus d'un siècle, par Hamilton avant d'être précisée par Jacobi : aujourd'hui, elle peut nous conduire à retrouver la synthèse réalisée par la Mécanique ondulatoire.

Pour cela, commençons par comparer le mouvement d'un corpuscule en l'absence de champ ($V = 0$) avec la propagation d'une onde dans un milieu homogène où l'indice n est indépendant de x, y, z . Nous avons trouvé pour le corpuscule en l'absence de champ la fonction de Jacobi raccourcie

$$(27) \quad \begin{cases} S_1 = \sqrt{2mE} [\alpha x + \beta y + \gamma z] & (\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2), \\ = mv [\alpha x + \beta y + \gamma z]. \end{cases}$$

D'autre part, pour une onde monochromatique dans un milieu homogène, puisque la longueur d'onde λ est alors constante, on peut écrire la phase φ_1 à l'approximation de l'Optique géométrique sous la forme

$$(28) \quad \varphi_1 = \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

α, β, γ étant les mêmes que dans (27) si nous supposons que la direction du mouvement du corpuscule coïncide avec celle de la propagation de l'onde. Les fonctions complètes S et φ sont alors

$$(29) \quad \begin{cases} S = Et - mv(\alpha x + \beta y + \gamma z), \\ \varphi = \nu t - \frac{1}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z). \end{cases}$$

Il est dans l'esprit de la théorie des quanta de poser $E = h\nu$, c'est-à-dire d'associer au mouvement corpusculaire d'énergie E la propagation d'une onde de fréquence $\nu = \frac{E}{h}$. Ceci nous conduit à poser

$$(30) \quad \varphi = \frac{S}{h}.$$

Si, par hypothèse, nous admettons cette relation, il en résulte les deux formules fondamentales de la Mécanique ondulatoire (non relativiste)

$$(31) \quad E = h\nu, \quad \lambda = \frac{h}{mv}.$$

En d'autres termes, au mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule d'énergie E et de quantité de mouvement mv , nous associons la propagation dans la direction de ce mouvement d'une onde plane mono-

chromatique ayant la fréquence $\frac{E}{h}$ et la longueur d'onde $\frac{h}{mv}$, onde dont l'expression est

$$(32) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} S} \quad (a \text{ constant})$$

avec la valeur (29) de S .

Cette correspondance entre onde et mouvement se généralise dans le cas du mouvement d'un corpuscule dans un champ *permanent* défini par la fonction potentielle $V(x, y, z)$. Il faut alors comparer ce mouvement avec la propagation d'une onde dans un milieu non homogène où l'indice n et par suite la longueur d'onde λ varient d'un point à un autre. Les expressions à comparer de la fonction de Jacobi et de la phase sont alors

$$(33) \quad \begin{cases} S = Et - S_1(x, y, z), \\ \varphi = vt - \varphi_1(x, y, z), \end{cases}$$

les fonctions S_1 et φ_1 étant respectivement des intégrales complètes des équations

$$(34) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2 = 2m[E - V(x, y, z)], \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2(x, y, z)}. \end{cases}$$

Il est tout naturel de faire encore ici l'hypothèse exprimée par (30) et par suite de poser

$$(35) \quad E = h\nu, \quad S_1 = h\varphi_1.$$

La seconde formule fournit aisément

$$(36) \quad \lambda = \frac{1}{|\text{grad } \varphi_1|} = \frac{h}{|\text{grad } S_1|} = \frac{h}{\sqrt{2m[E - V(x, y, z)]}}$$

et, comme en tout point on doit avoir $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z)$ on retrouve la seconde équation (31), mais ici ν et λ varient d'un point à un autre.

Comment écrire l'équation de propagation qui correspond au mouvement dans le champ permanent? Écrivons l'équation (18) sous la forme

$$(37) \quad \Delta\Psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2(x, y, z)} \Psi = 0$$

et substituons-y la valeur (36) de λ ; il vient

$$(38) \quad \Delta\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(x, y, z)] \Psi = 0.$$

En faisant $V = 0$, on retrouve l'équation valable en l'absence de champ.

Chaque fois que l'Optique géométrique sera suffisante pour décrire la propagation de l'onde Ψ , nous pourrons écrire

$$(39) \quad \Psi = \alpha e^{\frac{2\pi i}{h} S} = \alpha e^{\frac{2\pi i}{h} [Et - S_1(x, y, z)]}$$

et les trajectoires prévues par l'ancienne Dynamique du point matériel, normales aux surfaces $S_1 = \text{const.}$, ne seront pas autre chose que les rayons de la propagation de l'onde Ψ , normaux aux surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$

Nous arrivons ainsi à l'une des idées essentielles de la nouvelle Mécanique. Tandis que la Mécanique ancienne attribuait à ses équations un caractère rigoureux et les considérait comme toujours valables, la nouvelle Mécanique donne à l'onde le rôle essentiel : elle ne considère plus les équations de l'ancienne Mécanique que comme des approximations valables seulement quand l'approximation de l'Optique géométrique est suffisante pour décrire la propagation de l'onde.

La Dynamique classique n'apparaît donc plus que comme une approximation : elle n'est utilisable que, quand l'indice n relatif à l'onde Ψ varie peu à l'échelle de la longueur d'onde ou, ce qui revient au même, quand le potentiel V varie lentement à cette échelle. Toutefois, si la longueur d'onde de l'onde Ψ était infiniment petite, la Dynamique ancienne serait rigoureusement valable. D'après la formule (37), l'on voit que cela serait toujours réalisé, pour une vitesse v non nulle, si h était infiniment petit. D'où cette conclusion depuis longtemps connue : si l'on fait tendre h vers zéro dans les formules, tous les effets quantiques doivent disparaître et la Dynamique classique doit retrouver toute sa rigueur.

4. Équations générales de la Mécanique ondulatoire du corpuscule. —

Nous venons d'être conduits à substituer aux équations classiques de la Dynamique du point matériel dans un champ constant l'équation de propagation d'une onde monochromatique. Mais, comme nous le verrons bientôt, on est amené à considérer des trains d'ondes formés par une superposition d'ondes monochromatiques. Il est donc utile de chercher à obtenir une équation de propagation à laquelle satisfasse la fonction Ψ quand elle représente une telle superposition d'ondes monochromatiques. L'équation

$$(40) \quad \Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z) \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

satisfait à cette condition car pour une onde plane monochromatique de

fréquence $\frac{E}{h}$, elle nous ramène à l'équation (38). Mais la forme (40) nous permet de ne pas nous borner aux ondes monochromatiques et de considérer des superpositions de telles ondes. De plus, elle nous suggère la manière d'étendre la nouvelle Mécanique au cas des champs variables avec le temps. En effet, comme elle nous permet de ne plus nous borner aux ondes monochromatiques, le temps n'y joue plus un rôle particulier et il est alors naturel d'admettre que la forme de l'équation doit se conserver quand V dépend du temps, donc d'écrire

$$(41) \quad \Delta\Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t)\Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

comme forme générale de l'équation de propagation des ondes Ψ en Mécanique ondulatoire non relativiste du corpuscule unique.

5. Procédé automatique permettant de retrouver l'équation des ondes.

— Nous allons indiquer un procédé formel permettant de retrouver automatiquement l'équation des ondes, procédé dont l'importance avait été soulignée par M. Schrödinger.

En Mécanique classique, on appelle « fonction hamiltonienne » la fonction qui exprime l'énergie à l'aide des coordonnées et des moments de Lagrange conjugués. En coordonnées rectangulaires, l'expression bien connue de cette fonction est

$$(42) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t).$$

Si dans cette expression, nous remplaçons p_x par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, p_y par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}$ et p_z par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$, nous obtenons un opérateur, l'opérateur hamiltonien

$$(43) \quad H_{op} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z, t).$$

En appliquant l'opérateur (43) à la fonction Ψ , c'est-à-dire en multipliant Ψ *en avant* par l'opérateur (43), puis en égalant le résultat à $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\Psi}{\partial t}$, on obtient

$$(44) \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \Delta\Psi + V(x, y, z, t)\Psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\Psi}{\partial t},$$

équation identique à l'équation générale (40).

Nous voyons ainsi que l'équation générale de propagation peut se mettre sous la forme

$$(45) \quad H(x, y, z, P_x, P_y, P_z, t) \Psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

où P_x, P_y, P_z sont respectivement les opérateurs $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$ que nous faisons donc correspondre aux composantes de la quantité de mouvement.

Il importe de remarquer que le procédé automatique pour obtenir l'équation des ondes que nous venons d'indiquer ne réussirait pas en général si l'on employait des coordonnées curvilignes. Ainsi, avec des coordonnées sphériques, on n'obtiendrait pas par ce procédé la forme correcte de l'opérateur Δ figurant dans l'équation. Cette difficulté est liée au fait qu'on ne peut alors déduire univoquement par ce procédé à partir de la fonction hamiltonienne classique la forme de l'opérateur hamiltonien parce qu'un terme de la forme qp_q par exemple dans la fonction classique peut dans l'opérateur donner naissance à des termes $qP_q, P_qq, \frac{qP_q + P_qq}{2}$, etc. suivant l'ordre qu'on adopte pour les facteurs et ces termes ne sont pas équivalents.

Pour obtenir l'expression correcte, il faut procéder à une symétrisation préalable en p et q de l'expression classique.

6. Théorème sur la vitesse de groupe. Raccord avec la Mécanique classique. — Nous allons maintenant démontrer un théorème qui se trouvait déjà dans ma Thèse : celui de la vitesse de groupe.

Rappelons d'abord qu'un groupe d'ondes est formé par une superposition d'ondes monochromatiques ayant des fréquences et des directions de propagation *très voisines*. On peut donc lui attribuer une fréquence, une longueur d'onde et une direction de propagation approximativement bien déterminées, bien qu'il ne soit pas rigoureusement équivalent à une onde monochromatique.

Un groupe d'ondes peut avoir des dimensions finies parce que les ondes qui le composent et qui sont en concordance de phase au centre des trains d'ondes doivent se détruire par interférence en dehors de ses limites. Il est facile de voir que les dimensions d'un tel groupe d'ondes limité doivent toujours être grandes par rapport à la longueur d'onde moyenne λ_0 . Si, en effet, les diverses composantes sont en concordance de phase au centre du groupe d'onde et si celui-ci est formé par une superposition d'ondes de longueurs d'ondes comprises dans l'inter-

valle $\lambda_0 - \Delta\lambda \rightarrow \lambda_0 + \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, pour que les composantes puissent se détruire par interférence en dehors du domaine qu'occupe le groupe d'ondes, il faut que le déphasage des ondes de longueur d'onde λ_0 et $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$ soit en moyenne de $\frac{\pi}{2}$ quand on passe du centre au bord du groupe d'ondes. Si d est la distance moyenne du centre au bord, on doit donc avoir

$$(46) \quad \frac{d}{\lambda_0} - \frac{d}{\lambda_0 \pm \Delta\lambda} \simeq \frac{d \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \simeq \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{\lambda_0} \simeq \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \gg 1.$$

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant la formule de Rayleigh qui donne la « vitesse de groupe ». Dans un milieu à indice variable, nous pouvons écrire l'expression d'une onde monochromatique à l'approximation de l'Optique géométrique sous la forme (23). Un groupe d'ondes dans ce milieu sera donc représenté par

$$(47) \quad \Psi = \int_{\nu_0 - \Delta\nu}^{\nu_0 + \Delta\nu} a(\nu) e^{2\pi i [\nu t - \varphi_1] } d\nu \quad (\Delta\nu \ll \nu_0).$$

Posons $\nu = \nu_0 + \eta$, η variant de $-\Delta\nu$ à $+\Delta\nu$. Nous pouvons écrire approximativement

$$(48) \quad \Psi = e^{2\pi i [\nu_0 t - \varphi_1(x, y, z, \nu_0)] } \int_{-\Delta\nu}^{+\Delta\nu} a(\eta) e^{2\pi i \eta \left[t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_0 \right] } d\eta,$$

où $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_0$ est la dérivée de φ_1 par rapport à ν pour $\nu = \nu_0$. Dans (48), l'intégrale est une fonction du paramètre $t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_0$ et l'on peut écrire

$$(49) \quad \Psi = F \left[t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_0 \right] e^{2\pi i [\nu_0 t - \varphi_1(x, y, z, \nu_0)] }.$$

Le train d'ondes se comporte donc approximativement pendant un certain temps comme une onde monochromatique de fréquence ν_0 dont l'amplitude serait fonction seulement du paramètre $t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right)_0$. Donc si nous nous déplaçons le long d'un rayon, c'est-à-dire d'une courbe orthogonale aux surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$ de façon que $dt - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \nu \partial s} ds$ soit nul, nous accompagnerons une même valeur de l'amplitude. Nous pouvons donc dire que les amplitudes du groupe d'ondes se déplacent en bloc le long des rayons avec la vitesse

$$(50) \quad U = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \nu \partial s} \right)^{-1}.$$

Mais nous savons que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = |\text{grad } \varphi_1|$ est en chaque point égal à l'inverse de la longueur d'onde locale $\lambda(x, y, z, \nu)$. Nous avons donc

$$(51) \quad \frac{1}{U} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\nu}{\mathfrak{V}} \right)}{\partial \nu} = \frac{1}{\mathfrak{V}_0} \frac{\partial (n\nu)}{\partial \nu}.$$

Telle est la célèbre formule de lord Rayleigh qui donne la vitesse de groupe U .

Si le milieu est homogène, U est indépendant de x, y, z . Si, de plus, il est sans dispersion $\left(\frac{\partial n}{\partial \nu} = 0 \right)$, on a $U = \mathfrak{V}$ et la vitesse de groupe se confond alors avec la vitesse de phase.

Le déplacement en bloc d'un groupe d'ondes avec la vitesse U n'est pas rigoureux car dans la formule (48), nous avons négligé les termes en η^2, η^3, \dots qui contiendraient les dérivées supérieures de φ_1 par rapport à ν . On peut voir que l'existence des termes négligés a la conséquence suivante : au bout d'un temps suffisamment long, le groupe d'ondes ne peut plus être considéré comme se déplaçant sans se déformer et, à la longue, il s'étale de plus en plus dans l'espace avec diminution corrélative de son amplitude. Nous aurons plus tard à nous préoccuper de cette dissémination progressive des groupes d'ondes représentée par une intégrale de Fourier du type (47).

Arrivons maintenant au théorème de la vitesse de groupe en Mécanique ondulatoire. Pour le mouvement d'un corpuscule se déplaçant dans un champ permanent qui dérive du potentiel $V(x, y, z)$, nous avons trouvé pour la longueur d'onde l'expression (36), dont nous tirons en nous souvenant que $E = h\nu$,

$$(52) \quad \frac{\partial \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\partial \nu} = \frac{\partial \sqrt{2m(E - V)}}{\partial E} = \frac{m}{\sqrt{2m(E - V)}} = \frac{1}{v},$$

v étant la vitesse corpusculaire correspondant à l'énergie E . La formule de Rayleigh nous donne alors

$$(53) \quad U = v.$$

D'où l'important théorème sur la vitesse de groupe en Mécanique ondulatoire :

Si l'on associe au mouvement d'un corpuscule un groupe d'ondes Ψ dont la fréquence centrale correspond à l'énergie du corpuscule, la vitesse du groupe est égale à la vitesse du corpuscule.

Montrons comment ceci conduit à raccorder la Mécanique ondulatoire à la Mécanique classique dans le domaine macroscopique. Dans les expériences de l'échelle macroscopique, les champs et par suite l'indice de réfraction pour les ondes Ψ varient peu à l'échelle de la longueur d'onde. De plus, les longueurs d'onde étant très petites, on peut considérer des groupes d'ondes qui, à notre échelle, sont quasi ponctuels. Envisageons dans ces conditions la propagation de l'onde monochromatique qui possède la fréquence centrale ν_0 du groupe d'ondes. Il lui correspond une famille de surfaces d'égale phase $\varphi_1(x, y, z, \nu_0) = \text{const.}$ et les rayons sont les courbes orthogonales à ces surfaces. A l'échelle macroscopique, le groupe d'ondes sera analogue à un petit globeule qui glisserait le long d'un tube de rayons très délié.

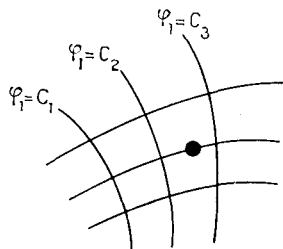


Fig. 2.

A l'échelle de la longueur d'onde, il serait dans sa partie centrale assimilable à une onde monochromatique et c'est seulement sur les bords que l'interférence des diverses composantes ferait tomber à zéro son amplitude.

Le petit groupe d'ondes quasi ponctuel à notre échelle se transporte le long d'un rayon central avec la vitesse de groupe U qui est égale d'après (53) à celle d'un corpuscule ponctuel classique décrivant ce rayon-trajectoire. Comme à l'échelle humaine nous ne pouvons pas distinguer les uns des autres les divers points du groupe d'ondes et que le corpuscule ne peut se manifester qu'à l'intérieur de celui-ci (comme cela résulte du principe de localisation que nous étudierons au chapitre suivant), nous aurons l'impression d'être en présence d'un corpuscule ponctuel animé du mouvement défini par la Mécanique classique.

Nous parvenons ainsi à comprendre comment pourra se faire le raccord entre la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire dans le cas des phénomènes macroscopiques où la propagation d'un petit groupe d'ondes Ψ peut être décrite par l'approximation de l'Optique géométrique.

7. Équation de propagation de la Mécanique ondulatoire relativiste à un Ψ . — Nous avons trouvé les équations de propagation valables en Mécanique ondulatoire quand on peut négliger les corrections de relativité. On peut chercher à étendre la théorie précédente en tenant compte de la Relativité.

En Dynamique relativiste, un corpuscule de masse propre m_0 placé en dehors de tout champ possède comme énergie et comme quantité de grandeur

$$(54) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

et l'on peut décomposer W en deux parties suivant la formule

$$(55) \quad W = m_0 c^2 + E, \quad \text{avec} \quad E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right).$$

Le terme $m_0 c^2$ est l'énergie propre du corpuscule qui, d'après le principe de l'inertie de l'énergie, correspond à l'existence de la masse propre m_0 . Quant à E , c'est le supplément d'énergie dû au mouvement ou « énergie cinétique », seul terme considéré par la Mécanique classique qui ignore l'énergie interne $m_0 c^2$.

Quand la vitesse v est très petite par rapport à c ($\beta \ll 1$), on retrouve les expressions classiques

$$(56) \quad E = \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad \mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}, \quad E = \frac{1}{2 m_0} p^2,$$

la masse propre m_0 coïncidant avec la masse constante m de la Mécanique classique. Cette Mécanique classique apparaît donc ici comme une approximation valable pour $\beta \ll 1$, ce qui est le cas usuel des mouvements macroscopiques.

Tandis que les formules classiques conduisent immédiatement pour le corpuscule libre à la forme suivante de la fonction hamiltonienne

$$(57) \quad E = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

les formules relativistes conduisent à poser

$$(58) \quad W = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

c'est-à-dire à la relation

$$(59) \quad \frac{W^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2.$$

L'équation de Jacobi s'obtient en Dynamique classique quand on

substitue $\frac{\partial S}{\partial t}$ à E et $-\text{grad } S$ à \mathbf{p} dans la troisième équation (56), ce qui donne

$$(60) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right].$$

L'équation de Jacobi dans la Dynamique relativiste s'obtient de la même manière en partant cette fois de la relation (59) et a la forme

$$(61) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + m_0^2 c^2.$$

Pour parvenir à l'équation de propagation de la Mécanique relativiste, il paraît alors naturel de partir de la relation (59) et d'y faire les substitutions

$$W \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \rightarrow -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \dots,$$

ce qui conduit à l'équation de propagation

$$(62) \quad \square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0.$$

Proposée simultanément par plusieurs auteurs au début de l'été 1926, tout de suite après les travaux de M. Schrödinger, l'équation (62) est connue sous le nom d'équation de Klein-Gordon. A l'approximation newtonienne, avec l'expression (55) de W, on retrouve aisément à partir de (62) la forme non relativiste de l'équation des ondes [formule (40) avec $V = 0$].

Si l'on veut passer maintenant au cas où un champ agit sur le corpuscule, il faut donner à ce champ une forme relativiste. Dans le cas d'un électron de charge électrique e dans un champ électromagnétique dérivant d'un potentiel scalaire V et d'un potentiel vecteur \mathbf{A} , on posera

$$(63) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + eV; \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

et l'on en déduira la relation hamiltonienne :

$$(64) \quad \frac{1}{c^2} (W - eV)^2 = \sum_{x,y,z} \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + m_0^2 c^2$$

et l'équation de Jacobi :

$$(65) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - eV \right)^2 = \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{e}{c} A_x \right)^2 + m_0^2 c^2.$$

En tenant compte de la relation de Lorentz entre les potentiels

$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0$, le procédé habituel de passage à la Mécanique ondulatoire conduit à l'équation de propagation

$$(66) \quad \square \Psi - \frac{4\pi i}{h} \frac{\varepsilon V}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{4\pi i}{h} \frac{\varepsilon}{c} \sum_{x, y, z} A_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m_0^2 c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} (V^2 - A^2) \right] \Psi = 0.$$

Les équations précédentes connues dès 1926 sont valables pour des ondes Ψ représentées par une fonction d'onde invariante à une seule composante. Le développement ultérieur de la Mécanique ondulatoire a montré que ces équations ne peuvent convenir que pour les particules dont le « spin » est égal à zéro. Pour les particules de spin non nul, la fonction Ψ doit être considérée comme un être mathématique ayant plusieurs composantes qui subissent certaines transformations bien définies lors d'une transformation de Lorentz. Ces composantes sont liées entre elles par un système d'équations aux dérivées partielles simultanées qui sont linéaires et du premier ordre en x, y, z, t . Le nombre des composantes du Ψ et celui des équations correspondantes s'élèvent quand la valeur du spin augmente. Toutes ces formes mathématiques sont aujourd'hui bien étudiées ⁽¹⁾.

Le cas le plus simple est celui de l'électron qui possède, comme sans doute toutes les autres particules « élémentaires », un spin égal à $\frac{1}{2}$ en unité $\frac{h}{2\pi}$. Découverte en 1928 par M. P. A. M. Dirac, la Mécanique

ondulatoire de l'électron est connue sous le nom de « théorie de Dirac ». Elle utilise une fonction Ψ à quatre composantes $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ qui obéissent à quatre équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre en x, y, z, t . De ces équations, l'on déduit qu'en l'absence de champ, chacun des Ψ_k obéit séparément à l'équation (62).

Nous ne développerons pas ici la théorie de Dirac. Nous y reviendrons dans la seconde partie de l'Ouvrage (chap. XVI).

(1) On pourra consulter à ce sujet l'Ouvrage de l'auteur : *Théorie générale des particules à spin*, 2^e éd., Gauthier-Villars, 1954.

CHAPITRE III.

PREMIERS PRINCIPES RELATIFS A L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DES ONDES Ψ .

1. **Le grand problème de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire.** — Dès le début de la Mécanique ondulatoire, le problème de la signification exacte qu'il convenait d'attribuer à l'onde Ψ est apparu comme comportant de grandes difficultés. On s'est vite aperçu qu'il n'était pas possible de considérer la fonction Ψ comme une grandeur physique au sens ancien, par exemple comme représentant la vibration de quelque milieu. L'équation générale de propagation contient, en effet, un coefficient $i = \sqrt{-1}$ de sorte que la fonction Ψ est essentiellement complexe contrairement à ce qui se passait dans la théorie classique des ondes et des vibrations où l'emploi de fonctions complexes apparaissait comme un artifice mathématique souvent commode, mais toujours possible à éviter. De plus, nous verrons que, pour les systèmes de corpuscules, l'onde Ψ se propage dans l'espace de configuration, espace abstrait et fictif.

Plus le formalisme de l'utilisation de l'onde Ψ se précisait, plus elle apparaissait comme une sorte de représentation formelle et subjective permettant d'évaluer les probabilités de certains résultats de mesure. Nous aurons l'occasion de montrer en étudiant cette interprétation probabiliste de la fonction Ψ que cette fonction d'onde définie à la façon usuelle comme solution des équations de propagation linéaires mentionnées au chapitre précédent ne peut certainement pas être considérée comme une réalité objective, mais comme un élément ayant le même caractère subjectif que les probabilités qu'elle représente et susceptible de varier suivant les connaissances de celui qui l'emploie.

La question capitale est alors de savoir si l'interprétation probabiliste de l'onde Ψ qui conduit certainement à des prévisions exactes constitue

une représentation « complète » au-delà de laquelle il n'y a pas lieu de rechercher une description objective de la réalité ou si, au contraire, la description des phénomènes à l'aide de la seule onde Ψ est « incomplète » et doit laisser place à une description plus profonde et plus détaillée de la réalité physique. Nous aurons l'occasion de revenir plus d'une fois sur ce problème.

Pour l'instant, nous allons nous contenter d'énoncer et d'étudier deux principes fondamentaux de l'interprétation probabiliste de l'onde Ψ qui se sont imposés dès 1926-1927 notamment à la suite des travaux de M. Max Born et dont l'exactitude ne paraît pas douteuse.

2. Principe de localisation ou principe des interférences. — Le premier principe qui s'est imposé en Mécanique ondulatoire quand on a voulu utiliser la fonction d'onde Ψ pour la prévision des phénomènes a été le principe que je nommerai « principe de localisation » ou « principe des interférences » et dont voici l'énoncé :

Le carré du module de la fonction Ψ mesure en chaque point et à chaque instant la probabilité pour que la présence du corpuscule soit observée en ce point à cet instant.

La fonction Ψ étant une quantité complexe, nous pouvons toujours l'écrire sous la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, où a et φ sont des grandeurs réelles que nous nommerons respectivement l'amplitude et la phase de Ψ . Si nous désignons par Ψ^* la quantité complexe conjuguée de Ψ égale à $a e^{-\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, nous aurons

$$(1) \quad a^2 = \Psi \Psi^* = |\Psi|^2.$$

C'est cette grandeur réelle qui intervient dans le principe des interférences.

Il est facile de rattacher le principe des interférences à des idées qui étaient bien connues dans les anciennes théories de la lumière. Dans ces théories, on admettait toujours que l'intensité de l'onde lumineuse, c'est-à-dire le carré de son amplitude, mesurait en chaque point à chaque instant la quantité d'énergie lumineuse qu'on y pouvait recueillir : c'est cette règle qui permettait la prévision exacte des franges d'interférences et de diffraction. Mais nous savons aujourd'hui que tout se passe dans les échanges énergétiques entre la matière et la lumière comme si la lumière était formée de corpuscules d'énergie $h\nu$: ce sont les « photons ». Si nous nous représentons une onde lumineuse entraînant avec elle un grand nombre de photons, l'explication des interfé-

rences exigera que l'intensité de l'onde mesure en chaque point la densité du nuage de photons : nous obtenons ainsi une interprétation statistique du principe des interférences appliqué aux photons.

Mais cette interprétation statistique doit prendre la forme d'une interprétation probabiliste. En effet, on a pu obtenir des phénomènes d'interférences de la lumière du type usuel en employant pendant un temps très long une lumière d'intensité extrêmement faible, si faible qu'il ne pouvait jamais y avoir à la fois plus d'un photon dans l'appareil d'interférences. Ce sont les expériences fondamentales de Taylor et de Dempster et Batho ⁽¹⁾. Or, d'autres expériences dues à Silberstein et confirmées par celles de Vavilov ⁽²⁾ ont montré que l'impression des plaques photographiques est due à des effets photoélectriques produits localement dans leur couche sensible par l'arrivée successive des photons. Dès lors, la seule interprétation qu'on puisse donner des expériences du type Taylor est la suivante : chaque photon arrive sur l'appareil d'interférences avec son train d'ondes qui y subit les interférences calculées par la théorie des ondes et, au bout d'un temps très long, quand il est arrivé un grand nombre de photons, ceux qui ont été captés par la plaque photographique se trouvent avoir produit des effets photoélectriques sur cette plaque répartis proportionnellement à l'intensité locale de l'onde. On est ainsi conduit à dire que l'intensité de l'onde mesure la probabilité pour que le photon produise en un point de l'espace un effet observable. Cette interprétation probabiliste du principe des interférences permet de justifier le succès des expériences de Taylor et de Dempster et Batho.

Ce que nous venons de dire concerne les photons, mais l'extension du principe des interférences au cas des particules matérielles et de leurs ondes associées paraît s'imposer puisque avec elles aussi, on peut obtenir des phénomènes d'interférences et de diffraction. Pour les électrons par exemple que l'on peut facilement utiliser dans les expériences (électrons de quelques centaines à quelques centaines de milliers d'électrons-volts), l'onde associée a, d'après la formule $\lambda = \frac{h}{p}$, une longueur d'onde de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-9} cm. On doit donc pouvoir avec des électrons obtenir des phénomènes analogues à ceux que l'on obtient avec des rayons X ou γ dont la longueur d'onde est du même

(¹) G. I. TAYLOR, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. 15, 1909, p. 114; DEMPSTER et BATHO, *Phys. Rev.*, t. 30, 1927, p. 644.

(²) S. I. VAVILOV, *Progrès des sciences physiques*, t. 16, 1936, p. 892.

ordre. C'est bien, on le sait, ce qu'ont montré en 1927 les expériences de Davisson et Germer, bientôt reprises par G. P. Thomson, Rupp, Ponte, Kikuchi, etc. Elles ont montré qu'un faisceau d'électrons de même énergie, donc associées à une onde monochromatique, peut, en se diffractant sur un cristal, donner naissance à des phénomènes tout à fait analogues à ceux qu'on observe avec les rayons X dans les expériences du type Laue-Bragg. D'ailleurs Rupp a pu obtenir la diffraction des électrons par un réseau optique ordinaire sous des incidences très rasantes et, en 1940, Börsch, répétant avec des électrons une expérience mémorable de Fresnel sur la lumière, a pu observer la diffraction des électrons par le bord d'un écran. Enfin, rappelons qu'on a pu obtenir la diffraction par les cristaux de toute une série de particules matérielles autres que les électrons, par exemple les protons, divers noyaux d'atomes et même les neutrons. Toutes ces belles expériences ont apporté une excellente confirmation des idées générales de la Mécanique ondulatoire et une vérification quantitative très précise de la formule $\lambda = \frac{h}{p}$. Elles ont aussi apporté un appui décisif à l'idée qu'il convient d'étendre à toutes les particules le principe des interférences puisque ce principe est à la base de tous les calculs qui permettent de prévoir les phénomènes d'interférences et de diffraction.

Il est certain que le principe des interférences doit, pour toutes les particules, recevoir l'interprétation probabiliste que nous avons été amené plus haut à lui attribuer dans le cas des photons et de l'onde lumineuse. La chose ne paraît plus faire de doute puisque MM. Bidermann, Souchkine et Fabrikant ⁽¹⁾ ont pu vérifier que les figures de diffraction obtenues *avec des électrons* se produisent aussi par des actions localisées dues aux arrivées successives des électrons sur la plaque photographique qui les enregistre.

3. Énoncé précis du principe des interférences. Fluide de probabilité.

— Pour préciser le principe des interférences, nous remarquerons que l'onde Ψ , solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire n'ayant pas le caractère d'une grandeur physique mesurable, n'est déterminée qu'à un facteur multiplicatif complexe près. Nous pouvons choisir ce facteur de façon à avoir

$$(2) \quad \iiint |\Psi|^2 d\tau = 1,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace. Le choix de ce facteur arbitraire

⁽¹⁾ *Rapports à l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.*, t. 66, 1949, p. 185.

nous permet donc de « normer » la fonction d'onde par la relation (2), du moins à un instant donné. Nous allons montrer que la fonction Ψ ainsi normée restera normée à tout instant t . On pourra donc préciser l'énoncé du principe des interférences en disant : *La probabilité pour qu'une observation permette de localiser un corpuscule, dont la fonction d'onde normée est $\Psi(x, y, z, t)$, dans un élément de volume $d\tau$ à l'instant t est égale à l'expression*

$$\Psi(x, y, z, t) \Psi^*(x, y, z, t) d\tau = |\Psi(x, y, z, t)|^2 d\tau.$$

Pour représenter les variations de la probabilité de présence $|\Psi|^2$ au cours du temps, nous imaginerons un fluide fictif dont, par hypothèse, la densité en chaque point à chaque instant serait donnée par

$$(3) \quad \rho(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z, t) \Psi^*(x, y, z, t).$$

Nous définissons le mouvement de ce fluide en posant que sa vitesse au point x, y, z à l'instant t a pour valeur

$$(4) \quad \mathbf{v} = \frac{1}{|\Psi|^2} \frac{h}{4\pi i m} (\Psi \mathbf{grad} \Psi^* - \Psi^* \mathbf{grad} \Psi) = -\frac{1}{m} \mathbf{grad} \varphi.$$

Or, les fonctions Ψ et Ψ^* obéissent respectivement à l'équation (41) du chapitre II (p. 19) et à l'équation conjuguée, d'où l'on tire aisément

$$(5) \quad \Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^* = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial(\Psi \Psi^*)}{\partial t} = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

On peut donc écrire

$$(6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{h}{4\pi i m} (\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^*) = -\frac{h}{4\pi i m} \sum_{x, y, z} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)$$

ou d'après (4)

$$(7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Cette équation, bien connue en Hydrodynamique sous le nom d'équation de continuité, exprime que le fluide fictif de densité ρ se conserve au cours du temps, c'est-à-dire que l'intégrale $\iiint |\Psi|^2 d\tau$ reste constante. La normalisation du Ψ a donc bien un caractère permanent.

4. Les relations d'incertitude d'Heisenberg. — L'ancienne Mécanique admettait qu'il était possible d'attribuer au corpuscule une position et une vitesse bien déterminées. En d'autres termes, on attribuait aux coordonnées x, y, z du corpuscule ainsi qu'à son énergie E et à sa

quantité de mouvement \mathbf{p} des valeurs bien déterminées à chaque instant. Nous allons montrer qu'en Mécanique ondulatoire, du moins si l'on envisage exclusivement la fonction d'onde continue Ψ , on ne peut plus maintenir cette affirmation.

Étudions le cas simple du mouvement rectiligne uniforme en dehors de tout champ. Nous savons qu'au mouvement d'énergie E et de quantité de mouvement \mathbf{p} s'opérant dans la direction de cosinus directeurs α, β, γ , correspond la propagation de l'onde plane monochromatique

$$(8) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} [E t - \sqrt{2mE} (\alpha x + \beta y + \gamma z)]}$$

de fréquence $\frac{E}{h}$ et de longueur d'onde $\frac{h}{mv}$, du moins à l'approximation newtonienne. Cette onde monochromatique plane correspond donc à un état de mouvement bien déterminé; mais elle ne donne aucune indication sur la position du corpuscule car elle a la même amplitude en tout point de l'espace. La probabilité de présence $|\Psi|^2$ est donc la même en tous les points.

Mais, au lieu d'être une onde plane monochromatique, la solution Ψ de l'équation d'ondes qui convient à l'état du corpuscule peut être une superposition d'ondes planes monochromatiques représentant un train d'ondes de dimensions limitées. Alors l'intensité $|\Psi|^2$ ne sera différente de zéro que dans une région limitée de l'espace et, d'après le principe des interférences, la présence du corpuscule ne pourra être décelée que dans cette région. L'incertitude sur la position est alors moins grande que dans le cas de l'onde plane monochromatique. Par contre, si à chaque composante monochromatique de fréquence ν et de longueur d'onde λ présente dans la composition spectrale du Ψ , nous faisons correspondre l'état de mouvement défini par

$$(9) \quad E = h\nu, \quad p_x = \alpha \frac{h}{\lambda}, \quad p_y = \beta \frac{h}{\lambda}, \quad p_z = \gamma \frac{h}{\lambda},$$

nous ne pouvons plus attribuer au corpuscule un état de mouvement bien défini. En passant du cas de l'onde plane monochromatique à celui du train d'ondes limité, nous avons donc vu diminuer l'incertitude sur la position, mais en revanche nous avons vu augmenter l'incertitude sur l'état de mouvement.

Nous pouvons maintenant passer au cas limite d'un train d'ondes de dimensions infiniment petites. Il est alors nécessaire de faire intervenir pour la représentation analytique de ce train d'ondes une superposition d'ondes monochromatiques ayant toutes les fréquences, toutes les

longueurs d'onde et toutes les directions possibles. Ce cas limite, symétrique de celui de l'onde plane monochromatique, correspond à une localisation bien déterminée du corpuscule, mais à une ignorance complète de son état de mouvement.

En résumé, mieux la position du corpuscule est définie, plus grande est l'incertitude sur son état de mouvement et inversement. Cette constatation qualitative peut être précisée par une analyse exacte de la représentation d'un train d'ondes Ψ par une intégrale de Fourier. On parvient ainsi à montrer que, si la connaissance de l'onde Ψ laisse subsister des incertitudes Δx , Δy , Δz sur les coordonnées du corpuscule et des incertitudes Δp_x , Δp_y , Δp_z sur les composantes de sa quantité de mouvement, on a entre ces incertitudes les relations

$$(10) \quad \Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h,$$

valables en ordre de grandeur. Ce sont là « les relations d'incertitude d'Heisenberg ». Elles nous apprennent que le produit de l'incertitude sur une coordonnée par l'incertitude sur la composante correspondante de la quantité de mouvement est toujours de l'ordre de h .

Aux relations (10), on adjoint une quatrième relation d'incertitude qui en est la conséquence

$$(11) \quad \Delta t \Delta E \geq h,$$

en ordre de grandeur. L'interprétation de la relation (11) est la suivante : si une mesure permettant d'évaluer l'énergie E d'un corpuscule dure un temps Δt , la valeur obtenue pour E est affectée d'une incertitude ΔE qui est supérieure ou égale à $\frac{h}{\Delta t}$.

5. Le principe de décomposition spectrale (Born). — Dans les raisonnements que nous venons de faire, nous avons implicitement admis un principe qu'il importe maintenant d'énoncer nettement. Ce principe qui s'est dégagé dans les premières applications de la Mécanique ondulatoire et que M. Born a le premier clairement aperçu est le suivant :

Si l'onde Ψ est formée par la superposition d'un certain nombre d'ondes planes monochromatiques, à chacune de ses composantes correspond un état de mouvement possible du corpuscule, c'est-à-dire qu'une observation peut permettre d'attribuer cet état de mouvement au corpuscule.

D'une façon précise, on peut dire avec M. Born :

Si l'onde Ψ est formée par une superposition d'ondes planes monochromatiques formant une suite discontinue, c'est-à-dire si l'on a

$$(12) \quad \Psi = \sum_k c(\mathbf{p}_k) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k t - \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{r}]}$$

où E_k est l'énergie correspondant à la quantité de mouvement \mathbf{p}_k , la probabilité pour qu'une observation conduise à attribuer au corpuscule un mouvement de quantité de mouvement \mathbf{p}_k est donnée par $|c(\mathbf{p}_k)|^2$. Si, au contraire, l'onde Ψ est formée par une superposition d'ondes planes monochromatiques formant un spectre continu (ce qui est le cas des trains d'ondes usuels), c'est-à-dire si l'on a

$$(13) \quad \Psi = \int c(\mathbf{p}) e^{\frac{2\pi i}{h} (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{p} \quad (d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z)$$

la probabilité pour qu'une observation conduise à attribuer au corpuscule une quantité de mouvement comprise entre \mathbf{p} et $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ est donnée par $|c(\mathbf{p})|^2 d\mathbf{p}$, étant rappelé que $c(\mathbf{p})$ est donné en fonction de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ par la formule d'inversion de Fourier :

$$(14) \quad c(\mathbf{p}) = \frac{1}{h^3} \int \Psi(\mathbf{r}, t) e^{-\frac{2\pi i}{h} [Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}]} d\mathbf{r} \quad (d\mathbf{r} = dx dy dz).$$

On peut donc dire que la probabilité de chaque état est mesurée par par « l'intensité » de la composante spectrale correspondante. Les états de mouvement qui ne figurent pas dans le développement de Fourier de la fonction d'onde Ψ ont donc une probabilité nulle : on peut considérer cette conclusion comme étant à la base de la théorie des états quantifiés en Mécanique ondulatoire.

6. Commentaire des résultats précédents. — Les résultats qui précèdent nous permettent de préciser la signification de l'onde Ψ . Elle ne constitue pas une grandeur physique au sens classique : elle est seulement un instrument de prévision, plus exactement de prévision de probabilité. Sa forme résulte d'observations antérieures dont le résultat est parvenu à la connaissance de l'observateur et qui lui ont apporté des informations sur l'état du corpuscule : à partir de ces données initiales et tant que de nouveaux renseignements ne parviennent pas à la connaissance de l'utilisateur, elle évolue conformément à l'équation des

ondes. Bien que cette évolution de l'onde Ψ soit entièrement déterminée, il n'en résulte pas, nous le verrons, une prévision rigoureuse des observations futures. En effet, la connaissance de l'onde Ψ ne nous permet pas de dire quelle valeur d'une grandeur donnée sera observée lors d'une nouvelle observation, mais seulement qu'elles sont les valeurs que l'on pourra trouver pour la grandeur et leurs probabilités respectives.

Chaque fois qu'une nouvelle observation nous apporte de nouvelles informations sur le corpuscule, la forme de l'onde Ψ s'en trouve modifiée. Ceci ne peut se comprendre que si l'onde Ψ est seulement une représentation de nos connaissances actuelles sur le corpuscule et non la représentation d'une réalité objective. Comme l'a dit récemment M. Schrödinger, l'onde Ψ a quelque chose de « psychologique ».

Nous verrons que des observations faites simultanément au cours d'une même expérience ne peuvent jamais nous fournir sur les grandeurs caractérisant le corpuscule des connaissances plus précises que ne le permettent les relations d'incertitude d'Heisenberg. Si nous mesurons avec précision la valeur de certaines grandeurs, la valeur des grandeurs canoniquement conjuguées nous reste totalement inconnue. Il y a donc des expériences « maximales » qui nous fournissent la plus grande connaissance possible sur le corpuscule qui soit compatible avec les relations d'Heisenberg. S'il existait des expériences nous permettant de connaître exactement toutes les grandeurs attachées au corpuscule, les relations d'incertitude d'Heisenberg ne seraient plus satisfaites et il résulterait des raisonnements faits précédemment qu'après une expérience de ce genre, nous ne pourrions plus représenter l'état de nos connaissances par une onde Ψ ; mais de subtiles analyses dues surtout à MM. Bohr et Heisenberg ont montré qu'aucune expérience de ce genre ne peut être réalisée et cela en raison même de l'existence du quantum d'action h .

Telles sont les conclusions auxquelles on parvient en se plaçant exclusivement au point de vue actuellement considéré comme orthodoxe suivant lequel l'onde Ψ nous fournit une description complète de l'état du corpuscule. Toutes ces conclusions paraissent d'ailleurs bien vérifiées et nous aurons à nous demander comment on aurait à interpréter leurs succès si l'on adoptait un autre point de vue que le point de vue orthodoxe.

En passant, nous noterons encore que les répartitions de probabilité fournies par le principe des interférences et par le principe de décomposition spectrale pour deux grandeurs canoniquement conjuguées x et

p_x conduisent à établir *rigoureusement* entre les « dispersions »

$$(15) \quad \sigma_x = \sqrt{(x - \bar{x})^2}, \quad \sigma_{p_x} = \sqrt{(p_x - \bar{p}_x)^2},$$

la relation

$$(16) \quad \sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{h}{4\pi}, \quad \dots$$

C'est là une forme précise des relations d'incertitude, mais, contrairement à ce que l'on dit parfois, elle n'est pas exactement équivalente à la forme qualitative

$$(17) \quad \Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \dots \text{ en ordre de grandeur.}$$

Il peut, en effet, se présenter des cas où la relation (16) n'apporte aucun renseignement précis (si l'une des dispersions est infinie) alors que la relation qualitative (17) conserve une valeur pratique pour l'expérimentateur.

7. Transposition relativiste de la théorie du fluide de probabilité. — Il est facile de transposer la théorie du fluide de probabilité dans le cas de l'équation d'ondes relativiste

$$(18) \quad \square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0.$$

Il suffit de poser $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ et de définir la densité et la vitesse du fluide de probabilité par

$$(19) \quad \rho = a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = -c^2 \frac{\text{grad } \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}.$$

pour vérifier l'équation de continuité

$$(20) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0.$$

C'est ce que l'on vérifie facilement en portant l'expression de Ψ dans (18) et annulant les termes imaginaires purs dans l'équation obtenue.

Si, au lieu d'un corpuscule libre, on considérait un électron soumis à un champ électromagnétique dérivant des potentiels V et \mathbf{A} , on aurait à remplacer l'équation (18) par l'équation (66) du chapitre II (p. 26). L'on verrait alors que, pour retrouver toujours l'équation de continuité (20), il faut poser au lieu de (19) les formules

$$(21) \quad \rho = a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right), \quad \mathbf{v} = -c^2 \frac{\text{grad } \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}.$$

Nous retrouverons l'expression de \mathbf{v} sous le nom de « formule du guidage » dans la tentative de théorie causale développée dans la seconde partie.

On vérifie aisément qu'on peut écrire (21) sous la forme

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = -\frac{h}{4\pi i} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - |\Psi|^2 \varepsilon V; \\ \rho \mathbf{v} = \frac{hc^2}{4\pi i} (\Psi \mathbf{grad} \Psi^* - \Psi^* \mathbf{grad} \Psi) - |\Psi|^2 \varepsilon c \mathbf{A}. \end{array} \right.$$

Ces formules permettent de vérifier que ρc et les trois composantes de $\rho \mathbf{v}$ forment les quatre composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps.

Il est aisé de vérifier aussi qu'à l'approximation newtonienne (où $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \simeq m_0 c^2$), les formules (19) nous ramènent aux formules du paragraphe 3, ρ n'étant évidemment définie qu'à une constante multiplicative près.

Le quadrivecteur densité-courant $(\rho, \rho \mathbf{v})$ de la théorie de Dirac sera étudié ultérieurement (II^e partie, chap. XVI).

CHAPITRE IV.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES.

1. L'ancienne Dynamique des systèmes de points matériels. — Jusqu'ici, nous n'avons considéré que le cas d'un corpuscule unique placé dans un champ de force connu. Comment généraliser les résultats exposés précédemment dans le cas d'un ensemble de corpuscules agissant les uns sur les autres? Pour le voir, il faut d'abord rappeler les grandes lignes de la Dynamique classique des systèmes de points matériels.

Considérons un système formé de N corpuscules. La masse du $i^{\text{ème}}$ est m_i , ses coordonnées sont x_i, y_i, z_i . L'énergie cinétique du système est

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad \text{avec} \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \dots$$

Les moments de Lagrange conjugués sont

$$(2) \quad p_{x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad p_{y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad p_{z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}.$$

L'énergie potentielle du système $V(x_1, \dots, z_N, t)$ est formée de deux sortes de termes :

1° ceux qui expriment l'action mutuelle des corpuscules et qui ne sont supposés dépendre que de leurs distances ; ils sont de la forme

$$(3) \quad V_{ij} = V_{ij}[\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}];$$

2° ceux qui expriment l'action éventuelle d'un champ extérieur sur chacun des corpuscules : ils sont de la forme $V_i(x_i, y_i, z_i, t)$.

L'expression hamiltonienne donnant l'expression de l'énergie en fonction des coordonnées et des moments est

$$(4) \quad H(x_1, \dots, z_N, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + V(x_1, \dots, z_N, t)$$

Si le champ extérieur ne dépend pas du temps ou est nul, V ne contient pas t et l'on sait qu'alors H garde une valeur constante E au cours du mouvement (système conservatif).

La théorie de Jacobi se laisse étendre aux systèmes. L'équation de Jacobi pour le système est

$$(5) \quad \sum_k^N \frac{1}{2m_k} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_k} \right)^2 \right] + V(x, y, z, t) = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Si l'on parvient à trouver une intégrale complète de cette équation contenant $3N$ constantes arbitraires non additives $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}$, on obtiendra l'un des mouvements possibles du système en écrivant

$$(6) \quad \frac{\partial S(x_1, \dots, z_N, t, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N})}{\partial x_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3N),$$

où les a_i sont de nouvelles constantes arbitraires et les moments de Lagrange seront donnés par les formules

$$(7) \quad p_{x_i} = -\frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad p_{y_i} = -\frac{\partial S}{\partial y_i}, \quad p_{z_i} = -\frac{\partial S}{\partial z_i}.$$

Dans le cas particulier important où les actions extérieures sont indépendantes du temps (ou nulles), V ne contient pas t et l'on peut envisager des solutions de (5) de la forme

$$(8) \quad S = Et - S_1(x_1, \dots, z_N, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}, E)$$

avec $3N$ constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}$, E . L'on est alors amené à considérer l'équation de Jacobi « raccourcie »

$$(9) \quad \sum_k^N \frac{1}{2m_k} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z_k} \right)^2 \right] + V(x_1, \dots, z_N) = E$$

et à en chercher une intégrale complète contenant $3N$ constantes arbitraires $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}$, E . Les équations du mouvement sont d'abord

$$(10) \quad \frac{\partial S_1}{\partial x_i} = a_i \quad (i = 1, \dots, 3N-1)$$

qui donnent la trajectoire du point représentatif du système dans l'espace de configuration formé à l'aide des variables x_1, \dots, z_N . Puis on a l'équation de l'horloge

$$(11) \quad \frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0.$$

Enfin

$$(12) \quad p_{x_i} = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}, \quad p_{y_i} = \frac{\partial S_1}{\partial y_i}, \quad p_{z_i} = \frac{\partial S_1}{\partial z_i}.$$

Comme dans le cas d'un point matériel unique, l'équation de Jacobi permet de définir des « classes » de mouvement du point représentatif du système dans l'espace de configuration, chaque classe correspondant à une fonction $S_1(x_1, \dots, z_N, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}, E)$ avec des valeurs données des constantes primaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}, E$, les divers mouvements d'une même classe étant caractérisés par la valeur des constantes secondaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}, t_0$.

2. Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. — Pour obtenir une Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, M. Schrödinger dans ses travaux de 1926 a introduit l'idée qu'il fallait considérer une propagation d'ondes Ψ dans l'espace de configuration du système, l'Optique géométrique de cette propagation d'ondes devant nous ramener à la théorie de Jacobi du paragraphe précédent.

On admet alors que l'équation de propagation des ondes Ψ dans l'espace de configuration doit s'obtenir par le même procédé automatique qui a réussi dans le cas du corpuscule unique. On part donc de l'expression hamiltonienne classique $H(x_1, \dots, z_N, p_{x_1}, \dots, p_{z_N}, t)$ de l'énergie qui convient pour le système envisagé et l'on transforme cette fonction en un opérateur en y remplaçant $p_{x_k}, p_{y_k}, p_{z_k}$ par les opérateurs

$$(13) \quad P_{x_k} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_{y_k} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad P_{z_k} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

On obtient ainsi l'opérateur hamiltonien $H(x_1, \dots, z_N, P_{x_1}, \dots, P_{z_N}, t)$ et l'on adopte comme équation de propagation du Ψ dans l'espace de configuration

$$(14) \quad H(x_1, \dots, z_N, P_{x_1}, \dots, P_{z_N}, t) \Psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

On trouve ainsi, x_1, \dots, z_N étant les coordonnées rectangulaires des N corpuscules,

$$(15) \quad \sum_k^N \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_k^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} V(x_1, \dots, z_N, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Pour $N=1$, on retrouve bien l'équation valable dans le cas d'un seul corpuscule.

Pour les systèmes conservatifs ($\frac{\partial V}{\partial t} = 0$), on peut considérer des solutions monochromatiques ne dépendant du temps que par le facteur $e^{\frac{2\pi i}{h}Et}$ et l'équation (15) s'écrit

$$(16) \quad \sum_k^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \Psi + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - V(x_1, \dots, z_N)] \Psi = 0.$$

Si, dans une région de l'espace de configuration, V varie peu à l'échelle de la longueur d'onde locale, l'optique géométrique est valable et l'onde a la forme approximative

$$(17) \quad \Psi = \alpha e^{\frac{2\pi i}{h}[Et - S_1]},$$

α étant une amplitude lentement variable dont les dérivées sont très petites par rapport à celles de S_1 . En substituant (17) dans (16), on voit que S_1 doit être une solution de l'équation de Jacobi (9), ce qui établit la jonction avec la Mécanique classique.

Un cas particulier intéressant est celui où les corpuscules du système n'agissent pas les uns sur les autres. On peut alors les considérer aussi bien comme isolés que comme formant un système. La fonction V se réduisant aux termes $V_i(x_i, y_i, z_i, t)$ qui expriment l'action du champ extérieur sur les divers corpuscules, l'équation (15) s'écrit

$$(18) \quad \sum_k^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} \sum_k^N V_k(x_k, y_k, z_k, t) \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Si nous posons

$$(19) \quad \Psi(x_1, \dots, z_N, t) = \Psi_1(x, y, z, t) \dots \Psi_N(x_N, y_N, z_N, t),$$

nous trouvons que l'équation du système se décompose en N équations du type

$$(20) \quad \frac{1}{m_k} \Delta_k \Psi_k - \frac{8\pi^2}{h^2} V_k(x_k, y_k, z_k, t) \Psi_k = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi_k}{\partial t}$$

et nous voyons que l'on peut considérer isolément chaque corpuscule.

Néanmoins la forme (19) des solutions n'est pas la plus générale : l'équation de propagation admet aussi comme solutions des combinaisons linéaires quelconques des produits $\prod_k \Psi_k(x_k, y_k, z_k, t)$. Ces combinaisons conviennent pour décrire les cas où, les corpuscules

ayant été antérieurement en interaction, leurs états individuels actuels ne sont pas indépendants : nous aurons à revenir sur ces états « corrélés » résultant d'interactions antérieures. Les solutions du type (19) ne conviennent que si les états des corpuscules sont indépendants.

3. Interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. — Il est aisé de transposer le principe des interférences au cas des systèmes de corpuscules. On l'énonce alors en disant :

Si l'état d'un système de corpuscules est représenté dans l'espace de configuration par la fonction d'onde $\Psi(x_1, \dots, z_N, t)$, la probabilité pour qu'une observation permette de localiser au temps t le point figuratif du système dans l'élément de volume

$$d\tau = dx_1 dy_1 dz_1 \dots dx_N dy_N dz_N$$

de l'espace de configuration est égal à $|\Psi(x_1, \dots, z_N, t)|^2 d\tau$.

S'il n'y a qu'un seul corpuscule, on retombe évidemment sur la forme précédemment étudiée du principe des interférences. Pour N corpuscules n'interagissant pas et n'ayant jamais interagi (corpuscules indépendants), on peut adopter l'expression (19) de Ψ et par suite écrire

$$(21) \quad |\Psi|^2 d\tau = |\Psi_1(x_1, y_1, z_1, t)|^2 dx_1 dy_1 dz_1 \dots |\Psi_N(x_N, y_N, z_N, t)|^2 dx_N dy_N dz_N.$$

La probabilité pour que le point figuratif du système soit trouvé dans l'élément de volume $dx_1 \dots dz_N$ de l'espace de configuration est alors le produit des probabilités individuelles pour que le premier corpuscule soit trouvé dans l'élément de volume $dx_1 dy_1 dz_1, \dots$, le $N^{\text{ième}}$ dans l'élément de volume $dx_N dy_N dz_N$. Ce résultat est en accord avec le théorème des probabilités composées car les présences des divers corpuscules dans les différents éléments de l'espace physique sont ici des événements indépendants et nous voyons bien pourquoi en ce cas la fonction d'ordre Ψ doit avoir la forme (19).

Pour que la grandeur $|\Psi|^2$ donne, en valeur absolue, la probabilité de présence du point figuratif du système dans l'élément de volume $d\tau$ de l'espace de configuration, il faut normer le Ψ en posant

$$(22) \quad \int \dots \int_{3N} |\Psi|^2 d\tau = 1,$$

ce qui détermine Ψ à un facteur constant $e^{i\alpha}$ près.

Il faut encore démontrer que la normalisation (22) effectuée à un instant t subsiste ensuite. Pour cela, on considérera un fluide fictif

défini dans l'espace de configuration par les formules

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = |\Psi|^2; \\ \rho \mathbf{v}_k = \frac{h}{4\pi i m_k} [\Psi \mathbf{grad}_k \Psi^* - \Psi^* \mathbf{grad}_k \Psi] = -\frac{1}{m_k} |\Psi|^2 \mathbf{grad}_k \varphi, \end{array} \right.$$

avec $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, \mathbf{v}_k ayant comme composantes $\frac{dx_k}{dt}$, $\frac{dy_k}{dt}$ et $\frac{dz_k}{dt}$ et \mathbf{grad}_k ayant pour composantes $\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\frac{\partial}{\partial y_k}$ et $\frac{\partial}{\partial z_k}$.

En multipliant l'équation de propagation (15) par Ψ^* , l'équation conjuguée par Ψ et en soustrayant, on obtient alors

$$(24) \quad \sum_k^N \frac{1}{m_k} [\Psi^* \Delta_k \Psi - \Psi \Delta_k \Psi^*] = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*),$$

d'où l'on déduit avec les définitions (23)

$$(25) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k^N \text{div}_k (\rho \mathbf{v}_k) = 0,$$

équation qui est la généralisation de l'équation de continuité hydrodynamique pour un fluide fictif en mouvement dans un espace à 3N dimensions. Le fluide de probabilité se conserve donc dans son mouvement dans l'espace de configuration et la normalisation du Ψ a un caractère permanent.

Le principe de décomposition spectrale s'énonce ici comme pour un seul corpuscule. Si le système est conservatif, l'onde Ψ peut toujours être représentée par une superposition d'ondes monochromatiques et l'intensité de chaque composante spectrale donne la probabilité pour qu'une observation permette d'assigner au système l'énergie correspondante.

En étudiant la représentation d'un train d'ondes Ψ dans l'espace de configuration par une intégrale de Fourier et en comparant les distributions de probabilité pour x_k et p_{x_k} , on retrouverait les relations d'incertitude qualitatives

$$(26) \quad \Delta x_k \Delta p_{x_k} \geq h \quad \text{en ordre de grandeur}$$

et la relation précise entre les dispersions

$$(27) \quad \sigma_{x_k} \sigma_{p_{x_k}} \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Dans la théorie précédente, nous supposons les corpuscules libres de se mouvoir dans tout l'espace (système sans liaisons) et nous avons employé les coordonnées cartésiennes rectangulaires de ces corpuscules pour repérer le système. Si l'on veut employer des coordonnées curvilignes, ce qui est normal dans le cas des systèmes à liaisons où le nombre des degrés de liberté est inférieur à $3N$, il faut développer un peu différemment les calculs qui précèdent. Nous n'y insisterons pas ici.

4. Systèmes de corpuscules de même nature physique. — Le cas d'un système formé de corpuscules de même nature physique présente des particularités très importantes que nous allons résumer. Ce cas est en particulier celui des atomes dans la mesure où l'on peut considérer le noyau comme un simple centre de forces entouré d'électrons.

Ce qui caractérise un système contenant des corpuscules de même nature physique, c'est que son état ne doit être nullement modifié si l'on y permute le rôle de deux quelconques de ces constituants identiques. Deux corpuscules de même nature, deux électrons par exemple, sont tellement semblables qu'il est impossible de leur attribuer une individualité : c'est un des résultats essentiels de la Physique quantique que d'avoir mis en lumière cette « indiscernabilité » des corpuscules de même nature.

On doit donc admettre que toute grandeur observable, telle que $|\Psi|^2$, doit être insensible à une permutation quelconque du rôle des corpuscules. Ceci conduit à restreindre la forme possible des fonctions d'onde. Comme les interactions des corpuscules sont toujours des fonctions symétriques de leurs coordonnées, si l'on a trouvé une solution $\Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_N, y_N, z_N, t)$ de l'équation des ondes, la fonction que l'on obtient en permutant le rôle des corpuscules i et k , soit $\Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N, t)$, est encore solution, ainsi que toute combinaison linéaire des deux solutions ainsi obtenues de la forme

$$a\Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_N, y_N, z_N, t) \\ + b\Psi(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_N, y_N, z_N, t).$$

Si alors nous écrivons que le $|\Psi|^2$ correspondant à cette combinaison linéaire est insensible à la permutation des corpuscules i et k , nous arrivons à la condition $b = \pm a$ et l'on peut aussi vérifier que toute grandeur physique observable construite à l'aide de ce Ψ est également insensible à cette permutation si $b = \pm a$.

Pour énoncer ces résultats sous une forme générale, introduisons les définitions suivantes : une fonction d'onde sera dite « symétrique » si, quand on y intervertit le rôle de deux quelconques corpuscules de même nature, elle n'est pas modifiée; une fonction d'onde sera dite « antisymétrique » si, lors d'une telle permutation, elle change de signe sans changer de valeur absolue. Nous pouvons alors énoncer le résultat auquel nous sommes parvenus sous la forme suivante : *La fonction d'onde Ψ d'un système qui contient des corpuscules de même nature doit être soit symétrique, soit antisymétrique par rapport à l'ensemble de ces constituants.*

On peut montrer qu'il existe toujours une infinité d'états symétriques, et une infinité d'états antisymétriques. On admet que, pour chaque genre de particules, seulement l'une ou l'autre de ces deux catégories d'états est réalisable dans la nature. Pour justifier cette hypothèse, on démontre, en s'appuyant toujours sur la symétrie des interactions que, si le système est initialement dans un état symétrique, il ne peut subir de transitions que vers un autre état symétrique et que, s'il est initialement dans un état antisymétrique, il ne peut subir de transitions que vers un autre état antisymétrique. Ainsi les états symétriques d'une part, les états antisymétriques d'autre part forment des ensembles fermés et ne peuvent se combiner qu'entre eux.

On peut donc très bien admettre que, suivant la nature physique des constituants de même espèce, une seule des deux catégories d'états est réalisée dans la nature. L'expérience a confirmé cette hypothèse en montrant que les photons, les particules α , certains noyaux d'atome sont des particules à états ~~antisymétriques~~ symétriques tandis que les électrons, les protons, les neutrons et certains autres noyaux d'atomes sont des particules à états antisymétriques.

Si l'on étudie les statistiques qui sont valables pour des ensembles de particules de l'une ou de l'autre catégorie, on constate que ces statistiques diffèrent entre elles et qu'elles diffèrent toutes les deux de la statistique classique de Boltzmann-Gibbs. Les particules à états symétriques suivent une statistique dite « statistique de Bose-Einstein », ce qui leur fait souvent donner le nom de bosons. Les particules à états antisymétriques suivent une statistique dite « statistique de Fermi-Dirac », ce qui les fait souvent appeler des fermions. Les fermions obéissent au principe de Pauli suivant lequel, dans une assemblée de ces particules, deux constituants ne peuvent pas se trouver dans le même état individuel. En effet, si nous avons deux constituants jouant exactement le même rôle dans un état antisymétrique du système, la

permutation de ces deux constituants, qui doit changer le signe de la fonction Ψ , ne devrait aussi amener aucun changement. La fonction d'onde, devant à la fois rester la même et changer de signe, serait nécessairement nulle, ce qui veut dire que l'état considéré ne peut pas réellement exister. Notons d'ailleurs qu'une étude plus complète montre que, pour appliquer correctement le principe de Pauli, il faut tenir compte du spin, ce que nous ne ferons pas ici.

5. Remarques sur la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. — La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules telle que nous venons de la développer à la suite de M. Schrödinger est une théorie essentiellement non relativiste parce qu'elle suppose que les interactions peuvent être représentées à chaque instant par des fonctions de la distance actuelle des corpuscules alors que dans une théorie relativiste des interactions, celles-ci se propagent avec une vitesse finie, ce qui introduit des retardements. Une Mécanique ondulatoire relativiste des systèmes ne peut se développer suivant les lignes que nous avons indiquées et l'on n'a entrepris de la construire que récemment dans le cadre de la théorie quantique des champs (travaux de Tomonaga, Schwinger, Feynman, etc.). Bornons-nous à souligner le fait que la théorie exposée plus haut n'est valable qu'à l'approximation newtonienne.

L'idée de M. Schrödinger de définir l'onde Ψ d'un système dans l'espace de configuration m'avait au début beaucoup scandalisé parce que, l'espace de configuration étant purement fictif, cette conception enlève à l'onde Ψ toute réalité physique : pour moi, l'onde de la Mécanique ondulatoire devait évoluer dans l'espace physique à trois dimensions. Les succès nombreux et éclatants qui découlèrent du point de vue de M. Schrödinger m'obligèrent à reconnaître sa valeur, mais je restai longtemps persuadé que la propagation de l'onde Ψ dans l'espace de configuration était une manière fictive de représenter des phénomènes ondulatoires qui, en réalité, se déroulent dans l'espace. Nous verrons dans la deuxième partie de cet Ouvrage (chap. XII) comment, dès 1927, j'avais cherché à développer cette manière de voir dans le cadre de la théorie de la double solution.

CHAPITRE V.

VUE GÉNÉRALE

SUR L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Idées générales.** — Le développement de la Mécanique ondulatoire a fortement attiré l'attention sur l'influence des opérations de mesure sur notre connaissance de la réalité physique de l'échelle atomique. Dans ce domaine, on peut appeler « mesure » toute observation faite à l'aide d'un dispositif macroscopique approprié qui permet d'attribuer une certaine valeur à l'une des grandeurs caractérisant une particule ou un système de l'échelle atomique.

La Physique classique supposait implicitement que l'on pouvait, à l'aide d'une technique expérimentale assez fine, diminuer indéfiniment la perturbation qu'une opération de mesure peut exercer sur l'état de choses existant avant la mesure de sorte qu'aux erreurs d'expérience près, chaque mesure traduirait exactement la situation existant avant et également après la mesure. La Physique quantique s'est aperçue que l'existence du quantum d'action ne permettait pas de diminuer indéfiniment la perturbation qu'une mesure produit dans la situation antérieure : la perturbation minimum résiduelle, qui est insignifiante à grande échelle, ne peut plus être négligée à petite échelle : c'est ce que montrent des exemples de mesure comme celui qui est connu sous le nom de « microscope d'Heisenberg ». La mesure d'une grandeur ne révèle donc pas en général une situation existant avant la mesure, mais une situation fabriquée en quelque sorte par la mesure. En général, on ne peut pas dire que la valeur mesurée de la grandeur existait déjà avant la mesure.

Il résulte d'ailleurs des analyses de Bohr et Heisenberg dont nous avons déjà parlé qu'aucune opération de mesure ne peut fournir simultanément avec précision les valeurs de deux grandeurs canoniquement

conjuguées : toute tentative de les mesurer simultanément laisse toujours finalement subsister sur leurs valeurs des incertitudes Δq et Δp telles que la relation $\Delta q \Delta p \geq h$ soit satisfaite. Donc une opération de mesure, même effectuée avec toute la précision que permet l'existence du quantum d'action (mesure maximale), laisse encore inconnue la valeur d'au moins la moitié des grandeurs physiques caractérisant le corpuscule ou le système étudié.

Même si l'on devait en revenir à une interprétation causale de la Mécanique ondulatoire, il semble que toutes les idées auxquelles nous venons d'arriver devraient subsister. Mais l'interprétation probabiliste actuellement adoptée leur attribue une signification très particulière. Selon elle, dans l'état de choses antérieur à la mesure, une grandeur physique n'aurait pas en général une valeur bien déterminée, mais seulement des valeurs possibles, c'est-à-dire des valeurs que l'opération de mesure *peut* extraire de l'état de choses antérieur. Cependant la connaissance de la fonction Ψ avant la mesure doit nous permettre de dire quelles sont les valeurs possibles d'une grandeur et les probabilités respectives de ces grandeurs possibles. La fonction Ψ étant connue, les grandeurs ont seulement des valeurs « potentielles » et tout ce que l'on peut préciser, c'est une « répartition de probabilité » pour ces valeurs potentielles.

Il est possible d'illustrer ces affirmations en s'appuyant sur le principe des interférences et sur celui de décomposition spectrale. Pour un train d'ondes Ψ limité, les coordonnées du corpuscule ont comme valeurs possibles celles qui correspondent à tous les points intérieurs au train d'ondes : le corpuscule serait présent « à l'état potentiel » en tout point du train d'ondes. La répartition de probabilité des diverses positions possibles à l'intérieur du train d'ondes est donnée par la valeur correspondante du $|\Psi|^2$ à l'instant considéré. De même, si l'onde Ψ est formée par une superposition d'ondes planes monochromatiques de la forme $\Psi = \sum_k c_k \Psi_k$, le corpuscule est avant la mesure « à l'état potentiel »

dans tous les états de mouvement correspondant aux indices k , la répartition de probabilité étant donnée par les $|c_k|^2$. Si l'on mesure soit la position, soit la quantité de mouvement, on obtient une des valeurs possibles, la probabilité *a priori* du résultat étant fournie par la répartition de probabilité correspondante.

Tel est le point de vue de l'interprétation probabiliste actuelle. Il existe un autre point de vue dont nous aurons à reparler. Il consiste à admettre que les grandeurs attachées au corpuscule auraient avant la mesure des

valeurs bien déterminées, d'ailleurs en général inconnues : la mesure troublerait la situation en substituant aux valeurs initiales des grandeurs mesurées l'une ou l'autre des valeurs prévues par la théorie usuelle, et cela avec la probabilité correspondante.

2. Analyse du rôle des opérations de mesure en Physique quantique.

— Quelle que soit l'interprétation adoptée, il est intéressant de se faire une image du rôle de la mesure en Physique quantique. Pour cela, nous envisagerons le cas des photons et de l'onde lumineuse, la transposition au cas des particules matérielles et de leurs ondes associées se faisant ensuite immédiatement.

Considérons une onde lumineuse quelconque : nous pouvons « décomposer » cette onde en nous plaçant à des points de vue différents. Si l'on se place au point de vue des fréquences et des directions de propagation, on peut décomposer l'onde « spectralement » en une suite finie ou infinie d'ondes monochromatiques planes. Ceci s'effectue analytiquement en développant la fonction d'onde en série ou en intégrale de Fourier. Si l'on envoie l'onde sur un appareil qui sépare les composantes monochromatique, un réseau par exemple, on obtient séparément chaque composante de Fourier avec son intensité propre. Si maintenant on associe les photons à l'onde lumineuse, comme nous savons qu'on doit le faire, on voit qu'on doit traduire l'action du réseau en disant qu'il répartit les photons entre les composantes spectrales proportionnellement à l'intensité de chaque composante. Avant le passage dans le réseau, chaque photon ne pouvait pas être considéré comme possédant une fréquence déterminée puisqu'il était lié à une onde où plusieurs fréquences figuraient, mais après le passage à travers le réseau le photon a une fréquence bien déterminée et la probabilité de chaque valeur possible de la fréquence est proportionnelle à l'intensité de la composante de Fourier correspondante dans l'onde incidente. Le réseau est donc un dispositif de mesure des fréquences qui permet d'attribuer au photon une fréquence bien déterminée et par suite d'attribuer une valeur $h\nu$ à son énergie et une valeur $\frac{h\nu}{c}$ à sa quantité de mouvement. On peut dire encore que la composition spectrale de l'onde incidente représente les valeurs possibles, après le passage dans le réseau, de la fréquence du photon (c'est-à-dire de son énergie et de sa quantité de mouvement) et leurs probabilités respectives de se manifester après l'action du réseau. Les valeurs possibles sont celles qui figurent dans le développement de Fourier de l'onde incidente et les probabilités sont les carrés des amplitudes spectrales correspondantes.

Appliqué à un corpuscule matériel tel que l'électron, la même correspondance entre les valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement d'une part, la décomposition spectrale de l'onde associée d'autre part conduit au principe de décomposition spectrale précédemment exposé.

Le cas particulier que nous venons d'examiner fournit une image du rôle de la mesure en Physique quantique qui paraît pouvoir se généraliser pour toutes les grandeurs. L'appareil de mesure est finalement toujours un dispositif qui permet de dissocier les diverses composantes d'un certain développement de l'onde Ψ correspondant à la nature de la grandeur mesurée. Il est essentiel de remarquer que la mesure ne peut s'effectuer que si le dispositif permet de séparer *dans l'espace* les diverses composantes de l'onde. Ainsi, dans le cas du réseau, si l'on considère la région voisine de la sortie du réseau, où tous les faisceaux diffractés se superposent, la présence du photon dans cette région de l'espace ne permettrait pas de lui attribuer une fréquence et une direction de propagation. Mais le réseau ainsi que le faisceau incident ont toujours des dimensions latérales finies : c'est pourquoi les faisceaux diffractés finissent toujours par se séparer dans l'espace après la sortie du réseau et le photon, s'il se trouve dans l'un des faisceaux ainsi séparés, doit alors posséder une fréquence et une direction de propagation bien déterminées.

Dans l'analyse de tout processus de mesure, il est donc essentiel de faire entrer en ligne de compte les dimensions finies non seulement du dispositif de mesure, mais des trains d'ondes qui interviennent dans le phénomène. Toute mesure s'opère finalement par la localisation d'un corpuscule dans un faisceau que le dispositif de mesure a extrait de l'onde initiale.

3. Formalisme général de l'interprétation probabiliste. — En résumé, nous sommes parvenus aux idées générales suivantes. Tout dispositif permettant de mesurer exactement l'une des grandeurs qui caractérisent un corpuscule oblige ce corpuscule à se révéler dans un état où cette grandeur a une valeur bien déterminée, mais antérieurement à la mesure la Mécanique ondulatoire, du moins si elle se borne à l'emploi des ondes Ψ , ne permet pas d'attribuer à la grandeur une valeur bien définie : elle peut seulement lui attribuer des valeurs possibles affectées de probabilités. Pour trouver ces valeurs possibles et ces probabilités, on doit effectuer une certaine décomposition de l'onde Ψ initialement associée au corpuscule, décomposition déterminée par la nature de la grandeur à mesurer et correspondant au dispositif de mesure : dans

cette décomposition, chaque composante correspond à l'une des valeurs possibles et son intensité (carré du module de l'amplitude) donne la probabilité de cette valeur possible. Après la mesure, la grandeur mesurée a pour le corpuscule une valeur précise, mais il n'en est pas en général de même pour une autre grandeur qui exige pour sa mesure un autre dispositif.

Ces circonstances ont pu être représentées par un formalisme élégant et précis dont je donnerai seulement ici une vue d'ensemble très succincte.

A chaque grandeur physique, ce formalisme fait correspondre un opérateur linéaire qui est hermitique (ou selfadjoit). Or, un tel opérateur A permet de définir (à l'aide de l'équation $A\varphi = \alpha\varphi$) une série de nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots$ qui sont ses valeurs propres et une série de fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ finies, uniformes et continues dans le domaine D des variables considérées qui sont les fonctions propres correspondant respectivement aux valeurs propres. Il peut d'ailleurs arriver qu'à une même valeur propre, correspondent plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes : ce sont les cas de « dégénérescence » sur lesquelles je n'insiste pas.

Sous réserve de quelques précautions à prendre dans les cas de dégénérescence, on peut dire que les fonctions propres φ_i forment une suite de fonctions orthogonales, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \quad \int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau = 0 \quad (i \neq j).$$

Définies par un opérateur linéaire, les φ_i ne sont déterminées qu'à une constante multiplicative complexe près. On peut donc leur imposer la condition d'être « normées », c'est-à-dire de vérifier la relation

$$(2) \quad \int_D |\varphi_i|^2 d\tau = 1.$$

Il ne reste plus alors dans l'expression des φ_i qu'un facteur multiplicatif arbitraire $e^{i\alpha}$ de module unité.

Les fonctions propres forment aussi une suite « complète » qui nous permet de développer une fonction des variables du domaine D telle que le Ψ sous la forme

$$(3) \quad \Psi = \sum_i c_i \varphi_i,$$

les c_i étant des coefficients constants qui généralisent les coefficients

classiques de Fourier et qui sont donnés par

$$(4) \quad c_j = \int_{\mathfrak{p}} \varphi_j^* \Psi \, d\tau.$$

De cette manière, on fait correspondre à toute grandeur ou, si l'on veut, à tout dispositif permettant la mesure de cette grandeur, une certaine décomposition de l'onde Ψ .

On admet alors comme principes fondamentaux correspondant aux idées générales développées plus haut que :

1° Toute mesure de la grandeur fournit nécessairement une des valeurs propres α_k .

2° La probabilité pour qu'une mesure fournisse la valeur propre α_k est mesurée par le carré du module $|c_k|^2$ du coefficient correspondant à φ_k dans le développement du Ψ suivant les φ_i .

Dans certains cas sur lesquels je n'insiste pas, ces énoncés ont besoin d'être convenablement interprétés.

On démontre qu'appliqués aux cas de la mesure d'une coordonnée ou d'une composante de quantité de mouvement, ces énoncés permettent de retrouver le principe des interférences et le principes de décomposition spectrale.

Un point très important de ce formalisme est le suivant. On montre que la condition nécessaire et suffisante pour que deux opérateurs A et B correspondant à des grandeurs mesurables différentes puissent admettre le même système de fonctions propres φ_i est qu'ils « commutent », c'est-à-dire qu'ils fournissent le même résultat quand on les applique à une fonction du domaine D soit dans un certain ordre, soit dans l'ordre inverse. On peut alors écrire

$$(5) \quad AB = BA$$

et l'on dit que le commutateur $AB - BA$ des deux opérateurs est nul. S'il en est ainsi, le développement (3) sera le même pour les deux grandeurs A et B et un même dispositif pourra mesurer à la fois A et B, c'est-à-dire qu'il pourra fournir à la fois les valeurs α_i et β_i des deux grandeurs qui correspondent au même φ_i avec la même probabilité $|c_i|^2$.

Mais, si les opérateurs A et B ne commutent pas, les deux développements $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$ et $\Psi = \sum_k d_k \chi_k$ suivant les fonctions propres de A

et de B ne pourront pas coïncider et alors les dispositifs de mesure des grandeurs A et B seront différents. Si un dispositif est, par exemple, adapté au premier développement, il permettra une mesure exacte de A

et pourra fournir pour A une des valeurs précises α_i avec la probabilité $|c_i|^2$, mais cette mesure de A étant effectuée, comme φ_i ne coïncide avec aucun des χ_k , le développement suivant les χ_k du Ψ après la mesure comportera plusieurs termes non nuls. Ainsi toute mesure laissera subsister une certaine incertitude sur l'une au moins des grandeurs A et B.

C'est ce qui se produit notamment pour les grandeurs « canoniquement conjuguées » telles que x et p_x auxquelles correspondent les opérateurs

$$(6) \quad A = x, \quad B = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$$

dont le commutateur $AB - BA$, égal à $\frac{h}{2\pi i}$, n'est pas nul. Ceci explique pourquoi toute opération de mesure laisse subsister sur ces grandeurs des incertitudes Δx et Δp_x telles que $\Delta x \Delta p_x \geq h$.

Dans ce formalisme, on désigne par valeur moyenne \bar{A} ou $\langle A \rangle$ de la grandeur A l'espérance mathématique de la valeur de A avant la mesure, c'est-à-dire

$$(7) \quad \bar{A} = \langle A \rangle = \sum_i |c_i|^2 \alpha_i$$

et l'on démontre aisément que l'on a

$$(8) \quad \bar{A} = \int_D \Psi^* A \Psi d\tau.$$

Je laisserai de côté ici des questions importantes telles que celle des intégrales premières et je me contenterai de rappeler que l'on est amené à faire un grand usage des « matrices » engendrées par un opérateur A dans le système des fonctions propres Ψ_i de l'opérateur hamiltonien.

Les éléments a_{ik} de la matrice A sont définies par

$$(9) \quad a_{ik} = \int_D \Psi_i^* A \Psi_k d\tau$$

et obéissent à la règle de multiplication non commutative

$$(10) \quad (ab)_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}.$$

Tout le formalisme qui vient d'être résumé s'étend d'ailleurs au cas des systèmes de corpuscules en remplaçant l'espace ordinaire par l'espace de configuration et le corpuscule par le point représentatif du système dans l'espace de configuration.



CHAPITRE VI.

DIVERS ASPECTS DE L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Notion de superposition. — Nous venons de voir que chaque fonction φ_i d'un opérateur A correspondant à une grandeur mesurable (« observable » au sens de Dirac) décrit un état du système où la grandeur A a la valeur précise α_i . Mais en général le Ψ du système ne se réduit pas à un seul φ_i : il est égal à une somme de φ_i de la forme $\sum_i c_i \varphi_i$.

On dit alors que le Ψ est une « superposition » de φ_i : cette expression vient du principe de superposition des petits mouvements, bien connue dans la théorie classique des vibrations.

Mais ici la superposition n'a pas du tout le même sens que dans les théories classiques. Il ne s'agit plus de la vibration d'un milieu qui s'obtiendrait en ajoutant quelques vibrations élémentaires, il s'agit de l'affirmation suivante : *Si la fonction d'onde Ψ d'un corpuscule (ou d'un système) est de la forme $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$ et si l'on cherche à attri-*

buer à ce corpuscule un certain état φ_k par une mesure de la grandeur A , il y a une probabilité égale à $|c_k|^2$ d'être effectivement conduit par la mesure à lui attribuer cet état. Donc, avant la mesure, le corpuscule (ou le système) se trouvait *potentiellement* dans plusieurs états φ_i , chacun possédant une probabilité non nulle $|c_i|^2$. C'est là, du moins, ce que dit l'interprétation probabiliste orthodoxe : or, c'est là une idée entièrement nouvelle, tout à fait étrangère aux conceptions classiques qui considèrent l'état d'un système comme toujours caractérisé par des valeurs bien définies de toutes les grandeurs du système. Cette notion nouvelle de superposition est l'une des plus importantes qu'ait introduites le développement de la nouvelle Mécanique.

Dans la théorie classique des vibrations, quand on considère une vibration représentée par une expression de la forme $\sum_i c_i a_i e^{2\pi i \left[\nu_i t - \frac{x}{\lambda_i} \right]}$

cela signifie que la grandeur de la vibration est donnée en chaque point et à chaque instant par l'addition d'ondes planes monochromatiques dont les contributions sont mesurées par les valeurs des c_i . En Mécanique ondulatoire, la condition $\int_D |\Psi|^2 d\tau = 1$ que l'on impose au Ψ pour que $|\Psi|^2$ soit *en valeur absolue* la probabilité de localisation ne permet plus de regarder le Ψ comme ayant une amplitude physiquement déterminée : le Ψ ne peut donc plus représenter une vibration ayant le sens objectif classique.

Précisons ceci par un exemple. En Physique classique, deux mouvements ondulatoires $\Psi_1 = c_1 e^{2\pi i \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)}$ et $\Psi_2 = c_2 e^{2\pi i \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right)}$ de mêmes fréquence et direction de propagation donnent par leur superposition un mouvement ondulatoire $\Psi_1 + \Psi_2$ d'amplitude $c_1 + c_2$. Au contraire, en Mécanique ondulatoire, les états associés à des ondes Ψ_1 et Ψ_2 ayant les expressions ci-dessus doivent, si on les considère isolément, satisfaire aux conditions de normalisation $|c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}$, où \mathcal{V} est l'étendue du domaine D. Si l'on superpose ces états, l'onde Ψ devient $\Psi_1 + \Psi_2$, mais avec la condition de normalisation $|c_1 + c_2| = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}$ de sorte qu'il n'y a pas du tout simple addition des amplitudes. Cet exemple montre bien l'abîme qui sépare les notions de fonctions d'onde en Physique classique et en Mécanique ondulatoire usuelle.

Il est à peine besoin de remarquer que, si la superposition au sens précisé plus haut est valable pour les fonctions Ψ , c'est parce que ces fonctions sont solutions d'une équation de propagation *linéaire*. La superposition étant une condition essentielle pour que l'interprétation probabiliste de l'onde Ψ soit possible, il faut absolument admettre que l'onde Ψ obéit à une équation de propagation linéaire. Mais nous aurons à nous demander si, en introduisant un autre type d'onde obéissant à une équation de propagation non linéaire, nous ne pourrions pas dépasser le point de vue purement probabiliste et atteindre ainsi une couche plus profonde de la réalité physique.

2. Équivalence des représentations. Théorie des transformations. —

Les idées générales admises par l'interprétation probabiliste conduisent naturellement à admettre l'équivalence de tous les développements

du Ψ qui correspondent, peut-on dire, à diverses hypothèses, toutes également admissibles, sur la mesure que l'on se propose d'effectuer.

Considérons par exemple les développements du Ψ correspondant respectivement à une mesure de position dans l'espace et à une mesure de quantité de mouvement, mesures qui, nous le savons, s'excluent l'une l'autre puisque aucun dispositif ne peut nous donner à la fois avec précision la localisation et l'état de mouvement. Pour la localisation en un point $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ de l'espace, on démontre que la fonction propre est la fonction singulière de Dirac

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

et, comme l'on peut écrire le Ψ sous la forme

$$(1) \quad \Psi(x, y, z, t) = \int \Psi(x_0, y_0, z_0, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0.$$

on voit que le coefficient de la fonction propre $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ est $\Psi(x_0, y_0, z_0, t)$, ce qui est en accord avec le principe de localisation puisque la probabilité de localisation au point \mathbf{r}_0 au temps t est $|\Psi(x_0, y_0, z_0, t)|^2$. Pour la quantité de mouvement \mathbf{p} , les fonctions propres sont les ondes planes monochromatiques $a e^{i(kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ où l'on a posé

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{hc} W, \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{h} \mathbf{p}$$

et où k est une fonction connue de \mathbf{k} . Le Ψ se développe alors sous la forme

$$(3) \quad \Psi = \int c(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}} e^{i(kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k} \quad (d\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z)$$

et la probabilité pour qu'une mesure de la quantité de mouvement fournisse la valeur \mathbf{k} est donnée par $|c(\mathbf{k})|^2$.

L'équivalence apparaît donc complète entre les développements (1) et (3) et tous les autres développements du type $\sum_i c_i \varphi_i$ que l'on pourrait

avoir à envisager pour le Ψ en considérant d'autres grandeurs physiques. Cette équivalence sert de base à une très élégante théorie mathématique due à M. Dirac et connue sous le nom de « théorie des transformations ».

Sans développer cette théorie, réfléchissons à son idée de base en nous restreignant au cas de la localisation et de la quantité de mouvement. Elle affirme que, dans l'état représenté par le Ψ considéré, le corpuscule est potentiellement présent en tout point x_0, y_0, z_0 de l'espace

avec la probabilité $|\Psi(x_0, y_0, z_0, t)|^2$ et qu'il possède aussi potentiellement toutes les quantités de mouvement \mathbf{k} avec les probabilités $|c(\mathbf{k})|^2$. On peut donc dire que la localisation et la quantité de mouvement existent l'une et l'autre, du moins d'une manière potentielle, avant l'opération de mesure que va préciser la valeur de l'une de ces caractéristiques du corpuscule.

Cette équivalence suggérée par la symétrie des développements (1) et (3) et admise par la théorie des transformations s'impose-t-elle absolument? A mon avis elle ne s'impose pas et c'est là un point qui aura dans la suite de notre exposé une grande importance. En fait, ce que l'on enregistre toujours dans une observation faite sur un corpuscule, c'est sa position. Quand par un dispositif, genre prisme ou réseau optique, on sépare les faisceaux correspondant à des valeurs différentes de \mathbf{k} , c'est en constatant par une localisation la présence du corpuscule dans l'un de ces faisceaux qu'on parvient à lui attribuer une quantité de mouvement. D'ailleurs, l'action d'un corpuscule en un point, par exemple l'impression locale d'une plaque photographique par l'impact d'un photon ou d'un électron est un phénomène qui n'exige pour son observation aucun dispositif particulier (autre que la présence purement passive de la plaque photographique). Il n'en est pas de même pour la quantité de mouvement dont la mesure exige un dispositif agissant sur le corpuscule.

Ces considérations m'avaient porté à croire, il y a 25 ans, que la probabilité $|\Psi|^2$ relative à la localisation avait, contrairement à l'idée de base de la théorie des transformations, une signification beaucoup plus directe que la probabilité $|c(\mathbf{k})|^2$ relative à la quantité de mouvement. La première serait effectivement la probabilité pour que le corpuscule soit en un point de l'espace dans l'état initial décrit par le Ψ . La seconde, au contraire, n'existerait qu'après l'opération de mesure de la quantité de mouvement : la mesure effectuée et le résultat en étant encore ignoré, la probabilité pour que la valeur trouvée soit \mathbf{k} serait $|c(\mathbf{k})|^2$. Ce point de vue est celui de l'interprétation causale que nous développerons dans la seconde partie de cet Ouvrage.

Cette opposition de points de vue est apparentée à une controverse qui a été célèbre dans l'histoire de l'Optique classique. Certains auteurs soutenaient que, quand un train d'ondes non monochromatique traverse un appareil du type prisme ou réseau, les fréquences observées après le passage dans le dispositif étaient créées par l'action de celui-ci : d'autres auteurs disaient au contraire que les fréquences existaient déjà dans le train d'ondes primitif. Au point de vue mathématique, ces

derniers avaient raison puisque la décomposition de Fourier de l'onde incidente est possible analytiquement et fait apparaître les fréquences séparées par le prisme. Mais du point de vue physique, dans le cadre des idées classiques, il ne me paraît pas douteux que la première opinion était exacte. En effet, avec les conceptions classiques, la fonction d'onde représente une vibration objective : c'est la fonction, généralement très complexe, du temps représentant en chaque point cette vibration objective qui a un sens physique et non la décomposition de Fourier qui est purement mathématique. Autrement dit, c'est l'amplitude résultante de la vibration qui a une signification physique directe et non les composantes de Fourier : celles-ci ne prennent un sens physique que si on les isole en décomposant la vibration par un dispositif d'analyse harmonique (analogue à un dispositif de mesure de la quantité de mouvement dans la Physique quantique). C'est ce point de vue, certainement exact en Physique classique, qui est celui de l'interprétation causale que nous exposerons.

Je citerai encore un argument qui, en Physique classique, pouvait servir pour rejeter l'idée que les fréquences préexistent à l'action du prisme. Considérons un train d'ondes de dimensions limitées qui vient frapper le prisme : on peut le représenter par une superposition d'ondes planes monochromatiques qui se détruisent par interférences en dehors des limites du train d'ondes. Si ces ondes planes avaient une existence réelle dans la lumière incidente, comme une onde plane n'a pas de limites dans l'espace et dans le temps, les faisceaux monochromatiques qui sortent du prisme devraient exister avant même que le train d'ondes incident n'ait atteint le prisme, ce qui est physiquement absurde. Le train d'ondes ne peut interagir avec le prisme et se diviser, par suite de cette interaction, en fractions sensiblement monochromatiques que quand il a atteint le prisme. Ceci montre bien que, dans le train d'ondes incident, seule la fonction d'onde globale a une signification physique et que la décomposition de Fourier n'est qu'une simple vue de l'esprit tant que le prisme n'en a pas séparé les composantes.

Tirées de conceptions classiques, les considérations précédentes ne prouvent sans doute pas que l'idée d'équivalence absolue de tous les développements de la fonction Ψ postulée par la théorie des transformations soit inexacte : elles prouvent cependant que cette équivalence ne s'impose pas d'une façon irrésistible.

3. Mécanique ondulatoire et Mécanique quantique. — Dans la théorie des représentations, on considère comme équivalentes les équations

d'évolution des coefficients c_k pour n'importe quelle grandeur physique. Ces équations d'évolution, dites équations de variations des constantes de Dirac, ont la forme générale

$$(4) \quad \frac{dc_k}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \sum_j H_{kj} c_j,$$

où H_{kj} est l'élément kj de la matrice correspondant à l'énergie. Cependant, quand on considère la grandeur « position dans l'espace », c'est-à-dire quand on adopte ce que la théorie des représentations appelle « la représentation q », on constate que l'équation (4) n'est pas autre chose que l'équation de l'onde Ψ . En effet, on doit alors poser

$$(5) \quad \Psi(M, t) = \int \delta(M - P) \Psi(P, t) dP$$

et l'équation (4) nous donne

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(P, t) = \frac{2\pi i}{h} \int H_{PQ} \Psi(Q, t) dQ.$$

Or

$$(7) \quad H_{PQ} = \int \delta(M - P) H_M \delta(M - Q) dM = H_P \delta(P - Q),$$

H_P étant la valeur de l'opérateur hamiltonien au point P . Il vient donc

$$(8) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(P, t) = \int H_P \Psi(Q, t) \delta(P - Q) dQ = H_P \Psi(P, t),$$

ce qui n'est pas autre chose que l'équation de propagation de l'onde Ψ .

Donc, dans le cas de la représentation q , l'équation (4) prend la forme d'une équation de propagation comportant des dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace. La représentation q a donc ceci de particulier qu'elle met en lumière un aspect ondulatoire liée à une équation de propagation. Si l'on considère ce fait comme essentiel et si l'on attache une importance particulière à cette propagation d'ondes, on sera amené à conserver de préférence le nom suggestif de « Mécanique ondulatoire ». Si au contraire on veut, avec l'interprétation actuellement orthodoxe, considérer toutes les représentations comme équivalentes et se borner ainsi à un formalisme abstrait sans images physiques, on préférera le nom de « Mécanique quantique ». C'est pourquoi le choix entre ces deux noms de la Mécanique nouvelle a plus d'importance qu'on ne le croit souvent.

Le premier point de vue a certainement ma préférence. Voici, par

exemple, une des raisons qui me font penser que la représentation q a plus de sens physique que les autres. Considérons le problème de la détermination des ondes stationnaires d'un électron dans une enceinte parallélépipédique. Ce problème conduit, on le sait, à ne considérer comme possibles que certaines valeurs de \mathbf{p} définissant un certain réseau régulier de points « permis » dans l'espace p_x, p_y, p_z . Or, le problème ne peut être posé clairement que dans l'espace physique ordinaire, car c'est seulement dans cet espace que sont définies les conditions aux limites : c'est parce que la propagation de l'élément ondulatoire est limitée par la présence d'obstacles, qui sont ici les parois de l'enceinte, que la quantification apparaît liée à l'existence d'ondes stationnaires. Ceci paraît encore bien donner un rôle privilégié à la représentation q , c'est-à-dire en somme à l'espace physique.

4. Notion de complémentarité (Bohr). — Précisons d'abord un point important. Dans les traités élémentaires d'Optique, on donne généralement le nom d'*ondes* aux ondes planes monochromatiques. Cela vient de ce que, dans la pratique, les trains d'ondes lumineux usuels sont assez longs, bien que limités, pour que l'on puisse dans presque toute leur extension les assimiler à une onde monochromatique plane. Une « onde » ainsi définie a donc une fréquence, une longueur d'onde, une direction de propagation bien déterminées : la Mécanique ondulatoire lui fait correspondre un vecteur quantité de mouvement \mathbf{p} qui pointe dans la direction du mouvement et est relié à la longueur d'onde par la relation $\lambda = \frac{h}{p}$. Le vecteur \mathbf{p} suffit donc à définir l'onde considérée.

Cette onde plane monochromatique est homogène et ne permet aucune localisation du corpuscule : elle est l'idéalisation de l'idée de mouvement sans aucune localisation spatiotemporelle. Au contraire les coordonnées x, y, z du corpuscule correspondent à l'idée d'une localisation spatiale à un instant t . Les variables canoniquement conjuguées p_x, p_y, p_z et x, y, z correspondent donc respectivement à l'aspect ondulatoire du corpuscule qui est purement dynamique sans localisation et à l'aspect corpusculaire avec localisation spatiotemporelle qui, en un certain sens, exclut l'idée de mouvement. Si alors on se reporte aux inégalités d'Heisenberg, on voit qu'un corpuscule de l'échelle atomique n'est représenté par une onde plane ou par un grain localisé que dans des cas extrêmes. En général, l'aspect onde plane et l'aspect grain localisé existent tous deux, mais sont tous deux un peu flous, l'onde Ψ associée étant formée par une superposition d'un certain nombres

d'ondes planes monochromatiques et la localisation restant incertaine dans une région plus ou moins étendue de l'espace.

Les relations d'incertitude nous apprennent que, plus une observation nous permet de préciser l'un des aspects du corpuscule, plus l'autre s'estompe. Ceci permet d'expliquer comment la Mécanique ondulatoire peut utiliser simultanément les deux conceptions, en apparence contradictoires, d'onde plane homogène indéfiniment étendue et de grain localisé. C'est ce que ces deux images si différentes ne peuvent jamais entrer en contradiction flagrante, chacune d'elles tendant à s'effacer quand l'autre s'affirme. M. Bohr a exprimé cette circonstance en disant que l'onde plane et le corpuscule localisé sont des « aspects complémentaires » de la réalité. Chaque fois que le comportement de l'entité « corpuscule » peut se représenter par la propagation d'une onde plane monochromatique, son aspect granulaire disparaît : chaque fois que ce comportement peut se représenter par le déplacement d'un grain bien localisé dans l'espace, son aspect ondulatoire disparaît.

L'idée de complémentarité, bien qu'un peu fuyante, est intéressante : on a cherché à en faire des applications dans divers domaines, ce qui n'est pas toujours sans danger. Mais de ce que les procédés de mesure ne peuvent pas nous permettre d'attribuer simultanément à un corpuscule une position et un état de mouvement, est-on nécessairement obligé de conclure que, dans la réalité, le corpuscule n'ait pas de position, ni de vitesse ?

5. La réduction du paquet de probabilité par la mesure. — Dans l'interprétation de la Mécanique ondulatoire, la mesure joue un rôle essentiel. C'est elle qui, en nous apportant des informations nouvelles, change l'état de nos connaissances sur le corpuscule ou le système étudié et modifie brusquement la forme de la fonction Ψ qui représente ces connaissances. Si, par exemple, la mesure est une mesure de position plus ou moins précise, le train d'ondes représentant le Ψ avant la mesure sera « réduit » en un train d'ondes moins étendu, peut-être presque ponctuel si la mesure est très précise : de là, le nom de « réduction du paquet de probabilité » donné par M. Heisenberg à cette brusque modification du Ψ . Si, au contraire, la mesure était une détermination des composantes de quantité de mouvement, c'est dans l'espace des impulsions, et non dans celui des coordonnées, qu'il y aurait une brusque réduction du paquet d'ondes.

La réduction du train d'ondes donne lieu à une situation nouvelle qui était imprévisible à l'avance, puisque seules les probabilités des diverses

possibilités pouvaient être calculées avant la mesure. Après une expérience « maximale », c'est-à-dire qui fournit le maximum de connaissance compatibles, avec la théorie des grandeurs non commutantes et les relations d'incertitude, nous pouvons construire une fonction d'onde représentant nos connaissances après la mesure et suivre ensuite son évolution au cours du temps à l'aide de l'équation des ondes jusqu'à ce que nous connaissions le résultat de nouvelles mesures modifiant à nouveau l'état de nos connaissances et interrompant brusquement l'évolution régulière de l'onde Ψ . L'évolution régulière de l'onde Ψ est réglée par l'équation des ondes entre deux mesures : elle est entièrement déterminée par la forme initiale du Ψ puisque l'équation de propagation est linéaire en t . Il y a donc déterminisme de l'évolution des probabilités entre deux mesures, mais non pas déterminisme de la suite des faits observables.

M. Bohr a insisté sur le fait que la mesure a pour effet d'effacer complètement les relations de phase entre les composantes du Ψ . En effet, si la grandeur A mesurée correspond aux fonctions propres φ_i et si avant la mesure on avait $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$, la mesure isole une des fonc-

tions φ_k de sorte qu'après la mesure on a $\Psi = \varphi_k$, mais elle ne nous fournit aucune indication sur les relations de phase entre les c_i . Si l'on recommençait la même mesure sur une infinité de corpuscules ayant tous la même fonction $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$ avant la mesure, la répartition statistique des valeurs obtenues donnerait les $|c_i|^2$, mais ne donnerait toujours pas les phases des c_i .

L'effacement des phases par la mesure a pour effet que l'acte de mesure constitue une coupure infranchissable dans l'évolution du Ψ aussi bien dans le sens passé-avenir que dans le sens avenir-passé. Or les différences de phase entre les composantes dans le développement du Ψ ont une importance essentielle : tout renseignement sur la fonction Ψ qui ne comporte pas la connaissance des phases est radicalement incomplète. Cette importance des phases est bien mise en évidence par l'étude, si importante en Mécanique ondulatoire, de l'interférence des probabilités.

6. L'interférence des probabilités. — Considérons deux grandeurs observables (que nous supposons non commutantes) A et B . Les valeurs et fonctions propres de la première sont α_i et φ_i , celles de la seconde β_i et χ_i . Le système des φ_i et celui des χ_i ne peuvent pas

coïncider puisque les opérateurs A et B ne commutent pas. Supposons que l'état initial soit représenté par la fonction d'onde $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i$.

Comme les χ forment un système complet, on peut exprimer chaque φ_i sous la forme

$$(9) \quad \varphi_i = \sum_k s_{ik} \chi_k$$

les s_{ik} étant les éléments d'une matrice unitaire S. On a donc

$$(10) \quad \Psi = \sum_i c_i \varphi_i = \sum_{i,k} c_i s_{ik} \chi_k.$$

Si, sur le système dans l'état Ψ , on mesure la grandeur A, on trouve l'une des valeurs propres α_i , la probabilité de α_j étant $|c_j|^2$. Après la mesure de A, le système se trouvera dans l'état φ_i et, dans cet état, une mesure de B conduit à la valeur β_k avec la probabilité $|s_{ik}|^2$. La probabilité totale de trouver pour B la valeur β_k en effectuant d'abord la mesure de A, puis celle de B, est donc $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$.

Mais supposons maintenant que nous ayons effectué la mesure de B directement dans l'état initial Ψ . Alors, d'après (10), la probabilité de trouver pour B la valeur β_k est $\left| \sum_i c_i s_{ik} \right|^2$: elle est entièrement différente de la précédente parce qu'elle dépend des phases relatives des c_i alors que la précédente n'en dépend pas. Le fait que la probabilité de la valeur β_k de B mesurée directement dans l'état initial soit $\left| \sum_i c_i s_{ik} \right|^2$ et non $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ peut, au premier abord, paraître contraire au théorème des probabilités composées, mais en réalité, il n'en est rien : la probabilité $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ est bien celle que l'on doit avoir quand on fait d'abord la mesure de A, puis celle de B, puisqu'elle est égale à la somme des produits de la probabilité pour obtenir d'abord une valeur α_i de A par la probabilité d'obtenir β_k pour B *quand on sait qu'on a obtenu α_i pour A*. Le théorème des probabilités composées est donc sauf, mais il n'y a aucune raison pour que la probabilité $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ soit égale à

celle d'obtenir directement la valeur β_k de B par une mesure de B dans l'état initial.

Ce qui jette un peu de confusion dans cette question, c'est qu'en statistique mathématique, on admet que la mesure d'une grandeur aléatoire (toujours de nature macroscopique en statistique usuelle), mesure que les statisticiens nomment généralement « épreuve », ne modifie aucunement les probabilités relatives aux autres grandeurs aléatoires. Ainsi, si l'on veut établir des statistiques sur la taille et le tour de poitrine d'un lot de conscrits, on mesure ces deux grandeurs sur tous les conscrits et l'on admet que la mesure de la taille ne peut pas modifier le tour de poitrine ou inversement. Si x désigne la taille et y le tour de poitrine, on aura

$$(11) \quad \text{Prob}(x_k) = \sum_i \text{Prob}(y_i) P_{y_i}(x_k),$$

où $P_{y_i}(x_k)$ est la probabilité de la taille x_k pour un conscrit qui a le tour de poitrine y_i et il n'y a pas lieu de préciser si la mesure de x a été faite avant celle de y ou inversement.

Mais ces hypothèses, certainement valables dans le domaine macroscopique, ne le sont pas nécessairement à l'échelle microphysique. A cette dernière échelle, l'existence du quantum d'action fait que la mesure d'une grandeur aléatoire modifie la probabilité pour les autres grandeurs. La probabilité de B n'est pas la même avant et après la mesure de A. Comme nous l'avons vu, la probabilité d'une valeur de B, si l'on commence par mesurer A, est correctement donnée par le théorème des probabilités composées, mais elle n'est pas égale de la même valeur de B mesurée directement dans l'état initial.

J'ai insisté sur ces circonstances dans un article de la *Revue scientifique* (1948, p. 259) en donnant des exemples familiers et j'ai précisé en quoi le schéma des probabilités en Mécanique ondulatoire diffère du schéma usuel des statisticiens. Dans ce schéma usuel, on définit les densités de probabilités $\rho_X(x)$ et $\rho_Y(y)$ relatives à deux variables aléatoires X et Y [$\rho_X(x) dx$ est la probabilité d'une valeur de X comprise entre x et $x + dx$ et définition analogue pour $\rho_Y(y)$]. On admet aussi l'existence d'une densité de probabilité $\rho(x, y)$ correspondant à la possibilité d'obtenir *dans une même épreuve* des valeurs x et y pour X et Y. On définit aussi la probabilité de Y liée par X, $\rho_Y^{(X)}(x, y)$, qui correspond à la probabilité d'obtenir la valeur y pour Y quand on sait que X a la valeur x et l'on définit de la même façon la probabilité $\rho_X^{(Y)}$

(x, y) de X liée par Y . Entre ces cinq grandeurs, on a les relations

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_X(x) = \int \rho(x, y) dy, & \rho_Y(y) = \int \rho(x, y) dx; \\ \rho_X^{(Y)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_Y(y)}, & \rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)}; \end{cases}$$

les intégrales devant être remplacées par des sommes dans le cas des probabilités discontinues. On en tire

$$(13) \quad \rho_X(x) = \int \rho_X^{(Y)}(x, y) \rho_Y(y) dy; \quad \rho_Y(y) = \int \rho_Y^{(X)}(x, y) \rho_X(x) dx.$$

Or, en Mécanique quantique, si l'on considère deux grandeurs X et Y canoniquement conjuguées, par exemple $X = x$ et $Y = p_x$, on peut définir $\rho_X(x)$ et $\rho_Y(y)$, mais on ne peut plus définir $\rho(x, y)$ puisqu'il est impossible d'obtenir simultanément la valeur des grandeurs canoniquement conjuguées X et Y . Les grandeurs $\rho_X^{(Y)}(x, y)$ et $\rho_Y^{(X)}(x, y)$ peuvent encore être définies, mais on n'a plus les relations (13) puisqu'elles résultaient dans le schéma classique des relations (12) qui ici n'ont plus de sens, $\rho(x, y)$ n'existant plus.

Si donc on admet que, dans un état Ψ , toutes les grandeurs ont des distributions de probabilités définies pour les résultats possibles de mesures effectuées sur le système dans cet état, il est impossible de maintenir le schéma statistique classique avec un $\rho(x, y)$ et les relations (12) et (13). Toute tentative faite dans ce sens est condamnée à un échec dans le cadre de l'interprétation usuelle de la Mécanique ondulatoire.

Mais est-on obligé d'admettre que toutes les distributions de probabilités définies par l'interprétation statistique usuelle de la Mécanique ondulatoire existent déjà dans l'état Ψ initial? Comme nous l'avons vu, il ne semble pas qu'il en soit ainsi. On peut très bien admettre que la probabilité de présence $|\Psi|^2$ existe dans l'état initial pour la localisation tandis que la probabilité $|c(\mathbf{k})|^2$ d'une valeur de la quantité de mouvement n'existe qu'après l'exécution de la mesure quand on ne connaît pas encore le résultat de cette mesure. Dans l'état initial Ψ , la quantité de mouvement pourrait très bien avoir une valeur précise (non déterminable par une mesure qui aurait pour conséquence de la modifier) et la probabilité de cette valeur, différente de $|c(\mathbf{k})|^2$, permettrait de rétablir le schéma statistique usuel pour l'état initial. Nous verrons que c'est justement ce qui se trouve réalisé dans l'interprétation causale que nous développons plus loin.

L'impossibilité de maintenir dans l'interprétation actuelle le schéma statistique usuel proviendrait donc du fait que l'on y compare des distributions de probabilités qui ne sont pas simultanément valables, les unes étant valables dans l'état initial avant la mesure, les autres dans l'état final après la mesure quand on n'en connaît pas encore le résultat. C'est cette possibilité qui n'a pas été envisagée par M. von Neumann quand il a conclu à l'impossibilité de rétablir les conceptions classiques par l'introduction de variables cachées.

7. Théorème de M. von Neumann. — Dans son important Ouvrage : *Les fondements mathématiques de la Mécanique ondulatoire* ⁽¹⁾, M. J. von Neumann a fait un exposé d'une rigueur très grande de l'interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire. En particulier, il a été amené à étudier de très près la théorie de la mesure. On trouvera notamment cette théorie reprise d'une façon très claire dans un fascicule des *Actualités scientifiques et industrielles* ⁽²⁾ publié par MM. London et Bauer sous le titre *La théorie de l'observation en Mécanique quantique*.

Un des mérites de l'exposé de M. von Neumann, c'est d'avoir distingué clairement les « cas purs » des « mélanges ». Il y a cas pur quand l'état d'un système est représenté par une fonction Ψ , les distributions de probabilités des diverses grandeurs étant données par les carrés des modules $|c_k|^2$ des coefficients du développement du Ψ suivant les fonctions propres de la grandeur : ces distributions de probabilités sont caractérisées par l'interférence des probabilités et s'écartent, nous l'avons vu, du schéma des distributions de probabilités envisagées en statistique usuelle. Il y a, au contraire, mélange lorsque la fonction Ψ du système n'est pas exactement connue et qu'on peut seulement lui attribuer diverses fonctions d'ordre $\Psi^{(k)}$ avec des probabilités p_k (telles que $\sum_k p_k = 1$). Ici les coefficients de probabilité p_k sont définies d'une façon tout à fait classique. Pour caractériser chaque système du point de vue statistique, M. von Neumann a défini une « matrice statistique » hermitienne dont la trace est égale à l'unité : il s'est servi pour cela de la notion de « projecteur ». Pour un cas pur, la matrice statistique appelée alors « matrice statistique élémentaire » jouit de la propriété

(1) Traduction française, Alcan, Paris, 1946.

(2) Hermann, Paris, 1939, n° 775.

d'être idempotente, c'est-à-dire que $P^n = P$, quel que soit n . Pour un mélange, au contraire, la matrice statistique n'est pas idempotente : la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice statistique d'un système soit idempotente est que le système soit dans un cas pur. On trouve ainsi un critérium pour distinguer les cas purs des mélanges. Analysant avec soin la notion de mesure, M. von Neumann a montré que la mesure avait pour effet de transformer le cas pur en mélange, ce qui revient à peu près à dire que le dispositif de mesure a pour effet d'isoler des trains d'ondes correspondant aux différentes composantes du Ψ pour la grandeur considérée, un seul de ces trains d'ondes correspondant à une hypothèse physiquement réalisée.

C'est au cours de ces recherches que M. von Neumann a cru pouvoir démontrer l'impossibilité de rendre compte des distributions de probabilités de la Mécanique ondulatoire en introduisant des « variables cachées ». Cette démonstration semble exclure définitivement la possibilité de revenir à une théorie causale et objective des phénomènes microscopiques.

Sans reprendre tout le raisonnement, indiquons-en la marche générale. Von Neumann a d'abord démontré le théorème suivant : *Il est impossible de représenter un cas pur sous la forme d'un mélange.* Autrement dit, un cas pur n'est jamais réductible à une somme de cas purs.

Ce point établi, M. von Neumann fait la remarque que voici : s'il était possible d'obtenir une interprétation classique des distributions de probabilités de la Mécanique ondulatoire par l'introduction de variables cachées (comme, en Physique classique, la théorie cinétique en fournissait une pour les lois des gaz), la connaissance des valeurs exactes des paramètres cachés permettrait en principe d'obtenir un état « sans dispersion », c'est-à-dire un état où pour toute grandeur A la dispersion $\sigma_A = \sqrt{(A - \bar{A})^2}$ serait nulle. On obtiendrait les propriétés statistiques du système en considérant des mélanges de ces états sans dispersion : c'est ce que font les théories statistiques de la Physique classique. Bref, pour qu'une théorie statistique puisse se réduire à un schéma déterministe à paramètres cachés, il faut que les distributions statistiques de cette théorie puissent se ramener à des mélanges d'états élémentaires indécomposables et sans dispersion. Or, M. von Neumann montre que ce n'est pas le cas pour la Mécanique ondulatoire qui, par conséquent, ne pourrait par aucun moyen se ramener à un schéma déterministe à paramètres cachés.

Le raisonnement repose essentiellement sur le théorème suivant : *Les états que l'on rencontre en Mécanique ondulatoire ne peuvent jamais être sans dispersion.* Von Neumann a justifié cet énoncé en montrant qu'il existe en Mécanique ondulatoire aucune matrice statistique P acceptable qui corresponde à une absence de dispersion pour toutes les grandeurs. D'ailleurs, ce résultat peut se prévoir très simplement en remarquant que déjà pour un cas pur (système ayant une fonction d'onde Ψ bien déterminée), les dispersions σ_x et σ_{p_x} de deux grandeurs canoniquement conjuguées ne peuvent simultanément nulles en raison du théorème sur les dispersions exprimé par l'inégalité $\sigma_x \sigma_{p_x} \geq \frac{h}{4\pi}$.

Nous ne pouvons donc pas ramener les distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire à des mélanges d'états indécomposables sans dispersion. Il y existe bien des états indécomposables, les cas purs, mais ils ne sont jamais sans dispersion. La conclusion de M. von Neumann peut donc être obtenue uniquement par l'étude des cas purs, mais l'analyse plus générale qu'il a donnée permet une comparaison plus exacte avec les théories probabilistes à paramètres cachés de la Physique classique.

La belle tenue mathématique de la déduction de M. von Neumann pouvait entraîner la conviction que tout retour aux conceptions causales et objectives de la Physique classique était désormais impossible en Microphysique. On pouvait bien objecter que la démonstration reposait sur le postulat que les distributions de probabilités admises par la Mécanique ont une validité générale, mais on pouvait répondre que l'expérience apporte une confirmation complète de ce postulat. On pouvait dire aussi que la démonstration de M. von Neumann n'ajoutait pas grand'chose à ce que l'on savait déjà puisque la conclusion est déjà contenue dans les relations d'incertitude, mais cette remarque ne diminuait en rien la solidité de cette conclusion.

Mais, comme nous le verrons, il existe au moins une théorie, la théorie causale que nous étudierons plus loin, qui permet de retrouver les distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire et qui est une théorie déterministe à paramètres cachés. Il se peut que cette théorie ne soit pas physiquement exacte, mais elle existe et son existence seule est déjà en contradiction avec le théorème de von Neumann. Comment cela est-il possible ?

L'examen de cette question m'a amené, en accord sur ce point avec M. David Bohm, à penser que la démonstration de M. von Neumann

implique une hypothèse qui ne s'impose pas absolument et qui n'est pas remplie dans la théorie causale en question. Cette hypothèse, c'est que, quand un système est dans un état Ψ , les distributions de probabilités définies par la Mécanique ondulatoire sont valables *avant* toute opération de mesure. Or, il résulte que la façon même dont on doit correctement énoncer ces lois de probabilités (par exemple, $|c_k|^2$ est la probabilité pour qu'une mesure précise de la grandeur A fournisse la valeur α_k) que ces lois ne sont valables qu'une fois la mesure effectuée quand on n'en connaît pas encore le résultat. Pour deux grandeurs non commutantes les lois de probabilités doivent même ne jamais entrer en jeu simultanément puisqu'elles ne peuvent devenir valables qu'après des opérations de mesure qui sont incompatibles. Il se peut qu'une certaine distribution de probabilités soit déjà valable dans l'état initial et ne soit que confirmée par la mesure : c'est le cas dans la théorie causale de la distribution en $|\Psi|^2$ pour la localisation. Mais, en général, la distribution de probabilités sera le résultat de l'opération de mesure et pourra succéder à une distribution de probabilités inconnue, peut-être même inobservable, existant avant la mesure : c'est le cas, dans la théorie causale, de la probabilité $|c(\mathbf{k})|^2$ pour la quantité de mouvement.

Ces remarques me paraissent maintenant rendre douteuse la validité du postulat implicite sur lequel repose la démonstration de M. von Neumann et par suite faire tomber la force probante de son raisonnement.

CHAPITRE VII.

OBJECTIONS OPPOSÉES A L'INTERPRÉTATION PUREMENT PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. **Conséquences de la disparition de la notion de trajectoire.** — Dans l'interprétation purement probabiliste actuelle de la Mécanique ondulatoire, la notion de trajectoire disparaît, du moins chaque fois que l'on sort du domaine de validité de l'Optique géométrique pour la propagation de l'onde Ψ . Quand cette approximation est valable, on peut garder la notion de trajectoire et considérer des trains d'ondes presque ponctuels décrivant des rayons-trajectoires, mais dès qu'interviennent par exemple des phénomènes d'interférences et de diffraction, la notion de rayon et par suite celle de trajectoire deviennent inutilisables. Le corpuscule dans l'espace physique (ou le point figuratif d'un système dans l'espace de configuration) ne peut être localisé que *de loin en loin* par une mesure et, entre les localisations, aucune trajectoire ne lui serait attribuable. Il en résulterait des différences importantes en ce qui concerne la notion même de probabilité en Physique classique et en Microphysique, comme nous allons l'expliquer.

Considérons, dans le cadre de la Mécanique classique tous les mouvements possibles correspondant à une même fonction S de Jacobi. La théorie de Jacobi nous apprend à considérer toutes les trajectoires envisagées comme étant les rayons d'une propagation d'ondes dont les surfaces $S = \text{const.}$ sont les surfaces d'ondes. Si nous avons affaire à une infinité de corpuscules décrivant toutes les trajectoires possibles de la classe considérée, on peut imaginer que les corpuscules sont répartis dans le nuage avec la densité spatiale $\rho = |\Psi|^2$, Ψ étant l'onde définie par la théorie de Jacobi : en effet, ρ se conserve au cours du temps. On peut alors dire aussi que $|\Psi|^2$ mesure la probabilité pour que nous trouvions un corpuscule déterminé en un point donné à un instant donné. Ici la probabilité s'introduit d'une façon tout à fait classique par

suite de notre *ignorance* de la trajectoire effectivement décrite par le corpuscule envisagé et de sa position sur cette trajectoire. En principe, les équations de la Dynamique nous permettraient de calculer la trajectoire effectivement décrite et le mouvement sur cette trajectoire si nous connaissions la position et la vitesse initiales du corpuscule. Mais, si une partie de ces données nous manque, nous saurons seulement quelles sont les trajectoires *possibles* et nous n'aurons plus qu'une probabilité, et non une certitude, de trouver le corpuscule au point M à l'instant t . Si une observation nous permet de déceler la présence du corpuscule au point M à l'instant t , nous saurons que la trajectoire décrite passe par M et dès lors nous serons certains de ne plus pouvoir déceler la présence du corpuscule ailleurs que sur cette trajectoire. La probabilité de présence, qui était différente de zéro dans une région étendue de l'espace, traduisait seulement notre ignorance de la trajectoire effectivement décrite : elle perd toute signification dès que nous connaissons la trajectoire. Tel est le point de vue de la Physique classique : il était conforme à des conceptions intuitives traditionnelles dans la Science. En particulier, il admettait le déterminisme des mouvements et la probabilité ne s'introduisait que par suite de notre ignorance des données nécessaires pour suivre ce déterminisme. On restait ainsi en accord avec la conception de la Probabilité admise par tous les grands maîtres de la Science classique depuis Laplace jusqu'à Henri Poincaré.

Tout autre est le point de vue de l'interprétation probabiliste actuelle de la Mécanique ondulatoire. Pour elle, la notion de trajectoire n'est qu'une première approximation, valable seulement quand l'Optique géométrique est applicable à la propagation de l'onde Ψ . Dès qu'il n'en est plus ainsi, en particulier chaque fois qu'il y a interférences ou diffraction de l'onde Ψ , la notion de trajectoire devient inutilisable et l'on doit seulement parler de localisations successives du corpuscule dans l'espace (ou du point figuratif dans l'espace de configuration) qui résultent d'observations comportant mesure de position.

Alors la probabilité doit s'introduire avec un caractère nouveau : elle n'est plus l'expression de notre ignorance d'une trajectoire suivie par le corpuscule puisqu'il n'y a plus de trajectoire. M. von Neumann semblait même avoir démontré par son fameux théorème que l'intervention des probabilités en Physique quantique ne pouvait d'aucune manière provenir de notre ignorance de certains paramètres cachés qui nous échapperaient. Dès lors, il n'y a plus de déterminisme : rien ne nous permet plus de prévoir exactement, sauf dans des cas exceptionnels, le résultat exact d'une mesure, nous pouvons seulement assigner une

probabilité à chaque résultat possible d'une mesure. La probabilité s'introduirait sans qu'il y ait de notre part ignorance d'une situation cachée. Contrairement aux affirmations de tous les savants de l'époque préquantique, la probabilité pourrait exister « à l'état pur » sans être le résultat d'un déterminisme qui nous échapperait. C'est une conception nouvelle très intéressante, mais qui soulève aussi des difficultés.

La description du monde microscopique, étant rattachée uniquement à la connaissance d'une fonction, l'onde Ψ , qui n'est qu'une représentation de probabilité et dépend des connaissances de l'utilisateur, prend un caractère subjectif et le caractère objectif de la réalité physique se trouve ainsi mis en question d'une manière assez singulière. Nous allons voir notamment quelles conséquences étranges comporte l'abandon de la notion de trajectoire.

2. Objection de M. Einstein au Conseil Solvay de 1927. — Au Conseil Solvay d'octobre 1927, M. Einstein a élevé contre l'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire une objection très frappante.

Il a considéré un corpuscule qui arrive normalement sur un écran plan percé d'un petit trou : derrière l'écran est placé un film photographique ayant la forme d'un hémisphère de grand rayon.

Si le trou a des dimensions assez petites, l'onde Ψ associée au corpuscule sera diffractée en le traversant et se répandra sur le film hémisphérique car le trou jouera le rôle d'une petite source ponctuelle placée au centre. Si, à un instant t , une impression photographique révèle la présence du corpuscule en un point A du film, l'interprétation de ce fait sera très différente suivant que l'on raisonne avec les idées classiques ou avec les conceptions nouvelles.

Avec les idées classiques, on doit dire : le corpuscule qui traverse l'ouverture a nécessairement une « trajectoire ». Celle-ci, représentée sur la figure 3 par une ligne ponctuée, devra nécessairement percer l'écran en un de ses points, mais tant que nous n'aurons pas décelé la présence du corpuscule en un point de l'écran, nous ne saurons pas quelle est la trajectoire réellement suivie et c'est pourquoi nous attribuerons à la présence du corpuscule en tout point de l'écran une probabilité non nulle (égale à $|\Psi|^2$). Dès que la présence de corpuscule est décelée en A, nous connaissons la trajectoire et la probabilité de trouver le corpuscule en tout autre point B de l'écran devient instantanément nulle. Tout cela est très clair.

Mais, avec les conceptions nouvelles, nous sommes obligé d'admettre

qu'il n'y a pas de trajectoire définissable puisqu'il y a diffraction à droite de l'écran. Tant que la localisation en A n'a pas eu lieu, le corpuscule doit être considéré comme présent, à l'état potentiel, sur toute la surface de l'écran avec la probabilité $|\Psi|^2$. Dès que le corpuscule s'est manifesté en A, la probabilité de le trouver en un autre point de l'écran devient instantanément nulle puisque, par hypothèse, il n'y a qu'un seul corpuscule associé à l'onde Ψ . L'interprétation de ce fait, toute simple quand on peut admettre l'existence d'une trajectoire, devient au contraire ici très mystérieuse. Il est, en effet, impossible de

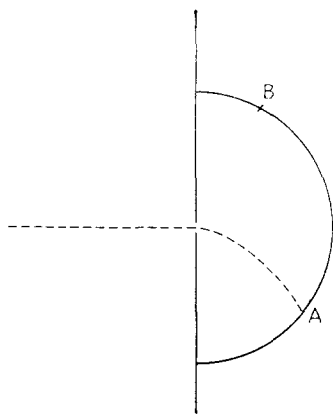


Fig. 3.

comprendre avec nos idées classiques sur l'espace et sur le temps (et même avec les idées relativistes sur l'espace-temps) comment le fait d'observer un effet localisé en A peut empêcher instantanément la production d'un effet analogue en tout autre point B du film, même très éloigné de A, si l'on admet que le corpuscule est localisé dans l'espace à chaque instant et décrit au cours du temps une trajectoire, peut-être inconnue de nous, mais bien définie.

Si donc, avec la nouvelle Mécanique, on abandonne la notion de trajectoire, il faut admettre que le corpuscule, tout en étant une unité indivisible et par instant bien localisable, n'est pas constamment localisé dans l'espace et dans le temps : il est comme « virtuellement » présent dans tout le train d'ondes et l'on dira avec M. Bohr que « les corpuscules sont des individus définis d'une façon floue dans des régions étendues de l'espace-temps » et que leur comportement « transcende » le cadre de l'espace-temps, langage philosophique qu'il est peut-être bien un peu dangereux d'introduire en Physique théorique.

Dans l'exemple d'Einstein, le corpuscule serait en quelque sorte répandu à l'état virtuel dans l'espace au-delà de l'écran : au moment où se produit un effet localisé en A, le corpuscule se condenserait pour ainsi dire en ce point pour y produire un phénomène observable. Or, Einstein l'a souligné, aucun mécanisme compatible avec les idées anciennes, même relativistes, sur l'espace et sur le temps ne peut rendre compte de cette sorte de contraction brusque du corpuscule qui aurait pour conséquence l'action instantanée d'un événement se produisant en A sur ce qui peut se passer au point éloigné B. L'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire nous obligerait donc à considérer nos notions usuelles d'espace et de temps comme totalement inexactes non seulement à l'échelle microphysique (ce qui serait encore acceptable), mais même à l'échelle macroscopique puisque les points A et B peuvent être très éloignés sur l'écran.

Il est donc légitime de considérer l'exemple d'Einstein comme une objection assez grave, à laquelle on n'a jamais nettement répondu, contre l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire.

3. L'exemple de MM. Einstein, Podolsky et Rosen. — De vives et intéressantes discussions, auxquelles ont participé des savants très éminents, ont eu lieu au sujet des systèmes « corrélés », c'est-à-dire des systèmes qui, ayant été en interaction, se trouvent ensuite séparés, mais dans des états dont les probabilités ne sont plus indépendantes. Ces polémiques ont été amorcées par un Mémoire de MM. Einstein, Podolsky et Rosen ⁽¹⁾ commenté dans un exposé de M. Schrödinger ⁽²⁾. M. Bohr y a répondu dans un article de la *Physical Review* ⁽³⁾ et d'autres remarques à ce sujet ont été présentées par M. Furry ⁽⁴⁾.

Einstein, Podolsky et Rosen avaient d'abord considéré un système de deux corpuscules dont l'état était représenté par la fonction d'onde (où d est une constante non nulle)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \Psi &= \iint \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - b - d) \delta(a - b) da db = \int \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - a - d) da \\
 &= \iint \delta(k_1 + k_2) e^{2\pi i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} e^{-2\pi i k_2 d} dk_1 dk_2 \\
 &= \int e^{2\pi i k_1 (x_1 - x_2 + d)} dk_1 = \delta(x_1 - x_2 + d).
 \end{aligned}$$

(1) *Phys. Rev.*, t. 47, 1935, p. 777.

(2) *Naturwissenschaften*, t. 23, 1935, p. 787, 823 et 844.

(3) *Phys. Rev.*, t. 48, 1935, p. 696.

(4) *Phys. Rev.*, t. 49, 1936, p. 393.

Le passage de l'expression de la première ligne à celle de la seconde s'effectue en se souvenant que l'on a pour la fonction singulière de Dirac l'expression symbolique

$$(2) \quad \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x} dk.$$

La forme (1) du Ψ montre que la mesure de k_2 entraîne toujours $k_1 = -k_2$ et que la mesure de x_2 entraîne toujours $x_1 = x_2 - d$. Autrement dit, les grandeurs $k_1 + k_2$ et $x_2 - x_1$ ont respectivement les valeurs 0 et d , ce qui est possible puisque les opérateurs correspondants commutent (bien que k_1 et x_1 d'une part, k_2 et x_2 d'autre part ne commutent pas).

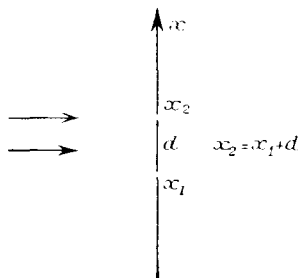


Fig. 4.

On peut interpréter physiquement la forme (1) de Ψ en considérant un écran plan percé de deux fentes parallèles très fines sur lequel tombe normalement des ondes planes monochromatiques initialement associées aux deux corpuscules.

Si, dans l'état initial, nous connaissons exactement le mouvement de l'écran le long de Ox (son p_x), la position de l'écran le long de cet axe et par suite l'abscisse de la première fente doivent être inconnues d'après les relations d'Heisenberg, toutes les valeurs de x_1 étant également probables. La valeur du Ψ du système sur la face postérieure de l'écran est alors donnée par $\int \delta(x_1 - a) \delta(x_2 - a - d) da$ qui exprime la présence simultanée du corpuscule 1 dans la première fente et du corpuscule 2 dans la seconde fente, la position des deux fentes séparées par la distance connue d étant indéterminée. Si la quantité de mouvement de l'écran ne varie pas lors du passage des corpuscules dans les fentes, on doit avoir $k_1 + k_2 = 0$ en accord avec la troisième expression (1) du Ψ .

Le point sur lequel Einstein et ses collaborateurs ont alors attiré

L'attention est le suivant. Nous sommes libres, l'état initial étant donné par (1), de mesurer soit x_2 , soit k_2 , ce qui nous conduira soit à attribuer à la coordonnée x du premier corpuscule la valeur $x_1 = x_2 - d$ soit à attribuer à la composante conjuguée de sa quantité de mouvement la valeur $k_1 = -k_2$. Comme l'une ou l'autre de ces mesures n'affecte pas le premier corpuscule, nous pouvons donc attribuer à celui-ci soit une position, soit une quantité de mouvement le long de Ox *sans aucune-ment agir sur lui* et cela, si l'interprétation orthodoxe est exacte, bien que cette position et cette quantité de mouvement ne puissent pas avoir en même temps des valeurs précises. Einstein, Podolsky et Rosen en ont conclu que le corpuscule 1 devait avoir, avant la mesure faite sur 2 qui n'agit pas sur lui, une position et une quantité de mouvement bien déterminées et que, par suite, la description de la réalité à l'aide de l'onde Ψ est, sinon inexacte, du moins incomplète.

Malheureusement l'exemple de MM. Einstein, Podolsky et Rosen ne semble pas très heureusement choisi parce que, dans l'état défini par la forme (1) du Ψ , les deux corpuscules ne peuvent pas être considérés comme « séparés » dans l'espace et qu'ils sont tous deux en interaction avec le même dispositif expérimental : l'écran percé de deux trous.

C'est ce qui a permis à M. Bohr de répondre à ses contradicteurs d'une façon qui paraît satisfaisante. Il a remarqué qu'avec le dispositif envisagé, les deux mesures possibles, celle de la position et celle de la quantité de mouvement, correspondent à des arrangements expérimentaux différents. La mesure des positions suppose que nous fixions l'écran par rapport au bâti macroscopique qui nous sert à repérer nos coordonnées d'espace. Alors la première fente aura une abscisse précise $x_1 = x_0$ et la seconde fente une abscisse $x_2 = x_0 + d$. Mais la connaissance des quantités de mouvement sera entièrement perdue car, les fentes étant fixées rigidement au bâti, la quantité de mouvement que l'écran pourrait recevoir des corpuscules se perdra dans le support. Inversement, si l'on veut mesurer les quantités de mouvement, il faudra mesurer les impulsions initiales de l'écran, ce qui suppose qu'on laisse à celui-ci sa mobilité et que, par suite, on ne puisse connaître exactement l'abscisse des fentes : dans ce cas, la variation de la quantité de mouvement de l'écran le long de Ox égale à $K_0 - K_1$ étant connue, la mesure de k_2 donnera la valeur $k_1 = -k_2 + K_0 - K_1$ pour k_1 . La conclusion de M. Bohr est alors la suivante : pour traiter le problème, il faut préciser tous les détails du dispositif expérimental car il faut, dès la mise en marche de la mesure, avoir un montage approprié à celle des deux mesures que l'on veut effectuer.

Les raisonnements, parfois un peu nébuleux, de M. Bohr, contiennent quelques affirmations contestables telles que celle-ci : la mesure de l'impulsion d'un corpuscule se fait toujours en communiquant cette impulsion à un corps macroscopique auquel sont applicables les conceptions de la Physique classique. Il nous semble au contraire que ce n'est jamais de cette façon qu'on mesure l'impulsion d'un corpuscule, mais bien en la déduisant de la localisation observée d'un autre corpuscule avec application éventuelle de la conservation de l'impulsion. Néanmoins, on peut admettre qu'en raison du choix peu heureux de l'exemple d'Einstein, Podolsky et Rosen, M. Bohr a pu écarter l'objection sous la forme où elle était présentée.

4. Objection relative aux systèmes corrélés (Schrödinger). — La faiblesse de l'exemple de MM. Einstein, Podolsky et Rosen me paraît provenir du fait qu'il ne fait pas intervenir explicitement la limitation spatiale de tous les trains d'ondes. Physiquement, l'onde associée à un corpuscule ne peut pas être une onde plane monochromatique indéfiniment étendue dans l'espace et dans le temps : on a toujours nécessairement affaire à un train d'ondes spatialement limité. Si les ondes associées à deux corpuscules étaient strictement planes et monochromatiques, on ne pourrait pas parler de collision entre eux : l'interprétation actuelle les supposant alors potentiellement présents en tout point de l'espace, ils seraient constamment et indéfiniment en état de choc. Physiquement, il est donc nécessaire de toujours tenir compte de l'extension limitée des trains d'ondes, point capital sur lequel nous aurons constamment à revenir.

Aussi allons-nous maintenant présenter l'objection relative aux systèmes en faisant intervenir explicitement les dimensions limitées des trains d'onde. Sous cette forme qui se rapproche de celle adoptée par M. Schrödinger dans les articles cités plus haut, l'objection me paraît très difficile à lever.

Considérons deux groupes d'ondes presque monochromatiques associés à deux corpuscules 1 et 2 et supposons qu'ils viennent à la rencontre l'un de l'autre.

Parvenus dans la région hachurée R, les deux corpuscules interagissent et leurs ondes se superposent : pour prévoir ce qui va en résulter, il faut alors envisager l'onde Ψ du système dans l'espace de configuration. La Mécanique ondulatoire nous apprend que le choc peut donner lieu à toute une série de mouvements finaux possibles, tous compatibles avec la conservation de l'énergie et des composantes de

l'impulsion. Ou bien le train d'ondes du corpuscule 1 décrira finalement la trajectoire $1'$, le train d'ondes du corpuscule 2 décrivant la trajectoire $2'$; ou bien le train d'ondes de 1 décrira finalement la trajectoire $1''$, le train d'ondes de 2 décrivant la trajectoire $2''$, etc. Les trajectoires finales seront corrélées entre elles, $1'$ avec $2'$, $1''$ avec $2''$, etc. La fonction d'onde finale du système des deux corpuscules dans l'espace de configuration sera la superposition des produits de la fonction d'onde $1'$ par la fonction d'onde $2'$, de la fonction $1''$ par la fonction d'onde $2''$, etc., les coefficients de la superposition donnant par le carré de leur module les probabilités des divers états corrélés $1'-2'$, $1''-2''$, etc.

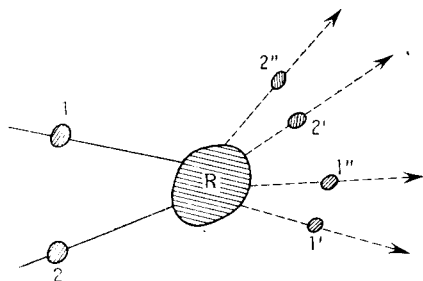


Fig. 5.

Supposons maintenant que nous plaçons sur la trajectoire $1'$ un compteur susceptible de déceler l'arrivée du corpuscule 1. Si ce compteur enregistre cette arrivée, nous saurons que le corpuscule 2 est dans le train d'ondes $2'$. Ceci se comprend aisément si les corpuscules occupent à chaque instant une position dans l'espace physique car alors nous pouvons dire que les trajectoires des corpuscules 1 et 2 sont corrélées de telle façon que, si après le choc le premier corpuscule suit la trajectoire $1'$, le second suivra la trajectoire $2'$, etc. Le fonctionnement du compteur aura simplement révélé un fait qui existait *déjà*, savoir que le premier corpuscule suivait la trajectoire $1'$. L'onde Ψ du système sera réduite aux paquets $1'-2'$, les autres paquets disparaissant instantanément quand on constate le fonctionnement du compteur et ceci s'explique bien puisque l'onde Ψ n'est qu'une représentation de probabilité, élément subjectif qui est brusquement modifié par une nouvelle information.

Mais le point de vue que nous venons d'adopter reviendrait à admettre que l'onde Ψ n'est pas une représentation complète de la réalité puisqu'il faudrait, pour avoir une image complète, se donner en

plus la position du corpuscule, c'est-à-dire les valeurs de ces « paramètres cachés » que sont les coordonnées.

Le point de vue actuellement orthodoxe affirme, au contraire, que la description du système par le Ψ est une description complète et qu'il n'y a pas de localisation permanente des corpuscules. Après le choc, le corpuscule 1 est potentiellement présent dans les trains d'ondes $1'$, $1''$, etc., tandis que le corpuscule 2 est potentiellement présent dans les trains d'ondes $2'$, $2''$, etc. Lorsque le compteur placé sur la trajectoire $1'$ fonctionne, le corpuscule 2 se trouverait instantanément précipité dans l'unique train d'ondes $2'$, bien que $2'$ puisse se trouver aussi loin que l'on veut du compteur qui vient de fonctionner. Comme l'a dit M. Schrödinger, « ce serait de la magie ».

Nous retrouvons d'ailleurs ici la contradiction qui existe, même à l'échelle macroscopique, entre l'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire et les notions d'espace et de temps, contradiction déjà signalée par M. Einstein au Conseil Solvay de 1927.

Quand on expose l'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire, on s'exprime souvent ainsi : *Quand un système se trouve dans un état où la grandeur A n'a pas une valeur bien déterminée, mais toute une série de valeurs possibles, si nous effectuons une mesure précise de A, nous faisons passer le système dans un nouvel état où A a une valeur bien déterminée; nous produisons ainsi sur le système, par l'opération même de la mesure de A, une perturbation incontrôlable qui nous fait perdre la connaissance de la valeur des grandeurs qui ne commutent pas avec A.* Puis on explique ce fait remarquable que, pour mesurer A, nous exerçons nécessairement une action sur le système, action que l'existence du quantum de Planck ne permet pas de diminuer indéfiniment. Cette explication, qui est sans doute exacte dans certains cas, n'est plus admissible dans le cas des systèmes corrélés que nous venons d'étudier. Il est, en effet, inconcevable que le compteur placé sur la trajectoire $1'$ et agissant sur le corpuscule 1 puisse exercer une action quelconque sur le corpuscule 2.

Pour présenter la difficulté dans un cas un peu différent, mais très frappant, considérons l'émission d'un quantum de rayonnement par un atome d'hydrogène. Pour simplifier, nous supposerons que l'atome a une série d'états stationnaires K, L, M, ... en négligeant leurs structures fines. En général, dans l'état initial de l'atome, son onde Ψ sera de la forme

$$(3) \quad \Psi_i = c_K \Psi_K + c_L \Psi_L + c_M \Psi_M + \dots,$$

le carré des modules des c donnant la probabilité des divers états d'énergie dans cet état initial. A une certaine distance de l'atome (qui peut être très grande), plaçons un dispositif susceptible de déceler l'arrivée d'un photon et même de nous donner sa fréquence; c'est le cas d'une cellule photoélectrique. Si, à un moment donné, ce dispositif nous indique l'arrivée d'un photon ayant la fréquence de la première raie de la série de Balmer (correspondant dans le schéma de Bohr à la transition $M \rightarrow L$), nous devons dire dans l'interprétation actuelle que l'atome, primitivement réparti à l'état virtuel entre les énergies E_K, E_L, E_M, \dots avec les probabilités $|c_K|^2, |c_L|^2, |c_M|^2, \dots$ a passé dans l'état d'énergie E_L avec émission de la raie de fréquence $\nu = \frac{E_M - E_L}{h}$ et l'état final de l'atome est représenté par

$$(1) \quad \Psi_f = \Psi_L.$$

Ceci se comprendrait fort bien si nous pouvions dire que le processus d'émission s'était achevé par le départ hors de l'atome du photon de fréquence $h\nu$ laissant l'atome dans l'état final Ψ_L . L'enregistrement de l'arrivée du photon nous aurait alors simplement appris que les choses s'étaient ainsi passées : cette information, en modifiant nos connaissances sur l'état de l'atome, nous obligerait à modifier l'onde Ψ qui symbolise ces connaissances.

Mais l'interprétation actuellement admise est tout autre. Nous devons dire que, tant que le détecteur de photons n'a pas fonctionné, l'atome est dans l'état Ψ_i . C'est le fonctionnement de ce détecteur qui précipiterait instantanément l'atome dans l'état Ψ_f , et cela bien que la distance atome-détecteur de photons puisse être très grande. Une telle interprétation paraît vraiment inadmissible à moins que le Ψ ne soit un élément purement subjectif représentant l'état des connaissances du physicien qui l'utilise, mais alors ce Ψ ne peut guère avoir la prétention de fournir une description véritable du phénomène « émission d'un photon par un atome ».

5. Diverses autres objections de M. Einstein. — En 1949, à l'occasion du soixante-dixième anniversaire de M. Einstein, a paru aux États-Unis un livre jubilaire consacré au fondateur de la théorie de la Relativité auquel des savants de tous les pays ont consacré des articles ⁽¹⁾. De grands physiciens quantistes tels que MM. Born, Pauli, Heitler, etc. ont

(1) *Albert Einstein philosopher and scientist*, The Library of living philosophers Evanston, Illinois.

exprimé dans ce volume, parfois en termes assez vifs, leur désappointement de voir Einstein persister dans une attitude négative vis-à-vis de l'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire.

La plus intéressante des études contenues dans ce livre est sans aucun doute celle due à M. Bohr dans laquelle l'illustre savant danois, après avoir analysé l'origine de la théorie des quanta, ses premiers développements et l'éclosion de la Mécanique ondulatoire et quantique, a résumé l'ensemble de ses discussions avec M. Einstein sur l'interprétation de cette Mécanique dans la période qui a suivi le Conseil Solvay de 1927.

Dans sa réponse placée à la fin du volume, M. Einstein persiste à nier que la fonction d'onde Ψ de la Mécanique ondulatoire puisse donner, à elle seule, une description complète de la réalité. Selon lui, elle ne peut décrire un système individuel, mais seulement l'aspect statistique d'un ensemble de systèmes identiques. Einstein reconnaît d'ailleurs que le formalisme actuel de la Mécanique ondulatoire décrit d'une façon parfaite les phénomènes observables, mais, dit-il, « je suis convaincu que le caractère essentiellement statistique de la théorie quantique contemporaine doit être attribué au fait que cette théorie se sert d'une description *incomplète* des systèmes physiques ».

Comme exemple, Einstein étudie la théorie actuelle de la désintégration α d'un corps radioactif. On représente ce phénomène en admettant que l'onde Ψ de la particule α est susceptible de s'échapper du noyau sous la forme d'une onde sphérique divergente qui filtre progressivement à travers la « barrière du potentiel » entourant le noyau. Cette image, dit Einstein, est parfaite si l'on se propose seulement d'étudier les propriétés statistiques d'un ensemble de noyaux radioactifs, mais elle ne peut pas donner une description vraiment complète d'un seul de ces noyaux parce qu'elle est incapable de préciser *l'époque* de la désintégration et qu'on doit évidemment supposer que chaque noyau se désintègre à une époque bien définie. Einstein expose alors la réponse que lui ferait sans doute un partisan de l'interprétation actuelle de la Physique quantique. Cette réponse consisterait essentiellement à remarquer que l'époque de la désintégration n'est pas connue *a priori* et qu'il faut une observation pour la connaître, observation qui change l'état de nos connaissances sur le système. Einstein reconnaît que cette réponse peut peut-être paraître suffisante quand on a seulement affaire à un système de l'échelle microscopique comme un noyau radioactif, mais il ajoute qu'il n'en est plus de même si l'on examine un cas étudié par M. Schrödinger.

On peut, en effet, considérer un système comprenant non seulement un noyau radioactif α , mais un dispositif de mesure macroscopique tel qu'un compteur de Geiger avec un mécanisme automatique d'enregistrement. Ce dernier peut comporter une bande de papier qu'un mécanisme d'horlogerie fait se dérouler régulièrement et sur laquelle une marque s'inscrit quand le compteur fonctionne. On a alors un système très complexe dont l'espace de configuration comporte un nombre très élevé de dimensions, mais logiquement rien n'empêche de le considérer. Si l'on envisage toutes les configurations possibles après un temps très long par rapport à la période de l'atome radioactif, il y aura *au plus* une marque sur la bande d'enregistrement. Mais la théorie actuelle ne donnant que la probabilité des configurations, nous ne pouvons calculer que les probabilités relatives des positions de la marque sur la bande d'enregistrement. Or, remarque Einstein, la position de la marque sur la bande est un fait qui relève de la Physique macroscopique, ce qui n'est pas le cas de l'instant de désintégration. Si donc nous considérons la théorie quantique actuelle comme donnant une description complète du système individuel, nous sommes contraints d'admettre que la position de la marque sur la bande n'est pas une chose qui appartienne au système *en lui-même*, mais que cette position dépend essentiellement de l'observation qui est faite sur la bande. Einstein considère cette conclusion comme hautement invraisemblable.

Étudiant le passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire, M. Einstein trouve encore un nouvel argument contre l'interprétation purement probabiliste. Considérons avec lui le mouvement en dehors de tout champ d'un corps macroscopique que, pour préciser, nous supposerons être une sphère homogène de masse M . En Mécanique ondulatoire comme en Mécanique classique, on peut démontrer que le mouvement du centre de gravité du système (ici le centre de la sphère) est le même que celui d'un point matériel de masse M . Il est donc représenté par la propagation d'un train d'ondes obéissant à l'équation de propagation des ondes Ψ avec la valeur M de la masse. A l'instant origine $t=0$, ce train d'ondes aura une forme qui traduira nos incertitudes sur la valeur initiale des coordonnées du centre de gravité. Au bout d'un temps t très long, le train d'ondes se sera étalé, les incertitudes sur les coordonnées du centre de gravité ayant augmenté. Si, à cet instant, nous prenons une photographie stéréoscopique du corps en mouvement, nous pourrions en déduire avec une très grande précision (compatible néanmoins avec les relations d'incertitude) la valeur des coordonnées du centre de gravité. Le train d'ondes Ψ se trouvera donc brusquement

réduit d'une façon considérable. Or, l'interprétation actuelle de cette réduction du paquet de probabilité, c'est qu'elle résulte de l'action du processus de mesure. Mais ici cette interprétation est inacceptable, car les faisceaux de lumière qui ont éclairé le corps au moment de la photographie n'ont certainement pas pu exercer une action appréciable sur ce corps dont la masse M peut être considérable. Il y a là encore une objection très forte contre l'interprétation actuelle.

6. **Conclusion.** — J'ai tenu à citer quelques-unes des objections qui ont été adressées à l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire. Comme on a pu le voir, elles émanent de quelques-uns des plus grands esprits scientifiques de notre temps ⁽¹⁾. Pour cette seule raison, il n'est pas inutile de reprendre l'examen de la seule tentative qui ait été faite pour éviter l'interprétation purement probabiliste, c'est-à-dire celle que j'avais faite en 1927 sous le nom de « théorie de la double solution ». Des travaux récents ont d'ailleurs, comme nous allons le voir, ramené l'attention sur cette tentative.

⁽¹⁾ Nous signalerons aussi un article récent de M. SCHRÖDINGER intitulé *Are there quantum jumps?* (*Brit. J. Phil. Sc.*, t. 3, n° 11, 1952) où l'on trouvera de très intéressantes remarques, notamment sur la nécessité de toujours considérer des trains d'ondes limités et d'analyser ce qui se passe sur leurs bords.

DEUXIÈME PARTIE.

LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION.

CHAPITRE VIII.

INTRODUCTION ET PROGRAMME.

1. Historique de la théorie de la double solution. — A l'époque où me sont apparues les premières idées de la Mécanique ondulatoire, j'étais convaincu qu'il fallait réaliser une fusion physique des notions d'onde et de corpuscule. Sans doute je savais bien que cela entraînerait l'introduction d'un certain nombre d'idées étrangères à la Physique classique comme le quantum d'action de Planck, mais je ne pensais pas qu'il fallait pour autant renoncer aux types d'explications de la Physique classique, ni surtout au désir d'obtenir une représentation claire du monde physique dans le cadre de l'espace et du temps. J'avais donc cherché à me représenter la dualité onde-corpuscule par une image où le corpuscule serait le centre d'un phénomène étendu. On retrouve souvent cette idée dans mes premiers travaux.

Entre 1924, date de publication de ma Thèse de Doctorat et 1927, on voit mes idées à ce sujet se préciser dans une série de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Puis je les résume sous le nom de « théorie de la double solution » dans un article du *Journal de Physique* [1] (¹). Mon point de départ était le suivant, l'onde plane monochromatique que j'avais dans mes premiers travaux associée au mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule libre, ainsi d'ailleurs

(¹) Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie placée à la fin de l'Ouvrage.

que l'onde Ψ du type continu utilisée par M. Schrödinger et les ondes continues de la théorie ondulatoire de la lumière, me paraissaient représenter correctement la « phase » du phénomène ondulatoire réel centré sur le corpuscule, mais non pas son amplitude qui devait, à mon sens, comporter une singularité constituant le corpuscule au sens étroit du mot.

J'admis donc hardiment une hypothèse, l'hypothèse de la double solution, suivant laquelle les équations linéaires de la Mécanique ondulatoire admettaient deux sortes de solutions : les solutions Ψ continues habituellement envisagées, dont la nature statistique commençait alors à apparaître nettement grâce aux travaux de M. Born, et des solutions à singularité qui auraient une signification concrète et seraient la véritable représentation physique de la dualité onde-corpuscule. Les corpuscules seraient donc bien localisés dans l'espace suivant l'image classique, mais ils seraient *incorporés* à un phénomène ondulatoire étendu. Pour cette raison, le mouvement d'un corpuscule ne suivrait pas les lois de la Mécanique classique d'après lesquelles le corpuscule est soumis seulement à l'action des forces qui s'exercent sur lui le long de sa trajectoire sans subir aucune répercussion de l'existence des obstacles qui peuvent se trouver au loin en dehors de la trajectoire. Dans ma conception, au contraire, le mouvement de la singularité devait dépendre de tous les obstacles qui entraveraient la libre propagation du phénomène ondulatoire qui l'entoure et il en résulterait une réaction du phénomène ondulatoire sur le corpuscule s'exprimant dans ma théorie par l'apparition d'un « potentiel quantique » tout à fait différent du potentiel des forces ordinaires : ainsi s'expliquerait l'apparition des phénomènes d'interférences et de diffraction.

Malheureusement le développement de cette théorie de la double solution présentait de grandes difficultés mathématiques. Pour cette raison, ayant été chargé de présenter un rapport sur la Mécanique ondulatoire au Conseil de Physique Solvay tenu à Bruxelles en octobre 1927, je me contentai de donner un exposé de mes idées sous une forme incomplète et adoucie à laquelle j'avais donné le nom de « théorie de l'onde-pilote » [2]. Voici quelle était la base de cette forme tronquée de mes conceptions. Dans mon Mémoire sur la double solution, j'avais montré que le mouvement du corpuscule était défini, du moins à l'approximation newtonienne, par une formule que j'ai nommée depuis « formule du guidage »

$$(1) \quad \mathbf{v} = - \frac{1}{m} \text{grad } \tau,$$

φ étant, au facteur $\frac{2\pi}{h}$ près, la phase de l'onde à singularité. Comme, d'après mes idées, la phase devait être la même pour l'onde à singularité et pour l'onde continue Ψ , on pouvait donc dire que le corpuscule était « guidé » par l'onde Ψ suivant la formule (1). Et j'appelais « théorie de l'onde-pilote » la théorie qui se bornait à postuler l'existence du corpuscule et de l'onde Ψ sans plus parler d'onde à singularité [2]. Cette forme dégénérée de ma conception primitive se trouvait coïncider exactement avec celle qu'avait soutenue vers la même époque M. Madelung dans son interprétation hydrodynamique de la Mécanique ondulatoire, mais elle avait beaucoup moins d'intérêt et de profondeur que mes idées initiales sur la double solution. Mon exposé au Conseil Solvay fut mal accueilli et l'interprétation purement probabiliste de MM. Bohr, Born et Heisenberg soutenue par MM. Pauli, Dirac, etc. eut nettement la préférence des savants présents. En particulier, M. Pauli critiqua ma théorie en s'appuyant sur l'exemple du rotateur quantifié de M. Fermi ⁽¹⁾.

Les objections, qui me furent faites ainsi que le succès de l'interprétation de Bohr-Heisenberg auprès de la presque unanimité des Membres du Conseil (sauf Lorentz, Schrödinger et Einstein qui développa l'objection exposée au chapitre VII, § 2) firent sur moi une grande impression. De plus, en réfléchissant après la fin du Conseil à cette théorie de l'onde-pilote que j'y avais soutenue, je m'aperçus qu'elle ne pouvait pas réellement fournir une image concrète, conforme aux conceptions de l'ancienne Physique, du dualisme onde-corpuscule. Elle suppose, en effet, que le corpuscule est guidé dans son mouvement par la propagation de l'onde Ψ considérée en Mécanique ondulatoire : or, ceci ne pourrait conduire à une théorie causale et concrète du type que je cherchais à obtenir que s'il était possible de considérer cette onde Ψ comme une réalité physique objective. Mais l'onde Ψ usuellement utilisée en Mécanique ondulatoire ne peut pas être une réalité physique : sa normalisation est arbitraire, sa propagation est dans le cas général censée s'effectuer dans un espace de configuration visiblement fictif et le succès de son interprétation probabiliste montre bien qu'elle n'est qu'une représentation de probabilités dépendant de l'état de nos connaissances et brusquement modifiée par toute information nouvelle. Je m'apercevais donc que la théorie de l'onde-pilote ne pouvait pas fournir l'interprétation que je cherchais : elle ne réalisait pas la sépa-

(1) Voir plus loin Chap. XIV.

ration nette de l'objectif et du subjectif à laquelle Bohr et ses disciples renonçaient, mais qu'il était nécessaire de maintenir si l'on voulait obtenir une interprétation concrète et causale de la Mécanique ondulatoire.

Au contraire, ma théorie primitive de la double solution, en distinguant l'onde Ψ à caractère probabiliste et subjectif de l'onde à singularité (onde u) qui, elle, serait une description de la réalité objective, pouvait peut-être fournir l'interprétation d'un type plus classique que j'avais recherchée. Mais la théorie de la double solution comportait aussi, je le savais bien, de nombreuses difficultés, notamment en ce qui concernait l'existence et la forme des ondes à singularité, leur rapport avec les ondes Ψ , la difficulté d'interpréter avec des ondes à singularité des expériences d'interférences telle que celle des trous d'Young, etc.

Placé devant toutes ces difficultés, j'ai alors renoncé à poursuivre des efforts dont le résultat me paraissait trop aléatoire. Depuis 1928, je me suis rallié à l'interprétation probabiliste de Bohr et j'ai pris cette interprétation comme base de mes travaux personnels, de mon enseignement et de mes livres.

Pendant l'été 1951, j'ai eu, à ma grande surprise, connaissance d'un Mémoire de M. David Bohm qui a ensuite paru dans la *Physical Review* [3]. Dans ce Mémoire, M. Bohm reprenait ma théorie de l'onde-pilote en considérant l'onde Ψ comme une réalité physique. Il développait à ce sujet un certain nombre de remarques intéressantes et, en particulier, esquissait une théorie de la mesure qui paraissait écarter les objections que M. Pauli m'avait adressées en 1927 ⁽¹⁾. Ma première réaction en présence du travail de M. Bohm fut de rappeler, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [4] les objections, à mon avis insurmontables, qui me paraissent s'opposer à l'attribution à l'onde Ψ d'un caractère de réalité physique et, par suite, à l'adoption de la théorie de l'onde-pilote. M. Takabayasi a d'ailleurs repris ensuite ces objections dans des Mémoires dans lesquels il a précisé d'une manière intéressante certains aspects de la théorie de Bohm [5].

M. Jean-Pierre Vigier, qui poursuivait des recherches sur les théories unitaires en Relativité généralisée a alors attiré mon attention sur l'analogie entre la démonstration que j'avais donnée en 1927 en établissant la formule du guidage (1) dans le cadre de la théorie de la

(1) Voir chapitre XV.

double solution et une démonstration indiquée par M. Georges Darmois dès 1926, ⁽²⁾, développée indépendamment par MM. Einstein et Grommer ⁽³⁾ en 1927 et plusieurs fois reprises depuis sous des formes diverses par Einstein lui-même et par Fock, Infeld ⁽⁴⁾, Hoffmann, etc. Cette dernière démonstration établit qu'une singularité du champ gravifique doit automatiquement, en vertu même des équations non linéaires satisfaites par les coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique de l'espace-temps, suivre une géodésique de la métrique définie par le champ gravifique extérieur qui se superpose au champ de la singularité. M. Vigier a d'ailleurs cherché à préciser l'analogie qu'il m'avait signalée en admettant que l'onde des corpuscles présents (bien entendu l'onde α objective à singularité) détermine d'une certaine manière la structure de l'espace-temps.

L'analogie signalée par M. Vigier m'avait paru d'un très grand intérêt et j'ai été conduit à préciser dans une nouvelle Note [6] la façon dont on pourrait essayer de reprendre non pas la théorie de l'onde-pilote qui me paraissait rester inacceptable, mais la théorie de la double solution qui ne soulève pas les mêmes objections de principe. A la fin de cette Note, j'ai dit qu'elle ne contenait qu'un programme dont l'exécution se heurterait à de très grandes difficultés. Laissant de côté, malgré tout son intérêt, la question du raccord avec la Relativité générale, je voudrais dans la deuxième partie de cet Ouvrage exposer où en est actuellement la réalisation de ce programme.

2. Problèmes qui vont être traités dans les chapitres suivants. —

Nous rappellerons d'abord les résultats de notre Mémoire de 1927, en particulier la démonstration de la formule du guidage et l'introduction du potentiel quantique. Nous développerons la Dynamique qui en résulte pour le point-singularité, dynamique qui, par l'intermédiaire du potentiel quantique, se trouve dépendre des conditions aux limites imposées au phénomène ondulatoire par la présence d'obstacles. Puis nous étudierons quelques conséquences des formules obtenues et une récente objection faite à ce sujet par M. Einstein.

Un point important est la justification de la formule du guidage et de la signification statistique de l'onde Ψ dans le cas des systèmes de corpuscules en interaction, cas où l'onde Ψ considérée par la Mécanique

(2) G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (Mém. Sc. math., Gauthier-Villars, 1927).

(3) *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, t. I, 1927.

(4) *Rev. Mod. Phys.* i. 21, 1949, p. 408.

ondulatoire usuelle est censée se propager dans l'espace de configuration, espace visiblement fictif. Du point de vue causal de la double solution, il faut démontrer que formule du guidage et interprétation statistique du Ψ résultent des interactions entre les régions singulières d'ondes du type u évoluant dans l'espace physique à trois dimensions. Dans mon article du *Journal de Physique* de mai 1927, j'avais esquissé une démonstration de ce genre *en considérant l'espace de configuration comme formé par les coordonnées des singularités*. Je parvenais ainsi à une représentation du mouvement des corpuscules en interaction comme s'accomplissant dans l'espace physique sans avoir nécessairement à faire appel à l'espace de configuration. Cet espace fictif et la propagation de l'onde Ψ dans cet espace seraient seulement des artifices de calcul commodes pour les prévisions statistiques. En poursuivant dans cette voie, on devrait obtenir une interprétation physique de l'emploi des fonctions d'onde Ψ symétriques et antisymétriques en Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules. On apercevrait mieux la signification physique du principe d'exclusion de Pauli si l'on parvenait à montrer que, pour les fermions, l'onde u ne peut comporter qu'une singularité tandis qu'elle pourrait en comporter plusieurs dans le cas des bosons. J'exposerai certaines considérations que j'ai pu développer à ce sujet et qui paraissent constituer une certaine avance dans cette direction [7].

Nous examinerons ensuite l'importante question de la signification statistique de la grandeur $|\Psi|^2$. Dans mon Mémoire de 1927, j'avais remarqué que, par suite de l'identité des phases des ondes Ψ et u postulée par la double solution, la quantité $\alpha^2 = |\Psi|^2$ obéissait à l'équation de continuité

$$(2) \quad \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha^2 \mathbf{v}) = 0.$$

\mathbf{v} étant la vitesse définie par la formule du guidage (1). Partant de cette relation, j'avais montré qu'il est assez naturel de supposer que $\alpha^2 = |\Psi|^2$ donne la probabilité de présence du corpuscule en un point quand on ignore laquelle des trajectoires possibles est effectivement décrite : on retrouve ainsi la signification du $|\Psi|^2$ couramment admise. L'hypothèse faite pour y parvenir se présente comme un peu analogue à celle qu'on fait en Mécanique statistique classique quand on admet l'égale probabilité des éléments égaux d'extension-en-phase en s'appuyant uniquement sur le théorème de Liouville. Mais une justification paraît nécessaire, analogue aux démonstrations ergodiques qu'on cherche à établir en

Mécanique statistique classique. M. Bohm dans un Mémoire récent [8] a donné un raisonnement qui semble conduire à cette justification.

Nous examinons ensuite l'objection faite à la formule du guidage par M. Pauli en 1927 et la réponse qu'on peut y opposer en s'appuyant sur l'idée essentielle de la limitation des trains d'ondes. L'analyse des processus de mesure a, dans l'ensemble de ces conceptions une grande importance. En conservant l'idée introduite par le développement de la Physique quantique suivant laquelle tout processus de mesure modifie en général complètement l'état existant avant son exécution, elle permet de retrouver les relations d'incertitude d'Heisenberg en les conciliant avec le point de vue causal; elle permet aussi de discerner le postulat arbitraire qui est à la base à la fois de ce qu'on nomme dans les traités usuels « la théorie générale des transformations » et du raisonnement de M. von Neumann sur la prétendue impossibilité d'interpréter les lois de probabilité de la Mécanique ondulatoire à l'aide de variables cachées. Nous exposerons ces questions en nous appuyant notamment sur les Mémoires de MM. Bohm et Takabayasi déjà cités [3], [5].

Naturellement, il est nécessaire de pouvoir étendre toutes les considérations précédentes au cas de l'électron doué de spin obéissant aux équations relativistes de la théorie de Dirac (et même plus généralement aux cas des particules de spin supérieur à $\frac{1}{2}$). Après une première tentative insuffisante que j'avais faite en ce sens, M. Vigier s'inspirant d'idées de M. Bohm a donné une solution de cette question qui me paraît plus satisfaisante et que j'exposerai [9]. Il ne me semble pas que l'extension des idées de la double solution à l'électron de Dirac soulève des difficultés particulières.

Un point très important à élucider est la question de la nature des solutions u à singularité postulée par la théorie de la double solution. Un certain nombre de raisons que nous exposerons et en particulier la parenté probable de la théorie de la double solution avec la Relativité généralisée nous ont conduit à modifier d'une façon importante nos conceptions primitives de 1927. A cette époque je considérais l'onde u comme une solution de l'équation *linéaire* de propagation de la Mécanique ondulatoire qui comporterait une singularité au sens mathématique du mot. Il me semble aujourd'hui certain qu'il convient de remplacer l'idée de singularité par celle d'une très petite région singulière, en général mobile, où la fonction u prendrait des valeurs très grandes et obéirait à une équation *non linéaire* : c'est seulement en dehors de cette très petite région singulière que la fonction u obéirait

approximativement à l'équation de propagation linéaire de la Mécanique ondulatoire usuelle. Cette nouvelle manière de définir l'onde u est conforme aux idées de M. Vigier : il pense que l'on pourrait ainsi raccorder la théorie de la double solution avec les idées de M. Einstein qui a toujours cherché à représenter les corpuscules par des régions singulières du champ et peut-être aussi avec l'électromagnétisme non linéaire de M. Born.

L'examen de la façon dont se présente dans ce cadre d'idées la question des valeurs propres correspondant aux états quantifiés m'a conduit récemment à préciser la forme des ondes u et les relations de cette forme avec celle des ondes Ψ [10]. Elles comporteraient, conformément d'ailleurs à une suggestion de M. Vigier, en dehors de la région singulière où elles peuvent prendre des valeurs très élevées, une partie extérieure « régulière » qui serait proportionnelle à l'onde Ψ normée, mais avec un facteur multiplicatif ayant une valeur physique parfaitement déterminée, ce qui correspond au caractère objectif attribué à l'onde u . Ainsi l'onde Ψ ordinairement considérée en Mécanique ondulatoire et arbitrairement normalisable continuerait à avoir le caractère subjectif et statistique qu'elle possède incontestablement, mais la partie extérieure de l'onde u à signification objective et à valeur parfaitement déterminée serait proportionnelle à l'onde u normée à l'unité. Ainsi, sans attribuer à l'onde Ψ un caractère de réalité physique, la principale objection contre la théorie de l'onde-pilote serait levée et le point de vue de M. Bohm, *convenablement interprété*, deviendrait acceptable. De plus, comme je le montrerai, cette conception de l'onde u formée d'un « doigt de gant » très élevé et très étroit muni d'ailes représentées par une fonction proportionnelle à l'onde Ψ paraît pouvoir fournir l'explication des expériences d'interférences telle que celle des trous d'Young, explication qui m'avait paru, il y a 25 ans, être pour ma tentative de théorie causale un obstacle insurmontable. L'ensemble des idées que nous venons de résumer paraît donc apporter un sensible progrès dans les conceptions de la théorie de la double solution.

Il reste cependant des points très délicats à éclaircir. Il ne semble pas possible d'admettre, pour un corpuscule libre associé à un groupe d'ondes presque monochromatiques, la partie extérieure régulière de l'onde u soit réellement représentée par l'intégrale de Fourier qui représente l'onde Ψ dans le cas d'un tel groupe d'ondes. Il est donc nécessaire d'admettre que la proportionnalité entre la partie régulière de l'onde u et l'onde Ψ considérée dans le même problème par la Mécanique ondulatoire usuelle a des limites et il faut, du moins dans certains cas,

« affaiblir » la liaison établie entre l'onde u et l'onde Ψ . L'examen d'une objection faite par M. Francis Perrin au sujet de la représentation par une onde sphérique divergente du phénomène de l'émission de corpuscules par une source ponctuelle confirme cette nécessité. Nous développerons une suggestion suivant laquelle, en raison du caractère non linéaire de l'équation de propagation de l'onde u et de la variation rapide de u au bord des trains d'ondes, il se produirait aux limites des trains d'ondes u des phénomènes non linéaires impossibles à prévoir avec l'équation de propagation linéaire usuelle.

Nous étudierons enfin des problèmes très importants et très difficiles relatifs à l'interprétation dans la théorie de la double solution du phénomène de la réflexion sur un miroir semi-transparent, de la réduction du paquet de probabilité, de la signification des états stationnaires et de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, etc. De la possibilité de surmonter les difficultés qui se présentent dans ces problèmes, dépendra en fin de compte le succès ou l'échec de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire étudiée dans cet Ouvrage. Il paraît certain que, si l'on trouve une manière de surmonter ces difficultés, elle fera intervenir essentiellement le fait que tous les trains sont limités et peut-être aussi l'existence de phénomènes non linéaires sur les fronts d'ondes et dans les régions singulières.

Pour terminer et en vue de faciliter le langage, j'introduirai la convention suivante : *chaque fois qu'il n'y aura pas lieu de distinguer entre la théorie de la double solution et sa forme dégénérée, la théorie de l'onde-pilote, j'emploierai le terme abrégé de « théorie causale »* ⁽¹⁾.

(1) On trouvera la plupart des textes anciens ou récents cités dans ce chapitre dans un opuscule de l'auteur et de M. Vigier, (11).

CHAPITRE IX.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION.

1. Idées générales. — Résumons d'abord les principales idées qui m'avaient guidé quand j'avais imaginé en 1927 la théorie de la double solution.

1° La synthèse des ondes et des corpuscules doit s'effectuer en représentant le corpuscule comme une sorte de singularité au sein d'un phénomène ondulatoire étendu.

2° L'interprétation probabiliste de l'onde Ψ continue est exacte dans son ensemble et doit être conservée.

3° L'onde Ψ étant écrite sous la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ (avec a et φ réels), la phase φ a un sens physique profond correspondant aux indications d'une infinité de petites horloges dont le mouvement serait lié à celui du corpuscule (*voir* Chap. I, § 1). Cette phase φ doit aussi être celle de l'onde à singularité qui, dans la théorie à construire, devra représenter la structure réelle du corpuscule et du phénomène ondulatoire auquel il est incorporé. Au contraire, l'amplitude a de l'onde Ψ , qui est continue, n'a pas de signification objective : elle n'a que le caractère de représentation d'une probabilité.

4° Parmi toutes les probabilités envisagées par la Mécanique ondulatoire usuelle, la probabilité de présence $|\Psi|^2$ a sur les autres une sorte de priorité car elle correspond en réalité à la probabilité que le corpuscule *soit* en un point dans l'état représenté par l'onde Ψ . Les autres probabilités, telles que $|c(\mathbf{k})|^2$ pour la valeur $\frac{\mathbf{k}h}{2\pi}$ de la quantité de mouvement, ont un sens moins immédiat : elles ne sont valables qu'après l'action d'un dispositif permettant de mesurer la grandeur envisagée quand on ne connaît pas encore le résultat de cette mesure.

5° Tout phénomène réel pouvant se représenter dans le cadre de

l'espace et du temps, il n'est pas admissible que l'on ne puisse traiter le problème de N corpuscules en interaction qu'en considérant une propagation d'ondes dans l'espace de configuration du système, espace visiblement fictif. On doit donc pouvoir poser ce problème, et même en principe le résoudre, en considérant la propagation dans l'espace physique à trois dimensions de N ondes à singularité s'influençant mutuellement. Mais on devra ensuite pouvoir démontrer que le résultat statistique des interactions est exactement donné par la considération de l'onde Ψ du système dans l'espace de configuration qui, n'étant qu'une représentation de probabilité, peut, elle, n'être représentable que dans un cadre fictif.

2. Principe de la double solution. — Muni de ces idées générales, je me suis hasardé à admettre le principe suivant auquel j'avais donné le nom de « principe de la double solution ».

A toute solution continue $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ de l'équation de propagation de la Mécanique ondulatoire, doit correspondre une solution à singularité $u = f e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ ayant la même phase φ que Ψ , mais dont l'amplitude f comporte une singularité en général mobile.

Dans mon idée, la fonction u était la véritable représentation de l'entité physique « corpuscule » qui serait un phénomène ondulatoire étendu centré autour d'un point (ou d'une région quasi ponctuelle) constituant le corpuscule au sens étroit du mot. Je considérerais alors le corpuscule au sens étroit du mot comme défini par une véritable singularité mathématique, c'est-à-dire par un point où la fonction f deviendrait infinie. Des considérations sur lesquelles je reviendrai me conduisent aujourd'hui à penser que le corpuscule doit être assimilé non pas à une véritable singularité ponctuelle de u , mais à une très petite région singulière de l'espace où u prendrait une très grande valeur et obéirait à une équation non linéaire dont l'équation linéaire de la Mécanique ondulatoire ne serait qu'une forme approximative valable en dehors de la région singulière. L'idée que l'équation de propagation de u , contrairement à l'équation classique du Ψ , est en principe non linéaire m'apparaît même maintenant comme tout à fait essentielle.

Quoi qu'il en soit, ma conception du corpuscule solidaire d'un phénomène ondulatoire dont il serait le centre me paraissait permettre de comprendre que le corpuscule soit localisé et que cependant son mouvement puisse être influencé par la présence d'obstacles situés loin

de lui, comme cela paraît nécessaire pour interpréter l'existence des phénomènes d'interférences et de diffraction.

Quelle peut être alors la signification de l'onde continue Ψ usuellement considérée en Mécanique ondulatoire? Ce doit être seulement une fonction d'onde fictive à caractère subjectif, susceptible seulement de nous donner des renseignements d'ordre statistique sur les divers mouvements possibles du corpuscule suivant qu'il suit l'une ou l'autre des trajectoires définies par la phase φ .

Pour voir si ces idées générales pouvaient conduire à des résultats acceptables, j'avais d'abord examiné le cas le plus simple : celui du mouvement rectiligne et uniforme associé à une onde plane monochromatique, cas qui avait déjà été à l'origine de mes réflexions initiales sur la Mécanique ondulatoire.

3. Cas du mouvement rectiligne uniforme. — Considérons un corpuscule en l'absence de champ. En 1927, on admettait comme équation *relativiste* pour la propagation de l'onde Ψ l'équation

$$(1) \quad \square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0 \quad (m_0 \text{ masse propre}).$$

On sait aujourd'hui, nous l'avons dit, que cette équation ne convient que pour les corpuscules de spin nul et que, pour les particules de spin non nul, on doit employer d'autres formes d'équations d'ondes (par exemple les équations de Dirac pour les électrons de spin $\frac{h}{4\pi}$), mais je laisse cette question de côté pour l'instant.

On vérifie aisément que l'équation (1) admet pour solutions des ondes planes monochromatiques de la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ avec a constant et φ égal à

$$(2) \quad \varphi = Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \quad \left(W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

Existe-t-il une onde à singularité de même phase φ , satisfaisant à l'équation (1) et ayant la forme $u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$? Par substitution dans (1), on voit que l'on doit avoir $\square f = 0$. Comme cette équation est invariante pour une transformation de Lorentz, on peut l'écrire $\Delta f = 0$ en se plaçant dans le système propre du corpuscule où f ne doit pas dépendre du temps. Dans ce système propre, l'origine des coordonnées

coïncidant avec le corpuscule, on trouvera comme solution à symétrie sphérique

$$(3) \quad f(x_0, y_0, z_0) = \frac{C}{r_0} \quad (r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2})$$

et par suite

$$(4) \quad u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{C}{r_0} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t_0}.$$

La fonction d'onde à singularité étant ainsi obtenue dans le système propre, une simple transformation de Lorentz en donnera l'expression dans un autre système galiléen et, en passant ainsi dans le système dont le corpuscule parcourt l'axe Oz avec la vitesse v , on aura ⁽¹⁾

$$(5) \quad u(x, y, z, t) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - \beta^2}}} e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - \mu z)}.$$

Dans ce cas simple de l'absence de champ, nous avons donc bien pu trouver une solution à singularité mobile vérifiant le principe de la double solution. Je remarquerai dès à présent que, si l'on veut remplacer l'idée d'une singularité par celle d'une très petite région singulière où u obéirait à une équation non linéaire différente de l'équation satisfaite par Ψ , on serait amené à considérer l'équation $\Delta f = 0$ comme satisfaite dans tous le système propre sauf dans une très petite région finie entourant l'origine : la solution à symétrie sphérique $f = \frac{C}{r_0}$ ne pourrait donc représenter f qu'à l'extérieur d'une très petite sphère entourant l'origine. La solution (5) serait alors valable partout sauf à l'intérieur d'un très petit ellipsoïde entourant le point $x = y = 0, z = vt$ aplati par suite de l'effet de la contraction de Lorentz.

La solution u à singularité que nous venons d'obtenir a dans le système propre la forme d'une solution du type polaire à symétrie sphérique. On pourrait aussi trouver des solutions du type dipolaire en posant par exemple $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{C x_0}{r_0^3}$ et de même des solutions du type n -polaire. Les choix que l'on peut ainsi faire correspondent à des hypothèses diverses sur la « structure interne » du corpuscule et

(¹) Remarquons que nous pourrions ajouter à (5) une solution $\alpha e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - \mu z)}$ avec α quelconque.

sur la symétrie de cette structure, ce qui pourrait être très important dans une théorie générale des corpuscules.

Dans mon Mémoire de 1927, j'avais aussi indiqué qu'il existait d'autres solutions d'un type différent. Si, en effet, on se place dans le système propre et si l'on cherche non pas une solution de la forme

$$u = f e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t_0} = f e^{2\pi i \nu_0 t_0},$$

mais des solutions de la forme

$$u = f e^{2\pi i \nu'_0 t} \quad \text{avec} \quad \nu'_0 \neq \nu_0,$$

on trouve pour f dans le système propre l'équation

$$(6) \quad \Delta f = \frac{4\pi^2}{c^2} (\nu_0^2 - \nu'^2_0) f$$

et l'on est amené à envisager les solutions à symétrie sphérique nulles à l'infini

$$(7) \quad \begin{cases} f(r_0) = \frac{C}{r_0} \cos 2\pi \left[\frac{\sqrt{\nu_0^2 - \nu'^2_0}}{c} r_0 + C' \right] & \text{pour } \nu'_0 > \nu_0, \\ f(r_0) = \frac{C}{r_0} e^{-\frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu_0^2 - \nu'^2_0} r_0} & \text{pour } \nu_0 > \nu'_0. \end{cases}$$

Ces solutions correspondent à des états du corpuscule où sa masse propre ne serait pas égale à la constante m_0 figurant dans l'équation de propagation, mais aurait pour valeur $\frac{h\nu'_0}{c^2}$. Ces états que j'avais alors nommés les états « contraints » du corpuscule sont intéressants. Ils présentent une analogie instructive avec les circonstances que l'on rencontre pour les photons enfermés dans un guide d'ondes dont les mouvements correspondent à des masses propres variables suivant la forme du guide d'ondes et le type des ondes propagées, masses propres très supérieure à la masse propre normale, nulle ou évanouissante, du photon ⁽¹⁾. Nous retrouverons des questions de cet ordre dans un chapitre ultérieur (chap. XVII, § 6).

Les résultats qui précèdent pourraient avoir de l'importance si la théorie causale parvenait un jour à décrire la structure des particules et à prévoir les valeurs de leurs masses.

4. Interprétation de l'onde Ψ dans le cas du mouvement rectiligne uniforme. — Dans le cas que nous venons d'étudier où il y a, à la fois,

(1) LOUIS DE BROGLIE, *Problèmes de propagation guidée des ondes électromagnétiques*, Gauthier-Villars, 2^e éd., 1951, p. 34-36.

absence de champ et absence d'obstacles à la propagation, nous avons trouvé une solution à singularité (ou à région singulière) mobile avec la vitesse v le long de Oz .

Nous pouvons imaginer un grand nombre de tels corpuscules se déplaçant suivant des directions parallèles avec la vitesse \mathbf{v} et formant une sorte de fluide à densité uniforme ρ . Considérons alors

l'onde $\Psi = \alpha e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ qui a la même phase $\varphi = Wt - pz$ que l'onde u des corpuscules. Puisque α est constant, nous pouvons poser

$$(8) \quad \rho = K\alpha^2.$$

Nous voyons alors que l'onde Ψ représentera par sa phase le mouvement des corpuscules caractérisé par les valeurs W et p de l'énergie et de la quantité de mouvement et représentera ainsi par le carré de son amplitude la densité des corpuscules dans l'espace.

Si nous n'avons affaire qu'à un seul corpuscule (nous savons que nous devons toujours pouvoir considérer ce cas) et si nous ignorons laquelle des trajectoires parallèles à Oz il décrit et quel est son horaire sur cette trajectoire, il paraît tout naturel de supposer, en raison de l'équivalence des trajectoires parallèles et des divers points d'une même trajectoire, que la probabilité pour que le corpuscule se trouve en un point de l'espace est partout la même. Si l'on a eu soin de normer l'onde continue Ψ , on pourra donc prendre comme expression de la probabilité

$$(9) \quad \varphi = \alpha^2 = |\Psi|^2.$$

Ainsi apparaît le rôle de l'onde Ψ continue dans la théorie de la double solution : tandis que l'onde u avec sa région singulière décrirait la structure réelle du corpuscule, l'onde continue Ψ ne serait qu'une représentation fictive de l'ensemble des positions possibles de ce corpuscule.

Naturellement l'onde u illimitée est une abstraction. Il faudrait dans la réalité considérer des trains d'ondes u limités, possédant dans leur partie centrale un facteur de phase très sensiblement assimilable à la phase d'une onde plane monochromatique : ce train d'ondes u limité devrait correspondre à un paquet d'ondes Ψ formé par la superposition d'ondes planes monochromatiques se détruisant par interférences à l'extérieur des limites du paquet et assimilable dans sa partie centrale à une onde plane monochromatique à amplitude constante. Nous aurons à revenir ultérieurement sur cette question.

5. **Étude du cas des champs constants. Les équations (J) et (C).** — Comme, dans mon article de 1927, je vais maintenant étudier le cas des champs constants qui est le plus simple après celui de l'absence de champ.

Nous admettrons que, dans le système de référence où nous sommes placés, le champ est permanent et dérive d'un potentiel $F(x, y, z)$. Nous adoptons comme équation d'ondes ici valable,

$$(10) \quad \square \Psi - \frac{4\pi i}{h} F(x, y, z) \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_0^2 c^2 - \frac{F^2}{c^2} \right) \Psi = 0$$

qui dérive de l'équation d'ondes relativiste à un seul Ψ donnée par la formule (66) du chapitre III en posant $\mathbf{A} = 0$ et $\varepsilon V = F$.

Imaginons que le corpuscule commence par se déplacer dans une région R_0 de l'espace où le champ est nul, puis pénètre dans la région R où règne le champ de force considéré. Dans R_0 , on pourra représenter le corpuscule par l'onde $u = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \mu z)}$ étudiée au paragraphe 3. La fonction f présente une singularité (ou région singulière) mobile et φ coïncide avec l'action de Hamilton du corpuscule.

Pour obtenir la représentation du corpuscule dans le champ de force, il faut prolonger la solution initiale dans la région R . Pour cela, nous

écrivons toujours $u = f e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ avec f et φ réels et nous portons cette forme dans l'équation (10) supposée valable pour u . Ici se présente une circonstance essentielle qui se retrouvera pour toutes les autres formes de l'équation de propagation. Comme f et φ sont réels, l'équation d'ondes va nous fournir, en séparant les termes réels des termes imaginaires, *deux* équations distinctes. L'une est la généralisation de l'équation de Jacobi et sera appelée (J), l'autre est analogue à l'équation de continuité et sera nommée (C). Dans le cas présent, elles ont la forme suivante et sont valables en dehors de la région singulière,

$$(11) \quad \begin{cases} (J) & \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square f}{f}, \\ (C) & \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - F \right) \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{x,y,z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} f \square \varphi. \end{cases}$$

Il est aisé d'interpréter l'équation (J). Le champ étant permanent, la région R est analogue à un milieu réfringent à propriétés permanentes et, en y pénétrant, l'onde restera monochromatique avec la fréquence $\nu = \frac{W}{h}$ qu'elle possédait dans R_0 : ceci signifie que l'énergie reste constante.

On aura donc dans R,

$$(12) \quad \varphi(x, y, z, t) = Wt - \varphi_1(x, y, z); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = W; \quad \square \varphi = -\Delta \varphi.$$

et nous pouvons écrire l'équation (J) sous la forme

$$(13) \quad (J) \quad \frac{1}{c^2} (W - F)^2 - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 = m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square f}{f}.$$

Il est bien évident que, si nous avons introduit dans l'équation d'ondes non pas l'onde u à singularité, mais l'onde correspondante $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ de même phase φ , nous aurions trouvé

$$(14) \quad (J') \quad \frac{1}{c^2} (W - F)^2 - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 = m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square a}{a} = m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a}$$

puisque a ne dépend pas de t en ce cas.

La comparaison de (14) avec (13) montre alors que le principe de la double solution, qui postule l'identité des phases φ dans u et dans Ψ , entraîne comme conséquence :

$$(15) \quad \frac{\square f}{f} = \frac{\square a}{a} = -\frac{\Delta a}{a}.$$

Tout au moins cette relation est-elle valable en dehors de la région singulière, là où u et Ψ obéissent à la même équation linéaire (10).

Si les derniers termes de (13) et de (14), qui vont nous servir plus loin à définir le potentiel quantique, sont négligeables, l'approximation de l'Optique géométrique sera valable : alors les équations (J) et (J') deviennent identiques à l'équation de Jacobi de la Mécanique relativiste et l'on voit que φ_1 coïncide avec la fonction de Jacobi raccourcie pour les champs permanents. Il suffit pour le voir, de poser dans l'équation (65) du chapitre III :

$$S = Wt - S_1, \quad \mathbf{A} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon V = F.$$

6. La formule du guidage. — A l'approximation de la Mécanique ancienne (Optique géométrique), la vitesse du corpuscule quand il passe au point M est déterminée par le fait que la quantité de mouvement est égale à $(-\text{grad } \varphi)_M = (\text{grad } \varphi_1)_M$ puisque alors $\varphi = S$ et $\varphi_1 = S_1$.

Ceci résulte de la théorie de Jacobi. Nous voulons chercher à établir que, même en dehors de l'approximation de l'Optique géométrique, on a encore cette relation. Nous obtiendrons ainsi une sorte d'extra-

D'après nos hypothèses, on a

$$(16) \quad \left(\frac{\dot{f}}{\dot{s}} \right)_{M,t} \simeq 0.$$

Or, l'équation (C) permet d'écrire

$$(17) \quad \frac{1}{c^2} (W - F) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \cos \widehat{ns} = - \frac{1}{2} f \square \varphi.$$

Divisons par $\frac{\partial f}{\partial s}$, tenons compte de (16) et remarquons que la vitesse de déplacement de la valeur de f en M à l'instant t est égale à $\left(- \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial s}} \right)_{M,t}$,

il vient

$$(18) \quad v_s = \frac{c^2}{W - F} |\mathbf{grad} \varphi_1| \cos \widehat{ns}.$$

Or, ce résultat est valable en tous les points de la sphère S . Comme $v_s = v \cos \widehat{ns}$, on en conclut que la vitesse \mathbf{v} du mouvement d'ensemble de la région singulière a lieu dans la direction \mathbf{n} de $\mathbf{grad} \varphi_1$ et qu'elle est donnée par la formule

$$(19) \quad \mathbf{v} = \frac{c^2}{W - F} \mathbf{grad} \varphi_1 = - \frac{c^2}{W - F} \mathbf{grad} \varphi.$$

Cette formule fondamentale sera nommée la « formule du guidage ». Elle montre que le mouvement d'ensemble de la région singulière (c'est-à-dire le mouvement du corpuscule) s'obtient tout simplement en extrapolant la formule $\mathbf{p} = - \mathbf{grad} S$ de la théorie classique de Jacobi au delà des limites de l'Optique géométrique, c'est-à-dire de l'ancienne Mécanique. En effet, on a

$$\frac{W - F}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et la formule (19) donne

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = - \mathbf{grad} \varphi.$$

Nous savons d'ailleurs que, quand l'approximation newtonienne est réalisée ($v \ll c$), le terme essentiel de W est l'énergie propre $m_0 c^2$ qui se trouve être beaucoup plus grande que l'énergie potentielle F . On a alors $W - F \simeq m_0 c^2$ et la formule du guidage prend la forme

$$(20) \quad \mathbf{v} = - \frac{1}{m} \mathbf{grad} \varphi = - \frac{1}{m} \mathbf{grad} \varphi_1,$$

m étant la masse constante, égale à m_0 , de la Mécanique newtonienne

Nous devons faire ici sur la démonstration de la formule (19) une remarque importante qui pourrait conduire à prévoir des phénomènes non prévus par l'interprétation actuelle. Nous avons noté que notre démonstration de la formule du guidage suppose essentiellement que la longueur d'onde doit être beaucoup plus grande que les dimensions de la région singulière. Si l'on désigne par d la plus grande dimension de la région singulière, la condition précédente s'écrira

$$(21) \quad \frac{h}{p} \simeq_{\text{max}} d.$$

Comme d paraît devoir être au plus de l'ordre de 10^{-13} cm, on voit aisément que, pour les particules usuelles de la Physique atomique, la condition ne peut cesser d'être satisfaite que pour des vitesses très voisines de c . On aura alors $p \simeq \frac{W}{c}$ et la condition (21) s'écrira

$$(22) \quad W < \frac{hc}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-16}}{d} \text{ erg} \simeq \frac{10^{-1}}{d} \text{ électron-volt (eV)}.$$

Pour $d \simeq 10^{-13}$ cm, ceci donne

$$(23) \quad W < 10^9 \text{ eV}.$$

Pour des particules d'énergie supérieure à 10^9 eV, la condition pourrait n'être plus remplie : on se trouverait alors en présence de circonstances toutes nouvelles et les prévisions de la Mécanique ondulatoire sous sa forme actuelle pourraient ne plus être vérifiées ⁽¹⁾.

7. Introduction de l'onde Ψ : sa signification statistique. — Nous allons maintenant introduire l'onde Ψ dans le cas des champs permanents envisagé dans les deux derniers paragraphes.

La phase φ_1 étant supposée connue, on peut lui faire correspondre une infinité de mouvements possibles qui, d'après (19), s'exécutent suivant les diverses courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1 = \text{const.}$ Envisageons l'ensemble de tous les mouvements possibles des corpuscules le long de ces trajectoires : nous obtenons ainsi l'image d'un nuage de corpuscules. Si nous supposons qu'au début de leur mouvement ces corpuscules se trouvaient dans une région R_0 ou il n'y avait pas de champ, le nuage sera représenté statistiquement dans R_0 par une onde Ψ plane et monochromatique (ou plus exactement par un train d'ondes limité assimilable dans presque toute son étendue à une onde plane monochromatique) qui sera associée à tout l'ensemble de ces mouvements

(1) On trouvera en appendice à la fin du volume une démonstration différente de la formule du guidage.

rectilignes et uniformes. Une fois parvenus dans la région R, les corpuscules auront des vitesses données par la formule du guidage et leur mouvement d'ensemble sera comparable au mouvement permanent des molécules d'un fluide puisque leur vitesse dépend uniquement de leur position et non du temps, la fonction φ_1 jouant le rôle d'un potentiel des vitesses.

Les courbes orthogonales aux courbes $\varphi_1 = \text{const.}$ sont ici des « lignes de courant » : elles forment des tubes à l'intérieur desquels les corpuscules se déplacent. Comme ces tubes ont une section droite variable, la densité ρ du fluide varie d'un point à un autre, tout en restant constante en chaque point au cours du temps. Dès lors, l'équation de continuité hydrodynamique à laquelle doit satisfaire la fonction $\rho(x, y, z, t)$ se réduit à

$$(24) \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

qui, compte tenu de la formule du guidage (19), peut s'écrire

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{\varphi}{W - F} \right) = - \frac{\Delta \varphi_1}{|\text{grad } \varphi_1|}.$$

Comme dans le cas de l'absence de champ, nous allons essayer de représenter statistiquement les positions des corpuscules du nuage à l'aide d'une onde Ψ continue. Dans la région R_0 , l'onde Ψ est au début du mouvement un train d'ondes limité assimilable dans presque toute son étendue à une onde plane monochromatique $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}$ avec a constant. Comme nous l'avons vu, il paraît naturel de définir la densité ρ en fonction de l'amplitude constante a par la relation $\rho = K a^2$. Ensuite le train d'ondes Ψ pénétrera dans la région R où règne le potentiel $F(x, y, z)$: sa propagation sera alors réglée par l'équation (10) et, d'après le principe de la double solution, on doit pouvoir l'exprimer sous la forme

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

φ étant la même fonction de phase que dans u .

En substituant cette forme de Ψ dans l'équation (10), on obtient par séparation des termes réels et imaginaires deux relations (J') et (C'). L'équation (J') a été écrite plus haut [formule (14)] et nous a conduit à la relation (15) par comparaison avec (J). Quant à la relation (C'), comme a ne dépend pas de t , elle prend la forme simple

$$(26) \quad -\text{grad } a \text{ grad } \varphi + \frac{1}{2} a \square \varphi = 0,$$

avec

$$\varphi = W - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \square \varphi = \Delta \varphi_1,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(27) \quad \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial n} (\log a^2) = - \frac{\Delta \varphi_1}{|\operatorname{grad} \varphi_1|}.$$

En comparant avec (25), on trouve

$$(28) \quad \frac{\varphi}{a^2(W - F)} = \text{const.}$$

Puisque, dans R_0 , on a $F = 0$ et $\rho = K a^2$, on doit avoir partout dans R

$$(29) \quad \rho(x, y, z) = K a^2(x, y, z) \left[1 - \frac{F(x, y, z)}{W} \right]$$

et l'intensité a^2 de l'onde Ψ détermine ρ . A l'approximation newtonienne où $\frac{F}{W} \simeq 0$, on trouve

$$\rho = K a^2 = K |\Psi|^2.$$

Nous pouvons maintenant revenir au cas d'un corpuscule en supposant que le nuage précédemment imaginé représente un ensemble de possibilités. Nous supposons, en effet, la vitesse initiale donnée dans R_0 en grandeur et direction et, comme nous ne savons rien de plus, il paraît loisible de supposer que toutes les positions dans le train d'ondes initial sont également probables : alors, à chaque hypothèse sur la position initiale correspondra un mouvement bien déterminé et, en juxtaposant par la pensée toutes ces possibilités, nous obtiendrons l'équivalent du mouvement d'un nuage infiniment dense de corpuscules identiques. La probabilité pour que le corpuscule soit présent, à un instant donné, dans un élément de volume dv entourant le point de coordonnées x, y, z de la région R est alors donnée par $\rho(x, y, z) dv$ avec la valeur (29) de ρ . A l'approximation newtonienne, si l'on a pris soin de normer la fonction Ψ , la probabilité de présence du corpuscule sera

$$(30) \quad \rho(x, y, z) dv = a^2(x, y, z) dv = |\Psi(x, y, z, t)|^2 dv$$

et nous retrouvons ainsi la signification statistique habituelle de $|\Psi|^2$.

La validité du raisonnement précédent, dont je m'étais contenté dans mon Mémoire de 1927, peut être contestée. Nous reviendrons sur cette question au chapitre XIII.

8. Formule du guidage et théorie de l'onde-pilote. — Nous ferons remarquer, dès à présent, que, dans la conception de la double solution, la phase φ étant supposée commune à l'onde à région singulière u et à l'onde statistique continue Ψ , la formule du guidage (19) va permettre

de déduire les trajectoires du corpuscule de la seule connaissance de l'onde Ψ . On peut donc être tenté de ne plus parler de l'onde u et de considérer le corpuscule comme un point matériel dont on postulerait l'existence et dont le mouvement serait, par hypothèse, déterminé à partir de la phase de l'onde continue Ψ par la formule du guidage.

C'est cette forme tronquée, dégénérée, de la théorie de la double solution que je me suis malheureusement contenté de présenter au Conseil Solvay d'octobre 1927 sous le nom de « théorie de l'onde-pilote ». Sous cette forme, mon interprétation coïncidait avec une tentative faite vers la même époque par M. Madelung et souvent appelée « l'interprétation hydrodynamique de Madelung ».

Il ne semble pas que la théorie ainsi tronquée soit acceptable. S'il existe, comme le suppose la théorie de la double solution, un phénomène ondulatoire objectif représenté par une onde u à région singulière dont la propagation est modifiée par l'action de champs extérieurs et par la présence d'obstacles (interférences et diffraction), on peut concevoir que tout se passe comme si la trajectoire du corpuscule, qui lui est en réalité imposée par la propagation de l'onde u , était déterminée par la phase de l'onde Ψ . Mais il est impossible de supposer que ce soit l'onde Ψ qui régit le mouvement du corpuscule parce que cette onde Ψ n'est qu'une représentation de probabilité à caractère fictif et subjectif.

Nous aurons à revenir plusieurs fois sur cette importante question. Nous verrons notamment que, dans son Mémoire de janvier 1952, M. David Bohm a repris la théorie de l'onde-pilote en admettant que l'onde Ψ est une « réalité physique ». Ce point de vue me paraît inadmissible, même quand il s'agit de l'onde Ψ normée de la Mécanique ondulatoire pour un seul corpuscule et à plus forte raison quand il s'agit de l'onde Ψ d'un système de corpuscules dans l'espace de configuration.

Nous verrons néanmoins plus tard (chap. XVII) que, dans le cas d'un corpuscule, la partie extérieure de l'onde u est probablement (tout au moins dans un grand nombre de cas) proportionnelle à l'onde Ψ normée correspondante avec un coefficient de proportionnalité parfaitement déterminée. Ceci permet d'établir une certaine relation entre le point de vue de la double solution et celui de M. Bohm. Mais, bien entendu, cette relation ne subsiste pas dans le cas de l'onde Ψ d'un système dans l'espace de configuration. Nous approfondirons tous ces points ultérieurement.

9. Étude du cas général des champs non permanents. — Pour traiter le cas général des champs non permanents, nous partirons encore de

l'équation relativiste de propagation à un seul Ψ (valable pour les particules de spin nul). Pour un corpuscule de charge électrique ε se déplaçant dans un champ électromagnétique qui dérive du potentiel scalaire $V(x, y, z, t)$ et du potentiel vecteur $\mathbf{A}(x, y, z, t)$, nous avons trouvé [formule (66) du chapitre III] l'équation de propagation suivante :

$$(31) \quad \square \Psi - \frac{4\pi i}{h} \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{4\pi i}{h} \sum_{x, y, z} \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_{,x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{4\pi^2}{c^2} \left[m_0^2 c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} (V^2 - \Lambda^2) \right] \Psi = 0.$$

Nous allons toujours supposer que le corpuscule envisagé commence par se déplacer dans une région R_0 de l'espace où le champ est nul et où l'onde u a la forme d'un train d'ondes limité dont la phase a presque partout la forme $\varphi = Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$. Puis le train d'ondes pénètre dans une région R où il existe le champ électromagnétique considéré. Nous cherchons toujours à représenter dans R la solution u sous la forme

$$u = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

où f et φ sont réels et où f comporte une très petite région singulière mobile. En substituant cette forme dans l'équation (31), nous trouvons les deux équations (valables en dehors de la région singulière)

$$(32) \quad \begin{cases} (J) & \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_{,x} \right)^2 = m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square f}{f}, \\ (C) & \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial f}{\partial t} - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_{,x} \right) \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} f \square \varphi. \end{cases}$$

Si le dernier terme de (J) est négligeable, l'Optique géométrique est valable et φ coïncide avec la fonction de Jacobi S de la Dynamique relativiste des champs non permanents. L'écart à partir de l'ancienne Mécanique est toujours lié à la présence du terme $\frac{\square f}{f}$.

Dans l'ancienne Dynamique, on devait distinguer, en présence du potentiel-vecteur \mathbf{A} , la quantité de mouvement totale (moment de Lagrange)

$$(33) \quad \mathbf{p} = -\text{grad } S = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

et la quantité de mouvement *cinétique*

$$(34) \quad \mathbf{g} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \varepsilon V \right) \mathbf{v} \quad (1),$$

(1) Car $W = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \varepsilon V$.

colinéaire à \mathbf{v} . On est donc amené à poser

$$(35) \quad \mathbf{g} = - \left[\mathbf{grad} S + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right].$$

Si l'on reprend la démonstration de la formule du guidage en partant de la formule (32) (C), on trouve pour la vitesse d'ensemble de la région singulière

$$(36) \quad \mathbf{v} = - \frac{c^2 \left(\mathbf{grad} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V} = \frac{c^2 \mathbf{g}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}.$$

Cette formule correspond exactement à celle que l'on obtient à partir de (34) et (35) en extrapolant la théorie de Jacobi en dehors du domaine de l'Optique géométrique et en remplaçant S par φ .

La formule (19) valable pour les champs permanents est évidemment un cas particulier de (36). A l'approximation newtonienne, on peut poser $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \simeq m_0 c^2$ et l'on trouve

$$(37) \quad \mathbf{v} = - \frac{1}{m} \left(\mathbf{grad} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right) = \frac{1}{m} \mathbf{g}.$$

Il est de nouveau facile d'introduire ici l'onde continue Ψ avec sa signification statistique. Il suffit encore de considérer d'abord une infinité de corpuscules identiques qui décriraient toutes les trajectoires définies par la formule du guidage à partir de la fonction $\varphi(x, y, z, t)$ et qui formeraient une sorte de fluide en mouvement.

L'équation de continuité prendrait la forme

$$(38) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \frac{\rho c^2 \mathbf{g}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V} = 0.$$

Posons $\rho' = \frac{\rho}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}$, tenons compte de la relation entre \mathbf{g} et $\mathbf{grad} \varphi$

et de la relation de Lorentz entre les potentiels $\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \mathbf{A} = 0$. Il vient

$$(39) \quad \mathbf{g} \frac{\partial \log \rho'}{\partial n} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial \log \rho'}{\partial t} = -\square \varphi,$$

où \mathbf{n} définit en chaque point la direction du mouvement.

Comme précédemment, nous allons chercher à associer l'onde continue Ψ à ce fluide statistique en mouvement. Dans la région R_0 , celle-ci doit être un train d'ondes limité assimilable dans presque toute son étendue à une onde plane monochromatique de phase $\varphi = Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$. Dans la région R , en vertu du principe de la double solution, elle devra

s'écrire

$$(40) \quad \Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}.$$

En introduisant la forme (40) dans l'équation (31), la séparation des termes réels et des termes imaginaires fournit deux relations, savoir

$$(41) \quad \begin{cases} (J') & \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_x \right)^2 = m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square a}{a}, \\ (C') & \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial a}{\partial t} - \sum_{x, y, z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_x \right) \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{2} a \square \varphi. \end{cases}$$

La comparaison de l'équation (J') avec l'équation (J) de la formule (32) donne

$$(42) \quad \frac{\square f}{f} = \frac{\square a}{a}.$$

relation valable partout sauf dans la région singulière.

L'équation (C') peut s'écrire (n étant compté dans la direction de \mathbf{v})

$$(43) \quad g \frac{\partial \log a^2}{\partial n} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial \log a^2}{\partial t} = -\square \varphi.$$

En comparant avec (39), nous voyons que, si l'on suit le mouvement des corpuscules, le rapport $\frac{\partial \varphi}{a^2}$ reste constant. Puisque dans R_0 où $V = 0$, on a $\rho = K a^2$, on en déduit que dans R ,

$$(44) \quad \varphi(x, y, z, t) = K a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right).$$

A l'approximation newtonienne où $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \simeq m_0 c^2$, on pourra écrire, si l'on a normé la fonction Ψ ,

$$(45) \quad \varphi(x, y, z, t) = a^2 = |\Psi|^2.$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait qu'un seul corpuscule et admettons que, dans la région R_0 , nous puissions considérer toutes les positions du corpuscule dans le train d'ondes Ψ initial comme également probables. Le nuage de corpuscules considéré plus haut ne représentera plus que l'ensemble des mouvements possibles du corpuscule unique correspondant à la fonction de phase $\varphi(x, y, z, t)$ supposée connue. On en conclura, comme précédemment, qu'à l'approximation newtonienne, l'intensité $a^2 = |\Psi|^2$ de l'onde Ψ normée doit donner en valeur absolue la probabilité de trouver le corpuscule au point x, y, z de la région R à l'instant t . Sous réserve des critiques déjà signalées que l'on peut adresser à ce genre de démonstration, nous retrouvons ainsi la signification habituellement admise pour $|\Psi|^2$.

CHAPITRE X.

LA DYNAMIQUE DU CORPUSCULE DANS LA THÉORIE CAUSALE.

1. **Équations de Lagrange et de Hamilton.** — Si nous regardons l'équation (J) obtenue au Chapitre précédent [formule (32)], nous voyons qu'on peut lui donner l'aspect habituel de l'équation de Jacobi relativiste en l'écrivant

$$(1) \quad c^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2 = M_0^2 c^2,$$

à condition d'attribuer au corpuscule une *masse propre variable*,

$$(2) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\square f}{f} \right)} = \sqrt{m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\square a}{a} \right)}$$

qui est fonction de la position du corpuscule et du temps. Elle s'exprime à l'aide des deux quantités égales $\left(\frac{\square f}{f} \right)$ ou $\left(\frac{\square a}{a} \right)$ qui doivent être calculées au voisinage immédiat du corpuscule (sur la sphère S précédemment introduite).

Les anciennes Mécaniques négligeaient le second terme sous le radical, ce qui revenait à supposer h infiniment petit.

Cela posé, nous allons pouvoir faire découler le mouvement du corpuscule du principe de Hamilton et retrouver les équations de Lagrange de la Dynamique relativiste à condition d'y faire figurer la masse propre variable M_0 . Nous définirons donc la fonction de Lagrange en posant

$$(3) \quad \mathcal{L} = - M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - \varepsilon V + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

et le principe d'action stationnaire de Hamilton s'écrira

$$(4) \quad \delta \int_0^t \mathcal{L} dt = 0.$$

On est alors conduit, comme de coutume, aux équations de Lagrange,

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \dots$$

et l'on introduit les moments de Lagrange par les définitions usuelles

$$(6) \quad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\varepsilon}{c} A_x, \quad \dots$$

On désigne toujours sous le nom d'énergie la grandeur suivante :

$$(7) \quad W = \sum_{x,y,z} v_x p_x - \mathcal{L} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \varepsilon V$$

et l'on vérifie aisément qu'elle reste constante dans un champ permanent. On vérifie aussi qu'en posant

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = W, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p_x, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = p_y, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = p_z;$$

on retrouve pour φ l'équation de Jacobi généralisée,

$$(9) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2 = M_0 c^2.$$

D'ailleurs, en combinant les expressions (6), (7) et (8), on retrouve aisément la formule du guidage.

On voit donc que, quand on connaît la fonction u (ou la fonction Ψ), la théorie d'Hamilton-Lagrange permet en principe de calculer la forme des trajectoires possibles et le mouvement du corpuscule.

On peut chercher à voir si les équations de cette Dynamique peuvent se mettre sous la forme canonique de Hamilton. L'expression hamiltonienne de l'énergie est ici

$$(10) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = c \sqrt{M_0 c^2 + \sum_{x,y,z} \left(p_x - \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2} + \varepsilon V.$$

Comme dans le cas où la masse propre est constante, on vérifie la validité des équations

$$(11) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

On obtient ensuite

$$(12) \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\partial M_0}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$$

et

$$(13) \quad -\frac{\partial H}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{c^2}{W - \varepsilon V} \left[c^2 M_0 \frac{\partial M_0}{\partial x} + \sum_{x, y, z} \left(p_x - \frac{\varepsilon}{c} A_x \right) \left(-\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] \\ = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\partial M_0}{\partial x} = \frac{dp_x}{dt}.$$

Le second groupe de équations de Hamilton :

$$(14) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

est donc également valable.

2. Formalisme relativiste de la Dynamique précédente. — Il est aisé de transcrire ce qui précède en utilisant le formalisme de la Relativité générale. On écrit alors l'équation d'ondes (1) sous la forme

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} g^{kl} \frac{\partial \Psi}{\partial x^l} \right] - \frac{4\pi i}{h} P^k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_0^2 c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} P^2 \right) \Psi = 0,$$

où, les g_{ik} étant les coefficients classiques de la métrique d'espace-temps, les g^{ik} sont les composantes contravariantes correspondantes et g le déterminant des g_{ik} . Les P^k sont les composantes du « potentiel d'Univers » égales à A_x, A_y, A_z et V et l'on a

$$P^2 = P_k P^k = V^2 - A^2.$$

Quant à l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} \right]$, il est la généralisation du dalembertien :

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Si l'on pose

$$(16) \quad \Psi = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

avec α et φ réels, en adoptant la définition (2) de M_0 , on trouvera par substitution de (16) dans (15)

$$(17) \quad \begin{cases} (J) & g^{kl} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^l} - \varepsilon P_l \right) = M_0^2 c^2, \\ (C) & \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\sqrt{-g} g^{kl} \alpha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^l} - \varepsilon P_l \right) \right] = 0. \end{cases}$$

La vitesse d'Univers de composantes $u^l = \frac{dx^l}{ds}$ sera donnée par la

formule

$$(18) \quad M_0 c u^l = g^{kl} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right)$$

qui est ici l'expression de la formule de guidage. Bien entendu, on a $u^l u_l = 1$.

L'équation (C) exprime que le vecteur d'Univers dont les composantes covariantes sont $\alpha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right)$ a une divergence nulle. Nous pouvons donc supposer que ce vecteur est proportionnel au quadri-vecteur « densité-courant » $C^l = \rho_0 u^l$ du nuage de corpuscules précédemment envisagé et nous écrirons

$$(19) \quad C^l = \rho_0 u^l = K g^{kl} \alpha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right),$$

ce qui deviendra en raison de (18)

$$(20) \quad \rho_0 = K M_0 c \alpha^2.$$

Le nombre des particules par unité de volume dans le nuage est donné par la quatrième composante du quadri-vecteur, C^l , soit d'après (17), (19) et (20),

$$(21) \quad \rho = C^4 = K M_0 c \alpha^2 u^4 = K \alpha^2 g^{4k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right).$$

S'il n'y a pas de champ gravifique on peut donner aux g_{ik} leurs valeurs galiléennes bien connues ($g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -1$, $g_{44}^{(0)} = 1$ et $g_{ik}^{(0)} = 0$ pour $i \neq k$). L'on retombe alors sur l'ensemble des formules obtenues précédemment.

On peut encore remarquer qu'en l'absence de champs électromagnétiques et gravifiques, le principe de moindre action va s'écrire ici

$$(22) \quad \delta \int M_0 c u_i dx^i = c \delta \int M_0 ds = 0,$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne d'Univers et la variation δ n'affectant pas les points extrêmes de cette ligne,

L'espace-temps étant alors euclidien, nous poserons $d\tau = \frac{M_0}{m_0} ds$, d'où

$$(23) \quad d\tau^2 = \frac{M_0^2}{m_0^2} ds^2 = \frac{M_0^2}{m_0^2} g_{ik}^{(0)} dx^i dx^k = \gamma_{ik} dx^i dx^k,$$

avec la définition

$$(24) \quad \gamma_{ik} = \frac{M_0^2}{m_0^2} g_{ik}^{(0)} = \left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 m_0^2 c^2} \frac{\square}{a} \right) g_{ik}^{(0)} = \left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 m_0^2 c^2} \frac{\square f}{f} \right) g_{ik}^{(0)},$$

où les $g_{ik}^{(0)}$ sont les valeurs galiléennes de g_{ik} rappelées plus haut.

Ainsi, même si le corpuscule n'est soumis à aucun champ gravifique ou électromagnétique, ses trajectoires possibles, telles qu'elles sont prévues par la théorie de la double solution et définie $\delta \int d\sigma = 0$, sont les mêmes que si l'espace-temps possédait la métrique non euclidienne définie par les γ_{ik} .

En d'autres termes, si des phénomènes d'interférences ou de diffraction provoqués par des conditions aux limites interviennent et donnent à la quantité $\frac{\square a}{a} = \frac{\square f}{f}$ une valeur différente de zéro, tout se passe comme si l'espace-temps possédait pour le corpuscule une métrique non euclidienne définie par les γ_{ik} . Cette remarque est apparentée aux efforts poursuivis par M. Vigier pour relier la théorie de la double solution aux conceptions de la Relativité générale en admettant que la métrique de l'espace-temps dépend réellement en chaque point de la valeur locale de la fonction u .

3. Le « potentiel quantique » et son interprétation. — Si l'on détermine, à l'aide d'un calcul tout à fait classique en théorie de la Relativité, les géodésiques correspondant à la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$, on trouve qu'elles ont pour équations

$$(25) \quad \frac{d}{ds} (M_0 cu_l) = c \frac{\partial M_0}{\partial x^l} \quad (l = 1, 2, 3, 4).$$

Ces équations nous redonnent exactement pour le corpuscule le mouvement déjà obtenu plus haut.

La forme (25) des équations du mouvement est très instructive parce qu'elle nous montre que, si M_0 était une constante, les composantes $M_0 cu_l$ de la quantité de mouvement seraient constantes en l'absence de champs. Si ces composantes varient en général, c'est que les variations de M_0 sont équivalentes à l'existence d'un « champ quantique » représenté par le second membre des équations (25). Ce champ quantique peut exister, même en l'absence de tout champ du type classique (gravifique ou électromagnétique) : il apparaît dès que les conditions aux limites provoquent l'apparition des phénomènes d'interférences ou de diffraction et rendent non nulle la quantité $\frac{\square f}{f} = \frac{\square a}{a}$ à l'endroit où se trouve le corpuscule. Le champ quantique exprime, en quelque sorte, la réaction de l'onde u , déformée par les obstacles qui s'opposent à sa libre propagation, sur le corpuscule qui lui est incorporé en tant que petite région singulière.

Pour voir les choses plus clairement, nous allons supposer valable l'approximation newtonienne. Elle consiste à négliger les termes en β^2 et, en plus, à considérer le second terme sous le radical dans l'expression de M_0 comme très petit devant le premier, ce qui nous permet d'écrire

$$(26) \quad M_0 \simeq m_0 + \frac{h^2}{8\pi^2 m_0 c^2} \left(\frac{\square f}{f} \right) = m_0 + \frac{h^2}{8\pi^2 m_0 c^2} \left(\frac{\square a}{a} \right),$$

les parenthèses indiquant toujours que les quantités sont calculées à la limite de la région singulière sur la sphère S .

Dès lors, on aura pour les composantes de la quantité de mouvement et pour l'énergie, en l'absence de champ du type classique, les expressions

$$(27) \quad p = m_0 v, \quad W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + Q,$$

avec

$$(28) \quad Q = \frac{h^2}{8\pi^2 m_0} \left(\frac{\square f}{f} \right) = \frac{h^2}{8\pi^2 m_0} \left(\frac{\square a}{a} \right).$$

Comme à l'approximation newtonienne, on peut négliger le terme $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}$ dans $\square a$, on aura aussi l'expression signalée par M. Bohm :

$$(29) \quad Q = - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a} = - \frac{h^2}{16\pi^2 m} \left[\frac{\Delta a^2}{a^2} - \frac{(\text{grad } a^2)^2}{2 a^4} \right],$$

où seul figure a^2 .

Q est le « potentiel quantique » dont le champ quantique est le gradient changé de signe. Les équations de Lagrange prennent alors la forme simple

$$(30) \quad \frac{dp_x}{dt} = - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{dp}{dt} = - \text{grad } Q.$$

Naturellement, s'il existait un champ extérieur agissant sur le corpuscule, il faudrait ajouter dans l'expression (27) de W un terme d'énergie potentielle du type classique dont dériverait un champ au sens ancien du mot, champ qui s'ajouterait au champ quantique-**grad** Q dans le second membre des équations (30).

L'origine physique du potentiel quantique et du champ qui en dérive est maintenant bien claire. Quand il n'y a pas de champs extérieurs du type classique, la quantité $\frac{\square f}{f} = \frac{\square a}{a}$ peut devenir différente de zéro par suite de la présence d'obstacles (en langage mathématique, de conditions aux limites) qui modifient la propagation de l'onde u et font apparaître

des phénomènes du type interférences ou diffraction. La contrainte ainsi subie par le phénomène ondulatoire qui entoure le corpuscule incorporé à l'onde u en tant que petite région singulière réagit alors sur le mouvement de cette région singulière et provoque l'apparition de trajectoires compliquées déterminées par la formule du guidage, trajectoire dont résulteraient les phénomènes d'interférences et de diffraction tels qu'ils sont observés. Tel est le point de vue, certainement très séduisant, de la théorie de la double solution.

Comme je l'avais remarqué, il y a 25 ans, on est ainsi ramené à une très vieille interprétation intuitive des phénomènes de diffraction, celle même qui avait été soutenue autrefois, depuis Newton jusqu'à Biot et Laplace, les partisans de l'ancienne théorie corpusculaire de la lumière. « Si, disaient-ils, la lumière est déviée quand elle passe près du bord d'un écran, c'est que le bord de l'écran exerce sur le corpuscule de lumière une force qui le dévie de sa route normalement rectiligne. » Avec la notion de potentiel quantique, nous pouvons dire d'une façon analogue : « Si la lumière est diffractée par le bord d'un écran, c'est que l'onde u du photon est gênée dans sa propagation par le bord de l'écran et qu'il en résulte une réaction sur le mouvement du photon : cette réaction s'exprime par l'intervention du potentiel quantique et a pour effet de courber la trajectoire du photon ». Cette interprétation, très attrayante par son caractère concret, serait naturellement aussi valable pour la diffraction d'un corpuscule autre qu'un photon, par exemple pour la diffraction d'un électron par le bord d'un écran (phénomène de Börsch).

Il convient d'insister sur le fait que le potentiel quantique apparaît chaque fois que l'on sort du domaine de l'Optique géométrique, c'est-à-dire non seulement lorsque des obstacles placés sur le trajet de l'onde provoquent l'apparition des phénomènes du type interférences ou diffraction, mais aussi lorsque des variations très rapides des champs classiques dans l'espace ne permettent plus de considérer l'Optique géométrique comme valable pour la propagation de l'onde (cas de l'électron dans l'atome).

On doit aussi remarquer que la masse propre variable M_0 et le potentiel quantique qui s'en déduit ne sont pas seulement des fonctions de x , y , z , t , mais aussi des fonctionnelles des conditions aux limites.

Comme nous venons de le voir, le potentiel quantique est contenu dans la variation de la masse propre M_0 et, quand l'approximation est valable, il s'exprime par la grandeur Q de la formule (28) qui s'exprime

à volonté par l'un des deux rapports égaux $\frac{\square f}{f}$ ou $\frac{\square a}{a}$. On peut donc être tenté de définir le potentiel quantique uniquement à partir de a , c'est-à-dire de l'onde continue Ψ . On est ainsi ramené à la théorie de l'onde-pilote que j'avais exposée au Conseil Solvay de 1927 et que M. Bohm a reprise dans son article de 1952.

Mais nous le savons, ce point de vue ne paraît guère acceptable : si l'on veut revenir à une théorie causale, il faudrait, pour pouvoir définir le potentiel quantique par $\frac{\square a}{a}$, attribuer à l'onde Ψ une réalité physique comme M. Bohm a tenté de le faire et nous avons vu que cela semble impossible. La réaction de l'onde sur le corpuscule représentée analytiquement par le potentiel quantique ne peut pas provenir réellement de l'onde Ψ qui est fictive : elle doit provenir de l'onde u représentant le phénomène physique de nature ondulatoire auquel, dans la conception de la double solution, le corpuscule est incorporé en tant que région singulière. La véritable expression physique du potentiel quantique doit donc être celle qui fait intervenir $\frac{\square f}{f}$ et non celle qui fait intervenir $\frac{\square a}{a}$. C'est seulement parce que les conditions imposées par l'hypothèse de la double solution conduisent à admettre l'égalité de ces deux rapports qu'on peut avoir l'illusion que le potentiel quantique provient de l'onde Ψ .

Néanmoins, on pourrait trouver un peu étrange cette coïncidence entre les formules de la solution et celles de l'onde-pilote, déjà visible sur la formule du guidage. L'étude que nous ferons plus loin (chap. XVII) de la forme u à l'extérieur de la région singulière jettera beaucoup de lumière sur cette question.

CHAPITRE XI.

QUELQUES CONSÉQUENCES DE LA FORMULE DU GUIDAGE.

1. Les états stationnaires de l'atome d'hydrogène. — Nous voulons étudier quelques conséquences de la formule du guidage et nous commençons par l'étude des états stationnaires de l'atome d'hydrogène en nous bornant à l'approximation newtonienne.

Les états stationnaires de l'atome H sont caractérisés par trois nombres quantiques n, l, m . Le nombre quantique principal n définit l'énergie quantifiée par la formule classique de Bohr, $E_n = -\frac{2\pi m_0 e^4}{n^2 h^2}$, où m_0 est la masse de l'électron; le nombre quantique l définit le carré de la longueur du moment cinétique \mathbf{M} par la formule $M^2 = l(l+1) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2$ enfin le nombre quantique m est lié à la composante z de \mathbf{M} par la formule $M_z = m \frac{h}{2\pi}$. On voit donc que chaque état quantifié (n, l, m) est défini en relation avec l'emploi d'un certain axe Oz . On a entre les trois nombres quantiques les relations $0 \leq l \leq n-1$ et $-l \leq m \leq l$.

La fonction d'onde correspondant à l'état stationnaire (n, l, m) est

$$(1) \quad \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi, t) = F_{nl}(r, \theta) e^{im\varphi} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t},$$

avec F_{nl} réelle. La phase, que j'appelle ici Φ pour éviter la confusion avec l'angle de longitude φ , est $\Phi = E_n t - \frac{h}{2\pi} m \varphi$. La formule du guidage montre que dans l'état (1), la vitesse de l'électron doit être tangente à un parallèle centré sur Oz et qu'elle est égale à

$$(2) \quad v_\varphi = -\frac{1}{m_0} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{m_0 r} \frac{mh}{2\pi} \quad v_r = v_\theta = 0,$$

d'où

$$(3) \quad M = M_z = m_0 r v_\varphi = m \frac{h}{2\pi} \quad (-l \leq m \leq l).$$

Le moment de quantité de mouvement de l'électron autour de Oz est donc un multiple entier de $\frac{h}{2\pi}$, résultat classique. Dans l'état (1), l'électron serait animé d'un mouvement circulaire uniforme autour de Oz (1).

Dans le cas particulier de l'état fondamental, nous avons $n=1$, $l=m=0$, d'où $M^2=M_z=0$. Pas de moment cinétique de l'atome H dans son état fondamental, autre résultat classique de la Mécanique ondulatoire. On trouve alors

$$(4) \quad \mathbf{v} = 0.$$

L'électron serait immobile en un point de l'atome. Ce dernier résultat serait également valable pour tous les états s où $l=m=0$ [et même pour les autres états quand on suppose le Ψ donné par (1) remplacé par l'une des combinaisons linéaires qui font apparaître les fonctions réelles $\sin m\varphi$ ou $\cos m\varphi$ à la place de l'exponentielle imaginaire $e^{im\varphi}$].

Comment l'électron peut-il rester ainsi immobile alors qu'il est soumis à la force coulombienne émanant du noyau? La réponse est aisée à donner si l'on se souvient que, dans la théorie causale, l'électron subit aussi la force quantique dérivant du potentiel quantique : or cette force quantique équilibre exactement la force coulombienne. Vérifions-le pour l'état fondamental de l'atome H pour lequel la fonction d'onde Ψ a la forme

$$(5) \quad \Psi_{100} = C e^{-\frac{r}{r_0}} e^{\frac{2\pi i}{h} E_0 t},$$

où r_0 est le rayon du cercle K dans la théorie primitive de Bohr et est égal à $\frac{h^2}{4\pi^2 m_0 e^2}$. L'amplitude a de Ψ est donc ici

$$(6) \quad a(r) = |C| e^{-\frac{r}{r_0}}$$

et l'on trouve

$$(7) \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial a}{\partial r} \right) = \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{2}{r} \right),$$

(1) L'onde Ψ ayant la forme (1), tous les cercles centrés sur l'origine dans le plan équatorial sont des trajectoires possibles d'après la formule du guidage. Or parmi ces cercles se trouvent les trajectoires circulaires à rayons quantifiés de la théorie primitives de Bohr. Sur ces cercles de Bohr, l'équation $\frac{m_0 v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ doit être vérifiée et, dans la théorie causale, la même équation avec, en plus, au second membre le terme $-\frac{dQ}{dr}$, où Q est le potentiel quantique, doit également être vérifiée. D'où le curieux résultat suivant : les trajectoires circulaires de Bohr sont caractérisées dans le plan équatorial par le fait que le potentiel quantique possède pour cette valeur de r un maximum ou un minimum.

d'où pour le potentiel quantique Q ,

$$(8) \quad Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_0} \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_0 r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{2}{r} \right),$$

m_0 étant toujours la masse de l'électron.

La force quantique est radiale et a pour valeur à cause de la valeur de r_0 ,

$$(9) \quad F_Q = -\frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{h^2}{4\pi^2 m_0 r_0} \frac{1}{r^2} = \frac{e^2}{r^2}.$$

Le potentiel coulombien étant $V = -\frac{e^2}{r}$, la force coulombienne est radiale et égale à

$$(10) \quad F_C = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{e^2}{r^2} = -F_Q,$$

F_C et F_Q sont donc bien égales et opposées et se font équilibre.

Il est aisé de retrouver la valeur de l'énergie quantifiée pour l'état fondamental car on a

$$(11) \quad \begin{aligned} E &= \text{énergie cinétique} + V + Q \\ &= 0 - \frac{e^2}{r} - \frac{h^2}{8\pi^2 m_0 r_0} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{2}{r} \right) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m_0 r_0^2} = -\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2}. \end{aligned}$$

On peut aussi d'ailleurs retrouver immédiatement cette valeur en partant de l'équation de Schrödinger,

$$(12) \quad \Delta \Psi + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \Psi = 0.$$

Puisque dans tout état s on a $\Psi = a(r) e^{\frac{2\pi i}{h} Et}$ avec a réel, on lit tout de suite sur l'équation (12)

$$(13) \quad E = V + Q,$$

ce qui ramène au résultat (11).

Commentons les résultats obtenus qui peuvent paraître étranges à divers points de vue.

Tout d'abord, si dans les états s l'électron est immobile dans l'atome, sa position jointe à celle du noyau définit un axe privilégié, ce qui peut paraître contraire à l'isotropie de l'état fondamental : or cette isotropie prévue par la Mécanique ondulatoire usuelle (car $|\Psi|^2 = e^{-\frac{2r}{r_0}}$ a la symétrie sphérique) est bien vérifiée par l'expérience. De plus, on

conçoit mal comment, dans les états s où l'électron serait immobile ou même dans le cas plus général d'un état donné par (1) où l'électron aurait un mouvement circulaire uniforme le long d'un parallèle, pourrait se réaliser la répartition statistique $|\Psi|^2 = |F_{nl}(r, \theta)|^2$ des probabilités de présence.

A ces objections, on peut tenter de répondre de la façon suivante. D'abord, si dans les états s l'électron est immobile en un point M, la droite OM joignant le noyau à cette position pourra être orientée d'une façon quelconque dans l'espace de sorte que pour un ensemble d'atomes dans l'état s , il y aura bien une répartition statistique à symétrie sphérique autour du noyau et c'est cette répartition qui se révélera en général dans l'expérience. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que dans la théorie causale comme dans l'interprétation usuelle le moment de quantité de mouvement des états s est nul, contrairement à ce qui avait lieu dans la théorie primitive de Bohr, de sorte que les expériences qui paraissent prouver la nullité du moment cinétique des états s ne sont pas en contradiction avec la théorie causale.

En ce qui concerne la réalisation de la probabilité de présence $|\Psi|^2$, il importe de remarquer qu'un état stationnaire de la forme (1) doit être considéré comme exceptionnel : en général, la fonction Ψ sera une superposition de tels états de sorte qu'on aura $\Psi = \sum_{nlm} c_{nlm} \Psi_{nlm}$. Alors

la phase Φ aura une forme très compliquée et la loi du guidage imposera au corpuscule un mouvement très complexe, un peu analogue à un mouvement brownien, de sorte que la répartition statistique des positions possibles représentée par $|\Psi|^2$ paraît pouvoir se trouver ainsi réalisée. Cependant, comme l'a remarqué M. Takabayasi, le mouvement très compliqué du corpuscule obéissant à une loi rigoureuse, la formule du guidage, n'est pas entièrement comparable à un mouvement aléatoire comme le mouvement brownien. On est ainsi amené à penser que la justification de la probabilité de présence en $|\Psi|^2$, analogue au théorème ergodique de la Mécanique statistique classique, exigera l'introduction de considérations assez délicates. Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre XIII consacré à la justification, dans le cas général en théorie causale, de la signification statistique attribuée à $|\Psi|^2$.

Nous ferons cependant dès à présent une remarque intéressante à ce sujet. Soit un atome H qui se trouve dans un état s de fonction d'onde Ψ_{n00} et où l'électron est immobile. La plus petite perturbation extérieure donnera au Ψ la forme $\Psi_{n00} + \delta\Psi$ et la présence de $\delta\Psi$ dans cette expression, en modifiant légèrement la phase, imposera à l'électron

d'après la formule du guidage un mouvement violent à caractère brownien. Si l'on admet que la probabilité de présence est donnée par $|\Psi|^2$, on aura dans l'état perturbé une répartition statistique des positions de l'électron donnée par $|\Psi_{n00} + \delta\Psi|^2$ qui sera extrêmement voisine de celle donnée par $|\Psi_{n00}|^2$. On se rend compte alors que, l'état Ψ_{n00} étant dans la réalité toujours soumis à de légères perturbations extérieures, l'électron n'y est pas en général réellement au repos, mais au contraire animé presque continuellement de mouvements violents dus aux petites perturbations et l'on comprend mieux comment peut se réaliser une probabilité de présence très sensiblement donnée par $|\Psi_{n00}|^2$. Nous retrouverons des considérations de ce genre au chapitre XIII.

2. Les interférences au voisinage d'un miroir (Franges de Wiener).

— Dans mon livre, *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire* [2], j'avais étudié le mouvement que devaient avoir les photons au voisinage d'un miroir d'après la théorie causale. Je vais reprendre cette théorie en me plaçant dans le cas d'un corpuscule de masse quelconque ($m_0 \neq 0$) obéissant à l'équation de Klein-Gordon.

a. Miroir parfaitement réfléchissant. — Soit une onde Ψ plane monochromatique qui tombe sous un angle d'incidence θ sur un miroir parfaitement réfléchissant.

Avant d'entrer dans la région d'interférences où apparaissent les franges de Wiener, l'onde plane a la forme initiale

$$(14) \quad \Psi_1 \sim e^{2\pi i \nu t} e^{-2\pi i \frac{\nu}{V} (x \sin \theta + z \cos \theta)}$$

Dans la région d'interférences, il y a superposition de l'onde incidente Ψ_1 et de l'onde réfléchie Ψ_2 ,

$$(15) \quad \Psi_2 \sim e^{2\pi i \nu t} e^{-2\pi i \frac{\nu}{V} (x \sin \theta - z \cos \theta)} e^{i\delta},$$

δ étant la différence de phase qui peut s'introduire lors de la réflexion. On a donc dans la région d'interférences,

$$(16) \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \sqrt{2} \cos \left(2\pi \frac{\nu}{V} z \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right) e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{x}{V} \sin \theta \right)} e^{i \frac{\delta}{2}}.$$

L'onde Ψ est normée, ce qui introduit le facteur $\sqrt{2}$. On a donc

$$(17) \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \cos \left(2\pi \frac{\nu}{V} z \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right), \\ \tau = h \nu \left(t - \frac{x}{V} \sin \theta \right) + \text{const.} \end{cases}$$

On a donc dans la région des franges de Wiener d'après la formule du guidage,

$$(18) \quad \mathbf{v} = -c^2 \frac{\text{grad } \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}},$$

d'où

$$(19) \quad v_Y = v_Z = 0, \quad v_X = -c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{c^2}{V} \sin \theta = v_0 \sin \theta,$$

$v_0 = \frac{c^2}{V}$ étant la vitesse du corpuscule dans l'onde plane incidente.

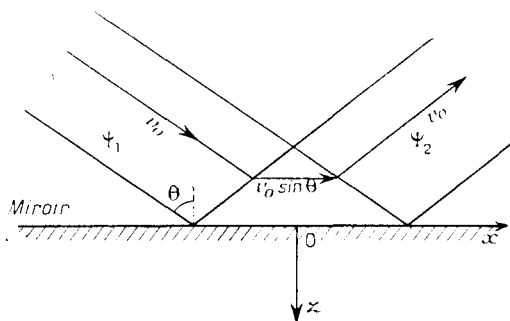


Fig. 7.

Le corpuscule, qui possède d'abord un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v_0 dans la direction d'incidence, traverse la région d'interférences en glissant parallèlement au miroir avec la vitesse $v_0 \sin \theta$, puis repart d'un mouvement rectiligne dans la direction de réflexion avec la vitesse v_0 . Mais il convient de remarquer qu'à l'entrée et à la sortie de la région d'interférences, le corpuscule a un mouvement compliqué car, sur les bords du faisceau incident et du faisceau réfléchi qui sont limités latéralement, la représentation de ces faisceaux par une onde plane monochromatique n'est plus exacte.

La quantité

$$(20) \quad a^2 = |\Psi|^2 = 2 \cos^2 \left(2\pi \frac{\nu}{V} z \cos \theta + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \cos \left(4\pi \frac{\nu}{V} z \cos \theta + \delta \right)$$

donne la probabilité de présence des corpuscules dans les différentes couches de cote z . On voit que statistiquement les corpuscules se répartissent en nappes distantes de $\frac{V}{2\nu} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{2 \cos \theta}$ où la densité est maximum, séparées par des nappes de même équidistance où la densité est nulle. On retrouve bien les franges classiques de Wiener.

b. Miroir imparfaitement réfléchissant. — Supposons maintenant que nous avons affaire à un miroir imparfaitement réfléchissant dont le coefficient de réflexion soit η avec $0 \leq \eta < 1$.

On aura alors pour l'onde Ψ dans la région d'interférences,

$$(21) \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \sim e^{2\pi i \nu t} e^{-2\pi i \frac{\nu}{V} x \sin \theta} \left(e^{-2\pi i \frac{\nu}{V} z \cos \theta} + \eta e^{2\pi i \frac{\nu}{V} z \cos \theta} e^{i\delta} \right).$$

Le calcul de $\alpha^2 = |\Psi|^2$ donne aisément

$$(22) \quad \alpha^2 = \text{const.} \left[1 + \eta^2 + 2\eta \left(\cos 4\pi \frac{\nu}{V} z \cos \theta + \delta \right) \right].$$

Nous retrouvons encore des franges brillantes pour les valeurs de z qui rendent le cosinus égal à 1 et des franges sombres intercalées pour les valeurs de z qui rendent le cosinus égal à -1 ; mais ici les franges obscures ne sont pas noires car l'intensité y est égale à $(1 - \eta)^2 > 0$.

Pour calculer la dérivée de la phase $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$ par rapport à l'une quelconque q des variables d'espace, nous partirons de la formule

$$(23) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{h}{4\pi i} \frac{1}{\alpha^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial q} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial q} \right)$$

qui se vérifie immédiatement à partir de l'expression $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ avec a et φ réels. La formule du guidage nous donne alors

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = -c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{c^2}{V} \sin \theta = v_0 \sin \theta, \quad v_y = 0; \\ v_z = -c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{c^2}{V} \cos \theta \frac{1 - \eta^2}{\alpha^2} = v_0 \cos \theta \frac{1 - \eta^2}{\alpha^2} > 0. \end{array} \right.$$

Les corpuscules descendent donc vers le miroir dans la région d'interférence, ce qui fait que certains d'entre eux parviennent à atteindre le miroir semi-transparent et à passer dans le faisceau transmis tandis que d'autres n'atteindront pas le miroir et passeront dans le faisceau réfléchi. La proportion des uns et des autres dépendra naturellement de la valeur de η .

c. Apparition de vitesses supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide. — En conséquence, en apparence surprenante, des formules (24), c'est qu'en certains points du champ d'interférences la vitesse du corpuscule peut être supérieure à c .

On trouve en effet

$$(25) \quad v^2 = v_x^2 + v_z^2 = \frac{c^4}{V^2} \left[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \frac{(1 - \eta^2)^2}{a^4} \right].$$

Or dans les franges obscures,

$$\cos \left(4\pi \frac{V}{\lambda} z \cos \theta + \delta \right) = -1 \quad \text{et} \quad a^2 = (1 - \eta)^2,$$

d'où

$$(26) \quad v^2 = \frac{c^4}{V^2} \left[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \frac{(1 + \eta)^2}{(1 - \eta)^2} \right],$$

quantité qui peut être supérieure à c^2 si $\frac{c^4}{V^2} = v_a^2$ est suffisamment voisin de c^2 et si $\frac{1 + \eta}{1 - \eta}$, toujours supérieur à 1, est suffisamment grand.

Pour mieux discuter la question, envisageons le cas simple de l'incidence normale où $\cos \theta = 1$ et $\sin \theta = 0$. Si le miroir est parfaitement réfléchissant ($\eta = 1$), nous avons dans ce cas $v_x = v_y = v_z = 0$: les corpuscules sont immobiles dans les franges de Wiener. On pourrait déjà s'étonner de ce résultat car on pourrait se demander comment les corpuscules, s'ils sont immobiles dans la région d'interférences, peuvent arriver à se placer dans les franges brillantes. Cette objection peut être écartée en remarquant une fois de plus que l'onde plane monochromatique sur laquelle nous avons raisonné n'existe pas dans la réalité et qu'il faut toujours envisager des trains d'ondes limités ayant un front avant et un front arrière. Pour cette raison, notre théorie décrit seulement l'état de régime réalisé pendant que le train d'ondes Ψ frappe le miroir et non l'état transitoire qui existe quand le front d'ondes vient frapper le miroir, état où les corpuscules ont un mouvement compliqué au cours duquel ils viennent se placer dans les franges brillantes.

Toujours dans le cas de l'incidence normale, revenons à l'étude du miroir imparfaitement réfléchissant. Nous avons alors

$$(27) \quad v_x = v_y = 0, \quad v_z = \frac{c^2}{V} \frac{1 - \eta^2}{a^2}, \quad v^2 = \frac{c^4}{V^2} \left(\frac{1 - \eta^2}{a^2} \right)^2$$

et v sera supérieure à c si

$$(28) \quad \frac{c^2}{V^2} \left(\frac{1 - \eta^2}{a^2} \right)^2 > 1.$$

Si nous posons $u = 4\pi \frac{V}{\lambda} z + \delta$, ce qui donne $a^2 = 1 + \eta^2 + 2\eta \cos u$, la condition (28) s'écrit

$$(29) \quad 1 - \eta^2 > (1 + \eta^2 + 2\eta \cos u) \frac{V}{c}.$$

On voit aisément que cette condition peut aussi s'écrire

$$(30) \quad \frac{\frac{c}{V}(1 - \eta^2) - (1 + \eta^2)}{2\eta} > \cos u \geq -1.$$

Pour η assez voisin de 1, il y a donc une petite région au voisinage de chaque frange obscure où, la condition précédente étant vérifiée, on a $v > c$. Cette région se rétrécit quand η augmente et elle se réduit à la frange noire elle-même dans le cas du miroir parfaitement réfléchissant ($\eta = 1$). Dans ce dernier cas, il ne pourrait donc y avoir de vitesses supérieures à c que sur les franges noires, mais comme alors il n'y a pas de corpuscules dans les franges noires, il n'apparaît en fait aucune vitesse supérieure à c : cette remarque permet de rétablir la continuité entre les formules obtenues ici et celles données en α pour le miroir parfaitement réfléchissant.

Quand il y a des couches de la région d'interférences où les inégalités (30) sont satisfaites, la vitesse du corpuscule est, d'après la formule du guidage, supérieure à c dans ces couches. Or, nous savons que nous devons avoir

$$(31) \quad W = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = h\nu,$$

M_0 étant la masse propre variable du corpuscule dans le champ d'interférences. Comme $h\nu$ est une grandeur réelle et que $\sqrt{1 - \beta^2}$ devient imaginaire pour $v > c$, on peut en conclure que, partout où v est supérieure à c , M_0 doit être imaginaire. Nous allons le vérifier en partant de la définition de M_0 ,

$$(32) \quad M_0^2 = m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\square a}{a},$$

qui nous donne ici

$$(33) \quad M_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\Delta a}{a} = m_0^2 c^2 - \frac{h^2}{16\pi^2 a^2} [2a^2 \Delta a^2 - (\text{grad } a^2)^2],$$

comme on le vérifie aisément. Puisque $a^2 = 1 + \eta^2 + 2\eta \cos u$, ceci nous fournit

$$(34) \quad M_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{16\pi^2 a^2} (4\eta^2 k^2 \sin^2 u + 4\eta a^2 k^2 \cos u),$$

avec

$$k = 4\pi \frac{v}{V} = \frac{4\pi}{\lambda}.$$

Or de $\lambda v = V$, $W = h\nu$, $\lambda = \frac{h}{p}$, on tire aisément $\frac{W^2}{c^2 p^2} = \frac{V^2}{c^2}$ et, comme on a $\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2$, on en déduit

$$(35) \quad \frac{16\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 = k^2 \frac{1 - \frac{c^2}{V^2}}{\frac{c^2}{V^2}}.$$

En partant dans (34), on trouve alors

$$(36) \quad M_0^2 = \frac{h^2}{16\pi^2} \frac{k^2}{a^4} \left(4\eta^2 \sin^2 u + 4a^2 \eta \cos u + a^4 \frac{1 - \frac{c^2}{V^2}}{\frac{c^2}{V^2}} \right),$$

M_0 sera donc imaginaire si

$$(37) \quad \eta \sin^2 u + a^2 \cos u + \frac{a^4}{4\eta} \frac{1 - \frac{c^2}{V^2}}{\frac{c^2}{V^2}} < 0.$$

En remplaçant $\sin^2 u$ par $1 - \cos^2 u$ et en développant les expressions de a^2 et de a^4 , il vient

$$(38) \quad \eta \cos^2 u + (1 + \eta^2) \cos u + \eta \frac{c^2}{V^2} + \frac{(1 + \eta^2)^2}{4\eta} \left(1 - \frac{c^2}{V^2} \right) < 0.$$

Or, le polynôme du second degré en $\cos u$ qui forme le premier membre de l'inégalité (38) a les deux racines $\frac{-(1 + \eta^2) \pm \frac{c}{V}(1 - \eta^2)}{2\eta}$. Comme $0 \leq \eta < 1$ et $0 \leq \frac{c}{V} \leq 1$, on trouve que l'inégalité (38) entraîne

$$(39) \quad \frac{\frac{c}{V}(1 - \eta^2) - (1 + \eta^2)}{2\eta} > \cos u \geq -1.$$

On retrouve bien l'inégalité (30). M_0 qui s'annule pour $v = c$ est donc bien imaginaire pour $v > c$.

Nous avons ainsi finalement établi le résultat suivant : pour tout corpuscule obéissant à l'équation de Klein-Gordon, la formule du guidage a pour conséquence qu'au voisinage d'un miroir imparfaitement réfléchissant, la vitesse du corpuscule peut en certains points être supé-

rière à c ⁽¹⁾. Cette conclusion n'est-elle pas en contradiction formelle avec la théorie de la Relativité ?

Il faut d'abord remarquer que, si la Dynamique relativiste rejette la possibilité d'une vitesse corpusculaire supérieure à c , c'est parce qu'elle admet la formule

$$(40) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

où m_0 est une constante. Il en résulte que, si v tend vers c , W tend vers l'infini : il faudrait donc fournir une énergie infinie au corpuscule pour lui communiquer la vitesse c . De plus, pour $v > c$, W serait imaginaire.

Mais la théorie causale introduit une réaction de l'onde sur le corpuscule inconnue de l'ancienne Dynamique relativiste. Cette réaction est traduite dans les équations du mouvement par l'intervention du potentiel quantique Q et nous avons montré qu'il en résulte pour le corpuscule une dynamique où la masse propre M_0 est en général variable suivant la loi

$$(41) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\square a}{a} \right)}$$

de sorte que l'expression de l'énergie devient

$$(42) \quad W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

L'énergie ne devient donc pas infinie pour $v = c$, ni imaginaire pour $v > c$, puisque, comme nous l'avons montré, M_0 s'annule pour $v = c$ et devient imaginaire en même temps que $\sqrt{1 - \beta^2}$ pour $v > c$. Il semble donc que la raison qui, en Dynamique relativiste habituelle, font écarter la possibilité d'une vitesse v supérieure à c n'existe plus ici.

Mais, dira-t-on, les analyses d'Einstein sur les notions d'espace et de temps et sur la mesure des longueurs et des durées, qui ont été à la base

(1) La théorie que nous venons de développer, étant seulement valable pour des particules de spin 0, n'est pas applicable aux photons et aux véritables franges optiques de Wiener. La Mécanique ondulatoire du photon que nous avons exposée dans d'autres ouvrages montre clairement que les photons sont des particules de spin 1 dont les équations d'onde sont les équations de Maxwell. Il résulte donc de ce qui sera dit plus loin, notamment dans l'appendice, que le mouvement des photons doit être défini non pas par la formule du guidage telle qu'elle a été écrite ci-dessus, mais à l'aide des « lignes de courants » de l'onde électromagnétique associée. Il est équivalent de dire que le mouvement des photons doit être défini à l'aide du vecteur de Pointing. En reprenant la théorie précédente de cette manière, il me paraît certain qu'on ne verrait plus apparaître de vitesses supérieures à c .

du développement de la théorie de la Relativité, reposent essentiellement sur le postulat qu'aucun signal ne peut être transmis avec une vitesse v supérieure à la vitesse c de la lumière dans le vide. Le fait qu'un corpuscule transportant de l'énergie pourrait dans certains cas se déplacer avec une vitesse plus grande que c ne va-t-il pas à l'encontre de ce postulat fondamental?

Il semble que l'on puisse aussi lever cette objection. Les vitesses corpusculaires supérieures à c semblent ne pouvoir apparaître dans la théorie causale qu'en certaines régions des champs d'interférences. Or, l'apparition des interférences est provoquée par des dispositifs expérimentaux bien définis avec conditions initiales et conditions aux limites bien déterminées (dans le cas des franges de Wiener, train d'ondes Ψ incident presque monochromatique et conditions aux limites sur le miroir). Il est alors impossible de mettre en évidence la présence du corpuscule en deux points voisins M et M' du champ d'interférences à des instants successifs t et t' de façon à lui faire jouer le rôle d'un signal de vitesse supérieure à c . Il faudrait pour cela observer la localisation du corpuscule en M et M' aux temps t et t' et ceci exigerait un autre dispositif expérimental incompatible avec l'obtention des franges de Wiener. On remarquera l'analogie de cet argument avec certains raisonnements de M. Bohr, mais ici on l'utilise dans le cadre de l'interprétation causale sans renoncer à la localisation du corpuscule.

Il faut bien noter que ce qui change le mouvement du corpuscule quand on modifie le dispositif expérimental c'est, du point de vue de la théorie causale, que le nouveau dispositif introduit de nouvelles conditions aux limites pour les ondes u , seules réalités physiques, d'où résulte la nécessité d'une modification corrélative de l'onde Ψ fictive que l'on doit associer à l'onde u . Bref, les vitesses corpusculaires supérieures à c prévues dans certains cas par la formule du guidage ne semblent pas pouvoir être mises en évidence et par suite ne doivent pas pouvoir servir à l'emploi de signaux de vitesse supérieure à c .

Dans la région de l'espace-temps où $v > c$, la ligne d'Univers du corpuscule est du genre espace, sa fréquence et son temps propre sont imaginaires, du moins si l'on admet toujours les définitions usuelles, mais la phase propre $\nu_0 t_0$ reste réelle. Cette conception peut paraître étrange, mais l'est-elle plus que celle de M. Feynman d'après laquelle le positon est un électron qui remonte le cours du temps? Il y a d'ailleurs des rapprochements possibles entre cette idée de Feynman et la question que nous étudions ici. En effet, pour que la ligne d'Univers d'un électron puisse rebrousser chemin par rapport au temps,

il faut qu'elle présente soit un point anguleux, soit des éléments du genre espace. Dans les deux cas, l'action et la phase varient toujours dans le même sens le long de la ligne d'Univers ⁽¹⁾.

3. Une objection récente de M. Einstein contre la formule du guidage. — Dans sa contribution récente au livre jubilaire consacré à M. Max Born, M. Einstein, tout en se prononçant toujours pour le rétablissement d'une interprétation causale en Mécanique ondulatoire, a élevé une objection contre la formule du guidage.

Le principe dont part Einstein est que, chaque fois que l'on a affaire à un corps macroscopique, on doit retrouver les images fournies par la Mécanique classique qui donne alors sans aucun doute une description approchée de la réalité. Ceci posé, il envisage le problème suivant. Considérons une particule qui se déplace suivant une droite Ox en venant rebondir sur des miroirs placés normalement à Ox aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = l$. La Mécanique ondulatoire usuelle associe à son mouvement, s'il a une énergie bien déterminée, une onde Ψ stationnaire nulle en $x = 0$ et $x = l$ et de la forme

$$(43) \quad \Psi = a_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}, \quad \text{avec} \quad E_n = \frac{n^2 h^2}{8ml^2},$$

avec n entier. Dans l'interprétation usuelle, cette onde représente la possibilité de deux mouvements de même quantité de mouvement $p = \frac{nh}{2l}$ s'effectuant l'une de droite à gauche, l'autre de gauche à droite, ces deux mouvements ayant la même probabilité. Au point de vue de la Physique macroscopique, *si la particule est macroscopique*, elle a l'un des deux mouvements à l'exclusion de l'autre. L'interprétation usuelle, dit Einstein, représente donc exactement la situation statistique au cours du temps, mais non pas l'état réel instantané de la particule macroscopique. C'est donc une interprétation statistique exacte, mais « incomplète » comme description de la réalité physique.

Tel est le point de vue de M. Einstein qui nous paraît très soutenable. Mais voici maintenant l'objection qu'il en a tirée contre la formule du guidage. Dans la formule (43), la phase φ de l'onde Ψ se réduit à $E_n t$ et est indépendante de x : la formule du guidage nous donne donc

$v = -\frac{1}{m} \text{grad } \varphi = 0$. La particule serait immobile et, si cette particule

(1) Mais toute vitesse supérieure à c disparaîtrait sans doute si l'on définissait systématiquement le guidage par les lignes de courant (voir Appendice).

a une masse macroscopique et constitue une petite bille au sens usuel du mot, nous nous trouvons en contradiction avec la Physique macroscopique qui nous affirme, et certainement avec raison, que la bille doit posséder un mouvement de va-et-vient le long de ox avec rebondissement alternatif sur chacun des deux miroirs. Einstein en conclut que la formule du guidage, elle non plus, ne peut représenter la réalité physique.

Les considérations de M. Einstein sont dans leur ensemble très intéressantes, mais elles appellent d'abord une réserve. On peut, en effet, remarquer que, si la particule est macroscopique, elle est nécessairement formée par un ensemble de nombreux corpuscules élémentaires et que l'onde Ψ est alors associée au centre de gravité du système, ce qui rend l'interprétation plus difficile. Mais, en dehors de cette réserve, on peut, me semble-t-il, trouver deux réponses très suggestives à l'objection d'Einstein contre la formule du guidage.

Une première réponse part de la remarque suivante : pour que la forme adoptée pour l'onde Ψ dans l'exemple d'Einstein puisse être considérée comme valable, il faut que les obstacles limitant le mouvement de la particule et la propagation de son onde associée puissent être considérés comme des miroirs plans pour l'onde Ψ . Or, ces miroirs sont nécessairement formés d'atomes en mouvement thermique et il en résulte que la précision avec laquelle est définie leur surface ne peut être supérieure à une fraction d'unité angström. En s'inspirant d'une théorie développée autrefois par M. Debye pour évaluer l'influence des mouvements thermiques des atomes d'un cristal sur la diffraction des rayons X, on peut voir que la longueur d'onde ne doit pas être supérieure à environ 10^{-10} cm. La validité de l'expression adoptée pour le Ψ exige donc que la condition

$$(44) \quad \lambda = \frac{h}{mv} > 10^{-10} \text{ cm.}$$

soit réalisée. Elle montre que, si la particule a une masse macroscopique (mettons supérieure à 10^{-9} g), la vitesse v doit être sensiblement nulle. Donc pour que l'expression (43) du Ψ puisse être considérée comme valable pour une particule de masse macroscopique, il faut que sa vitesse soit sensiblement nulle et alors la valeur $v=0$ de la vitesse fournie par la formule du guidage est sensiblement exacte. Il semble donc qu'on puisse ainsi écarter l'objection de M. Einstein contre la formule du guidage. Remarquons d'ailleurs que nous rencontrons ici l'idée qu'il faut attribuer une grande importance aux fluctuations possibles des conditions aux limites et nous verrons réapparaître cette

idée quand nous discuterons la justification du sens statistique attribué au $|\Psi|^2$ par la théorie de la double solution ⁽¹⁾.

Passons maintenant à la seconde manière de répondre à l'objection de M. Einstein. Elle part de la remarque que l'onde Ψ d'un corpuscule doit toujours être considérée comme formant un train d'ondes de dimensions limitées. On peut donc, semble-t-il, toujours admettre qu'un train d'ondes Ψ a des dimensions limitées ne pouvant dépasser un certain multiple (d'ailleurs très élevé) de la longueur d'onde. C'est ainsi que dans le cas du photon on sait que le train d'ondes ne peut avoir une longueur supérieure à quelques millions de longueurs d'onde. Une limitation analogue doit être valable pour les autres sortes de corpuscules. Comme, pour une énergie donnée, la longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ diminue quand la

masse augmente, on voit que le train d'ondes associé à une particule d'énergie décelable finira, quand la masse augmente, par avoir une longueur très inférieure à la distance l des miroirs dans l'exemple d'Einstein. Pour une masse suffisamment élevée, il ne sera donc plus possible d'imaginer une onde stationnaire due à la superposition, entre les deux miroirs, de deux ondes se propageant en sens inverse. On devra, au contraire, se représenter un train d'ondes Ψ de petites dimensions venant se réfléchir alternativement sur chacun des deux miroirs et cette image correspondra exactement à l'image macroscopique d'une bille qui oscille le long d'une droite en venant alternativement se réfléchir sur deux murs parallèles. Cette réponse, très intéressante, à l'objection d'Einstein contre la formule du guidage montre, une fois de plus, l'importance du fait que tout train d'ondes a des dimensions limitées.

(1) Notons que, pour les électrons ($m \sim 10^{-27}$ g), v peut atteindre des valeurs très voisines de c et que, pour des molécules ($m \leq 10^{-24}$ g), on peut atteindre des vitesses de l'ordre de 10^6 cm/s = 10 km/s. sans que l'inégalité (44) cesse d'être vérifiée. On peut donc considérer les parois d'une enceinte comme spéculairement bien définies pour l'onde Ψ pour des mouvements d'électrons très rapides ($v \simeq c$) et pour des mouvements des molécules d'un gaz dans les conditions usuelles, ce qui dans les deux cas justifie l'emploi de l'expression (43) de l'onde Ψ .

CHAPITRE XII.

PASSAGE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU CORPUSCULE UNIQUE A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES.

1. **Nature du problème en théorie causale.** — Nous avons vu comment M. Schrödinger était arrivé à construire la Mécanique ondulatoire d'un ensemble de corpuscules en associant au mouvement de ce système la propagation d'une onde dans l'espace de configuration correspondant. On n'obtient d'ailleurs ainsi qu'une théorie essentiellement non relativiste parce qu'elle exprime les interactions entre les corpuscules par des fonctions de leurs distances au même instant et qu'admettre ainsi la propagation instantanée des interactions est contraire au principe relativiste que toute perturbation se propage dans l'espace avec une vitesse finie.

Malgré la grande beauté formelle de la théorie de Schrödinger et les succès remarquables qu'elle a tout de suite remportés, on pouvait lui faire dès l'abord de graves objections.

En premier lieu, aussi bien avec les idées de Bohr qu'avec celles de Schrödinger qui assimilait les corpuscules à des trains d'ondes continus, on ne considère plus les corpuscules comme ponctuels et, par suite, il paraît contradictoire de leur attribuer des coordonnées bien définies : dès lors, il semble injustifié de considérer un espace de configuration formé à l'aide des $3N$ coordonnées des constituants du système.

En second lieu, l'espace de configuration est évidemment un espace abstrait, fictif, sans réalité physique. Considérer l'onde Ψ comme se propageant dans cet espace, c'était nécessairement lui enlever toute réalité physique. Si l'on voulait conserver aux ondes de la Mécanique ondulatoire un sens physique, il fallait, me semblait-il, pouvoir considérer le mouvement des corpuscules, et l'évolution du phénomène ondulatoire qui leur est lié, dans le cadre de l'espace physique à trois dimensions. Or, la méthode de Schrödinger implique nécessairement l'emploi de

l'espace de configuration et ne permet plus de se représenter le phénomène physique constitué par le mouvement des corpuscules dans le cadre de l'espace physique. Sans doute la Mécanique classique se servait-elle souvent, elle aussi, de l'espace de configuration, mais ce n'était pas pour elle une nécessité : elle pouvait raisonner en considérant le mouvement des points matériels du système dans l'espace à trois dimensions et elle n'employait l'espace de configuration que comme un artifice mathématique permettant de présenter plus élégamment ou d'effectuer plus aisément certains calculs. Dès l'apparition des Mémoires de Schrödinger, tout en reconnaissant l'exactitude des résultats obtenus par sa méthode, j'avais trouvé paradoxal le principe même de cette méthode.

Me plaçant au point de vue de la théorie de la double solution, il me paraissait nécessaire de repenser toute la question d'une façon différente. Pour moi, les corpuscules étaient incorporés à un phénomène ondulatoire dont ils constituaient une singularité (je dirais aujourd'hui une petite région singulière). Chacune des régions singulières devait être considérée comme un centre de force influant sur la propagation des phénomènes ondulatoires associés aux autres corpuscules et, par suite, sur le mouvement de ces autres corpuscules. Il doit alors en résulter un mouvement compliqué de l'ensemble des corpuscules-régions singulières. On peut évidemment représenter ce mouvement par le déplacement d'un point figuratif dans l'espace de configuration formé à l'aide des coordonnées x_1, \dots, x_N des N corpuscules : ici, pas de difficulté puisque les corpuscules constitués par de très petites régions singulières presque ponctuelles ont pratiquement à chaque instant une position et des coordonnées bien définies. On pouvait alors penser qu'en définissant dans l'espace de configuration la propagation d'une onde $\Psi(x_1, \dots, x_N, t)$ *purement fictive*, on pourrait faire jouer à la quantité $|\Psi|^2$ le rôle de probabilité de présence du point figuratif aux divers points de l'espace de configuration, ce qui permettrait de rejoindre la théorie de Schrödinger.

Il faut bien se rendre compte que, si cette idée est exacte, la description obtenue à l'aide de la propagation de l'onde continue Ψ dans l'espace de configuration du système est beaucoup moins complète que celle que fournirait la théorie de la double solution en considérant les N ondes u des N corpuscules dans l'espace physique avec leurs régions singulières mobiles. On obtiendrait par cette dernière description une image exacte dans l'espace physique non seulement des N corpuscules, mais aussi des N phénomènes ondulatoires, auxquels ils sont incorporés ;

la méthode de l'espace de configuration ne fournirait, au contraire, que des renseignements statistiques sur le déplacement des N régions singulières en ignorant complètement les phénomènes ondulatoires étendus dont elles sont le centre. Ainsi la méthode de Schrödinger se trouverait justifiée et son succès expliqué, mais en même temps on verrait qu'elle masque, pour ainsi dire, un ensemble de phénomènes ondulatoires beaucoup plus complexes qui se dérouleraient dans l'espace physique à trois dimensions.

Telles étaient les idées qui m'avaient guidé en 1927 lorsque je rédigeais le paragraphe de mon Mémoire sur la double solution qui était consacré à la Mécanique ondulatoire des systèmes. Je vais d'abord reproduire mes raisonnements de 1927, puis j'y ajouterai les résultats de recherches récentes. Je considérerai d'ailleurs toujours, pour simplifier, le cas d'un système formé de deux corpuscules, car le passage du cas de deux corpuscules au cas de N corpuscules n'entraîne aucune difficulté de principe ⁽¹⁾.

2. Raisonnement du Mémoire de 1927. — Considérons deux corpuscules qui constituent chacun une petite région singulière dans leur onde u individuelle et écrivons les deux équations de propagation des ondes u en supposant qu'aucune action extérieure ne s'exerce sur le système

$$(1) \quad \begin{cases} \square u_1 + \frac{4\pi i}{h} \frac{F_{12}}{c^2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_0^2 c^2 - \frac{F_{12}^2}{c^2} \right) u_1 = 0, \\ \square u_2 + \frac{4\pi i}{h} \frac{F_{21}}{c^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_0^2 c^2 - \frac{F_{21}^2}{c^2} \right) u_2 = 0 \end{cases}$$

m_1 et m_2 étant les deux masses propres des corpuscules, F_{12} et F_{21} les potentiels représentant l'action exercée sur chaque corpuscule par la présence de l'autre. Je pose

$$(2) \quad \begin{cases} F_{12} = F[\sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2}], \\ F_{21} = F[\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}]. \end{cases}$$

Ici les coordonnées x, y, z , qui figurent dans les \square , sont les coordonnées courantes de l'espace physique à trois dimensions. Les expressions (2) signifient que la valeur de F_{12} au point occupé par le premier corpuscule est la même que celle de F_{21} au point occupé par le second corpuscule : si r désigne la distance des deux corpuscules, cette valeur commune est $F(r)$, ce qui est en accord avec le principe classique de

(1) Voir cependant la fin du paragraphe 4.

l'action et de la réaction. Mais on doit remarquer que F_{12} et F_{21} sont définis à chaque instant en tout point de l'espace physique. La propagation dans l'espace de chacune des deux ondes u_1 et u_2 se trouve donc dépendre en chaque point de la valeur en ce point à l'instant considéré du potentiel correspondant à la position simultanée de la région singulière dans l'autre onde.

Il faut admettre l'existence pour chacune des deux équations (1) d'une solution comportant une région singulière mobile et, pour comparer avec la théorie de Schrödinger, nous devons toujours nous contenter de l'approximation newtonienne.

En Mécanique classique, il existe pour l'ensemble des deux corpuscules une fonction de Jacobi $S(x_1, \dots, z_N, t)$ telle que

$$(3) \quad m_1 v_{1x} = - \frac{\partial S}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad m_2 v_{2z} = - \frac{\partial S}{\partial z_2}.$$

Pouvons-nous définir une fonction $\varphi(x_1, \dots, z_N, t)$ qui jouera le rôle de S ?

Pour un instant, nous allons supposer que le mouvement du second corpuscule nous est connu : alors le mouvement du premier s'opérera dans un champ qui sera une fonction connue de x, y, z, t , cas que nous avons déjà étudié. Nous savons alors que nous pouvons associer à l'ensemble des mouvements possibles du premier corpuscule appartenant à une même « classe » la propagation dans l'espace à trois dimensions d'une onde continue

$$\Psi_1 = a_1(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi}{h} \varphi_1(x, y, z, t)}.$$

Or, il résulte des théories développées pour un corpuscule unique dans un champ donné que l'on peut exprimer son mouvement à l'aide d'équations de Lagrange de la forme

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_{1x}} \right) = - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x}, \quad \dots$$

avec

$$(5) \quad \mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - F(r) - Q_1,$$

où

$$(6) \quad Q_1 = \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \left(\frac{\square a_1}{a_1} \right) \simeq - \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \left(\frac{\Delta a_1}{a_1} \right).$$

De même en considérant pour un instant le mouvement du premier

corpuscule comme connu, on pourra déterminer les équations du second en écrivant les équations de Lagrange

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial v_{2x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x_2}$$

avec

$$(8) \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - F(r) - Q_2,$$

où

$$(9) \quad Q_2 = \frac{h^2}{8\pi^2 m_2} \left(\frac{\square a_2}{a_2} \right) \sim - \frac{h^2}{8\pi^2 m_2} \left(\frac{\Delta a_2}{a_2} \right).$$

Il s'agit maintenant de résoudre *simultanément* les deux groupes d'équations de Lagrange (4) et (7). En Mécanique classique où l'on peut aussi considérer les équations de Lagrange individuelles où les termes Q_1 et Q_2 sont nuls, on voit aisément que l'on peut définir une fonction de Lagrange pour le système entier $\mathcal{L}^2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}; v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ telle que le mouvement du système soit donné par les six équations

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad \left(q = x_1, \dots, z_N, \dot{q} = \frac{dq}{dt} \right).$$

Pour cela, il suffit de poser

$$(10 \text{ bis}) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - F(r) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + F(r),$$

c'est-à-dire de prendre pour \mathcal{L} la somme des termes cinétiques de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 diminuée de la *demi-somme* des termes potentiels. On en tire d'ailleurs aisément pour les énergies E_1 et E_2 des deux corpuscules et pour l'énergie totale E du système les expressions

$$(11) \quad \begin{cases} E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + F(r); & E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + F(r); \\ E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + F(r) = E_1 + E_2 - F(r). \end{cases}$$

Elles montrent que l'énergie totale est la somme des énergies cinétiques individuelles augmentée de la *demi-somme* des énergies potentielles individuelles.

Le fait que \mathcal{L} n'est pas la somme de \mathcal{L}_1 et de \mathcal{L}_2 et que E n'est pas la somme de E_1 et de E_2 (parce que le terme d'énergie potentielle ne figure qu'une seule fois dans la fonction de Lagrange et dans l'énergie totale du système) n'est pas, à ma connaissance, signalé expressément

dans les traités de Mécanique : il est la conséquence nécessaire du principe de l'action et de la réaction et il exprime qu'il y a, en quelque sorte, une mise en commun de l'énergie potentielle des deux corpuscules.

Pour que l'on puisse appliquer le même formalisme dans la théorie de la double solution, il faut que les termes en Q_1 et en Q_2 présentent le même caractère d'action mutuelle que les termes en F_{12} et en F_{21} . Dans mon Mémoire de 1927, j'avais admis qu'il en était ainsi et ceci constituait évidemment un point faible dans mon raisonnement car il aurait fallu démontrer qu'il en était bien ainsi.

Si l'on admet cette hypothèse, on voit aisément qu'on peut obtenir une fonction de Lagrange pour le système des deux corpuscules en posant

$$(12) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - F(r) - Q(r),$$

où $Q(r)$ est la valeur supposée commune de $Q_1(x, y, z, t)$ au point occupé par le second corpuscule et de $Q_2(x, y, z, t)$ au point occupé par le premier corpuscule au même instant t . Le mouvement des deux corpuscules doit alors être donné par les équations de Lagrange,

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (q = x_1, \dots, z_N).$$

Or, on démontre en Mécanique classique des systèmes que, lorsque le schéma lagrangien est valable, on peut trouver une fonction $S(x_1, \dots, z_2, t)$ des variables d'espace et du temps telle que les composantes de la quantité de mouvement soient données par les relations (3). Puisque nous retrouvons ici pour le mouvement des deux corpuscules un schéma lagrangien, il doit être possible de définir une fonction $\varphi(x_1, \dots, z_2, t)$ des variables de configuration et du temps telle que l'on ait

$$(14) \quad m_1 v_{1x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad m_2 v_{2z} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}.$$

Nous inspirant de la méthode de Schrödinger, nous allons maintenant faire abstraction des ondes u_1 et u_2 qui évoluent dans l'espace physique à trois dimensions et fixer uniquement notre attention sur les positions successives des deux régions singulières. Nous obtiendrons ainsi une théorie incomplète qui, d'après sa nature même, laissera échapper une partie importante de la réalité physique, mais qui, le succès de la théorie de Schrödinger nous le prouve, devra nous permettre de retrouver la statistique des positions successives des corpuscules représentées par le

mouvement du point figuratif du système dans l'espace fictif formé à l'aide des six coordonnées x_1, \dots, z_2 des deux régions singulières.

Pour suivre la même ligne d'idées que dans le cas de l'onde Ψ d'un seul corpuscule, nous supposons qu'à l'instant initial les deux corpuscules sont suffisamment éloignés l'un de l'autre pour que leurs interactions soient négligeables et que leurs ondes u individuelles soient des trains d'onde sensiblement monochromatiques. Les vitesses initiales des corpuscules sont alors connues, mais leurs positions initiales dans leur train d'onde sont inconnues. Aux diverses hypothèses que l'on peut faire sur les positions initiales et qu'il est naturel de considérer comme également probables (sous réserve, nous l'avons vu, d'une nécessaire justification), correspondront diverses trajectoires du point représentatif dans l'espace de configuration. Le mouvement de ce nuage est permanent et obéit à l'équation de continuité

$$(15) \quad \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = 0,$$

où $\rho(x_1, \dots, z_2)$ est la densité du nuage et \mathbf{v} sa vitesse à six composantes dans l'espace de configuration.

Si l'on tient compte des formules (14) qui donnent les composantes de la vitesse des corpuscules à l'aide de la fonction φ , on voit que l'équation (15) s'écrit

$$(16) \quad \sum_{x_1, y_1, z_1} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \log \varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \log \varphi}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{m_1} \Delta_1 \varphi + \frac{1}{m_2} \Delta_2 \varphi = 0.$$

Or, si nous définissons avec Schrödinger, la fonction d'onde $\Psi(x_1, \dots, z_2, t)$ comme solution de l'équation de propagation

$$(17) \quad \sum_i \frac{1}{m_i} \Delta_i \Psi + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - F(r)] \Psi = 0$$

dans l'espace de configuration et si nous posons

$$(18) \quad \Psi(x_1, \dots, z_2, t) = a(x_1, \dots, z_2) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x_1, \dots, z_2, t)}$$

nous trouvons après substitution dans (17)

$$(19) \quad \sum_{x, y, z} \left[\frac{1}{m_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \log a^2}{\partial x_1} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \log a^2}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{m_1} \Delta_1 \varphi + \frac{1}{m_2} \Delta_2 \varphi = 0.$$

La comparaison de (16) et de (19) montre que l'amplitude a de l'onde fictive Ψ dans l'espace de configuration va, du point de vue statistique,

jouer pour le point figuratif le même rôle que l'amplitude de l'onde continue Ψ dans le cas d'un seul corpuscule. Autrement dit, compte tenu de l'hypothèse que toutes les positions des deux corpuscules sont équiprobables dans les trains d'ondes séparés et presque monochromatiques qui leur sont associés dans l'état initial, le produit $a^2 d\tau = |\Psi|^2 d\tau$ en chaque point de l'espace de configuration peut être considéré comme donnant la probabilité pour que le point figuratif soit présent à l'instant considéré dans cet élément $d\tau$: il donnera même la probabilité en valeur absolue si l'on a soin de toujours normer la fonction d'onde Ψ dans l'espace de configuration par la formule usuelle $\int |\Psi|^2 d\tau = 1$.

Telles sont les considérations que j'avais développées dans mon Mémoire de 1927. Elles avaient l'avantage de bien faire ressortir les deux points suivants :

1° L'usage de l'espace de configuration est naturel dans la théorie de la double solution parce que les corpuscules y ont une position bien définie à chaque instant dans l'espace physique à trois dimensions, ce qui permet de définir clairement les variables de configuration, au contraire ces variables n'ont pas de sens net si l'on nie l'existence à chaque instant d'une position du corpuscule et alors l'emploi de l'espace de configuration paraît difficile à justifier.

2° L'évolution réelle des phénomènes ondulatoires solidaires des N corpuscules doit, du point de vue de la double solution, être décrite par la propagation dans l'espace physique à trois dimensions de N ondes u comportant chacune une région singulière quasi ponctuelle : c'est seulement, si l'on fait abstraction des ondes u étendues pour ne fixer son attention que sur le mouvement des régions singulières, que l'on peut faire intervenir l'espace de configuration pour y représenter, suivant la méthode de Schrödinger, les probabilités de présence par la propagation d'une onde Ψ , onde purement fictive comme le sont d'ailleurs toutes les ondes Ψ dans la théorie de la double solution. Quel que soit l'avenir réservé à la théorie de la double solution, ces considérations nous paraissent devoir garder de l'intérêt. En particulier, elles montrent clairement qu'en passant d'une description dans l'espace physique à une description dans l'espace de configuration, on perd nécessairement la possibilité de décrire des « champs » étendus dans cet espace physique puisque chaque point de l'espace de configuration ne peut représenter que l'ensemble de certains points singuliers de ces champs.

Mais le raisonnement résumé plus haut a des points faibles. D'abord, il admet l'hypothèse que les potentiels quantiques ont le même caractère

« mutuel » que les potentiels ordinaires sans fournir de justification de cette hypothèse. De plus, nous avons admis implicitement : 1° qu'il n'y a pas de champs extérieurs agissant sur les corpuscules; 2° qu'il n'existe pas dans les régions de l'espace où évoluent les ondes u d'obstacles provoquant des phénomènes d'interférences ou de diffraction dont résulterait l'intervention de potentiels quantiques qui, eux, n'auraient certainement pas le caractère mutuel. En d'autres termes, nous avons admis que les potentiels F et Q étaient dus uniquement aux actions mutuelles des deux corpuscules.

Pour nous affranchir de ces restrictions, nous avons récemment développé une autre manière d'attaquer la question dont nous allons faire l'exposé.

3. Autre manière d'attaquer la question. — Pour développer notre nouveau point de vue, nous allons tout d'abord démontrer le lemme suivant.

LEMME. — *Soit deux variables x_1 et x_2 et r une certaine fonction de x_1 et de x_2 . Considérons trois fonctions $F_1(x_1, r)$, $F_2(x_2, r)$ et $F(x_1, x_2, r)$ et supposons que nous ayons entre ces fonctions les relations suivantes :*

$$(20) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{x_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1}, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_{x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)_{x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2}. \end{cases}$$

De la première relation (20), on déduit que

$$F(x_1, x_2, r) = F_1(x_1, r) + H(x_2)$$

et de la seconde relation, (20) on déduit de même que

$$F(x_1, x_2, r) = F_2(x_2, r) + G(x_1).$$

Or ceci ne peut être réalisé que si l'on a

$$(21) \quad F_1(x_1, r) = F_{11}(x_1) + F_{12}(r); \quad F_2(x_2, r) = F_{22}(x_2) + F_{21}(r),$$

avec

$$F_{11} = G, \quad F_{22} = H \quad \text{et} \quad F_{12} = F_{21}.$$

On en conclut donc que les hypothèses

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_2} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_{x_2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)_{x_1} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right)_{x_1}$$

entraînent pour F la forme

$$(22) \quad F(x_1, x_2, r) = F_{11}(x_1) + F_{22}(x_2) + F_{12}(r),$$

ce qui constitue le lemme annoncé.

Revenons au système de deux corpuscules sur lequel nous avons précédemment raisonné. Chaque point de l'espace physique sera repéré par le rayon vecteur \mathbf{R} qui joint l'origine à ce point. Les positions des deux corpuscules à l'instant t seront donc définies par les deux vecteurs $\mathbf{R}_1(t)$ et $\mathbf{R}_2(t)$. La position d'un point \mathbf{R} de l'espace par rapport au premier corpuscule sera définie par le vecteur $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{R}_1(t)$; sa position par rapport au second corpuscule sera définie par le vecteur $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \mathbf{R}_2(t)$; enfin la position du premier corpuscule par rapport au second sera donnée par le vecteur $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t)$. Les distances correspondantes auront pour expressions

$$(23) \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_1| = \sqrt{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_1(t)|^2}; & |\mathbf{r}_2| = \sqrt{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_2(t)|^2}; \\ r_{12} = \sqrt{|\mathbf{R}_1(t) - \mathbf{R}_2(t)|^2}. \end{cases}$$

Ceci posé, nous allons encore supposer connu le mouvement du second corpuscule, c'est-à-dire la fonction $\mathbf{R}_2(t)$, et nous écrirons l'équation de Jacobi généralisée (J_1) pour le premier corpuscule quand il est au point $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1(t)$. Nous aurons

$$(24) \quad (J_1) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = E_1 = \frac{1}{2m_1} (\text{grad}_1 \varphi_1)^2 + F_1 + F_{12} + Q_1,$$

avec

$$(25) \quad Q_1 = \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \left(\frac{\square a_1}{a_1} \right)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_1} \simeq - \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \left(\frac{\Delta a_1}{a_1} \right)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_1}.$$

Dans ces équations, $\varphi_1(\mathbf{R}, \mathbf{r}_2, t)$ est la phase commune des ondes u_1 et Ψ_1 du premier corpuscule dans le champ de force créé par le second, compte tenu, s'il y a lieu, de la présence d'obstacles provoquant interférences et diffraction. $a_1(\mathbf{R}, \mathbf{r}_2, t)$ est l'amplitude de l'onde continue Ψ_1 . Le symbole $\text{grad}_1 \varphi$ signifie $(\text{grad} \varphi)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_1}$ et $F_1(\mathbf{R}_1, t)$ représente un potentiel extérieur pouvant éventuellement agir sur le corpuscule 1 tandis que $F_{12}(r_{12})$ représente l'action du deuxième corpuscule sur le premier.

De même, supposons maintenant connu le mouvement du premier corpuscule, c'est-à-dire la fonction $\mathbf{R}_1(t)$, et écrivons l'équation de Jacobi généralisée (J_2) pour le second corpuscule quand il est au point $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2(t)$,

$$(26) \quad (J_2) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = E_2 = \frac{1}{m_2} (\text{grad}_2 \varphi_2)^2 + F_2 + F_{21} + Q_2,$$

avec

$$(27) \quad Q_2 = \frac{h^2}{8\pi^2 m_2} \left(\frac{\square a_2}{a_2} \right)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_2} \simeq - \frac{h^2}{8\pi^2 m_2} \left(\frac{\Delta a_2}{a_2} \right)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_2}.$$

Dans ces équations, $\varphi(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, t)$ est la phase des ondes u_2 et Ψ_2 du second corpuscule dans le champ de force créé par le premier, compte tenu, s'il y a lieu, de la présence d'obstacles provoquant interférences et diffraction. La fonction $a_2(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, t)$ est l'amplitude de l'onde continue Ψ_2 . Le symbole $\text{grad}_2 \varphi_2$ signifie $(\text{grad} \varphi_2)_{\mathbf{R}=\mathbf{R}_2}$. Enfin $F_2(\mathbf{R}_2, t)$ représente un potentiel extérieur agissant éventuellement sur le second corpuscule tandis que $F_{21}(r_{12})$ est le potentiel représentant l'action du premier corpuscule sur le second. Nous admettrons comme d'habitude que $F_{12} = F_{21}$. Quant à l'énergie E_2 du second corpuscule, elle n'est pas constante en général.

Plaçons-nous maintenant au point de vue de l'espace de configuration où \mathbf{R}_1 de composantes x_1, y_1, z_1 et \mathbf{R}_2 de composantes x_2, y_2, z_2 deviennent des variables indépendantes et admettons que l'onde continue $\Psi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) = a(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)}$ obéit à l'équation de Schrödinger.

L'équation de Jacobi généralisée s'écrira pour la position $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ du point figuratif

$$(28) \quad (J) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv E = \frac{1}{2m_1} (\text{grad}_1 \varphi)^2 + \frac{1}{2m_2} (\text{grad}_2 \varphi)^2 + F_1 + F_2 + F_{12} + Q,$$

avec

$$(29) \quad Q = \frac{h^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{m_1} \frac{\square_1 a}{a} + \frac{1}{m_2} \frac{\square_2 a}{a} \right)_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2} \simeq - \frac{h^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{m_1} \frac{\Delta_1 a}{a} + \frac{1}{m_2} \frac{\Delta_2 a}{a} \right)_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2}.$$

Ici $\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)$ est la phase de l'onde Ψ dans l'espace de configuration, $a(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)$ est son amplitude. F_1, F_2 et F_{12} ont la même signification que plus haut.

Or, si nous voulons que la représentation dans l'espace physique à trois dimensions, seule exacte physiquement, et la représentation fictive dans l'espace de configuration se correspondent, il faut avoir les formules de guidage

$$(30) \quad \begin{cases} m_1 \mathbf{v}_1 = - \text{grad}_1 \varphi_1 = - \text{grad}_1 \varphi, \\ m_2 \mathbf{v}_2 = - \text{grad}_2 \varphi_2 = - \text{grad}_2 \varphi. \end{cases}$$

Mais, d'après le lemme, ceci entraîne pour les phases les formes suivantes :

$$(31) \quad \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_{11}(\mathbf{R}_1, t) + \varphi_{12}(\mathbf{r}_{12}, t) \\ \varphi_2(\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_{22}(\mathbf{R}_2, t) + \varphi_{21}(\mathbf{r}_{12}, t) \end{cases} \quad \varphi_{12} = \varphi_{21},$$

$$\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_{11}(\mathbf{R}_1, t) + \varphi_{22}(\mathbf{R}_2, t) + \varphi_{12}(\mathbf{r}_{12}, t).$$

Ainsi se trouve précisée la forme générale, valable même dans le cas d'actions extérieures ou d'obstacles aux propagations, des phases φ_1 et φ_2 des ondes individuelles (u et Ψ) des deux corpuscules et la phase φ de l'onde fictive Ψ dans l'espace de configuration.

On peut remarquer qu'il ne semble pas nécessairement que la fonction $\varphi_{12} = \varphi_{21}$ soit uniquement fonction de la distance

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} :$$

il suffirait qu'elle soit fonction des trois composantes $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ du vecteur \mathbf{r}_{12} .

D'autre part, les « forces quantiques » doivent avoir mêmes valeurs qu'on les calcule dans l'espace physique ou qu'on les calcule dans l'espace de configuration, ce qui entraîne les conditions

$$(32) \quad \text{grad}_1 Q_1 = \text{grad}_1 Q, \quad \text{grad}_2 Q_2 = \text{grad}_2 Q$$

et l'application du lemme nous donne encore

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t) = Q_{11}(\mathbf{R}_1, t) + Q_{12}(\mathbf{r}_{12}, t) \\ Q_2(\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = Q_{22}(\mathbf{R}_2, t) + Q_{21}(\mathbf{r}_{12}, t) \\ Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = Q_{11}(\mathbf{R}_1, t) + Q_{22}(\mathbf{R}_2, t) + Q_{12}(\mathbf{r}_{12}, t). \end{array} \right\} Q_{12} = Q_{21},$$

Nous pouvons faire sur $Q_{12} = Q_{21}$ la même remarque que nous avons faite pour φ_{12} : cette fonction ne semble pas devoir nécessairement dépendre de la distance \mathbf{r}_{12} , il suffit qu'elle soit fonction des trois composantes $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ du vecteur \mathbf{r}_{12} . Cette remarque permet d'adoucir l'hypothèse que j'avais faite en 1927 sur Q_{12} .

Les formules (31) et (33) montrent que le passage de φ_1 et φ_2 à φ et de Q_1 et Q_2 à Q doit se faire exactement de la même façon que le passage de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 à \mathcal{E} et de E_1 et E_2 à E en Mécanique classique des systèmes.

Maintenant, en comparant les formules (24), (26) et (28) et en tenant compte de (31), on obtient

$$(34) \quad E = E_1 + E_2 - F_{12} + Q - Q_1 - Q_2$$

ou d'après (33)

$$(35) \quad \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 - F_{12} - Q_{12} \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + F_1 + F_2 + F_{12} + Q_1 + Q_2 + Q_{12}. \end{aligned}$$

Cette formule paraît d'ailleurs assez naturelle parce qu'elle traite

d'une manière symétrique le potentiel ordinaire d'interaction F_{12} et le « potentiel quantique d'interaction » Q_{12} .

La méthode que nous venons de suivre a l'avantage de mieux analyser la forme générale que doivent avoir les phases et les potentiels quantiques. Mais elle ne fournit pas encore une justification complète du passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules en interaction dans le cadre de la théorie de la double solution. Pour obtenir les équations (30) et (32), nous avons *admis* qu'il y avait concordance entre la représentation du mouvement par deux ondes u dans l'espace physique et par l'onde fictive Ψ dans l'espace de configuration : or, c'est précisément cette concordance qu'il faudrait justifier rigoureusement. Nous allons maintenant indiquer un genre de raisonnement qui nous paraît conduire plus près du but.

4. Comparaison du mouvement relatif de deux corpuscules en interaction et de la représentation du mouvement du système dans l'espace de configuration. — Nous considérons maintenant de nouveau uniquement un système isolé formé de deux corpuscules 1 et 2 dont l'interaction est représentée par un potentiel $V(r)$, fonction seulement de la distance r . Pour l'étudier, nous pouvons toujours adopter un système de référence galiléen où le centre de gravité est immobile et choisi par exemple comme origine des coordonnées. Le passage à un autre système galiléen ne fera alors qu'introduire en supplément le mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité. Nous allons étudier d'abord le cas où l'approximation newtonienne de la Mécanique classique (c'est-à-dire, du point de vue ondulatoire, l'approximation de l'Optique géométrique) est valable. Nous chercherons ensuite à passer au cas général.

a. Approximation de l'Optique géométrique. — Quand la Mécanique classique est valable, on peut écrire pour les deux corpuscules les équations du mouvement de Newton :

$$(36) \quad m_1 \mathbf{r}_1 = - \text{grad}_1 V; \quad m_2 \mathbf{r}_2 = - \text{grad}_2 V.$$

Les deux corpuscules décrivent alors dans l'espace physique des trajectoires L_1 et L_2 avec des mouvements bien déterminés. Les deux trajectoires et les mouvements correspondants sont « corrélés » d'une manière biunivoque.

Mais on peut aussi représenter le mouvement de l'ensemble des deux particules par le déplacement d'un point représentatif dans l'espace de

configuration x_1, \dots, z_2 et écrire dans cet espace l'équation de Jacobi :

$$(37) \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m_1} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m_2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_2} \right)^2 \right] + V(r),$$

où $\frac{\partial S}{\partial t}$ a la valeur constante E , énergie totale du système. A chaque intégrale complète $S(x_1, \dots, z_2, t, \alpha, \beta, \dots)$ de l'équation (37) correspond une trajectoire L du point représentatif qui est l'une des courbes orthogonales aux surfaces $S = \text{const.}$ dans l'espace de configuration et le mouvement des corpuscules sur les trajectoires L_1 et L_2 correspondantes dans l'espace physique est donné par les formules de Jacobi :

$$(38) \quad \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{m_1} \text{grad}_1 S, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{m_2} \text{grad}_2 S.$$

Ainsi la représentation dans l'espace de configuration fait correspondre à l'intégrale complète S l'ensemble des mouvements d'une même classe des deux corpuscules.

Pour étudier le mouvement de l'ensemble des deux corpuscules, on peut aussi se servir en Mécanique classique d'une méthode tout à fait différente des précédentes qui consiste à envisager le mouvement relatif d'une des particules par rapport à l'autre. Il est bien connu que, si nous prenons un système d'axes de directions fixes ayant pour origine l'un des corpuscules, le mouvement de l'autre corpuscule dans ce système de référence *non galiléen* sera le même que si le système était galiléen et si cet autre corpuscule possédait une « masse réduite » μ telle que

$$(39) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Autrement dit, l'influence du mouvement non uniforme du nouveau système de référence se traduit uniquement par une variation apparente de la masse du corpuscule en mouvement relatif. Dans le système non galiléen lié à un des corpuscules, on peut donc écrire pour le mouvement de l'autre l'équation du type newtonien,

$$(40) \quad \mu \mathbf{r}^* = -\text{grad}^* V,$$

où l'astérisque indique qu'une quantité est évaluée dans le système non galiléen.

Supposons pour préciser que nous prenons le corpuscule 2 comme origine du système de référence non galiléen. Nous voyons immédiate-

ment que nous aurons comme équation de Jacobi du corpuscule 1 dans ce système

$$(41) \quad \frac{\partial S_1^*}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + V(r).$$

Le mouvement relatif du corpuscule 1 correspondant à une intégrale complète de (41) s'effectuera suivant une trajectoire L_1^* qui sera une courbe orthogonale aux surfaces $S_1^* = \text{const.}$ et le mouvement le long de L_1^* sera donné par l'équation

$$(42) \quad \mathbf{v}_1^* = - \frac{1}{\mu} \text{grad}^* S_1^*.$$

Nous devons maintenant regarder de très près la signification de ces équations valables dans le système relatif.

Tandis que, dans le système galiléen lié au centre de gravité, les énergies partielles $E_1 = T_1 + V$ et $E_2 = T_2 + V$ des deux corpuscules en mouvement étaient variables et que seule l'énergie totale $E = T_1 + T_2 + V$ était constante, l'énergie $E_1^* = \frac{\partial S_1^*}{\partial t}$ dans le mouvement relatif est constante, comme on pourrait le déduire de la manière usuelle à partir de l'équation (40). Ceci provient du fait qu'en passant au système lié à 2, nous avons reporté toute l'énergie de l'ensemble des deux corpuscules sur le corpuscule qui reste en mouvement. On a d'ailleurs $E_1^* = E$, c'est-à-dire

$$(43) \quad \frac{1}{2} \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 + V = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + V$$

comme il est aisé de le vérifier.

Naturellement si nous avons pris pour origine des coordonnées relatives le corpuscule 1 en faisant le changement de variables $x^* = x - x_1(t) \dots$, nous aurions trouvé pour le corpuscule 2 dans ce système l'équation de Jacobi.

$$(44) \quad \frac{\partial S_2^*}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_2^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_2^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + V(r)$$

et l'énergie $E_2^* = \frac{\partial S_2^*}{\partial t}$ aurait été une constante égale, elle aussi, à E .

Les deux fonctions de Jacobi S_1^* et S_2^* , obéissant aux deux équations (41) et (44) de même forme, seront égales à une même fonction $F(\mathbf{r}^*, t)$ des coordonnées relatives et du temps.

Voici maintenant le point capital. Considérons une certaine intégrale complète de l'équation (41), $S_1^*(\mathbf{r}^*, t)$. Les diverses courbes orthogonales aux surfaces $S_1^* = \text{const.}$ et les mouvements correspondants définis

par (42) représentent des mouvements possibles de la particule 1 autour de la particule 2. Soit L_1^* l'une de ces trajectoires possibles; en revenant au système galiléen où le centre de gravité est à l'origine des coordonnées et en se servant de la relation $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$, on peut déduire du mouvement L_1^* les mouvements corrélés L_1 et L_2 des deux corpuscules autour du centre de gravité. Parmi les courbes (C) formant la congruence des normales aux surfaces $S_1^* = \text{const.}$ dans le système de référence non galiléen lié à 2, une seule est effectivement décrite par le corpuscule 1 dans son mouvement relatif; cependant, comme dans le système non galiléen lié à 2, le corpuscule 2 ne joue plus que le rôle d'un simple centre de forces, nous devons considérer l'équation (41) comme nous donnant, à l'approximation de l'Optique géométrique, la propagation de la phase S_1^* de l'onde u_1^* du corpuscule 1 dans tout ce système de référence

On voit donc maintenant que, dans le système de référence relatif, la fonction S_1^* nous donne à la fois l'ensemble des mouvements possibles d'une même classe L_1^* du corpuscule 1 dans le champ central permanent créé par le corpuscule 2 et la phase dans tout le système relatif de l'onde u_1^* du corpuscule 1 quand il décrit l'une quelconque des trajectoires L_1^* . Cette remarque essentielle est la clef du présent raisonnement.

Naturellement, si nous rapportons le mouvement du corpuscule 2 au corpuscule 1, ce serait la fonction $S_2^*(\mathbf{r}^*, t) = S_1^*(\mathbf{r}^*, t)$ qui nous servirait à représenter l'ensemble des mouvements possibles du corpuscule 2 dans le champ central permanent créé par le corpuscule 1 et aussi dans tout le système relatif la phase de l'onde u_2^* du corpuscule 2 quand il décrit l'une quelconque des trajectoires L_2^* .

Considérons maintenant la fonction de Jacobi S pour l'ensemble des deux corpuscules dans l'espace de configuration. C'est une fonction $S(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t)$ des six variables de configuration x_1, \dots, z_2 et du temps t qui obéit à l'équation de Jacobi (37). Si nous introduisons les variables relatives $x^* = x_1 - x_2, \dots$, on aura

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{\partial S}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = -\frac{\partial S}{\partial x^*},$$

les variables x_1, \dots, z_2 étant d'ailleurs reliées par les relations $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \dots$ qui expriment la fixité du centre de gravité. L'équation de Jacobi pour S prend alors dans le système relatif la forme

$$(45) \quad \frac{\partial S^*}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial S^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^*}{\partial z^*} \right)^2 \right] + V(r).$$

L'identité de forme des équations (41), (44) et (45) montre alors que la fonction de Jacobi S du système des deux corpuscules (qui est égale à la phase de l'onde Ψ dans l'espace de configuration à l'approximation de l'Optique géométrique) a dans le système lié au corpuscule 2 la même expression $S^* = F(\mathbf{r}, t)$ que S_1 et dans le système lié au corpuscule 1 la même expression $F(\mathbf{r}, t)$ que S_2 .

Revenant alors au système galiléen lié au centre de gravité, on voit qu'en employant les notations du paragraphe précédent, on a

$$(46) \quad S_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t) = S_2(\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = S(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) = F(r_{12}, t)$$

et la validité, aux points corrélés de L_1 et de L_2 , des formules

$$(47) \quad m_1 \mathbf{v}_1 = -\text{grad}_1 S_1 = -\text{grad}_1 S, \quad m_2 \mathbf{v}_2 = -\text{grad}_2 S_2 = -\text{grad}_2 S$$

devient évidente. Les formules (46) correspondent bien aux formules (31) du paragraphe précédent avec $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$ et $\varphi_{12} = S_{12} = F$ (la nullité de φ_{11} et de φ_{22} provenant de l'immobilité du centre de gravité dans le système galiléen). Si nous adoptions un système de référence galiléen où le centre de gravité aurait un mouvement rectiligne et uniforme d'énergie E_g et de quantité de mouvement \mathbf{P} , il faudrait ajouter à S les termes $E_g t - (\mathbf{P}_x X + \mathbf{P}_y Y + \mathbf{P}_z Z)$ où $\mathbf{X} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}$. Les formules (46) prendraient alors la forme

$$(48) \quad \begin{cases} S_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t) = S_{11}(\mathbf{R}_1, t) + S_{12}(\mathbf{r}_{12}, t) \\ S_2(\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = S_{22}(\mathbf{R}_2, t) + S_{21}(\mathbf{r}_{12}, t) \\ S(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t) = S_{11}(\mathbf{R}_1, t) + S_{22}(\mathbf{R}_2, t) + S_{12}(\mathbf{r}_{12}, t) \end{cases} \quad (S_{12} = S_{21}),$$

ce qui coïncide exactement, à l'approximation de l'Optique géométrique, avec les formules (31) du paragraphe précédent.

Ajoutons une remarque intéressante. Les équations (41), (44) et (45) peuvent s'écrire

$$(49) \quad E_1^* = T_1^* + V, \quad E_2^* = T_2^* + V, \quad E = T^* + V,$$

avec

$$(50) \quad E = E_1^* = E_2^*, \quad T^* = T_1^* = T_2^* = T_1 + T_2.$$

D'où

$$(51) \quad \begin{cases} E_1^* = (T_1 + V) + T_2 = E_1 + T_2, & E_2^* = (T_2 + V) + T_1 = E_2 + T_1; \\ E_1 + E_2 = E_1^* + E_2^* - (T_1 + T_2) = 2E - (E - V); \end{cases}$$

soit

$$(52) \quad E = E_1 + E_2 - V.$$

Nous retrouvons ainsi l'expression signalée précédemment de l'énergie totale E du système des deux corpuscules en fonction de leurs énergies individuelles E_1 et E_2 et nous voyons mieux pour quelle raison nous n'avons pas $E = E_1 + E_2$.

Nous venons de raisonner en nous tenant constamment dans l'approximation de l'Optique géométrique, ce qui a eu l'avantage de nous permettre de nous tenir sur le terrain bien assuré de la Mécanique classique. Nous allons maintenant par des raisonnements analogues tenter d'extrapoler les résultats obtenus au-delà des limites de l'Optique géométrique en introduisant les idées de la théorie causale.

b. Étude du même problème en dehors des limites de l'Optique géométrique. — Écrivons d'abord l'équation de propagation de l'onde Ψ dans l'espace de configuration

$$(53) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_1} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1^2} \right) - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 m_2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_2^2} \right) + V(r).$$

Si l'on exprime Ψ sous la forme

$$\Psi = a(x_1, \dots, z_2, t) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} \varphi(x_1, \dots, z_2, t)},$$

la grandeur $E = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ devra être l'énergie constante du système. Dans le point de vue de la double solution, les corpuscules du système doivent être bien localisés et décrire dans l'espace physique des trajectoires corrélées L_1 et L_2 représentées dans l'espace de configuration par la trajectoire L du point représentatif qui est l'une des courbes orthogonales aux surfaces $\varphi = \text{const.}$ Les mouvements des corpuscules sur les trajectoires L_1 et L_2 de l'espace physique seraient donnés par les formules de guidage

$$(54) \quad \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{m_1} \mathbf{grad}_1 \varphi, \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{m_2} \mathbf{grad}_2 \varphi.$$

Ainsi la représentation dans l'espace de configuration ferait toujours correspondre à la phase φ l'ensemble des mouvements corrélés d'une même classe.

Comme précédemment il est naturel de considérer les mouvements relatifs de chacun des corpuscules par rapport à l'autre. On démontre aisément que, dans le système non galiléen lié à l'un des deux corpuscules, on a pour l'onde Ψ l'équation de propagation

$$(55) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial z^{*2}} \right) + V(r),$$

μ ayant toujours la valeur (39), ce qui à l'approximation de l'Optique géométrique, nous ramènerait à l'équation de Jacobi (45) avec $\varphi^* = S^*$.

Quelle doit être, du point de vue de la double solution, l'équation de propagation (en dehors de la région singulière) de l'onde u_1 du corpuscule 1 dans le système de référence lié au corpuscule 2? Si nous l'écrivons sous la forme

$$u_1^*(x^*, y^*, z^*, t) = a_1^*(x^*, y^*, z^*, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_1^*(x^*, y^*, z^*, t)},$$

nous savons qu'à l'approximation de l'Optique géométrique où $\varphi_1^* = S_1^*$, nous devons retrouver l'équation (41). Ceci nous conduit à écrire comme équation de propagation de u_1^* dans le système non galiléen relatif

$$(56) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} = - \frac{h^2}{8\pi^2 \mu} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial z^{*2}} \right) + V(r),$$

Le mouvement relatif s'effectuera suivant l'une des courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1^* = \text{const.}$ avec la vitesse

$$\mathbf{v}_1^* = - \frac{1}{\mu} \text{grad}^* \varphi_1^*.$$

Ici encore, pour les raisons exposées plus haut, $E_1^* = \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t}$ sera égale à l'énergie constante E du système, toute l'énergie du système des deux corpuscules se trouvant reportée sur le mouvement relatif du corpuscule 1.

Naturellement, si nous avions pris comme origine des coordonnées du système relatif le corpuscule 1, nous aurions dû prendre pour équation de propagation de l'onde u_2^* du corpuscule 2 dans ce système

$$(57) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial u_2^*}{\partial t} = - \frac{h^2}{8\pi^2 \mu} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial z^{*2}} \right) + V(r)$$

qui, à l'approximation de l'Optique géométrique, nous redonnerait l'équation (44) avec $S_2^* = \varphi_2^*$. Les fonctions u_1^* et u_2^* obéissant à des équations de même forme peuvent être regardées comme égales à une même fonction de \mathbf{r}^* et de t , ce qui nous conduit à leur donner l'expression commune $a^*(\mathbf{r}^*, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi^*(\mathbf{r}^*, t)}$.

Dans le système de référence non galiléen lié au corpuscule 2, ce corpuscule ne joue plus que le rôle d'un centre de force et nous sommes ramenés au cas du mouvement d'un corpuscule dans un champ donné, l'onde $u_1^* = a_1^* e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_1^*}$ obéissant à (56). L'ensemble des courbes orthogonales aux surfaces $\varphi_1^* = \text{const.}$ et les mouvements définis par

$\mathbf{v}_1^* = -\frac{1}{\mu} \text{grad}^* \varphi_1^*$ représentent dans ce système l'ensemble des mouvements possibles d'une même classe. Si L_1^* est la trajectoire décrite par le corpuscule 1, on pourra, en revenant au système galiléen lié au centre de gravité et en utilisant la relation $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$, déduire du mouvement L_1^* les mouvements corrélés L_1 et L_2 des deux corpuscules autour du centre de gravité.

On voit que, dans le système relatif, la fonction $\alpha^* e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi^*}$ représente à la fois l'ensemble des mouvements L_1^* de même classe possibles pour le corpuscule 1 et (sauf dans la région singulière) l'onde u_1^* du corpuscule 1 quand il décrit l'une quelconque des trajectoires L_1^* . C'est là le point capital.

Naturellement, si nous rapportons le mouvement du corpuscule 2 au corpuscule 1, ce sera la fonction $\alpha^* e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi^*}$ qui nous servira à représenter à la fois l'ensemble des trajectoires de même classe L_2^* et l'onde u_2^* associée au corpuscule 2 quand il décrit l'une quelconque des trajectoires L_2^* .

Si maintenant nous comparons les équations (56) et (57) avec l'équation (55) satisfaite par l'onde Ψ de l'espace de configuration, on voit qu'on peut choisir pour la fonction Ψ^* la même expression $\alpha^*(\mathbf{r}^*, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi^*(\mathbf{r}^*, t)}$ que pour les fonctions u_1^* et u_2^* ⁽¹⁾. On en conclut que les formules (31) et (33) du paragraphe précédent où φ_{11} et φ_{22} sont nuls ainsi que Q_{11} et Q_{22} et qui se réduisent à

$$(58) \quad \begin{cases} \varphi_1(\mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_2(\mathbf{r}_{12}, t) = \varphi(\mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_{12}(\mathbf{r}_{12}, t), \\ Q_1(\mathbf{r}_{12}, t) = Q_2(\mathbf{r}_{12}, t) = Q(\mathbf{r}_{12}, t) = Q_{12}(\mathbf{r}_{12}, t) \end{cases}$$

sont bien vérifiées.

La nullité de φ_{11} et de φ_{22} résulte de l'immobilité du centre de gravité dans le système galiléen choisi. Dans un autre système galiléen dans lequel le centre de gravité aurait un mouvement rectiligne et uniforme d'énergie E_g et de quantité de mouvement \mathbf{P} , les termes $E_g t - (\mathbf{P}_x X + \mathbf{P}_y Y + \mathbf{P}_z Z)$ s'introduiraient dans la phase et l'on retrouverait les formules (31).

(1) Le résultat que nous avons obtenu peut s'exprimer en disant que, dans le système de référence relatif, où l'un des corpuscules joue seulement le rôle de centre de forces, la partie régulière de l'onde u du corpuscule mobile coïncide (à une constante de normalisation près) avec son onde Ψ . C'est un résultat que nous retrouverons au chapitre XVII.

Ajoutons encore que la vérification de la forme $E = E_1 + E_2 - V - Q_{12}$ se fait ici de la même façon que plus haut celle de la formule $E = E_1 + E_2 + V$. Les équations de Jacobi généralisées correspondant aux équations de propagation (55), (56) et (57) nous donnent en posant $Q = Q_{12}$,

$$(59) \quad E_1^* = T_1^* + V + Q; \quad E_2^* = T_2^* + V + Q; \quad E = T^* + V + Q;$$

avec

$$(60) \quad E = E_1^* = E_2^*; \quad T^* = T_1^* = T_2^* = T_1 + T_2.$$

Nous en déduisons

$$(61) \quad \begin{cases} E_1^* = (T_1 + V + Q) + T_2 = E_1 + T_2; & E_2^* = (T_2 + V + Q) + T_1 = E_2 + T_1; \\ E_1 + E_2 = E_1^* + E_2^* - (T_1 + T_2) = 2E - (E - V - Q); \end{cases}$$

d'où

$$(62) \quad E = E_1 + E_2 - V - Q.$$

Les raisonnements précédents sont valables pour deux corpuscules en l'absence de champs extérieurs.

S'il existe des champs extérieurs, on retrouve encore aisément les formules (31) et (33) dans le cas où, ces champs étant sensiblement constants dans toute l'étendue du système, il y a séparation entre le mouvement du centre de gravité et le mouvement relatif. Si cette condition n'est pas remplie, le problème est plus compliqué et demanderait un nouvel examen. Il en est de même pour le cas de plus de deux corpuscules où il faudrait peut-être employer des méthodes analogues à celles qu'on emploie en Astronomie mathématique dans le problème des n corps. Quoi qu'il en soit, la méthode employée dans ce paragraphe est très instructive et paraît bien adaptée à la solution du problème envisagé.

5. Cas des particules de même nature. — Le cas des systèmes contenant des particules de même nature physique pose un problème encore plus difficile. En particulier, on peut se demander si le maintien de la notion de trajectoire postulée par la théorie de la double solution est compatible avec l'indiscernabilité des particules admise par la théorie quantique actuelle. Il semble, en effet, que la vérification expérimentale de la statistique de Bose-Einstein pour les bosons apporte une preuve directe de l'indiscernabilité de ces particules et la question est de savoir si ce résultat expérimental est compatible avec les conceptions de la

double solution. Nous appuyant sur les considérations développées plus haut, nous allons indiquer comment on peut aborder la question.

Considérons toujours un système de deux particules. Nous les supposons de même nature, c'est-à-dire que $m_1 = m_2$. L'étude d'un tel système dans la Mécanique ondulatoire actuelle montre que, si les régions de présence possible des deux particules empiètent l'une sur l'autre, il est nécessaire de supposer que l'onde Ψ du système dans l'espace de configuration est soit symétrique, soit antisymétrique ⁽¹⁾.

Comme les équations d'onde des deux particules sont les mêmes, il est naturel de supposer que, si les trains d'ondes u empiètent en partie, les ondes peuvent se superposer et former une onde u unique que l'on peut représenter par la formule

$$(63) \quad u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)},$$

l'amplitude $f(x, y, z, t)$ ayant ici deux régions singulières mobiles distinctes. En d'autres termes, les ondes u individuelles des deux particules $u_1(\mathbf{R}, \mathbf{r}_{12}, t)$ et $u_2(\mathbf{R}, \mathbf{r}_{12}, t)$ se fondraient en une onde unique avec deux régions singulières. Ce serait cette sorte de fusion des ondes u , possible pour les bosons, qui expliquerait la faculté d'association que possèdent ces particules.

Supposons l'un des corpuscules placé au point \mathbf{R}_1 , l'autre ayant une position déterminée par \mathbf{r}_{12} . La phase de l'onde u devant être unique, nous devons avoir

$$(64) \quad \varphi_1(\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_2(\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_{12}, t) \quad (i = 1, 2),$$

d'où, d'après les formules (31)

$$(65) \quad \varphi_{11}(\mathbf{R}_i, t) = \varphi_{22}(\mathbf{R}_i, t),$$

d'où encore

$$(66) \quad \varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = \varphi_{11}(\mathbf{R}_1, t) + \varphi_{11}(\mathbf{R}_2, t) + \varphi_{12}(\mathbf{r}_{12}, t),$$

$\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t)$ étant toujours la phase de l'onde Ψ dans l'espace de configuration.

De même, pour les amplitudes des ondes Ψ individuelles, on devra avoir

$$(67) \quad a_1(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t) = a_2(\mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t)$$

et l'on tire alors de la définition des potentiels quantiques et des

(1) Voir chap. IV, § 4.

formules (33)

$$(68) \quad \begin{cases} Q_{11}(\mathbf{R}_1, t) = Q_{22}(\mathbf{R}_2, t), \\ Q(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) = Q_{11}(\mathbf{R}_1, t) + Q_{11}(\mathbf{R}_2, t) + Q_{12}(\mathbf{r}_{12}, t). \end{cases}$$

Ces formules, comme (65) et (66), résultent d'ailleurs du fait que les régions singulières sont indiscernables et peuvent être permutées sans que le phénomène ondulatoire représenté par u soit modifié.

Donc le potentiel quantique de l'espace de configuration

$$(69) \quad Q = \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \frac{(\square_1 + \square_2) \alpha(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t)}{\alpha(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t)} \sim - \frac{h^2}{8\pi^2 m_1} \frac{(\Delta_1 + \Delta_2) \alpha}{\alpha}$$

doit être symétrique en \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 .

Si $\mathcal{A}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t)$ désigne l'amplitude d'une solution quelconque de l'équation des ondes dans l'espace de configuration, $\mathcal{A}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t)$ sera également solution et on devra former une combinaison linéaire de la forme

$$(70) \quad C\mathcal{A}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) + D\mathcal{A}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t)$$

telle que la quantité

$$(71) \quad \frac{C\square\mathcal{A}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) + D\square\mathcal{A}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t)}{C\mathcal{A}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{r}_{12}, t) + D\mathcal{A}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1, \mathbf{r}_{12}, t)} \sim Q,$$

où $\square = \square_1 + \square_2$, soit insensible à la permutation de \mathbf{R}_1 et de \mathbf{R}_2 , c'est-à-dire à la permutation de la position des deux régions singulières. En écrivant cette condition, on trouve aisément $C^2 = D^2$, c'est-à-dire $|C| = |D|$ et $2\arg C = 2\arg D + 2n\pi$, d'où

$$(72) \quad C = |C|e^{i\alpha}, \quad D = \pm |C|e^{i\alpha} = \pm C.$$

On est ainsi conduit à n'admettre pour l'onde Ψ de l'espace de configuration que les solutions symétriques et les solutions antisymétriques, conformément au résultat bien connu de la Mécanique ondulatoire des particules de même nature. Mais ici ce résultat apparaît comme une conséquence du fait que les ondes u des particules de même nature, quand elles empiètent dans l'espace, se fondent en une onde unique comportant plusieurs régions singulières dont les rôles doivent être interchangeables, car dans une même onde u ces régions singulières sont identiques et leur permutation ne peut avoir aucun effet. L'image ainsi obtenue pour l'onde u nous paraît présenter un grand intérêt.

A partir du résultat classique ainsi retrouvé, il faudrait montrer pour quelle raison il convient de prendre la solution symétrique pour les

bosons et la solution antisymétrique pour les fermions et justifier pour ces derniers la validité du principe d'exclusion de Pauli. Il faudrait donc montrer pourquoi les régions singulières « bosons » peuvent se grouper en grappe sur une même onde u alors que les régions singulières « fermions » ne peuvent le faire et restent toujours isolées sur leur onde u individuelle. Pour bien comprendre ce point, il serait certainement nécessaire de faire intervenir la notion de spin dont l'intervention est essentielle pour la définition rigoureuse des fonctions d'onde symétriques et antisymétriques. La théorie de la double solution ne peut donc aborder cette question qu'après avoir été étendue au cas des particules de spin différent de zéro et en particulier à la Mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac, ce que nous ferons seulement au chapitre XVI. Mais, même après cette extension, nous ne serons pas en état de résoudre le problème qui se pose ici : il est de ceux qu'à l'heure actuelle, nous devons réserver pour de futures recherches.

CHAPITRE XIII.

LA SIGNIFICATION PROBABILISTE DE $|\Psi|^2$ ET SA JUSTIFICATION.

1. Retour sur le raisonnement de 1927. — En 1927, j'avais tenté, nous l'avons vu, de justifier l'attribution à la grandeur $\alpha^2 = |\Psi|^2$ de la signification suivante : elle représente la probabilité de présence à l'instant t d'un corpuscule-singularité au point de l'espace correspondant. Pour tenter cette justification, j'étais parti du cas de l'onde plane monochromatique en l'absence de champ (physiquement on doit dire du cas d'un train d'ondes très étendu assimilable dans sa presque totalité à une onde plane monochromatique). Les trajectoires possibles sont alors des droites parallèles à la direction de propagation. Nous ne pouvons pas savoir (à moins de faire une observation qui changerait complètement la situation) sur laquelle des trajectoires se trouve le corpuscule, ni en quel point il se trouve sur sa trajectoire. Pour cette raison, il paraît justifié, disais-je, de considérer toutes les positions du corpuscule dans le train d'ondes comme également probables, ce qui permet d'adopter pour la probabilité de présence l'expression $\alpha^2 = |\Psi|^2$ qui est alors constante. Si ensuite le train d'ondes pénètre dans une région où règne un champ de force quelconque l'équation de continuité

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + \text{div}(\alpha^2 \mathbf{v}) = 0$$

(où \mathbf{v} est donnée par la formule du guidage) permettra de conclure que la probabilité de présence doit toujours rester égale à $\alpha^2 = |\Psi|^2$. Naturellement ce raisonnement doit s'appliquer aussi à l'onde Ψ d'un système dans l'espace de configuration interprétée comme nous venons de le faire dans le dernier chapitre. On pourra en ce cas partir d'un état du système où les constituants associés à des trains d'ondes Ψ de dimensions finies sont suffisamment éloignés les uns des autres pour être

représentés par un train d'ondes planes monochromatiques dans l'espace de configuration. Il est alors naturel d'admettre encore que, au début, la probabilité de présence du point représentatif est donnée par la constante $\alpha^2 = |\Psi|^2$ et l'on en conclura que, pendant toute la durée de l'interaction, cette probabilité de présence restera égale à $|\Psi|^2$. Il en résulte aisément que, si après la fin de l'interaction les corpuscules sont de nouveau séparés et sans interaction, la probabilité de chacun d'eux dans l'espace physique se déduira encore de la valeur de $|\Psi|^2$.

Considérons comme exemple un électron qui, dans son état initial, se trouverait animé d'un mouvement rectiligne uniforme en dehors de tout champ. Si ensuite il entre en interaction avec d'autres corpuscules avec échange d'énergie et de quantité de mouvement et si finalement il se trouve emprisonné dans un état stationnaire à l'intérieur d'un atome, les considérations précédentes paraissent justifier de regarder sa probabilité de présence finale aux divers points de l'atome comme donnée par le carré du module de la fonction Ψ qui représente son état stationnaire final.

Ainsi, si l'on admet qu'en partant d'un état de mouvement initial rectiligne et uniforme d'un corpuscule, on puisse toujours amener ce corpuscule à l'aide d'interactions convenables dans n'importe quel état final, on pourra justifier l'identification de $|\Psi|^2$ avec la probabilité de présence et cela d'une façon générale. Toutefois cette conclusion repose sur l'hypothèse suivante : quand l'onde Ψ est formée par un train d'ondes sensiblement assimilable à une onde plane monochromatique, il est légitime de considérer la probabilité de présence comme donnée par $\alpha^2 = |\Psi|^2$.

Mais cette hypothèse peut paraître arbitraire. D'une façon générale, la densité de probabilité de présence $\rho(x, y, z, t)$ doit obéir, comme la fonction α^2 , à l'équation de continuité

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0,$$

où $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ est une fonction connue de x, y, z, t . Cette équation étant du premier ordre en t , ρ est complètement déterminée si l'on connaît sa forme initiale $\rho(x, y, z, t_0)$ à l'instant origine t_0 . Si l'on pose

$$(2) \quad \rho(x, y, z, t_0) = \alpha^2(x, y, z, t_0) = |\Psi(x, y, z, t_0)|^2,$$

alors la solution de (1) est bien $\rho = \alpha^2 = |\Psi|^2$. Mais le choix (2) de la forme initiale est arbitraire et l'on pourrait en faire une infinité d'autres tout aussi acceptables. Même dans le cas de l'onde plane monochro-

matique, le choix $\rho = a^2 = |\Psi|^2$, bien qu'étant très naturel, a un caractère arbitraire.

Néanmoins, pour défendre la validité de cette hypothèse qui était à la base de mes raisonnements de 1927, on peut faire remarquer que, quand on veut appliquer le calcul des probabilités à une question concrète, il y a toujours une hypothèse arbitraire de nature physique placée à la base de cette application. Même dans le cas si simple et si intuitif du jeu de pile ou face, quand on attribue une même probabilité $\frac{1}{2}$ aux deux hypothèses pile et face, on admet implicitement la parfaite symétrie de la pièce de monnaie. Si l'on envisage un nuage homogène de gouttelettes tombant normalement sur un sol plan, on admet tout naturellement que des aires égales du plan ont la même probabilité de recevoir une gouttelette, c'est-à-dire qu'on admet que le nombre des trajectoires verticales des gouttes perçant une surface $d\sigma$ du plan est proportionnel à $d\sigma$. C'est là exactement la même hypothèse que celle que nous avons faite dans le cas de l'onde plane monochromatique, car, si nous envisageons l'ensemble des trajectoires parallèles possibles du corpuscule qui viennent percer un plan d'onde, l'hypothèse faite en posant $\rho = a^2 = \text{const.}$ revenait précisément à admettre que le nombre des trajectoires possibles traversant une petite aire $d\sigma$ du plan d'onde est proportionnel à $d\sigma$. La nécessité, pour introduire des considérations statistiques, d'adopter un postulat de base forcément un peu arbitraire semble justifier l'hypothèse si naturelle que nous avons faite. Notre raisonnement me paraît donc avoir conservé une certaine force probante.

Néanmoins, comme cette force probante peut être contestée, il est intéressant d'examiner le problème sous d'autres angles.

2. Comparaison avec le théorème de Liouville et la théorie ergodique. — La Mécanique statistique classique repose sur le théorème de Liouville qui se déduit des équations de Hamilton. Remarquons d'abord que, les équations de Hamilton étant valables pour le mouvement des corpuscules dans la théorie causale comme nous l'avons montré, le théorème de Liouville est également valable et peut aussi être utilisé dans la question qui nous occupe.

Rappelons ce qu'est le théorème de Liouville. Soit un ensemble de N particules de coordonnées q_i avec des moments conjugués p_i . Un tel système peut être représenté par un point dans un espace à $6N$ dimensions constitué par les q_i et les p_i . Un ensemble de systèmes du même

genre sera donc représenté par un « nuage » de points représentatifs dans cet espace auquel on donne, depuis Gibbs, le nom d'extension-en-phase. Le nuage des points représentatifs est analogue à un fluide en mouvement dans l'extension-en-phase : on peut définir sa densité $\tau(q_i, p_i, t)$ et sa vitesse \mathbf{V} en chaque point, \mathbf{V} étant un vecteur à $6N$ composantes dont les composantes sont données par l'ensemble des $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ et des $\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt}$.

Comme le nombre des systèmes envisagés se conserve, le fluide en question doit obéir à l'équation de continuité

$$(3) \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \operatorname{div}(\tau \mathbf{V}) = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \tau = 0,$$

les opérateurs div et grad étant ici définis dans l'extension-en-phase à $6N$ dimensions. Or, en supposant valables pour chaque indice i les équations de Hamilton

$$(4) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

on voit que

$$(5) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0,$$

équation qui exprime, on le sait, que le fluide est incompressible, c'est-à-dire que le même nombre de points représentatifs occupe toujours le même volume de l'extension-en-phase. L'équation de continuité donne alors

$$(6) \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} \tau = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{D\tau}{Dt} = 0,$$

$\frac{D}{Dt}$ étant la dérivée prise en suivant le mouvement des points représentatifs. L'équation (5) signifie qu'en suivant le mouvement des points représentatifs, on voit la densité τ rester constante, ce qui traduit d'une autre manière la propriété d'incompressibilité. Ces résultats constituent le théorème de Liouville qui peut s'exprimer en disant que, si à un instant initial un ensemble de points représentatifs occupe un volume $d\tau_0$ de l'extension-en-phase, à tout instant ultérieur, il occupera un volume $d\tau = d\tau_0$.

L'équation

$$(7) \quad \frac{D\tau}{Dt} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \tau}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \tau}{\partial p_i} \right) = 0$$

étant du premier ordre par rapport au temps, sa solution $\sigma(q_i, p_i, t)$ est déterminée si l'on connaît la forme initiale $\sigma(q_i, p_i, t_0)$; de plus, cette équation admet évidemment la solution $\sigma = \text{const.}$

En Mécanique statistique classique, on considère depuis Boltzmann et Gibbs des ensembles de systèmes représentés par des nuages de points dans l'extension-en-phase et l'on admet comme postulat statistique que c'est la solution $\sigma = \text{const.}$ qui doit être choisie. En d'autres termes, on admet, ce que le théorème de Liouville rend possible, que la probabilité de trouver le point représentatif d'un système dans un élément de volume $d\tau$ de l'extension-en-phase est proportionnelle à la grandeur de $d\tau$. Dans le cas fréquemment réalisé où les systèmes considérés sont conservatifs, c'est-à-dire ont une énergie constante E (connue à dE près), on considère dans l'extension-en-phase une couche d'épaisseur correspondant à dE et couvrant la multiplicité à $6N - 1$ dimensions définie par $E = \text{const.}$: c'est à l'intérieur de cette couche que doit s'appliquer le postulat statistique que nous venons de rappeler. Les éléments $d\tau$ de la couche ont une expression de la forme πdE et π peut alors servir de mesure à la probabilité de présence du point figuratif dans $d\tau$. Grâce à la relation de Boltzmann $S = k \log P$ entre l'entropie S et la probabilité $P = \pi$, on peut définir l'entropie de l'ensemble des systèmes (¹).

On peut tenter de justifier le choix arbitraire de la solution $\sigma = \text{const.}$ de (6) en introduisant « l'hypothèse ergodique » suivant laquelle toute trajectoire du point représentatif du système, en s'enroulant indéfiniment, finirait par remplir entièrement et sans recouvrement toute la portion de l'extension-en-phase qui lui est accessible (par exemple toute la couche $E, E + dE$ dans le cas des systèmes conservatifs). Mais cette hypothèse est visiblement trop rigoureuse et, en particulier, elle est en défaut dans le cas des mouvements périodiques. On lui a donc substitué un énoncé adouci que l'on nomme habituellement « l'hypothèse quasi ergodique » : toute trajectoire du point figuratif du système, sauf dans des cas exceptionnels de probabilité évanouissante, finirait par passer infiniment près de tout point de la région d'extension-en-phase qui lui est accessible.

Une conséquence essentielle de l'une ou de l'autre de ces hypothèses est la suivante : la moyenne dans le temps $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} A dt$, où A est une

(¹) Voir par exemple H. A. LORENTZ, *Les théories statistiques en Thermodynamique*, Teubner, Leipzig, 1916; FRANCIS PERRIN, *Mécanique statistique quantique*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

grandeur attachée au système, est indépendante de t et est égale à la moyenne

$$(8) \quad \bar{A} = \frac{1}{\mathfrak{V}} \int_{\mathfrak{V}} A \, d\tau$$

de la grandeur A prise dans la région considérée de volume \mathfrak{V} de l'extension-en-phase quand on suppose les probabilités proportionnelles à $d\tau$. Cette coïncidence de la moyenne dans le temps avec la moyenne (8) est très importante pour la cohérence de la théorie. Malheureusement l'hypothèse ergodique, même sous sa forme adoucie quasi-ergodique, est très difficile à justifier. Pour pouvoir le faire, il semble nécessaire d'introduire, sous une forme ou sous une autre, un postulat de nature statistique (par exemple l'hypothèse du chaos moléculaire de Boltzmann), postulat qui, par sa nature même, est étranger aux lois de la Mécanique classique et ne peut être justifié par elle.

En résumé, parmi toutes les solutions possibles de l'équation (6) conséquence du théorème de Liouville, la Mécanique statistique classique choisit arbitrairement la solution la plus simple $\sigma = \text{const.}$ et tente de justifier ce choix par la démonstration d'un théorème d'ergodicité, démonstration qui exige l'intervention d'un postulat statistique étranger aux lois de la Dynamique classique.

Revenons maintenant à l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie causale et à l'interprétation statistique du $|\Psi|^2$. Ici, aussi bien dans le cas d'un seul corpuscule que dans celui d'un système, on considère un espace formé à l'aide des coordonnées du type q_i , sans intervention des moments conjugués p_i comme dans l'extension-en-phase, et pour un ensemble de systèmes on définit une densité $\rho(q_i, t)$ obéissant à l'équation de continuité (1) où \mathbf{v} est la vitesse dans l'espace physique ou dans l'espace de configuration donnée par la formule du guidage $\mathbf{v} = -\frac{1}{m} \mathbf{grad} \varphi$. Sauf dans les cas particuliers où $\text{div } \mathbf{v} \sim \Delta \varphi$

est nulle, cette équation ne se réduit pas à $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Le problème est donc nettement différent de celui qui se pose en Mécanique statistique classique. Cependant ici encore, nous avons adopté arbitrairement une solution particulière de l'équation en ρ , savoir $\rho = a^2(q_i, t) = |\Psi|^2$ qui, dans le cas de l'onde plane monochromatique se réduit à $\rho = \text{const.}$ Cette hypothèse nous a été suggérée par l'évidente équivalence *a priori*, dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme de direction donnée, de toutes les trajectoires parallèles et de toutes les positions sur ces trajectoires. On peut penser, comme en Mécanique statistique clas-

sique, qu'il faut chercher à justifier cette hypothèse naturelle, mais arbitraire, par la démonstration d'une sorte de théorème d'ergodicité.

En Mécanique statistique classique, on tente de justifier l'hypothèse $\sigma = \text{const.}$ de la façon suivante : on considère un ensemble de systèmes pour lesquels la densité σ dans l'extension-en-phase a une forme initiale $\sigma(q_i, p_i, t_0)$ quelconque et l'on suppose (c'est là l'élément purement statistique que l'on ajoute aux lois de la Dynamique) que cet ensemble de systèmes est soumis à des perturbations entièrement incoordonnées. On cherche à déduire que σ tend vers la forme $\sigma = \text{const.}$, quelle que soit sa forme initiale, de telle sorte que tout se passe comme si l'hypothèse ergodique était exacte. C'est une voie analogue qui a été suivie par M. David Bohm dans un Mémoire récent [8]. Dans le cadre de la théorie causale, il considère un ensemble de systèmes dont les points représentatifs dans l'espace de configuration ont initialement une densité quelconque $\rho(q_i, t_0)$ et il introduit l'hypothèse statistique que ces systèmes sont soumis à des collisions successives, les paramètres définissant chaque collision ayant des valeurs réparties au hasard : il en déduit que, quelle soit sa forme initiale, $\rho(q_i, t)$ tend vers $a^2(q_i, t) = |\Psi|^2$.

3. Bref résumé du Mémoire de M. Bohm de janvier 1953. — M. Bohm a commencé par préciser l'analogie de la question avec le théorème d'ergodicité en Mécanique statistique classique, en posant

$$(9) \quad \rho(q_i, t) = f(q_i, t) |\Psi(q_i, t)|^2 = f(q_i, t) a^2(q_i, t),$$

ce que l'on peut toujours faire, et en remarquant que, les équations de la théorie causale fournissant la relation $\frac{\partial a^2}{\partial t} + \text{div}(a^2 \mathbf{v}) = 0$ et la conservation des particules imposant la relation de continuité (1), on en tire

$$(10) \quad |\Psi|^2 \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial |\Psi|^2}{\partial t} + f \text{div}(|\Psi|^2 \mathbf{v}) + |\Psi|^2 \mathbf{v} \cdot \text{grad} f = 0$$

et par suite

$$(11) \quad \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} f = 0.$$

C'est donc la fonction f qui obéit ici à la même relation que la densité σ dans l'extension-en-phase, c'est-à-dire reste constante quand on suit le mouvement des particules. Le théorème analogue au théorème d'ergodicité consistera donc ici à démontrer que la fonction f tend à prendre une valeur constante si l'on admet une hypothèse statistique d'incoordination.

Je me contenterai de résumer rapidement la marche du raisonnement de M. Bohm, renvoyant au texte de son article pour le détail des calculs. Bohm considère un atome d'hydrogène qui se trouve dans un état excité doublement dégénéré. La fonction d'onde en coordonnées cylindriques a alors la forme

$$(12) \quad \Psi = \sqrt{z} g(\varphi, z) (c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) e^{i \frac{2\pi E_0 t}{h}}$$

avec

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} g(\varphi, z) z d\varphi = 1.$$

On en déduit aisément le mouvement du corpuscule par la formule du guidage. Bohm suppose alors que l'atome est soumis à une collision avec une particule très lourde dont le mouvement peut être décrit classiquement et il applique la méthode des perturbations pour calculer les variations de c_1 et de c_2 . Les valeurs de ces quantités avant le choc sont de la forme $c_j'(c_1, c_2, \mathbf{h}, \mathbf{u})$, où \mathbf{u} désigne la vitesse initiale d'approche de la particule incidente, \mathbf{h} le vecteur défini en abaissant la perpendiculaire du centre de l'atome sur la direction initiale du mouvement de la particule, c_1 et c_2 étant les valeurs après le choc. \mathbf{h} et \mathbf{u} sont donc les « paramètres d'impact » qui définissent la collision.

C'est ici que M. Bohm introduit un postulat statistique en admettant que les divers atomes d'un ensemble d'atomes d'hydrogène subissent des collisions correspondant à des valeurs distribués au hasard de \mathbf{h} et de \mathbf{u} de sorte que, si les c_j étant les mêmes pour tous les atomes au début, ils se trouvent distribués statistiquement après les collisions.

Partant de ce postulat statistique, M. Bohm effectue des calculs que je n'exposerai pas ici et qu'il y aurait sans doute lieu de retoucher sur certains points. Il arrive ainsi à montrer que la fonction $f(q_i, t)$ doit tendre vers une valeur constante quand t tend vers l'infini. Or, si la probabilité de présence $\rho(q_i, t)$ est normée à l'unité par $\int \rho d\tau = 1$ et si la fonction d'onde Ψ est également normée à l'unité par $\int |\Psi|^2 d\tau = 1$, la définition de f par (9) entraîne que, si f est une constante, cette constante est égale à 1. Donc f doit tendre vers 1 et par suite ρ doit tendre vers $|\Psi|^2$. La démonstration cherchée paraît donc ainsi obtenue, mais dans un cas assez particulier puisque l'on s'est limité à considérer un atome d'hydrogène dans un état excité doublement dégénéré.

Quelles que soient les critiques que l'on puisse adresser à la rigueur des raisonnements de M. Bohm et à leur manque de généralité, il appa-

raît que nous sommes là en présence d'un problème très analogue à celui que la démonstration d'ergodicité cherche à résoudre en Mécanique statistique classique. De même que l'on cherchait à montrer comment l'intervention de perturbations parfaitement incoordonnées tend à réaliser la densité $\sigma = \text{const.}$ des points représentatifs dans l'extension-en-phase, on doit ici chercher à montrer que l'action de perturbations parfaitement incoordonnées doit faire tendre la fonction $f = \frac{\rho}{|\Psi|^2}$ vers une constante qui, en raison de la normalisation de ρ et de $|\Psi|^2$ devra être égale à 1.

En résumé, en ce qui concerne la justification de la signification statistique du $|\Psi|^2$ dans la théorie causale, la situation ne me paraît pas plus mauvaise qu'en ce qui concerne la justification rigoureuse de la Mécanique statistique classique et cette conclusion me paraît assez encourageante.

4. Remarques complémentaires. — Le principe de la démonstration de M. Bohm consiste à remarquer que l'onde Ψ d'un corpuscule ou d'un système est toujours légèrement perturbée par l'existence de petites actions extérieures (par exemple de faibles collisions) et à admettre que les petits potentiels perturbateurs représentent ces actions avec leurs fluctuations entièrement désordonnées. Il s'agit ici de potentiels du type classique, mais M. Vigier a justement remarqué qu'on pourrait envisager de petits potentiels quantiques perturbateurs dus à de petites fluctuations incoordonnées des conditions aux limites (par exemple le mouvement thermique des parois d'un récipient). En cherchant à répondre à une objection de M. Einstein contre la formule du guidage, nous avons déjà vu (chap. XI, § 3) qu'il peut y avoir lieu d'introduire de telles fluctuations des conditions aux limites.

L'idée de M. Vigier me paraît pouvoir se résumer ainsi. A une forme donnée de l'onde Ψ , correspond une congruence L formée par une infinité de trajectoires possibles définies à partir de la phase de l'onde Ψ par la formule du guidage. De petites actions extérieures du type classiques ou de petites fluctuations des conditions aux limites s'exprimant par de petites perturbations du potentiel quantique font constamment sauter le corpuscule d'une trajectoire de la congruence L à une autre. Si ces sauts sont entièrement incoordonnés, on conçoit que les corpuscules (ou les points représentatifs de systèmes) vont être animés d'une sorte de mouvement brownien, les courbes de la congruence L continuant à définir des trajectoires moyennes. Il faudrait alors arriver à démontrer que ce sautilllement d'une trajectoire à une autre se trouve

réaliser en moyenne la probabilité de présence $|\Psi|^2$. Cette démonstration ferait probablement appel aux propriétés des « chaînes de Markoff » ⁽¹⁾.

Quand nous avons étudié certaines conséquences de la formule du guidage, nous avons vu que, dans certains états quantifiés, le mouvement du corpuscule prévu par la formule du guidage peut être si simple (par exemple immobilité ou mouvement circulaire uniforme) qu'on ne voit pas du tout comment peut se réaliser la répartition en $|\Psi|^2$ de la densité de probabilité de présence. Mais de petites perturbations aléatoires transformeront Ψ en $\Psi + \delta\Psi$ où $\delta\Psi$ est une très petite modification de Ψ . Cette très petite modification, en modifiant aléatoirement la phase φ de l'onde, suffit pour transformer le mouvement simple non perturbé en un mouvement très compliqué à caractère brownien. Si l'on *admet* que ce mouvement brownien réalise la distribution de probabilité de présence $|\Psi + \delta\Psi|^2 \simeq |\Psi|^2$, on comprend pourquoi, si l'on fait abstraction des inévitables perturbations aléatoires, on est amené à considérer la densité de probabilité de présence dans l'état non perturbé Ψ comme égale à $|\Psi|^2$. Le lien de ce résultat déjà énoncé précédemment avec les idées que nous venons de développer est évident.

On peut, croyons-nous, résumer ce qui précède de la façon suivante. Si l'on fait abstraction des perturbations aléatoires dues les unes à des actions extérieures, les autres à des fluctuations aléatoires des conditions aux limites, le mouvement du corpuscule (ou du point représentatif) est donné directement à partir de la phase de l'onde Ψ non perturbée par la formule du guidage. Mais, en réalité, il intervient toujours de petites actions extérieures aléatoires et de petites fluctuations aléatoires des conditions aux limites : ce sont elles qui, en provoquant une sorte de mouvement brownien du corpuscule (ou du point représentatif) qui le fait constamment sauter d'un mouvement non perturbé à un autre, assure la réalisation de la densité de présence en $|\Psi|^2$. On parvient ainsi, tout en conservant la signification physique moyenne des trajectoires prévues par la théorie causale, à leur superposer une sorte de mouvement brownien. Il est curieux de constater que l'on réaliserait de cette façon une synthèse des conceptions de la théorie causale avec l'affirmation maintes fois répétée par M. Einstein que les succès de l'interprétation statistique de la Mécanique ondulatoire impliquent l'existence de mouvements corpusculaires sous-jacents à caractère brownien.

⁽¹⁾ MM. Bohm et Vigier ont publié récemment une justification de la signification statistique du $|\Psi|^2$ reposant sur ce genre de conceptions [16].

CHAPITRE XIV.

L'OBJECTION DE M. PAULI A LA THÉORIE DE L'ONDE-PILOTE.

1. **Discussion de la théorie de l'onde-pilote au Conseil Solvay d'octobre 1927.** — A la fin de mon Mémoire du *Journal de Physique* de mai 1927, après avoir exposé les grandes lignes de la théorie de la double solution, j'avais fait la remarque suivante. La théorie de la double solution m'avait conduit à la formule du guidage

$$(1) \quad \mathbf{v} = -c^2 \frac{\text{grad } \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}$$

en partant de la Mécanique relativiste à un Ψ alors seule connue, puis à la formule de la probabilité de présence correspondante

$$(2) \quad \varphi = \text{const. } a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right).$$

Elle m'avait aussi amené à introduire le potentiel quantique défini par

$$(3) \quad Q = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\square f}{f} = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\square a}{a}$$

à l'approximation newtonienne.

Constatant alors que finalement, on pouvait exprimer toutes ces grandeurs en se servant uniquement de l'amplitude a et de la phase φ de

l'onde Ψ écrite sous la forme $a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, j'écrivais à la fin de mon Mémoire : « Si l'on ne veut point invoquer le principe de la double solution, il serait admissible d'adopter le point de vue suivant : on admettra l'existence, en tant que réalités distinctes du corpuscule et de l'onde continue Ψ et l'on prendra comme postulat que le mouvement du corpuscule est déterminé en fonction de la phase (de l'onde Ψ) par la relation du guidage. On conçoit alors l'onde Ψ comme guidant le corpuscule : c'est une onde-pilote ».

Mais je m'empressais d'ajouter : « En prenant ainsi l'équation du guidage comme postulat, on évite d'avoir à la justifier par le principe de la double solution, mais ce ne peut être là qu'une attitude provisoire. Il faudra bien, sans doute, *réincorporer* le corpuscule dans le phénomène ondulatoire et l'on sera ainsi probablement ramené à des idées analogues à celles qui ont été développées plus haut. »

Ces citations marquent bien quel était mon état d'esprit à la fin de ce travail. Je considérais le point de vue de l'onde-pilote comme pratiquement utilisable, mais comme ne pouvant trouver sa véritable justification que dans le cadre d'une théorie plus profonde du type « double solution ».

Néanmoins chargé de présenter un rapport sur la Mécanique ondulatoire devant le Conseil Solvay qui devait se réunir à Bruxelles en octobre 1927, je reculai devant la difficulté de justifier mathématiquement le point de vue de la double solution et je me contentai d'exposer dans mon rapport le point de vue de l'onde-pilote. Au Conseil Solvay, tandis que quelques « anciens » (Lorentz, Einstein, Langevin, Schrödinger) maintenaient la nécessité de rechercher une interprétation causale de la Mécanique ondulatoire sans cependant se prononcer sur ma tentative, MM. Bohr et Born ainsi que leurs jeunes disciples (MM. Heisenberg, Dirac, etc.) se prononçaient catégoriquement en faveur de la nouvelle interprétation purement probabiliste qu'ils venaient de développer et ne discutaient même pas mon point de vue. C'est M. Pauli qui fit la seule objection précise à ma théorie en raisonnant sur le cas du choc d'un corpuscule et d'un rotateur que M. Fermi venait récemment d'étudier.

Je vais exposer l'objection de M. Pauli, mais, pour le faire, je dois d'abord rappeler dans ses grandes lignes le raisonnement qu'avait développé M. Fermi.

2. Choc d'un corpuscule et d'un rotateur plan d'après M. Fermi. — Rappelons d'abord qu'on appelle « rotateur plan » un point matériel de masse M assujéti à se déplacer dans un plan en restant à une distance fixe R de l'origine des coordonnées. Au point de vue mécanique, ce rotateur est caractérisé par son moment d'inertie $I = MR^2$.

Le rotateur, dont nous négligeons les dimensions, est supposé placé en un point O choisi comme origine des coordonnées; un corpuscule assujéti à suivre la droite Ox vient heurter le rotateur ⁽¹⁾. Une inter-

⁽¹⁾ Dans son exposé M. Fermi avait seulement assujéti le corpuscule à rester dans un plan xOy .

action, un choc au sens large du mot, a lieu entre le corpuscule et le rotateur. Si z est l'abscisse du corpuscule, θ l'angle polaire qui fixe la configuration du rotateur, la fonction potentiel correspondant à l'interaction, sera de la forme $U(z, \theta)$: elle ne sera différente de zéro que pour les petites valeurs de z (positives ou négatives) et périodique de période 2π en θ .

Ceci posé, le problème à résoudre est le suivant : sachant qu'au début du mouvement, le corpuscule, dont la masse est m , a une certaine vitesse v_0 , déterminer les divers résultats possibles du choc entre le corpuscule et le rotateur.

On représentera le système en considérant l'espace de configuration formé à l'aide des deux variables z et θ . L'équation de propagation dans l'espace de configuration sera

$$(4) \quad \frac{1}{m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{MR^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - U(z, \theta)] \Psi = 0,$$

E étant l'énergie totale du système. Faisons le changement de variables

$$(5) \quad \xi = \sqrt{J} \theta, \quad \zeta = \sqrt{m} z.$$

L'équation de propagation devient

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - U(\xi, \zeta)] \Psi = 0$$

$U(\xi, \zeta)$ étant nulle dès que ζ n'est pas très petit et étant périodique de période $2\pi\sqrt{J}$ en ξ .

La fréquence de l'onde Ψ étant $\nu = \frac{E}{h}$, nous pouvons écrire

$$(7) \quad \frac{8\pi^2}{h^2} E \Psi = - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2}, \quad \text{avec} \quad V = \sqrt{\frac{E}{2}}$$

et l'équation des ondes devient

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = \frac{8\pi^2}{h^2} U(\xi, \zeta) \Psi.$$

Voici maintenant la remarque très ingénieuse qui avait permis à M. Fermi de résoudre simplement le problème. La fonction U n'étant différente de zéro qu'au voisinage immédiat de l'axe $O\xi$, là où ξ est très petit, et étant périodique de période $2\pi\sqrt{J}$ en ξ , tout se passe comme si l'axe des ξ jouait dans l'espace de configuration à deux dimensions ξ, ζ le rôle d'un réseau d'équidistance $2\pi\sqrt{J}$ susceptible de diffuser l'onde Ψ incidente.

Construisons d'abord cette onde Ψ incidente. L'onde Ψ_1 qui représente l'état initial du corpuscule incident avant l'interaction est simplement

$$(9) \quad \Psi_1 = \alpha_1 e^{\frac{2\pi i}{h} [E_1 t - m v_0 z]} = \alpha_1 e^{\frac{2\pi i}{h} [E_1 t - \sqrt{2E_1} z]},$$

avec

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

D'autre part, soit ω_0 la vitesse angulaire initiale du rotateur. L'onde Ψ_2 initiale de ce rotateur est

$$(10) \quad \Psi_2 = \alpha_2 e^{\frac{2\pi i}{h} [E_2 t - J \omega_0 \theta]} = \alpha_2 e^{\frac{2\pi i}{h} [E_2 t - \sqrt{2E_2} z]},$$

avec

$$E_2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2.$$

En effet, Ψ_2 doit être solution de l'équation du rotateur isolé

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{8\pi^2}{h^2} E \Psi_2 = 0 \quad \text{pour } E = E_2.$$

Comme Ψ_2 doit reprendre la même valeur quand ξ augmente de $2\pi\sqrt{J}$, on doit avoir

$$(12) \quad \frac{2\pi}{h} \sqrt{2E_2} \cdot 2\pi\sqrt{J} = n \cdot 2\pi \quad (n \text{ entier}),$$

soit

$$(13) \quad E_2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2 = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 J}.$$

C'est la formule bien connue qui donne les valeurs quantifiées de l'énergie pour le rotateur plan. L'état initial du rotateur étant nécessairement quantifié, la vitesse angulaire initiale ω_0 du rotateur obéit à la relation (13).

L'onde Ψ du système corpuscule + rotateur dans l'espace de configuration $\xi\zeta$ a pour forme initiale le produit $\Psi_1 \Psi_2$, soit

$$(14) \quad \Psi = \alpha_1 \alpha_2 e^{\frac{2\pi i}{h} [(E_1 + E_2)t - \sqrt{2E_1} \zeta - \sqrt{2E_2} z]}.$$

Posons

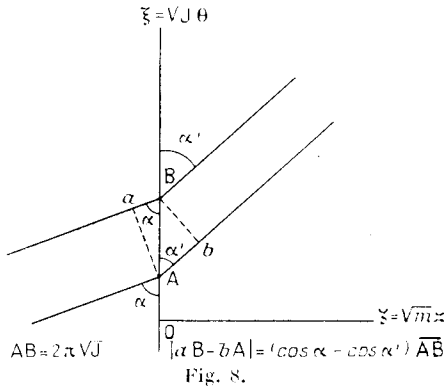
$$(15) \quad \cos z = \sqrt{\frac{E_2}{E}}, \quad \sin z = \sqrt{\frac{E_1}{E}}, \quad \lambda = \frac{V}{v} = \frac{h}{\sqrt{2E}},$$

où $E = E_1 + E_2$. Il vient pour la forme initiale du Ψ ,

$$(16) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \left[Et - \frac{\xi \sin \alpha}{\lambda} - \frac{\xi \cos \alpha}{\lambda} \right]}.$$

Dans l'espace de configuration, l'onde Ψ incidente est donc une onde plane monochromatique de fréquence $\nu = \frac{E}{h}$ et de longueur d'onde λ dont la normale fait l'angle α avec $O\xi$.

On peut alors, en utilisant la remarque de M. Fermi, considérer l'interaction entre le rotateur et le corpuscule comme produisant une diffusion de l'onde Ψ dans l'espace de configuration. Les directions de diffusion privilégiées sont données par la relation exprimant l'accord



des phases pour un réseau linéaire de période $2\pi\sqrt{J}$ placé suivant $O\xi$, savoir

$$(17) \quad 2\pi\sqrt{J}(\cos \alpha' - \cos \alpha) = k\lambda, \quad (k \text{ entier})$$

comme on le lit aisément sur la figure 8.

Après l'interaction, l'onde Ψ aura donc la forme

$$(18) \quad \Psi = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} e^{\frac{2\pi i}{h} \left[Et - \frac{\xi \sin \alpha'}{\lambda} - \frac{\xi \cos \alpha'}{\lambda} \right]},$$

α' portant prendre toutes les valeurs quantifiées par (17). L'onde plane incidente est ainsi transformée par l'interaction en une superposition d'ondes planes diffusées.

Revenons aux variables z et θ et remplaçons λ par sa valeur, nous trouvons pour le Ψ final l'expression

$$(19) \quad \Psi = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} e^{\frac{2\pi i}{h} \left[Et - \sqrt{2mE} z \sin \alpha' - \sqrt{2mE} \theta \cos \alpha' \right]}.$$

D'après les principes de la Mécanique ondulatoire, si l'on détermine par l'observation l'état de mouvement final du corpuscule et du rotateur, on trouvera un état de mouvement représenté par l'une des ondes planes du développement (19). Or, l'une de ces ondes planes représente un mouvement d'énergie E'_1 et de quantité de mouvement $\sqrt{2mE'_1} = \sqrt{2mE} \sin \alpha'$ à laquelle correspond la vitesse corpusculaire $\sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \alpha'$: ce mouvement a une énergie $E'_1 = E \sin^2 \alpha'$. A cette même onde plane de l'espace de configuration correspond un mouvement corrélé du rotateur d'énergie E'_2 et de quantité de mouvement $\sqrt{2JE'_2} = \sqrt{2JE} \cos \alpha'$, ce qui donne $E'_2 = E \cos^2 \alpha'$. On a donc $E'_1 + E'_2 = E$, ce qui exprime la conservation de l'énergie. Il n'y a pas de conservation de la quantité de mouvement parce que nous avons implicitement supposé que le rotateur est fixé en O et ne peut pas prendre de mouvement d'ensemble lors du choc et que le corpuscule est assujéti à rester sur Oz.

Compte tenu de la définition (15) de λ , l'équation (17) nous donne

$$(20) \quad \cos \alpha' = \cos \alpha + \frac{1}{2\pi\sqrt{J}} k \frac{h}{\sqrt{2E}}$$

et puisque

$$(21) \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{E_2}{E}} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{nh}{2\pi\sqrt{2J}},$$

il vient

$$(22) \quad \sqrt{E} \cos \alpha' = \frac{(n+k)h}{2\pi\sqrt{2J}};$$

d'où finalement

$$(23) \quad E'_2 = E \cos^2 \alpha = \frac{(n+k)^2 h^2}{8\pi^2 J},$$

n et $n+k$ étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Si donc l'on détermine par une observation les états de mouvement après le choc, on trouvera toujours que l'effet du choc a été de faire passer le rotateur de l'état quantifié initial caractérisé par le nombre quantique n à un état quantifié final caractérisé par le nombre quantique $n+k$, de sorte que le rotateur se trouvera toujours, aussi bien à la fin qu'au début, dans un état quantifié.

Trois cas peuvent alors se présenter :

1° $k=0$. — Le corpuscule et le rotateur conservent leurs états initiaux. Le choc a lieu sans échange d'énergie : il est « élastique ».

2° $k > 0$. — Le corpuscule cède de l'énergie au rotateur qui passe dans un état quantifié d'énergie supérieure à celle de l'état quantifié initial. Il y a « choc inélastique de première espèce ».

3° $k < 0$. — Le rotateur passe de son état quantifié initial à un état quantifié d'énergie moindre en cédant de l'énergie au corpuscule incident. Employant une expression introduite naguère par MM. Klein et Rosseland, on peut dire qu'il y a alors « choc inélastique de deuxième espèce ».

Tel est le beau calcul effectué dès 1927 par M. Fermi et relatif au choc d'un corpuscule avec un rotateur plan.

3. Objection de M. Pauli contre la formule du guidage. — Comme je l'ai rappelé plus haut, au Conseil de Physique Solvay d'octobre 1927, M. Pauli s'est servi du calcul de Fermi pour critiquer la formule du guidage qui est commune à la théorie de la double solution et à celle de l'onde-pilote ⁽¹⁾.

La formule (19) nous donne la forme finale du Ψ du système corpuscule + rotateur dans l'espace de configuration après le choc sous la forme d'une superposition d'ondes planes monochromatiques et l'interprétation probabiliste du Ψ nous enseigne que chacune de ces ondes planes correspond à un état de mouvement du corpuscule et à un état de mouvement du rotateur qui sont corrélés entre eux. Il n'y a là, disait M. Pauli, aucune difficulté, mais une grave difficulté apparaît si l'on veut attribuer au point représentatif du système dans l'espace de configuration $\pi\theta$ un mouvement défini par la formule du guidage. En effet, il

faudrait alors écrire le Ψ final (19) sous la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ avec a et φ réels et, en raison même de la superposition des ondes planes monochromatiques, la phase φ aurait alors une forme très compliquée : le mouvement final du point représentatif dans l'espace de configuration serait donc un mouvement très complexe sans aucun rapport avec les états finaux quantifiés du rotateur que l'interprétation orthodoxe fait tout de suite apparaître et dont l'existence est confirmée par l'expérience. M. Pauli ajoutait qu'il n'était pas possible de lever la difficulté en conduisant une onde Ψ limitée puisque, en raison de la période 2π de la coordonnée θ , il est impossible de supposer l'onde Ψ limitée dans le sens $O\theta$.

(1) Voir *Électrons et photons* (Comptes rendus du Ve Conseil de Physique Solvay, Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 287-288).

Ce dernier argument me paraît surtout prouver le caractère très fictif de l'espace de configuration et des propagations d'ondes dans cet espace (comment pourrait-on, en effet, attribuer un sens physique à cet axe $O\theta$ sur lequel on déroule indéfiniment les valeurs d'un angle qui en réalité varie seulement de 0 à 2π ?). Il ne m'avait pas convaincu et je voyais dans la limitation des trains d'ondes une manière d'échapper à l'objection de M. Pauli. Je lui avais, en effet, répondu : « La difficulté signalée par M. Pauli a son analogue en Optique classique. On ne peut parler de faisceau diffracté par un réseau dans une direction donnée que si le réseau et l'onde incidente sont limités latéralement, car autrement les faisceaux diffractés chevaucheraient et seraient noyés dans l'onde incidente. Dans le problème de Fermi, il faut aussi l'onde Ψ limitée latéralement dans l'espace de configuration ».

Examinons la question de plus près. On peut accorder à M. Pauli que l'onde Ψ incidente n'est pas limitée dans le sens $O\theta$, mais elle l'est nécessairement dans le sens Oz puisque l'onde Ψ_1 du corpuscule incident est nécessairement un train d'ondes que nous supposons presque monochromatique, mais qui est cependant de longueur finie. Il en résulte que l'état final est bien représenté par la formule (19), mais avec cette réserve importante que chacune des ondes planes monochromatiques figurant dans ce développement est en réalité un train d'ondes presque monochromatique dont les dimensions sont limitées dans le sens Oz . Chacun de ces trains d'ondes correspond à une valeur différente de l'angle quantifié α' et, par suite, est animé d'une vitesse globale le long de Oz égale, nous l'avons vu, à $\sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \alpha'$. Les vitesses des divers trains d'ondes diffusés n'étant pas les mêmes le long de Oz , ces trains d'ondes qui sont superposés à la sortie du réseau constitué par l'axe $O\theta$ finiront par se séparer et, tout en restant indéfinis dans le sens $O\theta$, correspondant à des régions séparées de l'axe Oz .

A la fin du choc, le mouvement du point représentatif supposé donné par la formule du guidage l'amènera *dans l'un ou l'autre* des trains d'ondes émergents séparés et cela suivant la position initiale de ce point dans le train d'ondes incident. La formule du guidage appliquée à la position finale du point représentatif nous montrera alors que le rotateur se trouve dans un état final quantifié et que le corpuscule possède le mouvement corrélé avec cet état quantifié. On retrouvera donc exactement les conclusions de Fermi en accord avec l'existence expérimentale des seuls états quantifiés pour les rotateurs.

Si, au lieu d'assujettir le corpuscule à rester sur une droite Oz , on

l'assujettissait seulement, comme l'avait fait M. Fermi dans son Mémoire, à rester dans un plan xOy , il y aurait lieu de limiter le train d'ondes incident aussi bien dans la direction Oy que dans la direction Ox et l'on aurait toujours une séparation finale des trains d'ondes après l'interaction.

J'avais donc bien aperçu, comme le montre la citation faite plus haut, que la réponse à l'objection de M. Pauli devait s'appuyer sur le fait que les trains d'ondes sont toujours limités, idée qui a été reprise par M. Bohm dans ses récents Mémoires.

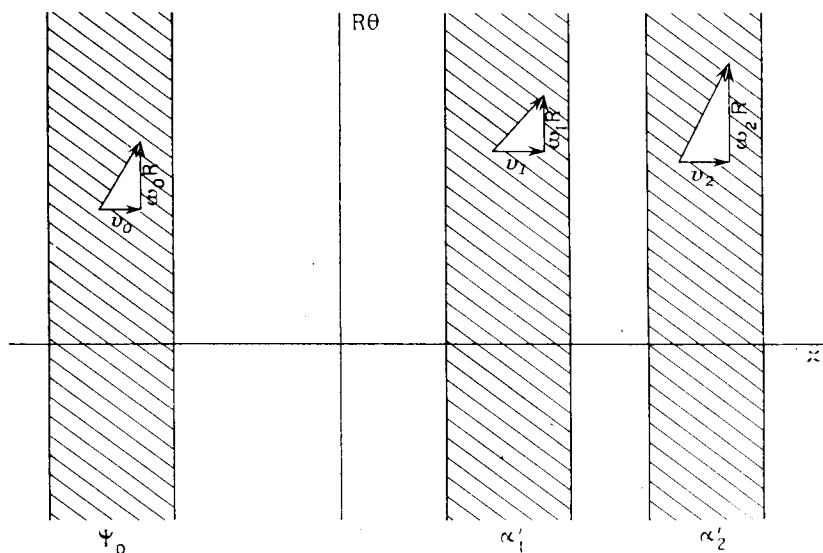


Fig. 9.

Nous avons donc rencontré ici pour la première fois l'idée qu'il ne faut jamais, comme M. Schrödinger l'a encore récemment souligné, oublier que les trains d'ondes sont toujours limités. C'est là un point que l'on passe le plus souvent sous silence aussi bien en Optique classique qu'en Mécanique ondulatoire. Nous verrons cependant que, pour certains problèmes, la limitation des trains d'ondes a une importance capitale.

4. Abandon des tentatives d'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire après 1927. — Dans les mois qui suivirent le Conseil Solvay d'octobre 1927, j'ai abandonné le point de vue de l'onde-pilote que j'y avais soutenu. Ce n'est pas à cause de l'objection de M. Pauli car je

croyais apercevoir, je l'ai dit, la manière d'y répondre, mais c'est pour d'autres raisons plus générales que j'ai notamment développées dans mon premier cours à l'Institut Henri Poincaré publié par la suite sous le titre *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire* ⁽¹⁾. Je vais résumer ces raisons.

Le corpuscule, conçu comme une réalité physique, ne peut pas, me disais-je, être guidé par l'onde Ψ dont le caractère de représentation de probabilité, à la fois subjective et fonction des connaissances de celui qui l'emploie, avait été rendu manifeste par le développement de la Mécanique ondulatoire.

Ce caractère fictif de l'onde Ψ s'imposait déjà pour l'onde Ψ associée à un seul corpuscule dans l'espace ordinaire : il s'imposait davantage encore par l'onde Ψ d'un système qui se propage dans l'espace de configuration du système, espace purement abstrait. D'ailleurs, même dans le cas d'un seul corpuscule, cas où l'onde $\Psi(x, y, z, t)$ paraît s'exprimer à l'aide des trois coordonnées courantes de l'espace physique, les variables x, y, z dans l'interprétation admise ne représentent pas réellement les coordonnées d'un point quelconque de l'espace physique, mais bien les positions possibles du corpuscule dans cet espace. Cette distinction, en apparence subtile, est cependant nécessaire pour bien comprendre comment on passe du cas général d'un système de corpuscules au cas d'un seul corpuscule. Donc, même dans ce dernier cas où il suffit d'employer trois coordonnées x, y, z , la fonction d'onde $\Psi(x, y, z, t)$ ne peut pas représenter un *champ* ayant une réalité physique dans l'espace physique à trois dimensions.

Heisenberg avait d'ailleurs insisté sur le fait que toute constatation expérimentale effectuée sur un corpuscule ou sur un système modifie instantanément la forme de l'onde Ψ en nous obligeant à opérer ce qu'il a appelé « la réduction du paquet de probabilité ». Par le seul effet de la constatation expérimentale, toute une portion de l'onde Ψ s'évanouit « comme s'évanouit l'espérance d'une éventualité qui ne s'est pas réalisée ». Ces propriétés de l'onde Ψ , auxquelles se rattachent les objections de MM. Einstein et Schrödinger, sont compréhensibles si cette onde n'est qu'une représentation de probabilités, mais elles ne permettent pas de lui attribuer le rôle d'une réalité physique : elle ne peut donc pas être un agent physique guidant le mouvement du corpuscule.

En regardant les choses de près, on voit aussi que, si le mouvement

⁽¹⁾ Hermann, Paris, 1930.

du corpuscule était guidé par l'onde Ψ , il dépendrait non seulement de la position que le corpuscule a eue initialement, mais de toutes qu'il aurait pu avoir et *qu'il n'a pas eues*. Cette circonstance paradoxale exclut tout espoir d'un véritable retour à une conception causale classique du mouvement des corpuscules à l'aide de la seule conception de l'onde-pilote.

Toutes ces objections fondamentales se trouvent exposées dans l'Ouvrage que j'ai cité ci-dessus. On peut en trouver d'autres encore. Nous signalons, par exemple, la suivante récemment développée par M. Francis Perrin et sur laquelle nous aurons à revenir plus longuement. Si l'on considère l'onde sphérique divergente qui représente l'émission isotrope de corpuscules par une source, elle a pour expression $\frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}$ et son amplitude décroît comme l'inverse de la distance à la source. Le $|\Psi|^2$ décroît donc en raison inverse du carré de la distance à la source, ce qui correspond bien à l'interprétation de cette grandeur comme densité de probabilité de présence. A une très grande distance de la source, l'onde Ψ n'a donc plus qu'une amplitude extrêmement petite et cependant, si elle pénètre dans un dispositif d'interférences, la théorie de l'onde-pilote nous affirme que le mouvement du corpuscule dans cet appareil est guidé par la propagation d'une onde Ψ dont l'amplitude est infinitésimale : cela est très choquant du point de vue physique. Sans doute, du point de vue purement mathématique, on pourrait répondre que le potentiel quantique agissant sur le corpuscule est proportionnel à $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ et par suite ne dépend pas de la valeur absolue de α ; mais physiquement, si l'onde Ψ était vraiment un agent physique agissant sur le corpuscule, on conçoit mal comment cette action pourrait rester la même, quelque petite que soit l'amplitude de l'onde Ψ . L'exemple de M. Perrin montre très clairement que l'onde Ψ , précisément parce qu'elle représente une probabilité de présence qui diminue nécessairement quand l'onde sphérique s'épanouit dans l'espace, ne peut pas être considérée comme agent physique guidant le corpuscule.

Telles sont les considérations qui m'ont amené en 1928 à abandonner comme insoutenable la théorie de l'onde-pilote. La forme primitive de mes idées, c'est-à-dire la théorie de la double solution, ne me paraissait pas se heurter nécessairement aux mêmes difficultés, mais j'en étais arrivé à la conviction que sa justification mathématique, si elle était possible, était au-dessus de mes forces. Chargé d'enseignement à la

Faculté des Sciences de Paris à partir de novembre 1928, je n'ai pas cru avoir le droit d'enseigner une manière de voir que je n'étais pas en état de justifier. Je me suis donc rallié à l'interprétation purement probabiliste mise en avant par MM. Born, Bohr et Heisenberg. Malgré les critiques de quelques savants isolés comme MM. Einstein et Schrödinger, critiques qui ont été exposées précédemment, cette interprétation purement probabiliste a été ensuite adoptée par presque tous les théoriciens de la Physique. Elle est ainsi devenue l'interprétation « orthodoxe » de la Mécanique ondulatoire. A ma connaissance, entre 1928 et 1951, aucune tentative sérieuse n'a été faite pour tenter de construire effectivement une autre interprétation se rapprochant davantage des conceptions classiques.

Puis sont venus les deux Mémoires publiés en janvier 1952 par M. David Bohm. Nous allons maintenant les analyser dans leurs grandes lignes.

CHAPITRE XV.

LA THÉORIE DE LA MESURE D'APRÈS M. DAVID BOHM ET LE SCHÉMA STATISTIQUE DE LA THÉORIE CAUSALE.

1. **Les Mémoires de M. Bohm de janvier 1952.** — Les deux Mémoires conjoints que M. David Bohm a publiés en janvier 1952 dans la *Physical Review* [3] ont ramené l'attention sur la question de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire. Dans ces Mémoires, M. Bohm a repris la théorie de l'onde-pilote sous la forme que je lui avais donnée au Conseil Solvay de 1927. Il admet que l'onde Ψ est une réalité physique (même l'onde Ψ de l'espace de configuration!). J'ai dit plus haut pourquoi une telle hypothèse me paraissait absolument inadmissible.

M. Bohm écrit (p. 177, 2^e colonne) qu'après la réduction du paquet de probabilité par une observation « la fonction d'onde peut être renormalisée parce que la multiplication du Ψ par une constante ne change aucune des quantités ayant une signification physique telles que la vitesse de la particule ou le potentiel quantique ». Il est bien exact que, si l'on multiplie la fonction Ψ par une constante, on ne modifie ni le gradient de sa phase φ , ni le rapport $\frac{\square \alpha}{\alpha}$; mais il est évident que, si le Ψ représentait une réalité physique, on n'aurait aucunement le droit de multiplier son amplitude par une constante : ce qui permet de la faire, c'est que le Ψ n'est qu'une représentation de probabilité et que sa normalisation a seulement pour but de pouvoir évaluer en valeur absolue la probabilité de présence à l'aide de l'expression $|\Psi|^2$. D'ailleurs la réduction du paquet ne comporte pas seulement une renormalisation de la fonction Ψ , mais aussi en général une modification brusque et complète de sa forme, ce qui serait incompréhensible si Ψ était une réalité physique.

Les Mémoires de Bohm contiennent aussi d'autres affirmations qui nous paraissent douteuses. Par exemple, il a sans doute raison de dire qu'à très petite échelle (10^{-13} cm ou au-dessous) la formule du guidage

et par suite la signification statistique du Ψ pourrait n'être plus exacte, mais la modification qu'il propose, en conséquence, de faire subir à l'équation de propagation me paraît artificielle.

Néanmoins, si le travail de M. Bohm appelle certaines réserves, il a aussi des mérites qui me semblent incontestables. En particulier, il a ramené l'attention sur la possibilité d'une interprétation de la Mécanique ondulatoire autre que celle qui est actuellement adoptée et il a montré qu'il n'est pas inutile de soumettre la question à un nouvel examen minutieux. Le problème qui se pose est clairement défini dans les trois premiers paragraphes de son premier Mémoire et l'on peut relever dans son texte plusieurs remarques qui paraissent justes et intéressantes.

M. Bohm a retrouvé mes anciens résultats relatifs au mouvement du corpuscule dans un atome quantifié et notamment à son immobilité dans les états s à moment cinétique nul. Il a aussi analysé le cas du passage d'un corpuscule à travers une barrière de potentiel, cas qui est, on le sait, particulièrement important pour la théorie de la radioactivité α . On trouve naturellement que les trajectoires doivent être très compliquées, mais il n'y a plus l'indéterminisme complet admis par l'interprétation actuelle. Ce serait la position initiale *inconnue* de la particule qui, en déterminant tout son mouvement ultérieur, serait la cause de la plus ou moins grande rapidité avec laquelle elle traverse la barrière. La probabilité qui s'introduit ici serait donc une probabilité du type classique, compatible avec la causalité, qui s'introduit par suite de notre ignorance de la position initiale exacte du corpuscule et de son mouvement ultérieur.

Étudiant le cas où l'onde Ψ est formée par une superposition d'ondes stationnaires, M. Bohm montre par le calcul que le potentiel quantique, l'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule fluctuent alors constamment et très rapidement et il ajoute : « S'il arrive à la particule d'atteindre une région de l'espace où l'amplitude de l'onde Ψ est petite, ces fluctuations deviendront tout à fait violentes. Nous voyons donc qu'en général, le mouvement de la particule dans un état non stationnaire est très irrégulier et compliqué, ressemblant beaucoup plus à un mouvement brownien qu'à l'orbite régulière d'une planète autour du Soleil ». Nous avons déjà vu l'intérêt de cette remarque.

Telles sont quelques-uns des résultats intéressants développés par M. Bohm dans ses Mémoires, mais la partie la plus originale de son travail est certainement sa théorie de la mesure que nous allons maintenant analyser.

2. **La théorie de la mesure d'après M. Bohm.** — M. Bohm a d'abord analysé les phénomènes de collision dans la théorie causale. Avant la collision, chaque particule a son paquet d'ondes Ψ séparé dans l'espace physique et la fonction d'onde Ψ dans l'espace de configuration est alors simplement le produit des paquets d'ondes individuels. Puis les paquets d'ondes se rapprochent et se superposent et l'interaction commence. La fonction d'onde Ψ du système devient une somme de produits dont chacun correspond à l'un des résultats possibles de l'interaction. Les mouvements des particules cessent alors d'être indépendants. Les fonctions α et φ , et par suite les potentiels quantiques et les quantités de mouvement des particules, subissent de rapides et violentes fluctuations dans l'espace et dans le temps. Dans les régions de l'espace de configuration où α est petit, les fluctuations s'amplifient et peuvent aboutir à de grands échanges d'énergie et d'impulsion dans un temps très court, même si le potentiel d'interaction au sens usuel reste petit. A la fin de l'interaction, les paquets d'ondes correspondant aux diverses possibilités se séparent et ne se superposent plus dans l'espace. Alors le point figuratif du système se trouvera dans l'un des paquets d'ondes de l'espace de configuration et, avec la description dans l'espace physique, chaque particule aura sa position dans son paquet d'ondes, la probabilité de ces positions corrélées étant donnée par $|\Psi|^2$. Puisque les corpuscules conservent toujours une position dans l'espace physique, toutes les difficultés de l'interprétation actuelle relatives aux systèmes corrélés se trouvent levées.

La causalité sera aussi rétablie car le résultat final dépendra des positions initiales des corpuscules; mais en pratique les trajectoires de ces particules seront extrêmement compliquées et rapidement variables avec les positions initiales et leur calcul exact sera impossible. La statistique s'introduira donc, mais seulement à la manière classique : son intervention résultera à la fois de l'impossibilité de déterminer exactement les positions initiales sans troubler tout le phénomène et de notre incapacité à suivre les trajectoires tandis que, dans l'interprétation actuelle, on admet que *rien* ne détermine le résultat de l'interaction et l'on suppose *a priori* que la description des phénomènes est intrinsèquement et inévitablement statistique.

Cette étude des phénomènes d'interaction a conduit M. Bohm à analyser les processus de mesure qui se réduisent en somme à l'interaction d'un corpuscule avec un appareil de mesure (p. 179-184 du second Mémoire). L'exécution de la mesure établit des « corrélations » entre l'état final de la particule et l'état final de l'appareil de mesure de

sorte que l'observation de l'état final de l'appareil de mesure permette de déduire l'état final du corpuscule.

Bohm considère donc la mesure d'une certaine grandeur « observable » liée à un électron. \mathbf{R} représentera la position de l'électron, y la coordonnée « significative » de l'appareil de mesure, celle qu'on pourra, par exemple, lire sur un cadran. Bohm remarque qu'il suffit de considérer une mesure « impulsive », c'est-à-dire comportant une interaction très intense et très rapide entre l'électron et l'appareil de mesure. Alors le système n'aura pas le temps d'évoluer de son propre chef pendant l'interaction, toute son évolution pendant la mesure provenant de l'interaction elle-même. On pourra donc laisser de côté les parties de l'hamiltonien relatives au corpuscule seul ou à l'appareil de mesure seul et il suffira de considérer l'hamiltonien d'interaction H_1 . De plus, si H_1 est fonction seulement de grandeurs qui commutent avec une grandeur Q , le processus d'interaction ne produira aucun changement incontrôlable de la grandeur Q , mais en produira pour les grandeurs qui commutent avec Q . Pour qu'il y ait couplage entre le corpuscule et l'appareil de mesure, il faut que H_1 contienne un opérateur agissant sur y .

A titre d'exemple, M. Bohm pose

$$(1) \quad H_1 = \alpha Q(p_y)_{\text{op}} = -\frac{a\hbar}{2\pi i} Q \frac{\partial}{\partial y},$$

où α est une constante.

Il faut alors calculer l'évolution du Ψ du système dans l'espace de configuration \mathbf{R} , y . Pendant l'interaction, l'équation d'ondes est approximativement

$$(2) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_1 \Psi = -\frac{a\hbar}{2\pi i} Q \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

ou

$$(3) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\alpha Q \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Il est commode de développer suivant l'ensemble complet des fonctions propres $\Psi_q(\mathbf{R})$ de l'opérateur Q , q étant une valeur propre de Q . Nous écrirons donc

$$(4) \quad \Psi(\mathbf{R}, y, t) = \sum_q f_q(y, t) \Psi_q(\mathbf{R}).$$

Comme par définition $Q\Psi_q(\mathbf{R}) = q\Psi_q(\mathbf{R})$, l'équation d'ondes nous donne

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial t} f_q(y, t) = -\alpha q \frac{\partial}{\partial y} f_q(y, t).$$

l'équation dont la solution est

$$(6) \quad f_q(y, t) = f_q(y - aqt),$$

d'où

$$(7) \quad \Psi(\mathbf{R}, y, t) = \sum_q f_q(y - aqt) \Psi_q(\mathbf{R}).$$

Initialement le corpuscule et l'appareil de mesure sont indépendants et l'on peut écrire pour $t = 0$:

$$(8) \quad \Psi_0(\mathbf{R}, y) = g_0(y) \sum_q c_q \Psi_q(\mathbf{R}),$$

car la fonction d'onde initiale est le produit de la fonction d'onde initiale de l'appareil de mesure $g_0(y)$ et de la fonction d'onde initiale du corpuscule qui peut se développer suivant les $\Psi_q(\mathbf{R})$ avec des coefficients convenables c_q . La fonction d'onde $g_0(y)$ a la forme d'un paquet que nous supposons centré sur la valeur $y = 0$ avec la largeur Δy .

Des équations précédentes résulte que $f_q(y) = c_q g_0(y)$ et que par suite

$$(9) \quad \Psi(\mathbf{R}, y, t) = \sum_q c_q g_0(y - aqt) \Psi_q(\mathbf{R}).$$

Cette expression montre que l'interaction établit une corrélation entre q et la coordonnée y de l'appareil.

S'inspirant alors de son analyse des collisions, M. Bohm indique que, si l'on écrit

$$\Psi(\mathbf{R}, y, t) = a(\mathbf{R}, y, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(\mathbf{R}, y, t)},$$

les fonctions réelles a et φ varient très rapidement dans l'espace et dans le temps durant l'interaction et qu'il en est de même du potentiel quantique

$$(10) \quad Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta \mathbf{R} a + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}}{a}.$$

Il en résulte, suivant la loi du guidage, un mouvement très compliqué et essentiellement variable du corpuscule. Mais, à la fin de l'interaction, *les paquets d'ondes correspondant aux différentes valeurs de q dans $g_0(y - aqt)$ se séparent dans l'espace.*

En effet, le centre du $q^{\text{ième}}$ paquet d'ondes dans l'espace y est donné par

$$(11) \quad y = aqt, \quad \text{d'où} \quad q = \frac{y}{at}$$

et, si nous désignons par ∂q la séparation des valeurs propres adjacentes de q , nous obtenons par la séparation des centres des paquets d'ondes correspondants

$$(12) \quad \partial y = at \partial q.$$

Pour des valeurs suffisamment grandes de t , ∂y deviendra toujours supérieure à la largeur Δy des paquets de sorte que les paquets d'ondes se séparent dans l'espace.

M. Bohm en conclut qu'en vertu de la loi de probabilité en $|\Psi|^2$, la variable y de l'appareil de mesure doit finalement se retrouver dans l'un des paquets d'ondes et qu'elle y demeurera ensuite puisqu'elle ne peut plus prendre une valeur correspondant à l'espace intermédiaire entre les paquets où la probabilité de présence est nulle. Si une observation macroscopique permet alors de connaître la valeur de q , on saura quel est le paquet de probabilité qui correspond à l'état final réalisé et, si l'on renormalise à l'unité la fonction Ψ , on pourra faire correspondre à l'état final la fonction d'onde

$$(13) \quad \Psi(\mathbf{R}, y; t) = \Psi_q(\mathbf{R}) g_0(y - aqt),$$

avec la valeur mesurée de q .

Comme on le voit sur l'exemple particulier développé par M. Bohm, c'est bien la limitation des trains d'ondes, donnant lieu à leur séparation spatiale dans l'état initial et dans l'état final, qui permet d'expliquer la possibilité de la mesure, comme elle permet aussi d'une manière plus générale de se représenter la séparation physique des divers états finaux à la fin d'une interaction. La limitation des faisceaux joue donc ici un rôle essentiel et, dans l'appendice de son second Mémoire, en accord avec mon intervention citée plus haut au Conseil Solvay de 1927, M. Bohm considère que cette limitation permet d'écarter les objections alors faites à ma théorie par M. Pauli.

Laissant de côté certaines considérations thermodynamiques (p. 182) du Mémoire de M. Bohm qui ne nous semblent pas très claires et demanderaient à être précisées, résumons la façon dont-il explique l'intervention des probabilités et des relations d'incertitude. Pour lui, conformément aux idées de la théorie causale, le mouvement du corpuscule et celui de l'appareil de mesure sont déterminés par la forme initiale de l'onde $\Psi_0(\mathbf{R}, y)$ et par les *valeurs initiales* \mathbf{R}_0 et y_0 des variables qui fixent la position du corpuscule et de l'appareil de mesure. Mais, comme nous ignorons ces valeurs initiales et que d'ailleurs le mouvement violent et compliqué du système pendant l'interaction est très sensible à

la moindre variation des conditions initiales, nous ne connaissons après l'interaction qu'une distribution de probabilité pour l'état final donnée par $|\Psi(\mathbf{R}, y)|^2$. Pour obtenir la probabilité d'une certaine valeur q de Q , nous devons intégrer $|\Psi|^2$ sur \mathbf{R} et sur y dans le $q^{\text{ième}}$ paquet d'ondes de l'état final. Comme les paquets d'ondes sont alors séparés dans l'espace de configuration (et d'ailleurs aussi dans l'espace physique) et que les fonctions $\Psi_q(\mathbf{R})$ et $g_0(y)$ sont normées, on obtient pour cette probabilité la valeur

$$(14) \quad P_q = |c_q|^2$$

en accord avec l'interprétation usuelle. D'une façon plus générale, on parvient à justifier ainsi toutes les règles de l'interprétation usuelle en leur donnant seulement une signification différente.

Supposons maintenant que nous ayons obtenu, par exemple à la suite d'une mesure, un état du corpuscule $\Psi_q(\mathbf{R})$ correspondant à la valeur précise q de la grandeur Q . Si nous envoyons ce corpuscule sur un dispositif adapté à la mesure d'une grandeur P qui ne commute pas avec Q , nous avons pour le système corpuscule + appareil de mesure après l'interaction une fonction d'onde de la forme

$$(15) \quad \Psi(\mathbf{R}, z, t) = \sum_p a_{pq} \Phi_p(\mathbf{R}) g_0(z - apt),$$

où $\Phi_p(\mathbf{R})$ est la fonction propre de la grandeur P qui correspond à la valeur propre p et où les a_{pq} sont les coefficients du développement

$$(16) \quad \Psi_q(\mathbf{R}) = \sum_p a_{pq} \Phi_p(\mathbf{R}),$$

z est la variable du nouvel appareil de mesure. Quand l'interaction sera achevée, on pourra, par une constatation sur l'appareil de mesure, réduire la fonction Ψ au seul terme

$$(17) \quad \Psi = a_{pq} \Phi_p(\mathbf{R}) g_0(z - apt)$$

correspondant à la valeur précise p de P et la probabilité de cette éventualité sera égale à $|a_{pq}|^2$, toujours en accord avec l'interprétation usuelle.

Comme un même appareil de mesure ne peut, à la fin de son interaction avec le corpuscule, avoir « séparé » les paquets d'ondes correspondant à des valeurs précises p et q des grandeurs non commutantes P et Q , on voit qu'il n'est pas possible de mesurer simultanément de telles

grandeurs et ceci permet de retrouver d'une manière nouvelle les relations d'incertitude d'Heisenberg comme traduisant non pas une indétermination réelle des grandeurs P et Q avant la mesure, mais seulement l'impossibilité matérielle d'obtenir simultanément pour les deux grandeurs des valeurs précises à l'aide d'une seule opération de mesure.

Avec le point de vue ici adopté, toute grandeur Q du corpuscule a une valeur bien définie dans l'état initial, mais cette valeur est une « variable cachée » puisque, en général, toute tentative pour la mesurer aura pour effet de la modifier. Si, exceptionnellement, un dispositif de mesure a pour effet de permettre d'obtenir la valeur de Q sans la modifier, alors ce dispositif modifiera les valeurs de toutes les grandeurs P qui ne commutent pas avec Q .

Il faut donc bien distinguer les « variables cachées » qui, dans la théorie causale comme dans la Physique classique, caractériseraient à chaque instant la position et le mouvement du corpuscule et les « observables » au sens de M. Dirac qui sont les valeurs de ces grandeurs susceptibles d'être obtenues par une opération de mesure. Ceci montre, en accord avec certaines idées de M. Bohr mais d'une façon toute différente de la sienne, l'importance des opérations de mesure. A ce sujet, M. Bohm dit très justement : « Ce qui précède signifie que la mesure d'une observable n'est pas réellement la mesure d'une propriété physique appartenant au système observé lui-même. Au contraire, la valeur d'une observable représente seulement une possibilité, impossible à décrire et à contrôler complètement, qui dépend aussi bien du dispositif de mesure que du système observé lui-même ».

Il y a cependant un point important sur lequel M. Bohm n'a pas, à mon avis, suffisamment insisté : c'est le fait qu'avec les conceptions de la théorie causale, la probabilité de présence $|\Psi|^2$ a un rôle privilégié par rapport aux probabilités $|c_p|^2$ des grandeurs qui ne commutent pas avec la position. La probabilité de présence $|\Psi|^2$ dérive, en effet, de la loi du guidage quand on ignore (ce qui est nécessairement ici le cas) laquelle des trajectoires est effectivement décrite, alors que les probabilités $|c_p|^2$ pour les valeurs des grandeurs non commutantes avec la position n'entrent en jeu qu'après le processus de mesure de ces grandeurs quand on ne connaît pas encore le résultat de la mesure. C'est ce qui, du point de vue de la théorie causale, rendrait inexacte l'élégante, mais peut-être factice, « théorie des transformations » qui veut traiter sur le même pied tous les développements du Ψ suivant les fonctions propres de toutes les observables : c'est aussi cette circonstance qui, du même point de vue, rendrait caduc le raisonnement de M. von Neumann

sur les variables cachées ainsi que nous l'avons précédemment expliqué. Et ceci nous amène à dire ici quelques mots du schéma statistique valable dans la théorie causale.

3. Schéma statistique de la théorie causale. — Nous avons précédemment ⁽¹⁾ rappelé le schéma employé couramment par les statisticiens. En considérant le cas des probabilités continues, on définit pour deux grandeurs aléatoires X et Y les densités de probabilité $\rho_X(x)$ et $\rho_Y(y)$ ainsi que la densité $\rho(x, y)$ de la probabilité de trouver simultanément la valeur x pour X et la valeur y pour Y . On définit aussi la probabilité de X liée par Y à l'aide de la densité $\rho_X^{(Y)}(x, y)$ d'obtenir pour X la valeur x quand on sait que Y a la valeur y et la probabilité de Y liée par X à l'aide de la densité $\rho_Y^{(X)}(x, y)$ dont la définition est analogue.

Entre ces quantités, on doit avoir les relations

$$(18) \quad \begin{cases} \rho_X(x) = \int \rho(x, y) dy; & \rho_Y(y) = \int \rho(x, y) dx; \\ \rho_X^{(Y)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_Y(y)}; & \rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)}; \end{cases}$$

d'où résulte

$$(19) \quad \begin{cases} \rho_X(x) = \int \rho_X^{(Y)}(x, y) \rho_Y(y) dy; \\ \rho_Y(y) = \int \rho_Y^{(X)}(x, y) \rho_X(x) dx. \end{cases}$$

Or, nous l'avons montré, avec les distributions de probabilité admises dans l'interprétation usuelle de la Mécanique ondulatoire, le schéma statistique précédent n'est pas applicable à deux variables aléatoires X et Y qui correspondent à deux grandeurs non commutantes. Les raisons en sont : 1° que la quantité $\rho(x, y)$ n'existe pas puisqu'il est impossible de mesurer simultanément X et Y ; 2° qu'une mesure de X change la répartition de probabilité pour Y et inversement.

Pour la théorie causale qui est d'un type plus classique, il n'en est pas de même et l'on peut retrouver le schéma statistique usuel. Pour cette théorie, en effet, les distributions de probabilité de l'interprétation usuelle n'existent pas toutes simultanément parce qu'au moins une partie d'entre elles sont créées par l'acte même de la mesure : c'est pourquoi elles ne rentrent pas dans le schéma statistique usuel. Mais la théorie causale permet de définir des probabilités qui existent simulta-

⁽¹⁾ Chap. VI, § 6.

nément avant toute mesure et qui, elles, satisfont au schéma statistique usuel.

Pour simplifier, raisonnons sur un problème où intervient une seule variable d'espace x ; la généralisation à trois variables serait aisée. La variable aléatoire correspondant à x sera nommée X et nous prendrons pour Y la composante p_x de l'impulsion, grandeur qui ne commute pas X . Nous avons alors

$$(20) \quad \varphi_X(x) = |\Psi(x)|^2; \quad \varphi_{P_x^{(X)}}(x, p_x) = \delta\left(p_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

en raison de la signification statistique de $|\Psi|^2$ et de la formule du guidage. Pour $\varphi(x, p_x)$, nous trouvons d'après (18)

$$(21) \quad \varphi(x, p_x) = \varphi_X(x) \varphi_{P_x^{(X)}}(x, p_x) = |\Psi(x)|^2 \delta\left(p_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

et nous avons bien

$$(22) \quad \int \varphi(x, p_x) dp_x = |\Psi(x)|^2 = \varphi_X(x).$$

Nous trouvons aussi

$$(23) \quad \varphi_{P_x}(p_x) = \int \varphi(x, p_x) dx = \int |\Psi(x)|^2 \delta\left(p_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx = \sum_i |\Psi(x_i)|^2,$$

les x_i étant les valeurs de x pour lesquels $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ a la valeur p_x considérée.

Enfin

$$(24) \quad \varphi_X^{(P_x)}(x, p_x) = \frac{\varphi(x, p_x)}{\varphi_{P_x}(p_x)} = \frac{|\Psi(x)|^2 \delta\left(p_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\sum_i |\Psi(x_i)|^2}.$$

Par l'ensemble des formules (20) à (24), nous voyons qu'on peut rétablir entièrement dans l'interprétation causale le schéma statistique usuel.

4. Une remarque de M. Takabayasi sur les moments des distributions de probabilité. — On sait qu'étant donnée une répartition de probabilité définie par $\varphi(x)$ pour la variable aléatoire X , on donne le nom de « moment d'ordre n » de cette distribution à la quantité

$$(25) \quad M_x^{(n)} = \int \varphi(x) x^n dx.$$

Dans son Mémoire de *Progress of theoretical Physics* de 1952 [3].

M. Takabayasi a calculé et comparé les moments qui correspondent aux distributions de probabilité dans l'interprétation usuelle et dans l'interprétation causale. Résumons ses résultats en raisonnant toujours sur une seule variable x .

Tout d'abord, en ce qui concerne la variable d'espace x , il est évident que l'on a, pour n entier positif quelconque

$$(26) \quad M_x^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n |\Psi(x)|^2 dx$$

aussi bien dans l'interprétation usuelle que dans l'interprétation causale. Plus généralement, on a même

$$(27) \quad M_{f(x)}^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |\Psi(x)|^2 dx$$

dans l'une et l'autre théorie.

Mais, si l'on considère une grandeur qui ne commute pas avec Λ , par exemple P_x , on doit s'attendre à ne plus trouver tous les moments égaux dans les deux théories car, si tous les moments étaient les mêmes, les distributions de probabilités pour P_x seraient les mêmes dans les deux théories, ce que nous savons n'être pas exact. On démontre, en effet, dans le Calcul des probabilités que l'ensemble des moments détermine entièrement la distribution de probabilités.

Or, si l'on pose

$$\Psi(x) = \int c(p_x) e^{-\frac{2\pi i}{h} p_x x} dp_x,$$

on a

$$(28) \quad M_{p_x}^{(n)} = \int p_x^n |c(p_x)|^2 dp_x.$$

Dans la théorie causale, avec l'expression trouvée plus haut pour $\rho(p_x)$, on obtient

$$(29) \quad M_{p_x}^{(n)} = \int p_x^n |\Psi(x)|^2 \delta\left(p_x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx dp_x = \int \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^n |\Psi(x)|^2 dx.$$

Pour $n = 1$, nous avons

$$(30) \quad M_{p_x}^{(1)} = \int \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}}{|\Psi|^2}\right) |\Psi|^2 dx = -\frac{h}{2\pi i} \int \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx.$$

En remplaçant Ψ et Ψ^* par leurs développements de Fourier et en

tenant compte de la formule $\int e^{\frac{2\pi i}{h}(p'_x - p_x)x} dx = \delta(p'_x - p_x)$, on trouve aisément

$$(31) \quad M_{p_x}^{(1)} = \iint p_x c^*(p'_x) c(p_x) \delta(p'_x - p_x) dp'_x dp_x = \int p_x |c(p_x)|^2 dp_x.$$

Le moment d'ordre 1 de p_x a donc la même valeur dans les deux théories.

Mais pour le moment d'ordre 2 de la théorie causale,

$$(32) \quad M_{p_x}^{(2)} = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 |\Psi(x)|^2 dx,$$

on ne peut plus faire un calcul analogue et ce moment n'est pas égal au moment correspondant $\int p_x^2 |c(p_x)|^2 dp_x$ de la théorie usuelle.

Il n'y a naturellement là aucune objection contre la théorie causale car, pour elle, les probabilités considérées par la théorie usuelle n'existent qu'après la mesure et elles ne sont pas égales à celles qui existent avant la mesure et qui seraient valables pour un « surobservateur » susceptible de connaître directement la valeur des grandeurs sans effectuer de mesures.

On pourrait croire que la divergence entre les résultats obtenus en calculant $M_{p_x}^{(2)}$ dans la théorie usuelle et dans la théorie causale pourrait conduire à trancher entre les deux : ne suffirait-il pas de déterminer expérimentalement $M_{p_x}^{(2)}$, ce qui est possible, et de voir laquelle des deux expressions est conforme à l'observation ? Il est évident qu'il n'en est rien. La détermination expérimentale de $M_{p_x}^{(2)}$ exigeant que l'on effectue des mesures statistiques sur la grandeur P_x , c'est toujours la valeur de $M_{p_x}^{(2)}$ prévue par la théorie habituelle qui traduira les observations, mais cela ne prouvera rien contre la théorie causale puisque la valeur de $M_{p_x}^{(2)}$ que celle-ci calcule doit, d'après elle, correspondre à la distribution de probabilité inobservable qui existe avant toute mesure.

5. Examen d'une remarque de M. Bohr sur la collision d'un corpuscule avec un atome. — Pour terminer ce chapitre, nous allons examiner un argument développé, il y a déjà longtemps, par M. Bohr et tendant à prouver que l'ionisation d'un atome par le choc d'un corpuscule ne peut se comprendre avec les idées classiques sur la localisation des corpuscules.

On sait que, si l'on bombarde un système atomique avec des particules rapides, on peut provoquer l'excitation ou même l'ionisation de ce

système. Or ce phénomène, quand on l'analyse avec les idées classiques, apparaît comme incompréhensible. En effet, la particule incidente traverse l'atome avec une vitesse v et si d désigne le diamètre moyen de l'atome, le temps de transit de la particule sera de l'ordre de $\frac{d}{v}$. C'est seulement pendant un temps de cet ordre que la particule incidente peut agir sur les constituants de l'atome et leur céder de l'énergie de façon à provoquer une excitation ou une ionisation. Or, pour qu'un corpuscule de l'atome puisse absorber de l'énergie, il faut qu'il puisse se déplacer appréciablement pendant le temps $\tau = \frac{d}{v}$. Ceci exige que ce temps τ soit au moins de l'ordre des périodes T du mouvement des électrons dans l'atome, périodes qui sont elles-mêmes de l'ordre de grandeur du quotient par d de la vitesse des électrons intraatomiques. Si le corpuscule incident est très rapide, cette dernière vitesse sera inférieure à v et il n'y aura pas d'excitations ou d'ionisations possibles. Des calculs plus précis confirment cette conclusion et montrent qu'avec les conceptions classiques sur la localisation des particules, les phénomènes d'excitations et d'ionisations par choc expérimentalement observés sont inexplicables.

Mais, dit M. Bohr, il n'en est pas de même avec les conceptions de la théorie indéterministe. En effet, pour pouvoir appliquer au choc l'idée de la conservation de l'énergie, il faut que l'énergie initiale du corpuscule incident soit connue avec une incertitude δE beaucoup plus petite que le quantum $\frac{h}{T}$ correspondant à la fréquence $\nu = \frac{1}{T}$ du mouvement des électrons intraatomiques : s'il n'en était pas ainsi, l'incertitude δE serait de l'ordre des différences d'énergie ΔE entre les états stationnaires de l'atome et il ne serait plus possible de vérifier la conservation de l'énergie. Mais le train d'ondes associé à la particule incidente a toujours une longueur finie et, d'après la quatrième relation d'incertitude, il met pour passer sur l'atome un temps δt de l'ordre de $\frac{h}{\delta E}$. Comme, dans l'interprétation indéterministe où la particule incidente est potentiellement présente dans toute l'étendue du train d'ondes, cela n'a aucun sens de vouloir préciser, à l'intérieur de l'intervalle de temps δt , l'instant où le corpuscule entre dans l'atome, il en résulte qu'on ne peut attribuer au temps de transit τ une valeur inférieure à δt . Donc on a $\tau \sim \frac{h}{\delta E} \geq \frac{h}{\Delta E}$ et, la différence ΔE de l'énergie entre les états stationnaires se trouvant être de l'ordre de $\frac{h}{T}$, on aura

$\tau \gg T$. Cette condition nécessaire pour qu'il y ait possibilité d'excitation ou d'ionisation peut donc, dans l'interprétation usuelle, être considérée comme réalisée parce que la durée de l'interaction entre les constituants de l'atome et le corpuscule incident, qui est potentiellement présent dans toute l'étendue de son train d'ondes, ne peut être regardée comme inférieure à la durée totale du passage de ce train d'ondes sur l'atome.

On pourrait penser que cet argument de M. Bohr constitue une objection contre la théorie causale. En effet, dans celle-ci, on restitue aux corpuscules une position, une vitesse et une trajectoire. Alors un corpuscule incident associé à un train d'ondes sensiblement monochromatique aurait une vitesse initiale v bien déterminée et l'on pourrait croire qu'il doit traverser l'atome en un temps de l'ordre de $\frac{d}{v}$, ce qui nous ferait retomber sous le coup de l'argument de M. Bohr.

En réalité, il ne semble pas que l'argument porte contre la théorie causale. En effet, quand le train d'ondes incident atteint l'atome, une interaction commence dont l'évolution peut se représenter à l'aide du formalisme de l'espace de configuration. Durant cette interaction, le mouvement du corpuscule défini par la loi du guidage sera un mouvement très compliqué lié aux variations violentes et continues du potentiel quantique. Il en résulte une sorte de « tourbillonnement » du corpuscule incident dans la région atomique qui ne permet plus du tout de le considérer comme traversant cette région avec un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v . Il peut avoir pour effet que le corpuscule s'attarde dans la région atomique pendant un temps qui peut être de l'ordre de la durée totale τ du passage du train d'ondes sur l'atome. L'argument de M. Bohr, valable contre l'application au problème envisagé de la Dynamique classique, ne paraît plus s'appliquer ici et l'existence des excitations et ionisations par choc ne paraît pas inconciliable avec la théorie causale ⁽¹⁾.

(1) Depuis que ce chapitre a été écrit, j'ai fait une étude beaucoup plus détaillée de la théorie de la Mesure avec les conceptions de la double solution pendant mon cours de l'hiver 1955-1956. J'ai le projet de publier cet exposé.

CHAPITRE XVI.

EXTENSION DES IDÉES DE DOUBLE SOLUTION A LA THÉORIE DE L'ÉLECTRON DE DIRAC.

1. Introduction. — Nous avons développé la théorie de la double solution en partant de l'équation d'ondes relativiste à un Ψ (équation de Klein-Gordon) qui aujourd'hui doit être considérée comme valable seulement pour les particules de spin 0. Il faut évidemment trouver des formes de la théorie applicables aux particules de spin supérieur à 0 et notamment aux corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ (en unité $\frac{h}{2\pi}$) comme l'électron.

Cette extension a été faite par M. Vigier sous une forme qui me paraît plus satisfaisante qu'une autre forme que j'avais envisagée antérieurement [10]. C'est donc la théorie de M. Vigier que je vais exposer.

2. Résumé de la théorie de l'électron de Dirac. — Rappelons d'abord très succinctement les principes de la théorie de l'électron de Dirac (théorie de la particule de spin $\frac{1}{2}$). Pour plus de détails, on pourra se reporter à d'autres ouvrages sur ce sujet ⁽¹⁾.

Dans la théorie de Dirac, on considère l'onde Ψ de l'électron comme une grandeur à quatre composantes Ψ_k (avec $k = 1, 2, 3, 4$) et, pour pouvoir former des combinaisons linéaires des Ψ_k , on introduit quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes. Nous prendrons ces matrices sous la forme donnée naguère par von Neumann ⁽²⁾, forme qui est adaptée au formalisme relativiste. Ces matrices γ_i sont hermitiennes, c'est-à-dire que $(\gamma_i)_{rs} = (\gamma_i)_{sr}^*$. De plus, elles satisfont les relations

$$(1) \quad \gamma_i^2 = 1; \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

⁽¹⁾ Par exemple : LOUIS DE BROGLIE, *La théorie des particules de spin $\frac{1}{2}$ (électrons de Dirac)*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, p. 66.

que nous pouvons condenser sous la forme

$$(2) \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij}.$$

L'écriture $\gamma_i \Psi_k$ représente alors, par définition, la combinaison linéaire $\sum_l (\gamma_i)_{kl} \Psi_l$ et l'écriture $\Psi_k^* \gamma_i$ représente de même la combinaison linéaire $\sum_l \Psi_l^* (\gamma_i)_{lk}$ d'où $\Psi_k^* \gamma_i = (\gamma_i \Psi_k)^*$ à cause de l'hermiticité des γ_i .

Considérons alors un corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ et de charge ε se déplaçant dans un champ électromagnétique dérivant des potentiels \mathbf{A} et V . Pour des raisons que je ne rappellerai pas ici, M. Dirac a admis que les quatre Ψ_k doivent obéir aux équations d'ondes suivantes :

$$(3) \quad \sum_i \gamma_i \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} A_i \right) \Psi_k = -im_0 c \Psi_k \quad (k=1, 2, 3, 4),$$

m_0 étant la masse propre du corpuscule. Les x_i sont ici les coordonnées d'Univers

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict.$$

Les A_i sont les composantes du potentiel d'Univers

$$A_1 = A_x, \quad A_2 = A_y, \quad A_3 = A_z, \quad A_4 = iV.$$

Les équations (3) forment un système de quatre équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre simultanées. En introduisant la convention de sommation des indices usuelle en Relativité et en supprimant l'indice k des Ψ_k , on écrit (3) sous la forme abrégée

$$(4) \quad \gamma_i \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} A_i \right) \Psi = -im_0 c \Psi.$$

Introduisons les Ψ_k^+ définis par $\Psi_k^+ = \Psi_k^* \gamma_4$ ou symboliquement $\Psi^+ = \Psi^* \gamma_4$. En prenant l'équation complexe conjuguée de (3), on obtient comme équations d'ondes pour les Ψ^+ sous une forme symbolique analogue à (4)

$$(5) \quad \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} A_i \right) \Psi^+ \gamma_i = -im_0 c \Psi^+.$$

Je me contenterai de noter les points suivants :

1° Les quatre matrices γ_i ne sont pas entièrement déterminées par les

conditions qui leur sont imposées, mais cette indétermination des γ_i n'affecte pas les prévisions physiques que l'on peut tirer de la théorie.

2° Si l'on change de système de référence galiléen par une transformation de Lorentz, on peut écrire les nouvelles équations d'ondes sous la même forme que les anciennes avec les mêmes matrices γ_i , mais les nouveaux Ψ_k sont des combinaisons linéaires des anciens.

3° On peut démontrer que les équations (4) contiennent le spin de l'électron aussi bien sous son aspect mécanique (moment cinétique propre) que sous son aspect électromagnétique (moment magnétique et moment électrique propres).

Les densités de moment magnétique propre et de moment électrique propre sont représentés dans un système galiléen par deux vecteurs d'espace \mathbf{M} et \mathbf{P} . Au point de vue relativiste ces deux vecteurs s'unissent pour former un tenseur d'Univers \mathfrak{M} qui est antisymétrique de rang 2. Ses composantes sont

$$(6) \quad \mathfrak{M}_{ii} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{M}_{14} = -\mathfrak{M}_{41} = ic P_x; & \mathfrak{M}_{24} = -\mathfrak{M}_{42} = ic P_y; \\ \mathfrak{M}_{34} = -\mathfrak{M}_{43} = ic P_z; & \mathfrak{M}_{23} = -\mathfrak{M}_{32} = M_x; \\ \mathfrak{M}_{31} = -\mathfrak{M}_{13} = M_y; & \mathfrak{M}_{12} = -\mathfrak{M}_{21} = M_z. \end{array} \right.$$

Des équations (4) et (5), on tire en multipliant la première par Ψ^+ en avant et la seconde par Ψ en arrière et en retranchant

$$(7) \quad \Psi^+ \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi + \frac{\partial \Psi^+}{\partial x_i} \gamma_i \Psi = 0$$

ou

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi^+ \gamma_i \Psi) = 0.$$

Nous avons ainsi obtenu une équation de continuité pour le quadri-vecteur

$$(9) \quad j_i = ic \Psi^+ \gamma_i \Psi = ic \sum_k^4 \Psi_k^* \gamma_i \gamma_k \Psi_k.$$

C'est là, en théorie de Dirac, le quadri-vecteur « courant-densité » dont les trois premières composantes $j_1 = ic \Psi^+ \gamma_1 \Psi = -c \Psi^+ \alpha_1 \Psi$, ... donnent les composantes du flux corpusculaire le long des axes d'espace tandis que la quatrième $j_4 = ic \Psi^+ \gamma_4 \Psi = ic \Psi^+ \Psi$ représente (au facteur ic près introduit par les notations d'Univers) la densité de probabilité de présence

$$\rho = \sum_k^4 \Psi_k^* \Psi_k = \sum_k^4 |\Psi_k|^2.$$

Notons qu'on obtient le quadrivecteur « courant-densité d'électricité » en multipliant par ε les grandeurs j_i .

Le quadrivecteur \mathbf{j} qui vient d'être défini peut être décomposé en deux parties. Pour le démontrer, multiplions (4) en avant par $\Psi^+ \gamma_t$ et (5) en arrière par $\gamma_t \Psi$, ajoutons et divisons par 2. Il vient, compte tenu de (2)

$$(10) \quad j_t = -\frac{\hbar}{4\pi i m_0} \left(\Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial x_t} - \frac{\partial \Psi^+}{\partial x_t} \Psi \right) - \frac{\varepsilon}{m_0 c} \Lambda_t \Psi^+ \Psi + \frac{\hbar}{4\pi i m_0} \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi^+ \gamma_i \gamma_t \Psi).$$

Nous pouvons donc décomposer le quadrivecteur \mathbf{j} en deux quadrivecteurs $\mathbf{j}^{(1)}$ et $\mathbf{j}^{(2)}$ définis par

$$(11) \quad \begin{cases} j_t^{(1)} = -\frac{\hbar}{4\pi i m_0} \left(\Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial x_t} - \frac{\partial \Psi^+}{\partial x_t} \Psi \right) - \frac{\varepsilon}{m_0 c} \Lambda_t \Psi^+ \Psi, \\ j_i^{(2)} = \frac{\hbar}{4\pi i m_0} \sum_{i=1,2,3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\Psi^+ \gamma_i \gamma_t \Psi). \end{cases}$$

C'est ce qu'on nomme « la décomposition de Gordon ».

Il est aisé de retrouver une interprétation physique de $\mathbf{j}^{(1)}$ et de $\mathbf{j}^{(2)}$. On voit d'abord que $\mathbf{j}^{(1)}$ est le vecteur flux-densité correspondant au mouvement d'ensemble de la particule : par exemple, en considérant le cas simple de l'onde plane monochromatique en l'absence de champ ($\Lambda_j = 0$) où l'on peut définir une vitesse

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{m} = \frac{\mathbf{P}}{m_0} \sqrt{1 - \beta^2},$$

on trouve

$$\frac{1}{ic} j_t^{(1)} = \rho = \Psi^+ \Psi, \quad j_i^{(1)} = \rho v_i, \quad \dots$$

Quant au quadrivecteur $\mathbf{j}^{(2)}$, on l'interprète en partant d'une analogie avec la théorie classique des milieux polarisés. Considérons un milieu, siège d'une polarisation magnétique et d'une polarisation électrique. Son état de polarisation est défini en chaque point par deux vecteurs d'espace, le vecteur \mathbf{M} (densité de moment magnétique ou intensité d'aimantation) et le vecteur \mathbf{P} (densité de moment électrique ou polarisation électrique). Du point de vue relativiste, ces deux vecteurs d'espace s'unissent pour former un tenseur d'espace-temps \mathfrak{M} anti-symétrique de rang 2 dont les composantes s'expriment en notation d'Univers par

$$(12) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_{ii} = 0, & \mathfrak{M}_{ti} = -\mathfrak{M}_{it} = ic P_i \quad (i = 1, 2, 3); \\ \mathfrak{M}_{ij} = -\mathfrak{M}_{ji} = M_k \\ (i, j, k \text{ formant une permutation paire des trois indices } 1, 2, 3). \end{cases}$$

Or, la théorie classique des milieux polarisés montre que cette polarisation est équivalente à l'existence d'une densité microscopique de charge $\delta = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ et d'une densité microscopique de courant $\mathbf{i} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M}$. On peut donc dire que la polarisation est équivalente à l'existence d'un vecteur courant-densité \mathbf{j} tel que

$$(13) \quad j_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mathfrak{M}_{ji},$$

car cette formule redonne bien les valeurs de δ et de \mathbf{i} que nous venons de rappeler.

Si maintenant on compare l'équation (13) avec l'expression (11) de $\mathbf{j}^{(2)}$, on voit qu'on peut les identifier en posant

$$(14) \quad \mathfrak{M}_{ij} = -\frac{\hbar}{4\pi m_0 c} \Psi^* \gamma_i \gamma_j \Psi.$$

C'est là précisément (au facteur ε près qui correspond au passage du courant de probabilité au courant électrique et qui fait apparaître le magnéton de Bohr $\frac{\varepsilon \hbar}{4\pi m_0 c}$), l'expression des composantes non nulles du tenseur antisymétrique de rang 2 qui, en théorie de Dirac, fournit, comme nous l'avons vu plus haut, la densité de moment magnétique propre et la densité de moment électrique propre dont l'existence est liée à celle du spin.

En résumé, le quadrivecteur courant-densité \mathbf{j} de la théorie de Dirac se décompose en un quadrivecteur $\mathbf{j}^{(1)}$ qui provient du mouvement d'ensemble (mouvement orbital) du corpuscule et d'un quadrivecteur $\mathbf{j}^{(2)}$ qui provient de son spin.

3. Guidage du corpuscule en théorie de Dirac. — Nous allons pour l'instant adopter le point de vue de l'onde-pilote et considérer le corpuscule comme guidé par l'onde Ψ . Dans la Mécanique ondulatoire à une fonction d'onde, il suffisait pour cela de définir la vitesse du corpuscule à partir de la phase φ de l'onde Ψ écrite sous la forme $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$. Mais ici, si nous voulons transposer cette idée, nous rencontrons une difficulté. Comme il y a, en théorie de Dirac, quatre composantes du Ψ , nous devons écrire

$$(15) \quad \Psi_k(x, y, z, t) = a_k(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k(x, y, z, t)} \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

où les fonctions α_k et φ_k sont réelles. Or, il n'y a aucune raison pour que les φ_k soient les mêmes : il n'y a donc plus une phase, mais quatre phases distinctes. Guidé par la méthode qui permet de trouver l'approximation de l'Optique géométrique en théorie de Dirac, j'ai essayé dans une Note de septembre 1952 de définir une phase commune φ par la formule $\varphi_k = \varphi + \varphi'_k$ et, comme le choix de φ est évidemment arbitraire, j'avais cherché à la déterminer par une condition auxiliaire. Mais j'ai reconnu depuis que, les formules auxquelles je parvenais conduisant à définir le mouvement par le vecteur \mathbf{j}_1 de la décomposition de Gordon, ceci revenait à négliger l'influence du spin sur le mouvement. M. Vigier a, plus justement je crois, cherché à définir le mouvement à l'aide du vecteur global \mathbf{j} , mais dans sa Note sur ce sujet [10], il a néanmoins conservé l'idée d'une phase commune φ (qu'il nomme S). Je pense maintenant que cela est inutile et artificiel : il faut raisonner directement sur les quatre phases distinctes φ_k .

Si l'on part de l'expression (15) des Ψ_k et si l'on l'introduit dans l'expression (10) des composantes j_l du quadrivecteur courant-densité, on obtient

$$(16) \quad j_l = -\frac{1}{m_0} \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_l \right) \alpha_k^+ \alpha_k + \frac{\hbar}{4\pi i m_0} \sum_{i \neq l} \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_k^+ \gamma_i \gamma_l \alpha_k),$$

avec

$$\alpha_k^+ = \alpha_k \gamma_4.$$

Le mouvement du corpuscule peut être défini par sa vitesse d'Univers \mathbf{u} dont les composantes, en notation d'Univers, sont

$$(17) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{v_x}{c \sqrt{1-\beta^2}}; & u_2 = \frac{dx_2}{ds} = \frac{v_y}{c \sqrt{1-\beta^2}}; \\ u_3 = \frac{dx_3}{ds} = \frac{v_z}{c \sqrt{1-\beta^2}}; & u_4 = \frac{dx_4}{ds} = \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

Pour expliciter le guidage du corpuscule par l'onde Ψ , il paraît naturel d'imposer à celui-ci de suivre une des lignes de courant définies par le vecteur \mathbf{j} , c'est-à-dire de poser

$$(18) \quad u_i = \kappa j_i.$$

Mais le quadrivecteur \mathbf{u} obéit à la relation $\sum_i u_i^2 = -1$, d'où l'on tire

$$(19) \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{-\sum_i j_i^2}}.$$

M. Vigier propose alors de définir la masse propre variable M_0 du corpuscule par la formule

$$(20) \quad M_0 cu_i = \frac{m_0 j_i}{\Psi^+ \Psi} = \frac{m_0 j_i}{\alpha^+ \alpha},$$

d'où

$$(21) \quad M_0 = \frac{m_0}{\alpha^+ \alpha} \frac{j_i}{cu_i} = \frac{m_0}{\alpha^+ \alpha} \frac{1}{c} \sqrt{-\sum_1^4 j_i^2}.$$

Nous verrons que cette définition de M_0 est bien la généralisation en théorie de Dirac de celle que nous avons adoptée en Mécanique ondulatoire relativiste à un Ψ .

Pour préciser, nous introduirons les définitions suivantes :

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial x_j} &= \frac{\sum_1^4 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} a_k^+ a_k}{\sum_1^4 a_k^+ a_k}, \\ P_j &= -\frac{\varepsilon}{c} \Lambda_j + \frac{\frac{h}{2\pi i} \sum_{i \neq j} \sum_1^4 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_k^+ \gamma_i \gamma_j a_k)}{\sum_1^4 a_k^+ a_k} = -\frac{\varepsilon}{c} \Lambda_j + \frac{j_j^{(2)}}{\alpha^+ \alpha} m_0. \end{aligned} \right.$$

La quantité $\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial x_j}$ est une moyenne des quatre dérivées $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$ quand on attribue à chacune le « poids » $a_k^+ a_k$. Le quadrivecteur \mathbf{P} est la somme du quadrivecteur $-\frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A}$ et d'un quadrivecteur proportionnel à $\mathbf{j}^{(2)}$. Avec ces définitions, on peut écrire d'après (16) et (20)

$$(23) \quad M_0 cu_i = -\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial x_i} + P_i = -\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_i + P_i,$$

formule qui joue ici le rôle de formule du guidage. L'influence du spin sur le mouvement est représenté par le terme P_i proportionnel à $j_i^{(2)}$.

Nous voulons montrer que la formule précédente est bien la généralisation de la formule (18) du chapitre X,

$$(24) \quad M_0 cu^l = g^{kl} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right)$$

(¹) On en déduit aisément que $M_0^2 = m_0^2 \left(1 + \frac{I_2^2}{I_1^2} \right)$, I_1 et I_2 étant les deux invariants classiques en théorie de Dirac.

que nous avons obtenue à partir de l'équation de Klein-Gordon et qui s'écrit avec nos notations actuelles et l'emploi des coordonnées d'Univers au lieu des coordonnées d'espace-temps,

$$(25) \quad M_0 c u_i = - \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_i \right) = - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_i.$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que, pour passer de la théorie de Dirac à celle de Klein-Gordon, nous devons : 1° négliger l'effet du spin, c'est-à-dire le terme P_i dans (23); 2° supposer que les Ψ_k se réduisent à un seul $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, ce qui donne $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Le raccord de (23) et (25) se fait donc bien.

Nous tirons aisément de (23) les relations

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds} (M_0 c u_i) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (M_0 c u_i) \frac{dx_j}{ds} = \sum_j u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(- \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + P_i \right) \\ &= \sum_j \left\{ u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(- \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} + P_j \right) \right. \\ &\quad \left. + u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(P_i - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P_j - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_j u_j^2 = -1$, on a $\sum_j u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0$ et le premier terme du dernier membre vaut $c \frac{\partial M_0}{\partial x_i}$ de sorte qu'on a finalement comme équation du mouvement

$$(27) \quad \frac{d}{ds} (M_0 c u_i) = c \frac{\partial M_0}{\partial x_i} + \sum_j u_j F_{ij} + \sum_j u_j \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(P_i - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(P_j - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j} \right) \right]$$

où $F_{ij} = - \frac{\varepsilon}{c} \left(\frac{\partial \Lambda_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Lambda_j}{\partial x_i} \right)$ est le produit du champ électromagnétique par la charge.

Le dernier terme de (27) exprime l'action du spin sur le mouvement : il est visiblement nul en l'absence de spin puisqu'alors le quadrivecteur \mathbf{P} est nul et que, $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}$ se réduisant à $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_j}.$$

Si le spin est nul ou a une action négligeable nous retrouvons l'équation

$$(28) \quad \frac{d}{ds} (M_0 c u_i) = c \frac{\partial M_0}{\partial x_i} + \sum_j u_j F_{ij}$$

qui correspond bien à la Dynamique étudiée au chapitre X.

Il est facile de vérifier ainsi que la définition (21) de M_0 se ramène, quand on néglige le spin, à celle que nous avons précédemment adoptée en partant de l'équation de Klein-Gordon. En effet, si l'on néglige le spin, on a

$$\mathbf{j}^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^{(1)}$$

et l'on peut considérer une seule composante du Ψ , donc un seul α et un seul φ . On trouve alors

$$(29) \quad \mathbf{j}^{(1)} = -\frac{\alpha^2}{m_0} \left(\mathbf{grad} \varphi - \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right);$$

$$-\sum_i j_i^2 = -\sum_i j_i^{(1)2} = -\frac{\alpha^4}{m_0^2} \left(\mathbf{grad} \varphi - \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right)^2,$$

où **grad** est le gradient d'Univers. La définition (21) nous donne alors

$$(30) \quad M_0^2 c^2 = -\left(\mathbf{grad} \varphi - \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right)^2.$$

Or, l'équation de Jacobi généralisée nous donne sous sa forme relativiste

$$(31) \quad -\left(\mathbf{grad} \varphi - \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2$$

$$= m_0^2 c^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square \alpha}{\alpha},$$

ce qui nous ramène à l'expression de M_0 déduite de l'équation de Klein-Gordon.

Bref, en admettant la définition (21) de M_0 et en en déduisant la formule (23), nous avons obtenu une généralisation naturelle de la formule du guidage dans la théorie de Dirac. Le corpuscule se trouve alors assujéti à avoir pour ligne d'Univers une des lignes de courant définies par le quadrivecteur \mathbf{j} . Comme précédemment, et toujours sous la réserve d'avoir à fournir une démonstration d'ergodicité, on en conclut que la densité de probabilité de présence est donnée par

$$(32) \quad \varphi = \frac{j_i}{ic} = \sum_k \Psi_k^* \Psi_k = |\Psi|^2.$$

L'extension de l'idée de guidage que nous venons d'indiquer en passant des équations de Klein-Gordon à celles de Dirac doit pouvoir s'effectuer également pour les particules de spin supérieur à $\frac{1}{2}$. M. Vigier a montré qu'il en était bien ainsi dans le cadre du formalisme introduit par la théorie des photons.

4. Introduction de l'idée de double solution en théorie de Dirac. —

Nous venons de voir comment on peut introduire en théorie de Dirac le guidage du corpuscule par l'onde Ψ , ce qui constitue le point de vue de l'onde-pilote. Ce point de vue étant certainement insuffisant, il y a lieu d'introduire ici aussi l'idée de la double solution, c'est-à-dire d'admettre qu'à chaque solution continue $\Psi_k = a_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k}$ des équations de Dirac doit correspondre une solution

$$u_k = f_k(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k(x, y, z, t)}$$

avec les mêmes φ_k , où les f_k comportent un même point singulier mobile ou plutôt une même petite région singulière mobile où les u_k auraient une grande valeur et obéiraient à des équations non linéaires.

En 1927, dans le cadre de la Mécanique ondulatoire relativiste avec un seul Ψ , nous avons montré ⁽¹⁾ que, dans le cas du mouvement rectiligne et uniforme en l'absence de champ, il existait dans le système propre d'un corpuscule de masse propre m_0 une solution à singularité et à symétrie sphérique

$$(33) \quad u_0(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{r_0} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t_0}$$

et l'on avait seulement à faire une transformation de Lorentz pour obtenir dans un autre système galiléen la fonction d'onde $u(x, y, z, t)$ à singularité mobile qui représenterait le corpuscule en mouvement. Bien entendu, si l'on substitue à l'idée de singularité ponctuelle celle de petite région singulière, on doit considérer que la solution obtenue représente l'onde u d'une particule à symétrie interne sphérique, mais seulement *en dehors de la région singulière*.

Il est naturel de chercher à obtenir en théorie de Dirac des solutions à singularité analogue à la précédente. Considérons un électron de Dirac en l'absence de tout champ et plaçons-nous dans son système propre. Les « petites composantes » u_1 et u_2 y seront supposées nulles et, en adoptant la forme usuelle des matrices de Dirac, on trouvera pour u_3 et u_4 les équations ⁽²⁾

$$(34) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u_1 + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 0; & \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u_3 - \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0; \\ \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial u_3}{\partial t} = m_0 c u_3; & \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{c} \frac{\partial u_4}{\partial t} = m_0 c u_4. \end{cases}$$

(1) Voir Chap. IX, § 3.

(2) Pour alléger l'écriture, nous omettons l'indice zéro dont il faudrait affecter les variables x, y, z, t dans le système propre.

On satisfait aux deux dernières équations en posant

$$(35) \quad u_3 = f_3 e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}, \quad u_1 = f_1 e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}$$

qui entraînent

$$\Delta f_3 = \Delta f_1 = 0.$$

Si nous introduisons les variables

$$(36) \quad u = \frac{x + iy}{2}, \quad v = \frac{x - iy}{2},$$

nous obtenons

$$(37) \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial u} = +\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Ces équations admettent la solution à singularité

$$(38) \quad f_1 = \frac{\partial^2}{\partial u \partial z} \left(\frac{1}{r} \right), \quad f_3 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

comme on le vérifie immédiatement en se souvenant que $\Delta \frac{1}{r} = 0$.

Revenons aux variables x et y et remarquons que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est égal à $\sqrt{4uv + z^2}$. Nous voyons que nous avons obtenu dans le système propre une solution à singularité du type $u_k = f_k e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}$ avec

$$(39) \quad f_1 = f_2 = 0, \quad f_3 = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}, \quad f_4 = \frac{3(x - iy)z}{r^5}.$$

En faisant une transformation de Lorentz et en tenant compte de la transformation correspondante des composantes de Dirac, on obtiendrait la forme des u_k dans un autre système galiléen où la singularité aurait un mouvement rectiligne et uniforme.

Comme les équations (37) se conservent quand on permute simultanément f_3 avec f_4 et u avec $-v$, on en déduit l'existence d'une autre solution à singularité donnée dans le système propre par

$$(40) \quad \begin{cases} f_1 = f_2 = 0, & f_3 = -\frac{\partial^2}{\partial v \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{3(x + iy)z}{r^5}, \\ f_4 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}. \end{cases}$$

On remarquera que les solutions (39) et (40) ne possèdent pas la symétrie sphérique : elles correspondent non pas à des pôles isolés, mais à des doublets. Pour des particules de spin supérieur à $\frac{1}{2}$, on trou-

verait des solutions à singularité correspondant à des multipôles d'ordre supérieur ⁽¹⁾.

Si l'on substitue à la notion de singularité ponctuelle celle d'une petite région singulière où l'équation en u n'est plus linéaire, on doit considérer les solutions indiquées ci-dessus comme n'étant valables qu'à l'extérieur de la petite région singulière.

Examinons maintenant comment se présente en théorie de Dirac la question de la liaison entre l'onde u et l'onde Ψ .

Pour le mieux voir, reprenons d'abord la question dans la théorie sans spin. L'équation (23), quand on y néglige le terme P'_i qui vient du spin et que l'on considère une seule phase φ , s'écrit

$$(41) \quad M_0 c u_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} A_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ce qui donne

$$(42) \quad \frac{M_0 c i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} A_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad \frac{M_0 c i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = - \frac{1}{ic} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} iV,$$

d'où

$$(43) \quad \frac{M_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right).$$

Par division, on obtient alors

$$(44) \quad v_i = - c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} A_i}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V},$$

ce qui est précisément la formule du guidage précédemment obtenue dans la théorie sans spin [chap. IX, formule (36)]. La vitesse est alors entièrement déterminée par la phase φ commune à u et à Ψ . L'équation de Jacobi généralisée (J) valable pour u et Ψ impose alors, nous l'avons vu, l'égalité des rapports $\frac{\square a}{a}$ et $\frac{\square f}{f}$, ce qui permet de mettre l'expression de la masse M_0 sous les deux formes équivalentes

$$(45) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\square a}{a} \right)} = \sqrt{m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\square f}{f} \right)}.$$

Voyons maintenant ce qui se passe en théorie de Dirac. La for-

(1) M. Gérard Petiau a étudié très complètement ces autres types de solutions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 998).

mule (23) nous donne

$$(46) \quad \begin{cases} \frac{M_0 v_i}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_i + P'_i & (i = 1, 2, 3), \\ \frac{M_0 c i}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{1}{ic} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c} iV + P'_4; \end{cases}$$

d'où

$$(47) \quad \frac{M_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \varepsilon V \right) + \frac{P'_4}{ic},$$

avec

$$(48) \quad \frac{P'_4}{ic} = \frac{\varepsilon_2 m_0}{a+a} = \frac{\frac{h}{2\pi i} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{-1} \gamma_i \gamma_4 a)}{a^1 a},$$

$\frac{P'_4}{ic}$ est une quantité réelle. Finalement nous obtenons par division des deux formules (46)

$$(49) \quad v_i = -c^2 \frac{\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_i + P'_i}{\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \varepsilon V + \frac{P'_4}{ic}}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Telle est la forme précise de la formule du guidage en théorie de Dirac.

5. Conséquences des formules obtenues. — Le point de vue de la double solution conduit à supposer que la vitesse (à trois composantes) et la masse propre M_0 données par les formules (49) et (21) doivent avoir la même valeur qu'on les calcule à partir de l'onde u ou qu'on les calcule à partir de l'onde Ψ . Or, comme ici les quatre $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i}$ et les quatre P_i dépendent des a_k , il ne suffit plus de supposer que chaque u_k a la même phase φ_k que le Ψ_k correspondant. Il faut, de plus, que, quand on substitue les f_k aux a_k , les expressions $-\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} - \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_i + P'_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ gardent la même valeur de façon que la vitesse \mathbf{v} et la masse propre M_0 gardent aussi la même valeur.

Au premier abord, cette condition, qui semble indispensable pour permettre l'introduction de la double solution en théorie de Dirac, paraît extrêmement restrictive. Nous allons voir cependant qu'elle découle tout naturellement d'une idée que nous allons rencontrer ici pour la première fois, mais que nous retrouverons au chapitre suivant.

En somme, ce que nous sommes amenés à postuler, c'est que les lignes de courant définies par les formules de la théorie de Dirac soit à partir de l'onde u , soit à partir de l'onde Ψ coïncident. Mais, bien entendu, elles ne peuvent coïncider que dans la région de l'espace où l'onde u obéit à la même équation linéaire que l'onde Ψ , c'est-à-dire à l'extérieur de la très petite région singulière mobile où u a de très grandes valeurs et n'obéit plus à l'équation linéaire du Ψ . Affirmer que la région singulière quasi ponctuelle suit une des lignes de courant définies par le quadrivecteur \mathbf{j} , celui-ci étant calculé à l'aide des composantes u_k de u , ne peut avoir de sens que si l'on calcule \mathbf{j} sur le pourtour de la région singulière, par exemple sur la sphère S que nous avons introduite au chapitre IX (§ 6) pour la démonstration de la formule du guidage et qui, contenant à son intérieur toute la petite région singulière, se trouve déjà dans la région où u obéit à l'équation linéaire de propagation. Il faut aussi, bien entendu, que la région singulière soit si petite que l'onde continue Ψ soit sensiblement constante dans toute cette région et jusqu'à la sphère S . Alors, sur toute la sphère S , les vecteurs d'espace \mathbf{j} (j_1, j_2, j_3) sont égaux et parallèles et l'on doit pouvoir les calculer aussi bien à l'aide des u_k que des Ψ_k .

En un point quelconque de la sphère S , l'onde u qui obéit en ce point aux équations linéaires de Dirac satisfait à l'équation de continuité

$$(50) \quad \frac{d}{dt} \frac{|u|^2}{2} + \operatorname{div}(|u|^2 \mathbf{v}) = 0,$$

où \mathbf{v} est la vitesse définie localement dans l'espace à partir du quadrivecteur courant-densité de la théorie de Dirac. En remarquant que

$$|u|^2 = \sum_k |u_k|^2 = \sum_k |f_k|^2 = |f|^2,$$

on peut écrire l'équation (50) sous la forme

$$(51) \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f^2 + f^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

ou, si l'on appelle s la variable d'espace comptée le long de \mathbf{v} ,

$$(52) \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} + v \frac{\partial f^2}{\partial s} + f^2 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Or, nous avons supposé (chap. IX, § 6) que sur la sphère S , bien que l'équation linéaire des ondes y soit approximativement valable pour u , la fonction f commence à augmenter rapidement de sorte que $\frac{\partial f^2}{\partial s} \gg f^2$.

On peut alors négliger le dernier terme de l'équation précédente et l'on trouve

$$(53) \quad v = - \frac{\frac{\partial f^2}{\partial s}}{\frac{\partial f^2}{\partial t}} = + \frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}}.$$

On voit donc que, en un point quelconque de S , les valeurs de l'amplitude $f = \sqrt{\sum_k |f_k|^2}$ de l'onde u se déplacent dans la direction \mathbf{v} avec la vitesse (53). Ceci signifie que la région singulière quasi ponctuelle de u se déplace d'un mouvement d'ensemble avec la vitesse v le long des lignes de courant définies par les vecteurs d'espace \mathbf{j} qui sont par hypothèse tous égaux et parallèles en tous les points de S . Nous avons ainsi retrouvé en théorie de Dirac la démonstration de la formule du guidage.

Mais les considérations qui précèdent, en nous obligeant à admettre que le calcul du quadrivecteur \mathbf{j} sur S conduit au même résultat qu'on le fasse à partir des u_k ou à partir des Ψ_k , nous conduisent presque inévitablement à envisager l'idée suivante : « En dehors de la petite région singulière, où elle obéit à une équation non linéaire, la fonction u serait proportionnelle à la fonction Ψ normée ; autrement dit, on aurait à l'extérieur de S , $u \simeq C\Psi$ ». La constante C aurait une valeur bien déterminée puisque u , ayant une signification objective, doit avoir une valeur bien déterminée et ne peut pas être normée arbitrairement comme Ψ .

Dans la théorie sans spin, cette hypothèse nous conduit à poser

$$(54) \quad f = |C| \alpha, \quad \text{phase de } u = \text{phase de } \Psi + \text{const.}$$

La seconde relation exprime l'égalité des phases (à une constante près, ce qui est sans importance puisque le guidage fait ici seulement intervenir les dérivées de φ). La première relation (54) donne évidemment $\frac{\square f}{f} = \frac{\square \alpha}{\alpha}$ et nous avons ainsi retrouvés toutes les relations postulées par l'hypothèse de la double solution en Mécanique ondulatoire sans spin.

En théorie de Dirac, l'hypothèse $u = C\Psi$ donne

$$(55) \quad f_k = |C| \alpha_k, \quad \text{phase de } u_k = \text{phase de } \Psi_k + \arg C.$$

La seconde relation (55) exprime le postulat que nous avons introduit en supposant que les composantes de même indice u_k et Ψ_k avaient

la même phase φ_k . De plus, l'ensemble des relations (55) montre que les quadrvecteurs définis par

$$(56) \quad j_i = ic \sum_k \Psi_k^* \gamma_i \gamma_t \Psi_k, \quad j_i = ic \sum_k u_k^* \gamma_i \gamma_t u_k$$

coïncide sur S et à l'extérieur de S à la constante multiplicative près $|C|^2$. Il est facile de vérifier qu'alors la vitesse de guidage \mathbf{v} et la masse propre M_0 ont la même valeur qu'on les calcule sur S à partir de u ou à partir de Ψ .

Nous allons maintenant dans le chapitre suivant étudier de plus près la nouvelle idée que nous avons été amenés à introduire et nous en verrons toute la portée (4).

(4) L'hypothèse exprimée par $u = C\Psi$ (en dehors de la région singulière) soulève en théorie de Dirac une difficulté qui ne se présente pas dans le cas de la Mécanique ondulatoire à un seul Ψ .

En effet en théorie de Dirac, le choix des matrices γ (ou α) est dans une large mesure arbitraire et, suivant la façon dont on fait ce choix, la forme des Ψ_k varie. Seule reste invariante la forme des grandeurs bilinéaires en Ψ et Ψ^* qui, dans l'interprétation habituelle, constituent les seules grandeurs de la théorie ayant un sens physique. Comme le quadrvecteur \mathbf{j} est précisément une grandeur de ce type, le guidage défini par \mathbf{j} est indépendant de l'indétermination existant sur les Ψ_k . Mais, comme dans la théorie de la double solution on veut donner à l'onde u un sens physique, il semble que l'on doive supposer que les composantes u_k ont des valeurs bien déterminées. Alors, dans les équations linéaires valables pour les u_k en dehors de la région singulière, il faut supposer que les matrices γ ont une forme physiquement déterminée et la relation $u = C\Psi$ ne sera possible que si l'on prend pour les Ψ_k une solution des équations de Dirac écrites avec précisément cette forme des matrices γ . L'indétermination des matrices γ et celle des composantes Ψ_k qui en résulte ne s'introduirait donc que quand, en adoptant le point de vue de l'interprétation usuelle, on ferait abstraction de l'onde u pour ne plus conserver à l'onde Ψ continue que le caractère d'une onde fictive de probabilité.

CHAPITRE XVII.

LA STRUCTURE DE L'ONDE u ET SES RELATIONS AVEC L'ONDE Ψ .

1. Difficulté de prouver l'existence et de trouver la forme de l'onde u .

— Pour arriver à mettre vraiment au point la théorie de la double solution, il faudrait prouver l'existence de l'onde u , préciser sa forme et montrer quelles sont les relations exactes qui existent entre elle et l'onde Ψ usuellement envisagée par la Mécanique ondulatoire. Il se pose alors toute une série de questions difficiles que nous allons, au moins en partie, examiner maintenant. Tant que ces questions n'auront pas été bien élucidées, la possibilité de construire une interprétation causale vraiment cohérente de la Mécanique ondulatoire ne sera pas établie.

Quand j'ai écrit mon Mémoire de 1927, je considérais l'onde u comme obéissant à une équation de propagation linéaire et comportant une véritable singularité mathématique. Naturellement, je sentais la nécessité de démontrer l'existence de ces ondes u à singularité. Comme j'avais trouvé une solution à singularité dans le cas de l'absence de champ, j'espérais qu'on pourrait étendre ce résultat en raisonnant à peu près comme il suit. Dans une région R_0 où il n'y a pas de champ, il existe des solutions u et Ψ , jumelées comme l'exige le principe de la double solution : si ces ondes pénètrent ensuite dans une région R où règne un champ, la singularité de l'onde u ne peut pas cesser d'exister et l'on pourrait chercher à démontrer que le prolongement de l'onde u dans la région R continue à être lié au prolongement de l'onde Ψ par les prescriptions de la double solution. Mais je ne pouvais aucunement préciser cette démonstration.

En résumé, la théorie que je cherchais à développer présupposait le théorème d'existence suivant :

Étant donné une certaine équation de propagation valable dans un certain domaine de l'espace et admettant dans ce domaine une

solution continue Ψ telle que

$$\Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

satisfaisant à certaines conditions aux limites, il existe une autre solution

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

ayant la même phase $\varphi(x, y, z, t)$, obéissant aux mêmes conditions aux limites et dont l'amplitude présente une singularité en général mobile ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nous voudrions indiquer comment on peut poser le problème d'existence de la fonction u en l'absence du champ.

Dans un espace-temps euclidien, l'équation $\square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0$ s'écrit en coordonnées curvilignes $x^\alpha = F_\alpha(x, y, z, t)$ sous la forme

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta} + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0.$$

En posant $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ avec a et φ réels, on obtient les deux équations

$$(J) \quad \left[g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} - m_0^2 c^2 \right] a = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial a}{\partial x^\beta},$$

$$(C) \quad 2 g^{\alpha\beta} \frac{\partial a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + \frac{a}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} = 0.$$

Considérons les hypersurfaces $\varphi(x, y, z, t) = \text{const.} = x^4$ de métrique interne $d\tau^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ avec $i, k = 1, 2, 3$ et les courbes Γ orthogonales dans l'espace-temps à cette famille d'hypersurfaces. Les courbes Γ sont définies par $u^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}$ et coïncident avec les lignes de courant déterminées par la formule du guidage. Comme les hypersurfaces ne sont pas en général géodésiquement parallèles, on aura en tout point de l'espace-temps euclidien

$$(b) \quad ds^2 = ds_\Gamma^2 + d\tau^2 = g_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4) (dx^i)^2 + g_{ik}(x^1, x^2, x^3, x^4) dx^i dx^k,$$

d'où

$$(c) \quad g^{44} = \frac{1}{g^{44}}, \quad g^{i4} = 0.$$

L'équation (C) montre alors que $a^2 \sqrt{-g} g^{44}$ est indépendant de x^4 et, comme on en conclut que $\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (a^2 \sqrt{-g} u^\alpha) = 0$, ceci exprime la conservation du fluide dont la densité propre est $\varrho_0 = a^2 \sqrt{-g}$. Quant à l'équation (J), elle donne

$$(d) \quad \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial a}{\partial x^\beta} = (g^{44} - m_0^2 c^2) a.$$

On voit alors que $\frac{1}{c} \sqrt{g^{44}}$ est égale à la masse propre variable M_0 précédemment définie.

L'équation (d) jointe aux conditions aux limites détermine une solution Ψ finie,

Le problème était ainsi posé, mais non résolu. D'ailleurs on aurait pu modifier un peu l'énoncé de ce théorème d'existence en faisant la remarque suivante. Écrivons les deux ondes sous la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}; \\ u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi'(x, y, z, t)}. \end{cases}$$

Nous avons admis dans l'énoncé précédent « la concordance des phases » sous la forme stricte

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi'(x, y, z, t)$$

pour tout ensemble de valeurs x, y, z, t . C'est là naturellement une exigence qui paraît très sévère. Or, ce postulat sert essentiellement à démontrer la formule du guidage et à opérer le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration. Si l'on regarde de quelle manière l'hypothèse (2) intervient dans ces raisonnements, on constate qu'il n'est pas indispensable d'admettre la concordance des phases φ et φ' sous la forme (2). Il suffirait de supposer que les phases φ et φ' coïncident au voisinage immédiat du corpuscule.

Nous avons été amené, pour des raisons que nous allons développer, à remplacer l'idée que l'onde u comporte une singularité ponctuelle par l'idée d'une très petite région singulière, en général mobile, où l'onde obéirait à une équation d'ondes non linéaire. Il suffirait alors de postuler que les phases φ et φ' ont, ainsi que leurs dérivées premières, les

uniforme et continue qui, pour un observateur galilien, aura la forme

$$(e) \quad \Psi = a(x^1, x^2, x^3, x^4) e^{\frac{2\pi i}{h} x^4} = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} F_4(x, y, z, t)},$$

Ψ et par suite φ étant ainsi déterminées, considérons l'équation de propagation que l'onde u de la double solution satisfait en dehors de la région singulière

$$(f) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{-g} g^{23} \frac{\partial u}{\partial x^3} + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 u = 0.$$

En posant $u = f(x^1, x^2, x^3, x^4) e^{\frac{2\pi i}{h} x^4}$, nous obtenons, en substituant dans (f) les mêmes équations (J) et (C) que ci-dessus, mais où a est remplacé par f . L'équation (C) montre encore que $f^2 \sqrt{-g} g^{44}$ est indépendant de x^4 et l'équation (J) donne

$$(g) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^2} \sqrt{-g} g^{23} \frac{\partial f}{\partial x^3} = (g^{44} - m_0^2 c^2) f.$$

Il faudrait démontrer qu'il existe des solutions de cette équation qui possèdent une ligne singulière d'espace-temps coïncidant avec l'une des courbes Γ .

mêmes valeurs sur la petite sphère S entourant la région singulière qui nous a servi pour la démonstration de la formule du guidage.

Nous avons voulu signaler ici cette possibilité d'affaiblir le postulat (2) sur la concordance des phases. Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin (*voir* § 9).

2. Un théorème sur les fonctions de Green de l'équation des ondes.

— Nous allons maintenant exposer une difficulté soulevée par la forme primitive de mes conceptions sur l'onde u .

La difficulté en question résulte d'un théorème sur les fonctions de Green de l'équation des ondes, théorème qui, signalé autrefois par lord Rayleigh, a été utilisé par Sommerfeld dans ses travaux sur la Mécanique ondulatoire.

Considérons un système quantifié, par exemple un atome d'hydrogène. Nous savons que dans un état s de ce système, le corpuscule d'après la formule du guidage doit rester immobile en un point Q . Si l'onde u comporte une singularité ponctuelle, cette singularité doit se trouver en Q .

L'équation des ondes Ψ est ici de la forme

$$(3) \quad \Delta \Psi + [k^2 - F(r)] \Psi = 0,$$

où $F(r)$ est le potentiel coulombien du noyau de l'atome H . Les valeurs propres de k_i et les fonctions propres correspondantes Ψ_i sont définies par

$$(4) \quad \Delta \Psi_i + [k_i^2 - F(r)] \Psi_i = 0.$$

Si l'on suppose qu'il existe une solution de l'équation des ondes ayant une singularité en $\frac{1}{r}$ au point Q et nulle aux limites du domaine [ce sera la fonction de Green de l'équation (3) relative au point Q et au domaine considéré], on devra pour

$$(5) \quad \Delta u + [k^2 - F(r)] u = \varepsilon \delta(M - Q) \quad (\varepsilon = \text{const.}),$$

M étant le point courant et $\delta(M - Q)$ la fonction singulière de Dirac relative au point Q . L'équation des ondes sera ainsi satisfaite partout par u , sauf au point Q où existera une singularité en $\frac{1}{r}$.

Mais on peut développer $\delta(M - Q)$ suivant les fonctions propres $\Psi_i(M)$ sous la forme

$$(6) \quad \delta(M - Q) = \sum_i c_i \Psi_i(M); \quad c_i = \int \delta(M - Q) \Psi_i^*(M) d\tau = \Psi_i^*(Q);$$

d'où

$$(7) \quad \delta(M - Q) = \sum_i \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M).$$

Si alors on développe $u(M)$ sous la forme

$$(8) \quad u(M) = \sum_i c_i \Psi_i(M)$$

avec de nouveaux coefficients c_i , on devra avoir

$$(9) \quad [\Delta + k^2 - F(r)] \sum_i c_i \Psi_i(M) = \varepsilon \sum_i \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)$$

ou d'après (4)

$$(10) \quad \sum_i c_i (k^2 - k_i^2) \Psi_i(M) = \varepsilon \sum_i \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M),$$

d'où l'on tire, puisque les Ψ_i forment un système complet

$$(11) \quad c_i = \frac{\varepsilon \Psi_i^*(Q)}{k^2 - k_i^2},$$

puis

$$(12) \quad u(M) = \sum_i \frac{\varepsilon \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k^2 - k_i^2}.$$

Cette expression de la fonction de Green $u(M, Q)$ constitue le théorème auquel j'avais fait allusion.

Or, dans un état stationnaire, la fonction u doit avoir une fréquence égale à celle de l'état stationnaire considéré, c'est-à-dire que k doit être égal à l'un des k_i . On voit alors que le coefficient de $\Psi_i(M)$ dans (12) est infini sauf si $\Psi_i(Q) = 0$. En d'autres termes, la solution à singularité que nous avons calculée n'existe que si la singularité est placée en un point où Ψ_i est nulle. Ce résultat, qui est classique en théorie des vibrations et qui exprime un résultat bien connu de la théorie mathématique des équations intégrales, semble ici s'opposer fatalement à la conception d'une onde u à singularité mathématique. En effet, dans les états où le corpuscule-singularité devrait être immobile, il devrait se trouver en un point Q où l'onde Ψ serait nulle, c'est-à-dire précisément en un point où, d'après la signification statistique du $|\Psi|^2$, il ne devrait pas pouvoir se trouver. Le théorème exprimé par la formule (12) paraissait donc nous contraindre à abandonner mon idée primitive suivant

laquelle l'onde u présenterait une singularité ponctuelle en $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire serait fonction de (5) ⁽¹⁾.

3. Introduction d'une équation d'ondes non linéaire pour u . — Pour échapper à la difficulté que nous venons de signaler, et pour d'autres raisons, nous avons été amené à remplacer l'idée que l'onde u présente une singularité ponctuelle par une autre idée fortement suggérée par les remarques de M. Vigier au sujet de l'analogie que présente ma démonstration de la formule du guidage avec les résultats de MM. Georges Darmais et Einstein au sujet du mouvement d'une particule en Relativité généralisée.

En Relativité généralisée, les coefficients $g_{\mu\nu}$ de la métrique d'espace-temps obéissent à des équations non linéaires ($R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$ dans le vide) et il en est de même naturellement des quantités $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}^{(0)}$, différences entre les $g_{\mu\nu}$ et leurs valeurs galiléennes constantes $g_{\mu\nu}^{(0)}$. Néanmoins, mises à part de petites régions singulières de l'espace-temps qui constitueraient d'après Einstein les tubes d'univers des corpuscules et où les $\gamma_{\mu\nu}$ pourraient prendre de grandes valeurs, les $\gamma_{\mu\nu}$ obéissent *approximativement* à des équations linéaires : cette propriété est très utile pour les calculs effectués par la théorie de la Relativité généralisée. Le résultat essentiel des recherches de G. Darmais et d'Einstein est que ces régions singulières doivent se déplacer au cours du temps de telle façon que le tube d'Univers très délié représentant ce mouvement coïncide avec une géodésique du champ extérieur. Ce résultat est très remarquable parce qu'il permet de déduire directement des équations du champ le mouvement des corpuscules sans avoir à introduire comme un postulat spécial (ainsi qu'on le fait dans les exposés élémentaires de la Relativité généralisée) le fait que la ligne d'Univers d'une particule est une géodésique de l'espace-temps. L'analogie du résultat de MM. Darmais et Einstein avec ma démonstration de la formule du guidage conduit à penser que le « champ » u pourrait bien être relié à la géométrie de l'espace-temps et obéir, lui aussi, à une équation non linéaire.

Voyons comment on peut préciser cette idée dans le cadre de la théorie de la double solution. Bien entendu, l'équation d'ondes du Ψ , onde fictive simple représentation de probabilité, doit être linéaire, car

(1) Voir à ce sujet la fin du paragraphe 6.

le principe de superposition, conséquence nécessaire de la signification statistique du Ψ , doit être satisfait. L'équation linéaire du Ψ est celle que l'on connaît bien en Mécanique ondulatoire usuelle. La théorie de la double solution suppose que, sauf dans une région très petite constituant le « corpuscule » au sens étroit du mot, l'onde u obéit à la même équation linéaire que l'onde Ψ . Mais ceci n'empêche pas d'admettre que la véritable équation d'ondes de u soit une équation non linéaire, les termes non linéaires n'ayant une influence sensible que dans une très petite région, en général mobile, de l'espace où les valeurs de u deviendraient très grandes. En dehors de cette petite région singulière ⁽¹⁾, les termes non linéaires seraient assez faibles pour que u puisse obéir *très approximativement* à la même équation d'ondes linéaires que le Ψ . Si l'on adopte ce nouveau point de vue, on est amené, pour démontrer la formule du guidage, à envisager une petite sphère S entourant la région singulière et placée à la limite de cette région, là où la fonction u commence à augmenter rapidement tout en obéissant encore à l'équation linéaire.

L'équation d'ondes non linéaire satisfaite par u (dont la forme exacte pourrait résulter des tentatives de M. Vigier ou de tentatives analogues) est encore inconnue : elle serait certainement variable suivant la nature de la particule et la valeur de son spin, et les valeurs de la fonction u (en général à plusieurs composantes u_k) détermineraient ce qu'on pourrait appeler la « structure interne » de la particule. Cette structure, dans le cas des particules de spin $\frac{1}{2}$ (en unité $\frac{h}{2\pi}$) comme l'électron, aurait une symétrie correspondant à ce spin et serait du type « dipôle ». Pour les particules de spin différent de $\frac{1}{2}$, elle résulterait, si l'idée fondamentale de ma théorie de la « fusion » est exacte, d'une fusion de plusieurs corpuscules élémentaires de spin $\frac{1}{2}$: il y aurait alors une sorte de confluence des régions singulières qui donnerait lieu à l'apparition de symétries différentes de celle du dipôle (se réduisant à la simple symétrie sphérique polaire dans le cas du spin nul). Les dimensions de la région singulière permettraient sans doute de définir, au moins approximativement, un « rayon » de la particule. On sait que les théories classiques comme celle de Lorentz introduisaient un tel rayon, notamment pour l'électron. Les théories actuelles ressentent très fortement la

⁽¹⁾ L'adjectif « singulière » ne signifie pas nécessairement que u a en un point de cette région une véritable singularité ponctuelle (Voir la fin du dernier chapitre).

nécessité de réintroduire la notion de rayon de la particule, mais, n'ayant à leur disposition pour la description des particules que l'élément statistique Ψ qui ne permet pas de définir une structure individuelle, elles se trouvent actuellement aux prises avec de grosses difficultés.

Je voudrais maintenant insister sur un point très important. Einstein a souligné que, si une équation de champ est linéaire, on peut toujours trouver une solution à singularité où la singularité a un mouvement prescrit à l'avance. Par exemple, si, dans la théorie de l'électron de Lorentz, on veut calculer le champ électromagnétique créé par un électron ponctuel dont le mouvement est prescrit à l'avance, on peut toujours trouver la solution. De plus, toujours en raison du caractère linéaire des équations admises, on peut superposer à la solution à singularité une solution continue sans que la seconde exerce aucune influence sur la première. C'est là ce qui oblige la théorie de Lorentz, quand elle veut calculer l'action d'un champ électromagnétique sur un électron, à introduire comme postulat supplémentaire l'existence de la force de Lorentz exercée par le champ électromagnétique sur l'électron. Pour qu'automatiquement la région singulière se trouve être « guidée » par le champ environnant, il faut sortir du domaine de la linéarité et faire reposer la théorie sur des équations non linéaires. C'est parce qu'en Relativité généralisée les équations du champ (c'est-à-dire celles des $g_{\mu\nu}$) sont non linéaires que MM. Darmois et Einstein ont pu trouver, sans aucun postulat supplémentaire, une loi de guidage des particules par le champ. En transposant ces idées dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution, on voit que, si l'on désire tenter d'établir entre le corpuscule et l'onde une solidarité qui ne peut exister dans une théorie linéaire, il apparaît comme naturel d'introduire des équations de propagation non linéaires.

On peut même penser que, si la Mécanique ondulatoire actuelle n'arrive pas à préciser clairement les rapports de l'onde et du corpuscule, cela est dû à ce qu'elle s'enferme a priori dans le cadre d'une théorie linéaire.

Cependant, au sujet de ce que nous venons de dire, une remarque s'impose. La démonstration que j'avais donnée en 1927 de la formule du guidage ne paraît nullement exiger la non-linéarité de l'équation des ondes, même si par ailleurs on trouve des raisons pour admettre cette non-linéarité. Ce fait semble en contradiction avec les considérations d'Einstein puisque, même en supposant que l'onde u est une solution à singularité ponctuelle d'une équation linéaire, comme je le faisais dans mon Mémoire de 1927, la loi du guidage impose un mouvement bien

déterminé à la singularité. Mais il faut remarquer que, pour faire ma démonstration, j'admettais, en plus de l'hypothèse de la linéarité de l'équation d'ondes, la concordance des phases des ondes u et Ψ , au moins au voisinage immédiat de la singularité. Or, nous verrons plus loin qu'en dehors de la région singulière, on doit pouvoir écrire l'onde u sous la forme approximative $u = u_0 + v$. Dans cette formule, v désigne une solution régulière de l'équation linéaire des ondes qui, tout en ayant un caractère objectif, doit être *en général* proportionnelle à l'onde Ψ considérée par l'interprétation usuelle; quant à u_0 , c'est une solution singulière en aiguille de l'équation linéaire des ondes qui aurait une véritable singularité ponctuelle au centre de la région singulière si l'équation linéaire était encore valable dans celle-ci. Or, si l'équation des ondes était partout linéaire, u_0 et v seraient des solutions totalement indépendantes et le postulat de la concordance des phases de u_0 et de v serait un postulat arbitrairement surajouté. Au contraire, si la véritable équation des ondes u est non linéaire, les termes non linéaires étant essentiels dans la région singulière bien que sensiblement négligeables en dehors, la décomposition de u en u_0 et v ne peut être approximativement valable qu'en dehors de la région singulière: en réalité, il n'y a qu'une onde u indécomposable, les deux termes u_0 et v se trouvant dans la région singulière entièrement « soudés » par la non-linéarité. On s'explique alors fort bien que le postulat de la concordance des phases, qui serait entièrement arbitraire dans une théorie linéaire, puisse en fin de compte trouver sa justification dans la non-linéarité de l'équation de l'onde u dans la région singulière ⁽¹⁾. Ainsi, dans ma démonstration de 1927, l'hypothèse d'une non-linéarité locale de l'équation des ondes était sans doute dissimulée derrière le postulat de la concordance des phases.

Nous verrons d'ailleurs bientôt qu'il y a encore d'autres raisons pour adopter, pour la propagation de l'onde u , une équation non linéaire.

4. Difficulté de préciser exactement la relation entre onde u et onde Ψ . — Dans le cadre de la théorie causale de la double solution, l'onde u et l'onde Ψ ont des caractères tout à fait différents. L'onde u doit être une « réalité objective », c'est-à-dire qu'elle doit être indépendante de l'observateur et de l'état de ses connaissances ⁽²⁾. L'onde Ψ ,

(1) Voir plus loin la formule (38).

(2) Le fait que la fonction d'onde u soit une grandeur complexe prouve qu'elle ne peut représenter directement un phénomène physique tel que la vibration d'un milieu, mais il ne s'oppose pas à ce qu'elle ait une signification « objective », c'est-à-dire indépendante de l'observateur: or c'est là ce qui, du point de vue de la théorie que nous exposons, est la chose essentielle.

au contraire, est une représentation de probabilité à caractère subjectif qui dépend des connaissances de l'utilisateur, des informations que l'observation et la mesure ont pu lui apporter : ce caractère subjectif de l'onde Ψ s'exprime en particulier par la « réduction du paquet de probabilité » que le physicien doit opérer lorsque des informations, en lui apportant des connaissances nouvelles sur un corpuscule ou un système, l'obligent à modifier sa représentation des probabilités et, en particulier, à supprimer ce qui y représentait des possibilités qu'il sait maintenant n'être pas réalisées.

Cependant, malgré la différence essentielle de nature entre l'onde u et l'onde Ψ , il doit exister une liaison étroite entre leurs formes mathématiques, liaison exprimée par l'égalité des phases et la relation $\frac{\square f}{f} = \frac{\square a}{a}$ dans le cas de l'équation de Klein-Gordon et par l'identité des vecteurs courant-densité \mathbf{j} construits à l'aide de u et de Ψ dans le cas des équations de Dirac. La difficulté est alors de comprendre comment une telle liaison est possible et comment elle est compatible avec la réduction du paquet de probabilité qui, très compréhensible pour l'onde subjective Ψ , ne doit pas exister pour une onde objective telle que u . On se trouve donc en présence du difficile problème suivant : établir une analogie de forme entre u et Ψ *sans cependant que cela ait pour conséquence de faire participer l'onde u au caractère subjectif de l'onde Ψ .*

Nous allons examiner plus en détails quelques aspects particuliers de cette difficulté générale.

Considérons d'abord le cas d'un système quantifié. Les énergies de ses états stationnaires sont définies comme étant les valeurs propres de l'équation de Schrödinger. Or, ces valeurs propres sont obtenues en partant d'une équation aux dérivées partielles linéaire avec l'hypothèse essentielle que les solutions Ψ (fonctions propres) sont partout finies, uniformes et continues. Mais, si l'onde Ψ est fictive et si la réalité objective est décrite par l'onde u pour laquelle existe une région singulière, sinon une singularité ponctuelle, comment justifier le succès du calcul des valeurs propres à partir de l'onde Ψ ? Ce calcul devrait pouvoir se faire en se servant seulement de l'onde u sans avoir à se préoccuper de l'onde Ψ statistique et fictive. On sent que cela doit exiger une analogie de forme mathématique entre l'onde u et l'onde Ψ , analogie qui doit cependant respecter leur différence de nature.

Considérons maintenant la propagation d'une onde monochromatique plane avec phénomènes d'interférences et de diffraction. On sait

aujourd'hui que ces phénomènes existent non seulement pour la lumière, mais pour les électrons et pour tous les autres corpuscules. Comment interpréter ces phénomènes si les ondes continues du type Ψ sont fictives et si la réalité objective est décrite par une onde u possédant une région singulière? Pour approfondir cette question, raisonnons sur le cas classique des trous d'Young, c'est-à-dire d'un écran plan percé de deux petites ouvertures circulaires A et B. Sur cet écran tombe normalement une onde plane monochromatique. Si z est la variable comptée suivant la normale à l'écran, on écrira dans la théorie usuelle l'onde incidente sous la forme

$$(13) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \left(\gamma t - \frac{z}{\lambda} \right)} = a e^{\frac{2\pi i}{h} (W t - p z)}$$

Comme la chose est classique en Optique, on calcule l'onde à la sortie de l'écran en considérant les trous A et B comme deux petites sources cohérentes de même intensité et en superposant leurs effets. On démontre aisément qu'au voisinage de l'axe de symétrie et loin de l'écran, les surfaces $\varphi = \text{const.}$ sont des ellipsoïdes et que les surfaces d'égale amplitude sont les hyperboloïdes orthogonaux : on en déduit la position des franges approximativement rectilignes qui sont effectivement observables sur un écran placé normalement à Oz dans la région d'interférences. Mais, du point de vue de la théorie de la double solution, nous devons, pour décrire véritablement la réalité objective, remplacer l'onde Ψ continue par une onde u à région singulière. Alors, pour que la région singulière venant de la gauche pénètre dans la région à droite de l'écran, elle devra avoir passé par l'un des trous d'Young et les deux trous paraissent alors ne plus jouer du tout, comme dans le calcul classique, des rôles symétriques. Il semble naturel de penser que l'onde u diminue rapidement d'amplitude quand on s'éloigne du centre de la région singulière et qu'elle tombe à de très faibles valeurs dès que l'on est à des distances macroscopiques de celle-ci. S'il en était ainsi, l'amplitude de u serait très grande dans une partie d'un des trous, alors qu'elle serait très faible sur toute la surface de l'autre trou : il semblerait donc impossible d'admettre que les deux trous jouent le rôle symétrique de deux petites sources de même intensité. L'hypothèse de l'équivalence des trous, qui paraît cependant essentielle pour le succès du calcul des franges effectivement observées, ne pourrait plus être maintenue. En y réfléchissant, on a l'impression que la difficulté est considérable.

Une autre série de difficultés est liée à la propriété fondamentale des

trains d'ondes continues du type classique qui est leur tendance constante à se disséminer, c'est-à-dire à s'étendre dans l'espace avec diminution constante de leur amplitude en chaque point (la seconde propriété étant liée à la première parce que, l'intégrale $\int a^2 d\tau$ étant constante pour les ondes continues du type classique, l'extension du train d'ondes a pour conséquence une diminution locale de a). Au contraire, l'onde u , par le fait même qu'elle doit décrire la structure objective du corpuscule, doit posséder une sorte de permanence tout à fait différente de la tendance constante à l'étalement, de l'instabilité, des trains d'ondes Ψ . On doit donc s'attendre à trouver de ce côté une grande difficulté quand on voudra établir une relation entre la forme mathématique de u et celle de Ψ . On retrouve là, sous une forme nouvelle assez différente de l'ancienne, l'objection faite naguère à la conception de M. Schrödinger qui voulait assimiler le corpuscule à un groupe d'ondes. Cette conception, qui se heurtait aussi à l'objection qu'un corpuscule insécable et bien localisé ne peut être représenté par un train d'ondes homogène et étendu, a dû être abandonnée parce que l'expansion constante d'un train d'ondes au cours du temps, propriété essentielle des ondes continues à propagation linéaire, n'est pas compatible avec la stabilité et la permanence prolongée qu'implique l'idée de corpuscule.

Dans un ordre d'idées voisin, on rencontre aussi des difficultés quand on considère la propriété des trains d'ondes homogènes de pouvoir se tronçonner en plusieurs trains de moindre amplitude comme cela arrive quand on envoie un train d'ondes sur un miroir semi-transparent. Pour les ondes continues Ψ , cette circonstance s'interprète aisément en considérant chacun des trains d'ondes finaux comme représentant une possibilité d'état final dont la probabilité est naturellement moindre que celle (prise égale à l'unité) de l'état initial. Il paraît ne pas pouvoir en être de même pour l'onde u qui, décrivant la structure objective du corpuscule, ne paraît pas pouvoir se diviser de cette façon. Il y a encore d'autres difficultés pour la théorie de la double solution qui vont intervenir quand se produit la réduction du paquet de probabilité qui affecte l'onde Ψ , mais ne peut affecter l'onde u . Nous verrons que dans cette question le fait que les trains d'ondes sont toujours limités doit jouer un rôle très important.

Bref, si l'on veut essayer de préciser les rapports exacts entre l'onde u et l'onde Ψ , il faut s'attendre à rencontrer beaucoup d'obstacles. C'est cependant ce que nous allons tenter de faire.

§. La forme extérieure de l'onde u . Cas des états stationnaires avec corpuscule immobile. — M. Vigier m'avait suggéré que la partie extérieure de l'onde u en dehors de la région singulière, devait coïncider avec l'onde Ψ . Cette idée présentée sous cette forme simple m'avait paru soulever de grosses difficultés qui existent en effet et sur lesquelles je reviendrai : elles m'avaient fait rejeter l'idée de M. Vigier. J'y suis cependant revenu dans une Note du 13 avril 1953 [8]. Cette Note a été le résultat de réflexions sur la première des difficultés que j'ai signalées au paragraphe précédent : comment se fait-il, si l'onde Ψ est purement fictive et si l'onde u représente la réalité objective, que le calcul des valeurs propres d'un système quantifié réussisse en partant de l'hypothèse que l'onde est une solution finie, continue et uniforme de l'équation d'ondes *linéaire*? Cela paraît paradoxal puisque l'onde u , qui seule posséderait une réalité objective, n'a précisément pas ces propriétés.

Je vais exposer d'abord les considérations auxquelles j'ai été conduit en réfléchissant sur ce problème dans le cas d'un état stationnaire d'un système quantifié où le corpuscule reste immobile (état s par exemple). Alors l'onde Ψ a la forme

$$\Psi_n(x, y, z, t) = a_n(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t},$$

a_n étant une fonction réelle, finie, uniforme et continue, nulle aux limites du domaine qui définit le problème de valeurs propres considéré. Si l'on admet que, dans cet état stationnaire, la réalité physique est décrite par une onde u de la forme

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E t},$$

la question est de savoir pourquoi E est nécessairement égal à l'un des E_n , alors que f ne possède pas du tout les propriétés des fonctions propres a_n . Pour étudier la question, j'ai admis, suivant une suggestion de M. Vigier, que l'on peut décomposer l'onde u en une partie singulière u_0 , qui deviendrait très grande mais pas nécessairement infinie dans la région singulière et très petite en dehors, et en une partie régulière v qui obéirait à l'équation linéaire de la Mécanique ondulatoire. Cette décomposition peut paraître arbitraire : je reviendrai tout à l'heure sur les considérations qui peuvent servir à la justifier et à la préciser.

J'admettrai encore, ce qui est assez naturel, que u doit être nulle aux limites du domaine. Alors, sauf dans le cas tout à fait exceptionnel où la région singulière de dimensions très petites ($\leq 10^{-13}$ cm) se trouverait

au voisinage immédiat de la limite du domaine, on pourra considérer v comme sensiblement nulle sur ces limites où $u_0 \simeq 0$. Ceci nous montre d'ailleurs qu'il revient presque au même de supposer que c'est u qui est nulle aux limites du domaine ou d'imposer cette condition à v . Représentons la fonction u (naturellement le problème est en général à trois dimensions, ce que nous ne pouvons représenter sur le papier, mais cela ne change rien).

En dehors de la région singulière (par hypothèse immobile) nous avons $u \simeq v$. Dans la région singulière CD, la fonction u a des valeurs très élevées symboliquement représentées par la courbe ponctuée. Sur

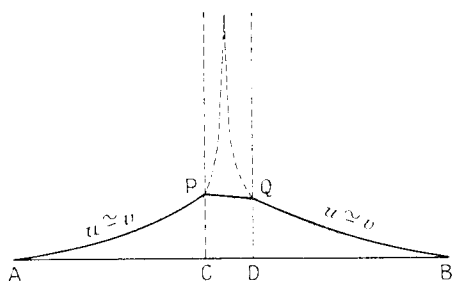


Fig. 10.

la courbe u , considérons deux points P et Q où u coïncide encore sensiblement avec v et remplaçons entre P et Q la courbe u par une portion de courbe PQ qui soit une solution finie, continue et uniforme de l'équation linéaire. Alors nous obtenons une courbe APQB qui présentera des points anguleux en P et en Q, mais qui sera formée de tronçons finis de courbes représentant des solutions finies, uniformes et continues de l'équation linéaire de la Mécanique ondulatoire. Une telle fonction « lisse par morceaux » (stückweise glatt) et nulle aux limites A et B peut être représentée par une somme de fonctions propres Ψ_n de la forme $\sum_n d_n \Psi_n$. On voit donc qu'à l'extérieur de la région singulière la fonction u peut s'écrire

$$(14) \quad u = u_0 + \sum_n d_n \Psi_n \simeq \sum_n d_n \Psi_n.$$

Pour être rigoureux, il faudrait remarquer que les Ψ_n ne sont pas tout à fait les fonctions propres qui correspondent à la condition aux limites $\Psi_n = 0$, mais celles qui correspondent à la condition aux

limites $\Psi_n = -u_0$, mais les deux conditions aux limites diffèrent infiniment peu. Nous devons donc avoir *pour tout temps* t :

$$(15) \quad f(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E t} = u_0 + \sum_n d_n a_n(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}$$

dans toute la région extérieure et ceci n'est possible que si

$$(16) \quad d_n = 0 \quad \text{pour } n \neq m; \quad E = E_m; \quad u_0 = f_0(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_m t},$$

de façon que tous les termes de (15) soient périodiques de même fréquence, $\frac{E_m}{h}$. Finalement on a donc nécessairement

$$(17) \quad u = f(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_m t},$$

E_m étant l'une des valeurs propres calculées par la Mécanique ondulatoire usuelle. Ainsi se trouve levé le paradoxe relatif au calcul des valeurs propres et, du même coup, nous voyons qu'en dehors de la région singulière, nous devons avoir

$$(18) \quad u \simeq d_m a_m e^{\frac{2\pi i}{h} E_m t} = d_m \Psi_m.$$

Toute la partie extérieure de l'onde u coïnciderait donc sensiblement, quant à la forme mathématique, avec l'onde Ψ considérée par la Mécanique usuelle, mais il faut apporter ici une précision très importante. L'onde u étant une réalité objective, doit avoir une valeur parfaitement déterminée : donc, si Ψ_m désigne la $m^{\text{ième}}$ fonction propre *normée*, d_m doit avoir une valeur bien déterminée. En dehors de la région singulière, l'onde u est sensiblement proportionnelle à l'onde Ψ considérée par la Mécanique ondulatoire, mais avec un coefficient physiquement bien déterminé.

Remarquons aussi que le raisonnement précédent prouve que u_0 doit dans la région extérieure obéir à l'équation linéaire avec $E = E_m$.

Si nous comparons les idées qui viennent d'être développées avec la démonstration de la formule du guidage, nous voyons qu'il y a lieu de distinguer trois régions :

1° la « région singulière » de rayon r_0 ($r_0 \leq 10^{-13}$ cm) où les termes non linéaires de l'équation en u sont notables ;

2° une « région intermédiaire » définie par $r_0 < r < r_1$, où r_1 est aussi très petit (sans doute du même ordre de grandeur que r_0), dans laquelle

l'équation des ondes est sensiblement déjà linéaire, mais où $u \simeq u_0 + C\Psi$ croît rapidement quand r diminue en raison de la croissance déjà rapide de u_0 ;

3° la « région extérieure » à la sphère $r = r_1$ où l'équation des ondes u est sensiblement linéaire et où l'on peut poser $u \simeq v = C\Psi$.

C'est dans la région intermédiaire qu'il faut placer la sphère S servant dans la démonstration de la formule du guidage : en effet cette démonstration suppose que sur S l'équation d'ondes est linéaire, mais que u croît très rapidement quand on pénètre dans la sphère.

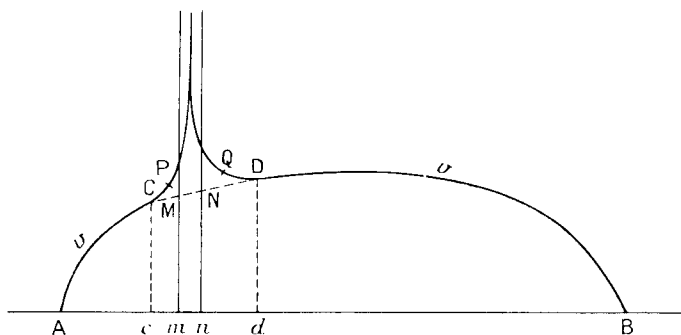


Fig. 11.

Remarquons aussi que les points C et D de la figure 10 doivent correspondre à $r = r_1$.

Représentons par une nouvelle figure l'ensemble des trois régions ⁽¹⁾.

La région très étroite limitée par les verticales M_m et N_n telles que $\overline{mn} = 2r_0$ est la « région singulière » où les termes non linéaires sont notables et où u prend des valeurs élevées. La « région extérieure » est, par définition, celle qui est extérieure aux verticales Cc et Dd de distance $\overline{cd} = 2r_1$; c'est celle où l'on a $u \simeq v$. Enfin la « région intermédiaire » ($r_0 < r < r_1$) est comprise entre M_m et Cc d'une part, N_n et Dd d'autre part : l'équation y est encore approximativement linéaire, mais la courbe représentant la variation de $u \simeq u_0 + v$ se détache de celle qui représente v et commence à monter rapidement. C'est dans cette région intermédiaire qu'il faut placer la sphère S dont le rayon correspondra par exemple à \overline{PQ} . Il faut que la région $CcDd$ soit si petite que la phase φ des ondes u et Ψ puisse y être considérée comme ayant la

⁽¹⁾ Sur la figure 11, c et d devraient être symétriques par rapport à \overline{mn} .

même valeur dans toute cette région. Nous avons déjà appelé l'attention sur le fait que, pour des particules de très grande énergie, cette hypothèse peut n'être plus valable, ce qui imposerait une limite à l'emploi des ondes Ψ ⁽¹⁾.

6. Illustration par un exemple de la décomposition extérieure de l'onde u . — Pour bien montrer à quoi correspond la décomposition de l'onde u dans la région extérieure en une partie singulière u_0 et une partie régulière v , nous envisagerons un exemple particulièrement simple et instructif ⁽²⁾.

Considérons le problème de la quantification pour une enceinte sphérique de rayon R sans champ de force et envisageons seulement les fonctions à symétrie sphérique. L'équation des ondes Ψ à l'approximation non relativiste est

$$(19) \quad \Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E\Psi = -k^2\Psi$$

dont la solution générale est

$$(20) \quad \Psi = \left[A \frac{\sin kr}{r} + B \frac{\cos kr}{r} \right] e^{\frac{2\pi i}{h} E t}.$$

L'onde Ψ devant rester finie à l'origine, on doit poser $B = 0$ et, de plus, comme Ψ doit être nul pour $r = R$, on doit poser $k = k_n = \frac{n\pi}{R}$ avec n entier. La $n^{\text{ième}}$ fonction propre sera donc

$$(21) \quad \Psi_n = A \frac{\sin k_n r}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t} \quad \left(E_n = \frac{k_n^2 h^2}{8\pi^2 m} = \frac{n^2 h^2}{8m R^2} \right).$$

Introduisons maintenant l'idée de la double solution sous la forme primitive que je lui avais donnée, c'est-à-dire en supposant u doué d'une singularité ponctuelle en $\frac{1}{r}$ et satisfaisant partout sauf en $r = 0$ à l'équation linéaire des ondes. Pour avoir des calculs simples supposons que le corpuscule ait une structure interne douée de symétrie sphérique

⁽¹⁾ Notons que pour $r = r_1$, on a $f \simeq a$ et $\frac{\square f}{f} \sim \frac{\square a}{a}$.

⁽²⁾ Remarquons d'ailleurs qu'on obtient un exemple plus simple encore en considérant l'onde monochromatique plane se propageant le long de Oz . D'après la formule (5) du chapitre IX on est alors amené à poser

$$u(x, y, z, t) = \left[\frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - ct)^2}{1 - \beta^2}}} \right] e^{\frac{2\pi i}{h} W t - i p z}$$

A et C ayant des valeurs physiquement bien déterminées.

et qu'il soit immobile au centre de l'enceinte sphérique. Alors, l'onde u , ne pouvant être fonction que de r , obéira à l'équation

$$(22) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + k^2 u = \varepsilon \delta(r)$$

et la forme générale de l'équation sans second membre donnée plus haut en (20) nous conduit à considérer pour u_0 la solution suivante ayant à l'origine une singularité en $\frac{1}{r}$,

$$(23) \quad u_0 = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\cos kr}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} E t} \quad \left(E = \frac{k^2 \hbar^2}{8\pi^2 m} \right).$$

Mais nous pouvons ajouter à u_0 dans l'expression de u une solution continue quelconque de l'équation sans second membre : nous obtiendrons ainsi pour u une décomposition $u_0 + v$ analogue à celle que nous avons considérée au dernier paragraphe. Si nous nous restreignons aux fonctions propres à symétrie sphérique et si nous définissons les valeurs propres k'_n (légèrement différentes des k_n) par la condition $u(R) = 0$, soit $\operatorname{tg} k'_n R = -\frac{\varepsilon}{4\pi A}$, nous sommes conduits, pour assurer une fréquence unique à tout le phénomène, à adopter les solutions

$$(24) \quad u_n = \left(-\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\cos k'_n r}{r} + A \frac{\sin k'_n r}{r} \right) e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}.$$

Si nous supposons $\varepsilon \ll A$, ce qui correspond au caractère quasi ponctuel du corpuscule, nous aurons, dès qu'on s'éloignera un peu de l'origine,

$$u_n \simeq A \frac{\sin k'_n r}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}.$$

Il est alors facile de distinguer trois régions :

- 1° une très petite région sphérique $r < r_0$ au voisinage immédiat de l'origine où le terme singulier $\frac{\cos k'_n r}{r}$ est entièrement prépondérant;
- 2° une région intermédiaire ($r_0 < r < r_1$) où u_0 et par suite u croissent rapidement quand r diminue;
- 3° enfin la région extérieure à une très petite sphère de rayon r_1 où l'on peut confondre u avec $A \frac{\sin k'_n r}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t} \simeq C \Psi_n$. Nous pouvons représenter tout ceci sur la figure 12.

Mais tous ces résultats qui paraissent concorder avec ceux des chapitres précédents ne sont satisfaisants qu'en apparence : en effet, dans la formule (24) la constante A serait arbitraire, elle ne serait aucunement déterminée par la structure interne du corpuscule. On retrouve ici la remarque d'Einstein suivant laquelle, quand on part d'une équation linéaire telle que (22), on peut toujours ajouter à une solution à singularité ponctuelle une solution continue quelconque de l'équation sans second membre. On ne peut donc pas rendre solidaires les termes u_0 et v , c'est-à-dire incorporer le corpuscule à l'onde. Au contraire, la chose deviendra possible si l'on remplace (22) par une équation non

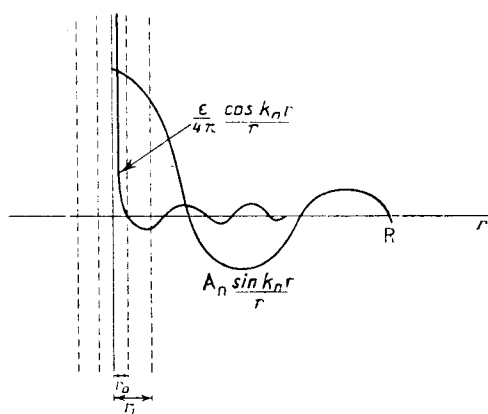


Fig. 12.

linéaire dont les termes non linéaires ne seront notables que dans une très petite région singulière entourant l'origine et qui se réduira très approximativement à l'équation linéaire usuelle en dehors de cette région. Alors on pourra toujours avoir comme forme asymptotique approximative de u , en dehors de la région singulière, la forme (24), mais ϵ et A seront toutes deux des constantes parfaitement déterminées par la forme de l'onde u à l'intérieur de la région singulière. On voit bien ici que ce sont les termes non linéaires qui assurent la solidarité de l'onde singulière u_0 et de l'onde régulière v . On peut dire que c'est dans la région non linéaire que s'opère la « soudure » entre l'onde en aiguille et l'onde régulière environnante.

Revenons maintenant à la formule (12) et remarquons que, dans notre problème actuel, la fonction u_0 , bien que très petite aux limites de l'enceinte, n'y est pas rigoureusement nulle et que les k'_n sont légè-

rement différents des $k_n = n \frac{\pi}{R}$. La formule (12) doit être valable pour la fonction $u = u_0 + v$, fonction à singularité ponctuelle nulle aux limites : mais, puisque $k = k'_n$ ne coïncide exactement avec aucun des k_n , elle ne contient plus aucun terme infini. Ainsi se trouve écartée la difficulté qui semblait résulter du théorème de Rayleigh-Sommerfeld.

Examinons ce point plus en détail. On peut écrire ici

$$(12 \text{ bis}) \quad u(M) = \sum_{i \neq n} \varepsilon \frac{\Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k_n'^2 - k_i^2} + \varepsilon \frac{\Psi_n^*(Q) \Psi_n(M)}{k_n'^2 - k_n^2}.$$

Or

$$k_n'^2 - k_n^2 \simeq 2k_n(k'_n - k_n) \simeq 2k_n \frac{\varepsilon}{4\pi AR} = \frac{k_n \varepsilon}{2\pi AR}$$

et

$$\Psi_n(Q) = \left(N \frac{\sin k_n r}{r} \right)_{r=0}$$

puisque ici Q est à l'origine. N est un facteur de normalisation

égal $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_n}{2n}}$.

On trouve alors, en tenant compte de la valeur des k_n ,

$$\varepsilon \frac{\Psi_n^*(Q) \Psi_n(M)}{k_n'^2 - k_n^2} = A \frac{\sin k_n r}{r},$$

d'où

$$(23) \quad u(M) = \sum_{i \neq n} \varepsilon \frac{\Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k_n'^2 - k_i^2} + A \frac{\sin k_n r}{r}.$$

Comme $k_n = k'_n - \frac{\varepsilon}{4\pi AR}$,

$$A \frac{\sin k_n r}{r} = A \frac{\sin k'_n r}{r} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\cos k'_n r}{R},$$

on trouve

$$(25 \text{ bis}) \quad u(M) = \sum_{i \neq n} \varepsilon \frac{\Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k_n'^2 - k_i^2} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\cos k'_n r}{R} + A \frac{\sin k'_n r}{r}.$$

Les deux premiers termes donnent l'expression de la fonction u_0 tandis que le troisième correspond à la fonction v .

Mais l'adjonction de v à u_0 dans l'expression de u avec une valeur bien déterminée de $\frac{\varepsilon}{\Lambda}$ (qui seule peut donner une valeur bien définie des k'_n) ne pourrait pas se justifier si l'équation des ondes était partout linéaire.

En dehors du cas très particulier que nous venons d'étudier, des considérations analogues pourraient être développées pour tous les problèmes de quantification avec domaine fini. Si $\partial k_n = k'_n - k_n$ et $\partial \Psi_n = \Psi'_n - \Psi_n$ sont les variations très petites subies par les valeurs propres et les fonctions propres quand on passe de la condition aux limites classique $\Psi = 0$ à la condition aux limites un peu différente $u = 0$, on trouve pour expression générale de $u(M)$

$$(26) \quad u(M) = \sum_{i \neq n} \varepsilon \frac{\Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k_n^2 - k_i^2} - \varepsilon \frac{\Psi_n^*(Q) \partial \Psi_n}{2 k_n \partial k_n} + \varepsilon \frac{\Psi_n^*(Q) \Psi'_n(M)}{2 k_n \partial k_n}$$

qui contient (25 *bis*) comme cas particulier. Les deux premiers termes de l'expression précédente donnent u_0 , le troisième donne c . Mais ∂k_n n'est pas déterminé dans une théorie purement linéaire.

7. Extensions diverses des idées précédentes. — Je viens d'exposer l'idée essentielle de ma Note du 13 avril 1953 dans le cas d'un état stationnaire avec corpuscule immobile. Dans cette même Note, j'avais généralisé de diverses façons le résultat ainsi obtenu.

Une première généralisation très simple concerne le cas des états stationnaires où le corpuscule n'est pas immobile : tel est celui des états stationnaires de l'atome H dont l'onde Ψ contient le facteur $e^{im\varphi}$ (φ angle de longitude) et où le corpuscule possède, d'après la formule du guidage, un mouvement circulaire uniforme. La fonction Ψ_n s'écrit alors

$$(27) \quad \Psi_n = a_n(x, y, z) e^{-\frac{2\pi i}{h} \chi_n(x, y, z)} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}.$$

Si nous posons

$$(28) \quad u = f(x, y, z, t) e^{-\frac{2\pi i}{h} \chi(x, y, z)} e^{\frac{2\pi i}{h} E t}$$

et si nous écrivons, comme précédemment et pour les mêmes raisons, l'expression de u au-delà de la région intermédiaire

$$(29) \quad u \simeq u_0 + \sum_n d_n \Psi_n$$

nous verrons qu'il faut que $d_n = 0$ sauf pour $n = m$ et que $E = E_n$ avec, en plus,

$$\chi = \chi_m \quad \text{et} \quad u_0 = f_0(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} E_m t - \chi_m}.$$

En d'autres termes, la phase φ de u et de u_0 doit coïncider avec celle de Ψ_m et, en dehors de la région singulière, on aura approximati-

vement $u \simeq d_m \Psi_m$ où d_m sera un coefficient ayant une valeur physique bien déterminée que l'on saurait calculer si l'on savait calculer u dans la région singulière.

Une autre généralisation immédiate consiste à considérer un système quantifié qui se trouve dans un état non stationnaire, c'est-à-dire dont la fonction Ψ est une somme de fonctions propres de la forme

$$(30) \quad \Psi = \sum_n c_n a_n(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} [E_n t - \chi_n(x, y, z)]} = a(x, y, z, t) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi(x, y, z, t)}$$

avec la condition de normalisation $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Ce qui précède nous conduit à penser que la fonction v , partie régulière de l'onde u à l'extérieur de la région intermédiaire, est de la forme $v = K\Psi$ où K est une constante à valeur physique bien déterminée. On pourra alors poser les expressions

$$(31) \quad u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi'}; \quad u_0 = f_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_0}; \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi};$$

où les amplitudes et les phases sont des fonctions de x, y, z, t et, à l'extérieur de la région singulière, nous devons avoir à tout instant

$$(32) \quad f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi'} \simeq f_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_0} + a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}.$$

Nous serons conduits à poser $\varphi' = \varphi_0 = \varphi$. En dehors de la région intermédiaire, nous aurons donc très sensiblement $u \simeq K a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$: l'onde u y sera donc proportionnelle à l'onde Ψ avec un coefficient de proportionnalité bien défini.

Parvenu à ce point, nous voyons apparaître l'idée essentielle que les phases de l'onde u et de l'onde Ψ doivent être les mêmes, ce qui est le postulat de départ de la théorie de la double solution. Cet accord des phases, sur lequel nous reviendrons plus loin, apparaît ici comme nécessaire pour que la fonction u_0 puisse « s'engrener » avec la fonction v qui lui sert de base. On peut se représenter intuitivement la chose de la façon suivante : les valeurs élevées de la fonction u à l'intérieur de la région singulière (qui constitue le corpuscule au sens étroit du mot) forme une sorte d'aiguille, de « doigt de gant », qui court à la surface (ou plutôt au sein) de l'onde $v = K\Psi$ de façon à rester toujours en phase avec v . Ne pas oublier naturellement que l'aiguille en question est extrêmement fine, que sa base a des dimensions au plus égales à 10^{-13} cm et qu'elle peut être (en dehors du cas des corpuscules d'une énergie

énorme) considérée comme quasi ponctuelle à l'échelle de la longueur d'onde.

Le résultat obtenu ainsi est très satisfaisant parce qu'il peut être considéré comme le couronnement de l'idée fondamentale qui m'avait guidé dans mes premières recherches sur la Mécanique ondulatoire et suivant laquelle *le corpuscule est une sorte d'horloge qui se déplace dans une onde de façon à rester constamment en phase avec elle*, comme je l'ai rappelé dans le premier chapitre de cet Ouvrage.

On peut encore transposer les mêmes idées dans le cas d'une onde en propagation libre. En toute rigueur, on doit toujours considérer une telle onde comme constituant un train d'ondes limité. On se heurte alors à certaines difficultés que j'étudierai en détail dans le chapitre suivant et que j'ai signalées dans une Note du 17 août 1953 [12]. Mais on sait qu'un long train d'ondes peut être très approximativement représenté, dans toute son étendue sauf au voisinage immédiat de ses bords, par une onde plane monochromatique : c'est ce qui permet aux traités élémentaires d'Optique de raisonner sur des ondes planes monochromatiques bien que, dans la réalité, on ait toujours affaire à des trains d'ondes limités. Procédant comme dans les traités d'Optique, nous considérerons le corpuscule comme associé à une onde monochromatique plane. La région singulière court alors au sein de cette onde de façon à rester constamment en phase avec elle, ce qui l'oblige à avoir précisément la vitesse c qui correspond à la quantité de mouvement $p = \frac{h}{\lambda}$ et à l'énergie $W = h\nu$. Si l'onde c qui sert de support à la région singulière vient heurter des obstacles qui provoquent dans cette onde des phénomènes d'interférences ou de diffraction, la région singulière devra se déplacer dans le domaine où ils se produisent de manière à rester toujours en phase avec c , ce qui entraîne la formule du guidage comme on peut le vérifier facilement. On est alors assuré, sous réserve de la démonstration du théorème d'ergodicité dont nous avons longuement parlé, que la probabilité de présence de la région singulière en un point M du champ d'interférences à l'instant t est proportionnelle à $|\Psi|^2$. On concilie donc ainsi l'existence du corpuscule avec l'explication classique des interférences.

Pour mieux le voir, reprenons le cas classique des trous d'Young. L'onde incidente comporte une région singulière portée par une onde plane monochromatique c de même forme que l'onde lumineuse classique des traités d'Optique. Dire que le photon traverse l'écran d'Young veut dire que la région singulière passe par l'un des trous d'Young.

mais la région singulière est si petite que, même au moment où elle traverse ce trou, elle n'occupe qu'une fraction infime de sa surface dont les dimensions sont macroscopiques. On peut donc considérer que, sur toute la surface des deux trous, l'onde u coïncide constamment avec l'onde v , c'est-à-dire avec l'onde lumineuse classique. L'onde qui interfère est donc exactement la même que celle considérée dans l'explication classique avec cette seule différence que nous lui adjoignons un accident local de dimensions extraordinairement petites, la région singulière ou corpuscule, qui court dans son sein avec la vitesse prescrite par la formule du guidage.

Nous voyons maintenant pourquoi l'interprétation des trous d'Young nous paraissait, au paragraphe 4, si difficile : c'est que nous pensions à une onde u strictement localisée autour du corpuscule (comme l'est le terme u_0 dans l'expression obtenue pour u). S'il en était ainsi, l'onde u ne serait pas homogène sur le trou où passe le photon et elle aurait une valeur négligeable sur l'autre trou qui est situé à une distance macroscopique du premier. Il serait alors impossible de comprendre comment le calcul classique, qui suppose une même amplitude sur les deux trous dont les rôles sont parfaitement symétriques, peut donner un résultat exact. Au contraire avec nos conceptions actuelles, nous voyons que tout se passe comme dans l'interprétation classique parce que l'onde u se prolonge à grande distance de la région singulière par une onde continue qui couvre uniformément les deux trous d'Young et sur laquelle la région singulière est en quelque sorte implantée. Ainsi paraît écarté l'un des obstacles les plus redoutables qui semblaient s'opposer à l'adoption de l'hypothèse de la double solution et qui avait contribué jadis à m'y faire renoncer ⁽¹⁾.

Nous avons vu précédemment que, dans le cas des bosons, on peut envisager plusieurs bosons associés à une même onde. Ceci veut dire que l'onde u de ces particules est de la forme

$$(33) \quad u = \sum u_0^{(i)} + v,$$

⁽¹⁾ On peut considérer l'expérience des trous d'Young comme apportant une preuve directe de la non-linéarité de l'équation de propagation de l'onde u . En effet, v se propage comme l'onde lumineuse classique, mais si l'équation de propagation de u était linéaire, la propagation de u_0 serait indépendante de celle de v et l'on ne pourrait pas expliquer comment le mouvement du corpuscule est influencé par l'existence du trou d'Young qu'il ne traverse pas. Seule la non-linéarité de l'équation de u peut avoir comme résultat que la propagation de u_0 , c'est-à-dire le mouvement du corpuscule, dépende de la propagation de v . C'est parce qu'en 1927 je n'introduisais pas la non-linéarité que l'expérience des trous d'Young me paraissait être pour la théorie de la double solution un obstacle insurmontable.

à l'extérieur des régions singulières. Le premier terme du second membre de (33) représente les parties singulières qui sont liées aux différents bosons et qui sont extrêmement petites en dehors de leur région singulière individuelle : le terme c représente la partie régulière de l'onde u qui est *commune* à tous les bosons et c'est ce qui permet de dire que ces particules sont associées à une même onde.

8. Extension à la théorie de Dirac. — Une dernière extension indiquée dans ma Note du 13 avril 1953 est relative à la théorie de Dirac. Tous les résultats indiqués dans les derniers paragraphes sont obtenus dans le cadre d'une Mécanique ondulatoire sans spin reposant sur l'équation d'ondes non relativiste ou de l'équation relativiste à un seul Ψ de Klein-Gordon. Mais l'extension au cas de la théorie de Dirac pour les corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ peut se faire sans difficulté.

L'onde Ψ aura alors quatre composantes Ψ_k et l'on devra écrire les développements du Ψ en série de fonctions propres sous la forme

$$(34) \quad \Psi_k = \sum_n c_n \Psi_{n,k} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

$\Psi_{n,k}$ étant la $k^{\text{ième}}$ composante de la $n^{\text{ième}}$ fonction propre normée et les coefficients c_n ne dépendant pas de l'indice k . Après avoir posé

$$(35) \quad c_k = K \Psi_k = K u_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k},$$

on sera conduit à écrire avec des notations évidentes

$$(36) \quad f_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k} = f_{0,k} e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_{0,k}} + K u_k e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_k} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

et à en conclure comme précédemment que $\varphi'_k = \varphi_{0,k} = \varphi_k$ pour chacune des quatre valeurs de k . En dehors de la région singulière, on aura sensiblement $u_k = K \Psi_k$, K ayant une valeur physiquement bien déterminée résultant de la forme de u à l'intérieur de la région singulière. Chaque composante u_k est donc, en dehors de la région singulière, proportionnelle à la composante de même indice de l'onde Ψ . En se reportant à ce qui a été dit dans le précédent chapitre au sujet du guidage du corpuscule en théorie de Dirac, on verra que la région singulière doit suivre les lignes de courant de la théorie de Dirac et, de ce point de vue, la nouvelle conception des rapports de l'onde u et de l'onde Ψ paraît ici encore satisfaisante.

9. **Remarques sur la concordance des phases et sur le guidage des corpuscules.** — Nous allons reprendre la question de la concordance des phases en nous plaçant à notre nouveau point de vue. Écrivons comme plus haut

$$(37) \quad u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi'} = u_0 + v = f_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi_0} + K a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}.$$

En examinant les raisonnements faits ci-dessus, nous voyons aisément qu'il impose la conclusion $\varphi' = \varphi$, mais que l'égalité $\varphi_0 = \varphi$ n'en résulte pas d'une façon absolument nécessaire. On n'est donc pas, semble-t-il, obligé d'admettre cette dernière égalité qui constitue le postulat de la concordance des phases sous sa forme stricte : il suffirait d'admettre que φ_0 et φ coïncident ainsi que leurs dérivées premières au voisinage immédiat du corpuscule, c'est-à-dire dans la « région intermédiaire » là où il faut placer la sphère S pour démontrer la formule du guidage.

Mais dans la région extérieure, u_0 étant négligeable devant v , la phase φ_0 de u_0 n'a plus d'importance et dans la région singulière, la décomposition $u = u_0 + v$ n'a plus de sens. La distinction entre la concordance faible et la concordance forte des phases est donc ici sans importance.

On peut présenter la question autrement. En réalité, la décomposition $u = u_0 + v$ est fictive : il y a une seule fonction u et c'est tout. Dans toute la région extérieure, c'est-à-dire presque partout, u_0 est négligeable et u coïncide avec v : u et v ont donc presque partout même amplitude et même phase. Dans la région intermédiaire où l'équation des ondes est par hypothèse encore linéaire, u doit toujours avoir la même phase que v , sans quoi la formule du guidage ne pourrait être exacte, mais les amplitudes de u et de v diffèrent, ce qui, en nommant f_0 la différence de ces amplitudes, nous permet d'écrire sur le pourtour de la région singulière

$$(38) \quad u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi} = (f_0 + K a) e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}.$$

Quant à la forme de u à l'intérieur de la région singulière, elle nous restera inconnue tant que nous ne serons pas parvenus à préciser la forme de l'équation non linéaire de propagation dans cette région. Il nous est donc impossible de savoir actuellement si dans cette région la phase de u continue à être égale à φ , mais cela ne nous importe pas ici.

Naturellement des considérations analogues sont applicables en théorie de Dirac.

Passons maintenant à une autre question qui montre, comme la pré-

cédente, l'importance de la région intermédiaire où se fait le couplage entre u_0 et v . Considérons deux corpuscules sans interaction, par exemple deux photons ou deux neutrons. Si leurs ondes viennent à se croiser dans une même région de l'espace, il semble physiquement certain qu'elles ne s'influenceront pas l'une l'autre. Si, dans un appareil d'interférences lumineuses, nous faisons traverser transversalement le champ d'interférences par un autre faisceau de photons, le phénomène d'interférences n'en sera pas modifié. Ceci signifie que l'onde d'un corpuscule ne peut interférer qu'avec elle-même et non avec l'onde d'un autre corpuscule.

Nous pouvons comprendre ce point en analysant ce qui se passe dans la région intermédiaire relative à l'un des corpuscules que nous numérotions 1, l'autre étant numéroté 2. Sauf dans le cas, qui est d'une probabilité évanouissante dans tous les cas usuels de croisement de faisceaux où les deux corpuscules se rencontreraient, c'est-à-dire où leurs régions singulières viendraient en contact, nous pouvons écrire l'onde u dans la région intermédiaire du corpuscule 1 sous la forme

$$(39) \quad u = u_1 + u_2 = f e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} = f_0^{(1)} e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi^{(1)}} + K \alpha^{(1)} e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi^{(1)}} + K \alpha^{(2)} e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi^{(2)}}.$$

En effet, u_2 se réduit à v_2 puisque la région intermédiaire de 1 se trouve dans la région extérieure de 2. Comme dans la région intermédiaire de 1, $f_0^{(1)}$ croît rapidement et devient beaucoup plus grand que $\alpha^{(2)}$, il est évident que l'on a

$$(40) \quad \varphi \simeq \varphi^{(1)}, \quad f \simeq f_0^{(1)}.$$

La formule du guidage montre alors, en vertu de la première équation (40) que la présence de u_2 ne modifie aucunement le mouvement de 1.

On peut aussi le voir en considérant la formule

$$(41) \quad v = - \frac{\frac{\partial f}{\partial s}}{\frac{\partial f}{\partial t}}$$

qui nous a permis au chapitre IX (§ 36), de déduire la formule du guidage. En introduisant dans (41) la deuxième relation (40), on constate que l'onde u_2 n'agit pas sur le mouvement du corpuscule (1). Sous cette forme, la preuve a l'avantage d'être applicable à la théorie de Dirac comme on peut le voir en se reportant à la formule (53) du chapitre précédent.

Ces considérations paraissent bien expliquer pourquoi une onde u n'interfère qu'avec elle-même et soulignent l'importance de la manière dont le « doigt de gant » représenté par u_0 s'implante dans la région intermédiaire sur l'onde régulière c .

10. Avantages des conceptions précédentes. Difficultés qui subsistent. — Les conceptions précédentes permettent d'interpréter le fait, paradoxal en apparence, que dans les états stationnaires des systèmes quantifiés, la fréquence de l'onde u doit être égale à l'une des valeurs propres calculées par la Mécanique ondulatoire usuelle, alors que cependant l'onde u ne possède pas les propriétés de régularité imposées dans ce calcul à l'onde Ψ . Les mêmes conceptions permettent de comprendre la possibilité des phénomènes d'interférences et de diffraction en conciliant avec l'existence de corpuscules localisés les calculs classiques qui permettent de les prévoir. Ainsi paraissent se trouver levées quelques-unes des grandes difficultés qu'avaient été les pierres d'achoppement de toutes les tentatives faites pour parvenir à une représentation claire du dualisme onde-corpuscule.

Néanmoins, il reste encore de grosses objections à écarter, notamment en ce qui concerne les trains d'ondes, leur tendance constante à l'étalement et leur fractionnement dans les cas où entre en jeu la réduction des paquets de probabilité. Ce sont ces difficultés qui m'avaient fait initialement rejeter l'hypothèse de M. Vigier selon laquelle la partie extérieure de l'onde u serait proportionnelle à l'onde Ψ . De la possibilité de les résoudre d'une façon satisfaisante, dépend sans doute à l'heure actuelle le sort de la présente tentative d'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire.

Terminons par une remarque essentielle qui va jouer un certain rôle dans les pages qui suivent. Comme nous supposons non linéaire la véritable équation de propagation satisfaite par l'onde u , les termes non linéaires de cette équation, bien que très faibles en dehors de la région singulière, existent cependant en principe partout. Si donc ces termes non linéaires contenaient des dérivées premières ou d'ordre supérieur de u , ces termes, bien qu'ils soient négligeables dans toute la partie centrale d'un train d'ondes, pourraient cependant redevenir très importants sur les bords du train d'ondes, là où, l'onde u s'annulant assez brusquement, ses dérivées auraient de grandes valeurs.

CHAPITRE XVIII.

LES TRAINS D'ONDES ET LA RÉDUCTION DU PAQUET DE PROBABILITÉ

1. Difficulté provenant de l'étalement spontané des trains d'ondes.

— Une onde plane monochromatique est une abstraction : on a toujours expérimentalement affaire à des trains d'ondes limités dans l'espace dont la durée de passage en un point est limitée dans le temps. Mais on a souvent affaire à un train d'ondes qui, dans toute sa partie centrale sauf tout près des bords, est assimilable à une onde plane monochromatique comme c'est le cas pour les trains d'ondes utilisés en optique. Un tel train d'ondes est représentable par un « groupe d'ondes », c'est-à-dire par une superposition d'ondes planes monochromatiques de longueurs d'onde et de directions de propagation très voisines. Or, un groupe d'ondes ainsi constitué a une tendance spontanée à s'étaler dans l'espace.

Pour le voir, laissons de côté la représentation des dimensions transversales du groupe d'ondes par une superposition d'ondes planes de directions de propagation différentes, un peu inclinées les unes sur les autres, et, pour représenter la longueur finie du groupe d'ondes dans le sens x de la propagation, écrivons simplement

$$(1) \quad \Psi = \int_{\mu_0 - \Delta\mu}^{\mu_0 + \Delta\mu} c(\mu) e^{2\pi i(\nu t - [\mu, x])} d\mu, \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{\lambda}.$$

La fréquence ν est une certaine fonction de μ définie par l'équation de propagation supposée linéaire à laquelle Ψ obéit et cette relation entre ν et μ correspond à la relation dynamique entre énergie et quantité de mouvement. Posons $\mu = \mu_0 + \eta$, $\nu_0 = \nu(\mu_0)$ et écrivons le développement de Taylor de $\nu(\mu)$:

$$(2) \quad \nu(\mu) = \nu_0 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial \mu}\right)_0 \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2}\right)_0 \eta^2 + \dots = \nu_0 + v_0 \eta + \dots,$$

où l'indice 0 indique que les dérivées sont prises pour $\mu = \mu_0$ et où v_0 est la vitesse correspondant à μ_0 . Nous nous sommes servi du fait que v_0 est donnée par la formule de Rayleigh pour la vitesse de groupe, soit $v_0 = \left(\frac{\partial \nu}{\partial \mu} \right)_0$. Nous pouvons donc écrire

$$(3) \quad \Psi = e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} \int_{-\Delta\mu}^{\Delta\mu} c(\eta) e^{2\pi i(\nu_0 t - x)} e^{\left[2\pi i \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2} \right)_0 \eta^2 + \dots \right] t} d\eta,$$

où les points représentent des termes d'ordre supérieur à η^2 . L'intervalle $\Delta\mu$ étant très petit par hypothèse, pendant un temps très long à partir de l'instant initial, la seconde exponentielle sous le signe somme, dont l'exposant est sensiblement nul, pourra être prise égale à 1 et l'on aura

$$(4) \quad \Psi = e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} F(\nu_0 t - x),$$

Le groupe d'ondes aura donc même facteur de phase que l'onde plane de fréquence ν_0 et son amplitude se déplacera en bloc avec la vitesse v_0 le long de l'axe des x : il n'y a pas étalement.

Mais, au bout d'un temps suffisamment long par rapport à $\frac{1}{\nu_0}$, quelle que soit la petitesse de l'intervalle $\Delta\mu$, il arrivera toujours un moment où l'exposant de la dernière exponentielle cessera d'être négligeable : alors l'intégrale de (3) sera de la forme $\int f(\eta, \nu_0 t - x_0, t) d\eta$ et l'on aura (sauf cependant dans le cas d'un corpuscule de masse propre nulle où $\frac{\partial \nu}{\partial \mu}$ est une constante)

$$(5) \quad \Psi = e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)} F(\nu_0 t - x, t).$$

L'amplitude deviendra donc ainsi variable avec le temps autrement que par l'intermédiaire de la combinaison $\nu_0 t - x$. Le groupe d'ondes va donc se déformer en progressant et une analyse plus détaillée montrerait qu'il va toujours s'étaler. Comme les équations linéaires de propagation entraînent la constance de $\int a^2 d\tau$ au cours du temps, l'étalement du train d'ondes a pour conséquence un affaiblissement des amplitudes locales : il y a affaiblissement du groupe d'ondes qui s'étale.

On peut expliquer intuitivement cet étalement du groupe d'ondes de la manière suivante. Les ondes monochromatiques dont la superposition forme le groupe d'ondes se propagent *indépendamment* les unes des autres parce que, par hypothèse, l'équation de propagation de l'onde Ψ

est linéaire. Chaque composante monochromatique a sa vitesse v correspondant à la valeur de μ qui la spécifie. Sauf dans le cas du corpuscule de masse propre nulle où v est fonction linéaire de μ , les vitesses v sont les unes plus grandes, les autres plus petites que v_0 , les différences étant très faibles. Il en résulte qu'à la longue, certaines composantes prendront de l'avance par rapport à la composante centrale de fréquence ν_0 tandis que d'autres prendront du retard. D'où l'étalement du groupe d'ondes qui, pour ainsi dire, se désorganise lentement en progressant. Cette désorganisation, accompagnée d'étalement dans l'espace, est intimement liée au caractère linéaire de l'équation de propagation.

Nous pouvons encore retrouver d'une autre manière, qui nous servira plus loin, cet étalement des groupes d'ondes. Pour cela, écrivons l'équation de Jacobi généralisée (J) correspondant à l'équation linéaire de propagation de la Mécanique ondulatoire relativiste

$$(6) \quad (J) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - (\text{grad } \varphi)^2 - m_0^2 c^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square a}{a}.$$

Pour que le groupe d'ondes sans déformation

$$(7) \quad \Psi = F(v_0 t - x) e^{2\pi i(\nu_0 t - \mu_0 x)}, \quad \text{avec} \quad \frac{\nu_0^2}{c^2} - \mu_0^2 = \frac{m_0^2 c^2}{h^2},$$

soit une solution *rigoureuse* de (6), il faudrait que $\frac{\square F}{F} = 0$. Or ceci ne peut être réalisé, pour une forme de F représentant un groupe d'ondes de dimensions finies, que si v_0 est égale à c , c'est-à-dire dans le cas des particules de masse propre nulle. Donc, pour une particule de masse propre non nulle, le groupe d'ondes sans déformation n'est pas solution de l'équation linéaire des ondes. Notons que pour un groupe d'ondes ayant la forme de la figure 13, c'est aux limites, là où F varie brusquement, que l'équation $\square F = 0$ ne sera pas satisfaite.

Voici maintenant la difficulté qui se présente quand on compare ces résultats avec les conceptions introduites au chapitre précédent. Si un corpuscule est associé à un groupe d'ondes planes monochromatiques, nous devrions, semble-t-il, admettre que son onde u est très sensiblement représentée, en dehors de la région singulière, par l'expression

$$(8) \quad u = u_0 + v = u_0 + C \int \dots,$$

où C est une constante à valeur objectivement déterminée et où $\int \dots$

est l'intégrale de Fourier qui représente le groupe d'ondes. Malheureusement, au bout d'un temps suffisamment long, le groupe d'ondes se sera étalé, disséminé : l'onde régulière v tendra donc vers zéro en tout point et u se réduira à sa partie singulière u_0 . En termes imagés, on peut dire que le corpuscule finira par « perdre son onde » et cette conclusion paraît physiquement peu acceptable. En somme, malgré l'introduction de l'hypothèse « corpuscule-région singulière de l'onde u » qui permet à la théorie de la double solution de conserver un sens objectif à la notion de corpuscule, nous retrouvons ici l'objection faite naguère à l'interprétation de la Mécanique ondulatoire proposée par M. Schrödinger qui assimilait les corpuscules à des groupes d'ondes.

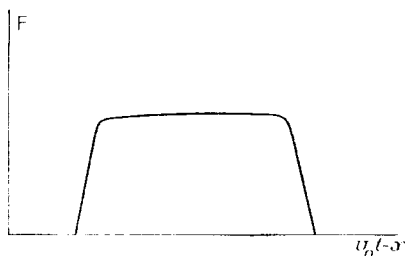


Fig. 13.

2. La non-linéarité de l'équation des ondes pourrait permettre d'imaginer des groupes d'ondes sans étalement. — Pour lever cette difficulté d'apparence grave, on peut se demander s'il ne serait pas possible d'imaginer des groupes d'ondes u qui ne s'étaleraient pas. Il est évident que ceci ne pourrait provenir que de la différence de l'équation des ondes u et de celle des ondes Ψ , c'est-à-dire de la non-linéarité de la première.

Remarquons d'abord que, comme nous l'avons souligné à la fin du chapitre précédent, poser $u \simeq C\Psi$ en dehors de la région singulière est nécessairement une approximation puisque, l'équation des ondes u étant non linéaire, les termes non linéaires, bien que très petits en dehors de la région singulière, existent néanmoins *partout* et pourraient redevenir importants aux limites des trains d'ondes. Pour connaître exactement la forme « extérieure » de u , il faudrait pouvoir évaluer exactement l'influence des termes non linéaires. Il paraît possible de concevoir que la relation $u \simeq C\Psi$ pour $r > r_1$ donne une représentation exacte de u dans ce domaine quand Ψ est une superposition de fonctions propres appartenant à un spectre discontinu (comme

c'était le cas dans les exemples du chapitre précédent) tandis qu'elle pourrait donner une représentation erronée, du moins dans certaines régions, quand Ψ est une intégrale de Fourier représentant un groupe d'ondes.

En d'autres termes, tandis que dans le cas d'un système quantifié à spectre discontinu, la partie extérieure de l'onde u pourrait être représentée très sensiblement par $u \simeq C\Psi$ (ce qui conserverait notre interprétation du succès du calcul des valeurs propres par la méthode usuelle), au contraire dans le cas d'un spectre continu et d'un groupe d'ondes Ψ , la partie extérieure de l'onde u ne serait pas bien représentée *partout* par l'intégrale de Fourier correspondante. Cependant, dans la partie centrale du groupe d'ondes, là où l'on ne se trouve pas au voisinage immédiat des bords, la partie extérieure de l'onde u devrait bien coïncider très sensiblement avec la fonction « onde plane monochromatique », car ceci est nécessaire pour conserver l'interprétation des phénomènes d'interférences (genre trous d'Young) que nous avons obtenue dans le dernier chapitre. Ce serait donc *aux limites* des trains d'ondes que l'onde u pourrait n'être pas bien représentée par l'intégrale de Fourier.

Continuons à approfondir ces idées. Tout d'abord, l'existence des termes non linéaires prépondérants dans la région singulière doit avoir pour effet de « souder » ensemble les deux fonctions que nous avons appelées « partie singulière u_0 » et « partie régulière ϵ » de l'onde u . Cette soudure devrait avoir pour effet de rendre l'onde ϵ solidaire de la région singulière et de l'empêcher de se disséminer loin d'elle. Nous retrouvons encore ici la remarque d'Einstein suivant laquelle des termes non linéaires ont pour effet de rendre solidaires une solution régulière et une solution singulière des équations du champ qui seraient indépendantes si ces équations étaient linéaires partout. Il semble donc bien que l'intervention des termes non linéaires dans la région singulière pourrait avoir pour effet que ϵ ne soit pas exactement représenté par une intégrale de Fourier dans le cas du groupe d'ondes puisque cette représentation implique l'indépendance des composantes monochromatiques du groupe d'ondes et, par suite, l'étalement de celui-ci au cours du temps. Mais il faut regarder de près ce qui peut se passer aux limites des trains d'ondes pour empêcher cet étalement.

Nous avons déjà noté que les termes non linéaires de l'équation en u , négligeables dans le corps de la région extérieure du train d'ondes, peuvent redevenir importants sur ses limites. C'est là une circonstance qui peut intervenir pour nous permettre de concevoir des groupes

d'ondes sans étalement ⁽¹⁾. Pour voir qu'il en est bien ainsi, écrivons l'équation de Jacobi généralisée pour l'onde u correspondant à l'équation non linéaire (en l'absence de champ) sous la forme

$$(J) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 - (\text{grad } z)^2 - m_0^2 c^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square f}{f} + N \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right),$$

où N est une expression non linéaire dépendant de u et de ses dérivées qui est sensiblement négligeable en dehors de la région singulière sauf peut-être au bord des trains d'ondes. Posons, en dehors de la région singulière,

$$(9) \quad u(\mu_0) = F(v_0 t - x) e^{2\pi i (v_0 t - \mu_0 x)} = F(\eta) e^{2\pi i (v_0 t - \mu_0 x)},$$

avec

$$\frac{v_0^2}{c^2} - \mu_0^2 = \frac{m_0^2 c^2}{h^2} \quad \text{et} \quad \eta = v_0 t - x.$$

Cette forme de u représente un groupe d'ondes monochromatiques *sans déformation*. Elle sera une solution de l'équation J si

$$(10) \quad \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{\square F}{F} = -N \left(v_0, \mu_0, F, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \dots \right),$$

⁽¹⁾ Il est intéressant de remarquer qu'une circonstance de ce genre est généralement méconnue dans la théorie de la propagation des petites perturbations gravifiques en Relativité généralisée (voir VON LAUE, *Die Relativitätstheorie*, t. 2, p. 191 et suiv.). Dans cette théorie, on admet que, dans une petite perturbation gravifique, les g_{ik} sont de la forme $g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + \gamma_{ik}$ où les $g_{ik}^{(0)}$ sont les valeurs galiléennes constantes des g_{ik} et où les γ_{ik} sont considérées comme des infiniment petits du premier ordre. On écrit ensuite pour les g_{ik} les relations $R_{ik} = 0$ valables hors de la matière. Dans l'expression des R_{ik} , figurent des produits des grandeurs classiques en Relativité générale $\Gamma_{ik}^r = \left\{ \begin{smallmatrix} ik \\ r \end{smallmatrix} \right\}$ qui, elles-mêmes, s'expriment à l'aide des g_{ik} et de leurs dérivées $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}$. On considère habituellement ces dérivées comme des infiniment petits du premier ordre et l'on néglige les produits des Γ_{ik}^r comme étant des infiniment petits du second ordre. Les équations non linéaires $R_{ik} = 0$ se réduisent alors très approximativement (avec un choix convenable des coordonnées) aux équations linéaires $\square \gamma_{ik} = 0$ et l'on en conclut que les très petites perturbations gravifiques se propagent dans le vide avec la vitesse c .

Mais, comme M. Chazy l'a d'ailleurs souligné (*Théorie de la Relativité*, Gauthier-Villars, t. II, 1928, p. 148), il ne suffit pas dans cette démonstration de supposer les γ_{ik}

très petits, il faut aussi supposer très petites les dérivées $\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x^r}$. Or ces dérivées peuvent devenir très grandes dans des régions étroites de l'espace-temps correspondant aux bords des trains d'ondes si, dans ces régions, les γ_{ik} tombent brutalement à zéro. Dans de telles régions, l'équation linéaire $\square \gamma_{ik} = 0$ n'est plus valable et doit être remplacée par une équation non linéaire. Donc, même pour les très petites perturbations gravifiques, il peut y avoir des phénomènes non linéaires sur le bord des trains d'ondes.

soit

$$(11) \quad \frac{h^2}{4\pi^2 F} \left(\frac{v_0^2}{c^2} - 1 \right) \frac{d^2 F}{d\theta^2} = -N(v_0, \mu_0, F, \frac{dF}{d\theta}, \frac{d^2 F}{d\theta^2}, \dots).$$

Si N était partout négligeable, il faudrait avoir soit $v_0 = c$, ce qui n'est possible que pour des particules de masse propre nulle, soit $\frac{d^2 F}{d\theta^2} = 0$, ce qui ne peut donner une forme acceptable (limitée aux deux extrémités) pour le groupe d'ondes. Mais, en tenant compte des termes non linéaires, on voit apparaître la possibilité de solutions de l'équation (J) qui représenteraient des trains d'ondes limités sans déformation. En particulier, un groupe d'ondes ayant la forme représentée sur la figure 13 pourrait exister en raison de l'intervention des termes N sur les bords des trains d'ondes où les dérivées de F seraient grandes.

Il faut remarquer en passant que F doit aussi satisfaire à l'équation de continuité (C) qui est ici du type

$$(C) \quad \frac{\partial F^2}{\partial t} + v_0 \frac{\partial F^2}{\partial x} + N'(v_0, \mu_0, \frac{dF}{d\theta}, \frac{d^2 F}{d\theta^2}, \dots) = 0,$$

où N' représente des termes non linéaires inconnus provenant de l'équation de propagation de u . La fonction F étant seulement fonction de $\theta = v_0 t - x$, la somme des deux premiers termes de (C) sera nulle et il restera

$$(12) \quad N' \left(v_0, \mu_0, F, \frac{dF}{d\theta}, \frac{d^2 F}{d\theta^2}, \dots \right) = 0,$$

ce qui impose à F une condition qui devra être compatible avec (11), c'est-à-dire qu'il devra exister une fonction $F(\theta)$ satisfaisant à la fois à (10) et à (11).

Il est aisé de se représenter d'une façon intuitive la possibilité de ces solutions représentant des groupes d'ondes sans déformation. Écrivons l'équation des ondes u sous sa forme non linéaire et en l'absence de champ, mais en nous bornant à l'approximation non relativiste.

$$(13) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta u + N(u, \dots).$$

Là où les termes non linéaires N sont importants, tout se passe comme s'il existait, malgré l'absence de tout champ, une sorte de « barrière de potentiel » représentée par les termes N , barrière qui s'oppose à l'expansion du train d'ondes. Mais cette barrière de potentiel n'est pas imposée par une action extérieure; elle est créée par la variation brusque de l'onde u elle-même sur les bords du train

d'ondes. En imaginant des formes simples par les termes N (dont la forme exacte est inconnue), on peut se rendre compte que de telles solutions sans étalement doivent bien exister ⁽¹⁾.

Néanmoins, on peut se demander si l'introduction de groupes d'ondes sans étalement du type envisagé ci-dessus est compatible avec les relations d'incertitude d'Heisenberg qui sont intimement reliées à la représentation des trains d'ondes par une intégrale de Fourier. Il ne semble pas qu'il y ait de ce côté une difficulté aussi grande qu'on pourrait le penser tout d'abord. En effet, le groupe d'ondes sans étalement est représenté par l'expression (9) avec

$$v_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial p} \right)_0 \quad \text{et} \quad W = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$$

($\simeq \frac{1}{2m} p^2$ à l'approximation newtonienne). Or, à un instant donné, on peut toujours développer l'amplitude F en intégrale de Fourier de la forme

$$(14) \quad F = \int c(\eta) e^{-2\pi i \eta_1 x} d\eta_1,$$

de sorte que l'on peut écrire en posant $\mu = \mu_0 + \eta$,

$$(15) \quad u(\mu_0) = \int c(\eta) e^{2\pi i [\nu t - \mu x]} d\eta, \quad \text{avec} \quad \nu = \nu_0 + v_0(\mu - \mu_0).$$

A un instant donné, on peut donc en conclure, en appliquant le raisonnement habituel, que, si le train d'ondes u a la longueur Δx , l'intervalle Δp des valeurs de $p = h\mu$ intervenant dans l'intégrale satisfera à l'inégalité

$$(16) \quad \Delta x \Delta p \geq h.$$

On retrouve donc ainsi les relations d'Heisenberg relatives aux variables d'espace.

Retrouvera-t-on aussi la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg relative à la variable de temps? Ce qui pourrait au premier abord en faire douter, c'est que le temps intervient différemment dans l'expression (15) de $u(\mu_0)$ et dans l'expression usuelle du groupe d'ondes linéaires dont la forme mathématique est la même, mais où

$$(17) \quad \nu = \nu_0 + v_0(\mu - \mu_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial \mu^2} \right)_0 (\mu - \mu_0)^2 + \dots$$

(1) La théorie de ces groupes d'ondes sans déformation est à comparer avec celle des ondes solitaires » en Hydrodynamique qui présente avec elle une certaine analogie.

C'est en somme en éliminant, grâce à la non-linéarité de l'équation en u , tous les termes du développement (17) à partir du troisième, c'est-à-dire en nous bornant à poser $v = v_0 + v_0(\mu - \mu_0)$ que nous avons évité l'étalement du train d'ondes. Or, en tenant compte de la relation entre W et p , on voit que la formule (17) s'écrit

$$(18) \quad \begin{aligned} \Delta W &= W - W_0 = v_0 \Delta p + \frac{1}{2} \frac{c^2}{W_0} \left(1 - \frac{p_0^2 c^2}{W_0^2} \right) (\Delta p)^2 + \dots \\ &= v_0 \Delta p \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) \frac{\Delta p}{p_0} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Comme dans un groupe d'onde Δp est toujours beaucoup plus petit que p_0 , on voit que la parenthèse du second membre est sensiblement égale à 1. Quant aux termes non écrits, ils sont négligeables devant $v_0 \Delta p$ (et même exactement nuls à l'approximation newtonienne). Donc, malgré les modifications que nous avons introduites dans l'expression de v en fonction de $\mu - \mu_0$ en passant du groupe d'ondes avec étalement au groupe d'ondes sans étalement, nous avons toujours le droit de poser

$$(19) \quad \Delta W \sim v_0 \Delta p$$

et, comme la durée Δt du passage d'un groupe d'ondes en un point de l'espace est évidemment donnée par

$$(20) \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{v_0},$$

on a encore, en tenant compte de (16),

$$(21) \quad \Delta W \Delta t \sim \Delta p \Delta x \approx h.$$

C'est bien là la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg avec son interprétation usuelle.

L'analyse que nous venons de faire est d'ailleurs très instructive en ce qui concerne le passage du groupe d'ondes usuel au groupe d'ondes sans déformation. On pourrait objecter à ce passage qu'en supprimant dans la formule (18) tous les termes du second membre à partir du second, nous modifions la relation entre l'énergie et la quantité de mouvement d'une manière qui lui enlève son caractère de covariance relativiste. A cette objection, il nous semble que l'on peut faire la réponse suivante : la covariance relativiste de la relation entre énergie et quantité de mouvement est définie dans le cadre de la Relativité *restreinte*; or, en introduisant des termes non linéaires qui sont du type Relativité généralisée, nous sommes en réalité sortis du cadre de la Relativité *restreinte*.

Passons maintenant du cas des groupes d'ondes au cas des trains d'onde où Δp n'est pas très petit devant p_0 . Dans la théorie usuelle de la représentation, par des intégrales de Fourier, des trains d'ondes de la Mécanique ondulatoire, on est amené à introduire la notion de différentielles propres et à remplacer l'intégrale de Fourier par une somme de différentielles propres ⁽¹⁾. Comme l'a remarqué notamment Sommerfeld, le sens physique de la notion de différentielle propre est de représenter un groupe d'ondes de dimensions finies en évitant ainsi d'introduire l'onde plane monochromatique qui est une abstraction et qui d'ailleurs n'est pas normable : en remplaçant l'intégrale de Fourier par une somme de différentielles propres, on exprime donc que les trains d'ondes sont formés par la superposition non pas d'ondes planes monochromatiques, mais de groupes d'ondes limitées. Au point de vue nouveau auquel nous nous plaçons ici en introduisant la non-linéarité et les groupes d'ondes sans étalement, il paraît naturel de définir les trains d'ondes par une superposition de groupes d'ondes sans étalement du type (9), c'est-à-dire de représenter un train d'ondes par le développement

$$(22) \quad u = \sum_{p_0} c(p_0) u(p_0),$$

la somme \sum_{p_0} étant étendue à une suite de valeurs, généralement extrêmement voisines, de p_0 . Si les bords des groupes d'ondes sont très abrupts, on peut considérer les fonctions $u(p_0)$ comme sensiblement orthogonales entre elles. Il semble donc, sous réserve d'une étude plus rigoureuse, que l'on puisse appliquer au développement (22) les raisonnements habituellement faits sur les sommes de différentielles propres et retrouver encore ici les relations d'incertitude d'Heisenberg.

3. Affaiblissement de la liaison jusqu'ici admise entre onde u et onde Ψ . — Nous avons énoncé précédemment le théorème d'existence qui, au début de mes recherches sur la double solution, me paraissait nécessaire pour la justifier. Je le formulais alors ainsi : *A toute onde Ψ considérée par la Mécanique ondulatoire usuelle doit correspondre une onde u de même phase.* Nous sommes maintenant en état de critiquer cet énoncé et de lui donner une forme plus nuancée.

Remarquons d'abord qu'il n'est pas logique de partir de l'onde Ψ

(1) Voir par exemple L. DE BROGLIE, *Théorie générale des particules à spin*, 2^e éd., Gauthier-Villars, 1953, chap. I, § 4.

puisque à nos yeux, elle n'est qu'une abstraction à caractère subjectif et statistique, pour y rattacher l'existence de l'onde u que nous considérons comme la réalité objective : c'est évidemment l'inverse qu'il convient de faire. De plus, pour des raisons qui nous apparaîtront mieux plus loin, il y a lieu d'affaiblir la liaison postulée entre u et Ψ pour éviter que u ne participe au caractère subjectif de Ψ . Nous dirons donc maintenant : *A toute onde u qui fournit une description objective d'un corpuscule conçu comme le centre d'un phénomène ondulatoire, on peut faire correspondre une onde Ψ du type usuel qui, dans tout le domaine extérieur à la région singulière de l'onde u , a en général très approximativement la même forme mathématique que u de sorte qu'on peut poser $\Psi \simeq Cu$.*

Dans ce nouvel énoncé, nous écrivons la relation entre Ψ et u sous la forme $\Psi \simeq Cu$, au lieu de $u \simeq C\Psi$, pour bien souligner que l'onde Ψ est une construction de notre esprit faite à partir de l'onde u à caractère objectif. De plus, nous avons introduit dans l'énoncé, en les soulignant, les mots « en général », car nous devons maintenant penser qu'il peut y avoir des limites à cette correspondance : ces limites sont dues essentiellement au fait que l'équation de propagation de Ψ est rigoureusement linéaire, alors que celle de u est non linéaire. Nous venons d'avoir une première indication en ce sens en étudiant les groupes d'ondes puisque nous avons été amenés à nous demander s'il ne faut pas remplacer, dans l'expression extérieure de u , le groupe d'ondes Ψ du type classique par une fonction « sans déformation » qui pourrait différer sensiblement de l'intégrale de Fourier notamment sur les bords du groupe d'ondes, siège de phénomènes non linéaires.

Nous allons retrouver cette même idée d'une limitation éventuelle de la correspondance entre onde u et onde Ψ en étudiant successivement la représentation de l'émission d'une source par une onde divergente, puis la division d'un train d'ondes par un miroir semi-transparent.

4. Représentation de l'émission d'une source ponctuelle par une onde divergente. — Comme nous l'avons précédemment signalé, M. Francis Perrin a indiqué une objection à l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de l'onde-pilote. Quand une source ponctuelle émet autour d'elle d'une façon isotrope des corpuscules de même énergie, la Mécanique ondulatoire admet que l'on doit représenter cette émission par l'onde sphérique divergente.

$$(23) \quad \Psi = \frac{A}{r} e^{-ikr} e^{\frac{2\pi i}{h} Et},$$

k étant une fonction de E définie par l'équation des ondes. Alors $|\Psi|^2$ diminue comme r^{-2} quand on s'éloigne de la source, ce qui exprime la dissémination isotrope des corpuscules autour de cette source et cet affaiblissement de l'onde divergente correspond exactement à l'interprétation probabiliste de la grandeur $|\Psi|^2$. Mais, si l'on admet, comme le veut la théorie de l'onde-pilote, que le corpuscule est guidé par l'onde Ψ , il faudrait alors admettre que le corpuscule est guidé par une onde de plus en plus faible à mesure qu'il s'éloigne de la source : comme rien ne nous empêche d'observer des phénomènes de diffraction ou d'interférences à de très grandes distances de la source, ces phénomènes devraient résulter d'une réaction exercée sur le corpuscule par une onde infiniment faible. Comme le faisait remarquer M. Perrin, ceci n'est guère concevable.

Adoptons maintenant le point de vue de la double solution. Les idées du chapitre précédent prises à la lettre nous conduiraient à dire que la portion extérieure de l'onde u coïncide très approximativement avec la fonction $C \frac{e^{-ikr}}{r}$, C ayant une valeur bien déterminée. Mais ceci n'est pas davantage satisfaisant. Outre que le sens physique de la singularité à l'origine s'expliquerait ici difficilement, l'onde u se disséminerait dans l'espace : le corpuscule perdrait peu à peu son onde u extérieure en s'éloignant de la source, circonstance assez peu admissible, nous l'avons déjà dit.

Du point de vue purement mathématique, on pourrait, il est vrai, répondre que la réaction de l'onde u sur le corpuscule se traduit par le potentiel quantique qui, dépendant seulement des valeurs égales de $\frac{\square a}{a}$ et de $\frac{\square f}{f}$ au voisinage du corpuscule, ne dépend pas des *valeurs absolues* de a et de f . Dans le cas de la théorie de Dirac, l'examen des formules précédemment obtenues pour exprimer le guidage du corpuscule permettrait une réponse analogue. Mais, du point de vue physique, une échappatoire de ce genre paraît peu satisfaisante car elle fait jouer un rôle physique à une onde qui, à la limite, devient inexistante. Il me semble difficile de se contenter d'une réponse aussi formelle.

En regardant les choses de près, on s'aperçoit d'ailleurs que, même avec l'interprétation usuelle, l'onde $\Psi = \frac{e^{-ikr}}{r}$ ne peut pas donner une représentation exacte de chaque corpuscule émis. Il y a d'abord la difficulté provenant du fait que l'onde (23) a une singularité à l'origine, ce qui est contraire aux conditions généralement imposées aux ondes Ψ et

empêche d'ailleurs de normer l'onde divergente. Physiquement, il est certain que l'onde Ψ associée à l'un des corpuscules émis par la source doit avoir un front avant et un front arrière, c'est-à-dire être représentée non pas par une onde sphérique divergente monochromatique et indéfinie, mais par un groupe d'ondes de ce type. Il se pourrait même que l'onde Ψ , au lieu de former une pellicule sphérique complète, soit aussi limitée latéralement. Donc, même dans le cadre de l'interprétation usuellement admise, on doit considérer l'onde sphérique divergente $\frac{e^{-ikr}}{r}$ comme n'étant qu'une représentation statistique moyenne de l'émission isotrope globale de la source : chaque émission individuelle devrait être représentée par un groupe d'ondes sphériques limité radialement et peut-être aussi azimutalement en largeur.

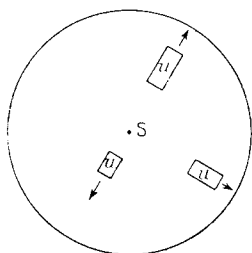


Fig. 14.

Si alors on introduit l'idée qu'il peut exister, en raison de la non-linéarité de l'équation de propagation de l'onde u , des groupes d'ondes limités et sans étalement, la source placée en S pourrait émettre isotropiquement dans toutes les directions des groupes d'ondes de forme constante (ou à peu près constante) contenant chacune une région singulière (corpuscule).

Comme alors l'amplitude dans chaque groupe d'ondes ne diminuerait plus avec r , le paradoxe signalé par M. Francis Perrin disparaîtrait. Mais on voit qu'alors l'onde divergente $\Psi = \frac{1}{r} e^{ikr}$ ne serait plus en ce cas une onde associée à chaque corpuscule, mais simplement une représentation statistique de l'émission globale, sphériquement isotrope, de la source.

Faisons maintenant quelques remarques au sujet de l'idée que nous venons de développer. La première est que, dans cette hypothèse, l'onde Ψ sphérique et divergente serait purement fictive et aucunement liée dans son ensemble avec les groupes d'ondes u émis par la source.

Son rôle serait seulement de nous fournir une représentation de la répartition statistique dans l'espace autour de la source de l'ensemble des corpuscules émis. A ce point de vue, elle serait un peu analogue à l'onde Ψ d'un système dans l'espace de configuration qui, elle aussi, dans notre manière de voir, ne représente que le comportement statistique des localisations corpusculaires et non pas le phénomène ondulatoire objectif qui entoure chaque région singulière.

On remarquera encore que cette conception d'une émission par la source de trains d'ondes limités en azimuts, dont seule la répartition statistique est représentée par l'onde sphérique divergente, est assez analogue à l'idée du rayonnement « en aiguille » (*nadelstrahlung*) naguère mise en avant par Einstein pour représenter l'émission lumineuse d'une source photon par photon, chaque émission individuelle devant s'accompagner d'un « recul » de la source.

Remarquons enfin que l'hypothèse suivant laquelle l'onde sphérique divergente représentant l'émission de photons ou de corpuscules matériels par une source ne serait qu'une fiction, n'est pas en contradiction avec l'existence bien observée de la variation de phase de π qui accompagne le passage d'une onde sphérique par un foyer. En effet, ce phénomène est observé quand il y a passage par un foyer du train d'ondes associé à un corpuscule. Dans ce cas, la forme mathématique classique de l'onde Ψ qui converge vers un foyer pour en diverger ensuite doit bien représenter la partie extérieure régulière de l'onde u du corpuscule et ceci permet de rendre compte de la variation de la phase lors du passage par le foyer. Le cas de l'onde divergente représentant l'émission d'une source ponctuelle est d'ailleurs tout à fait différent de celui-ci. En effet, l'onde sphérique divergente a une singularité au point-source : il en résulte que le flux du vecteur « courant de corpuscules » à travers une petite surface sphérique entourant la source est différent de zéro, ce qui traduit mathématiquement l'hypothèse d'une émission par le point-source. Au contraire, quand on fait la théorie du passage d'une onde convergente par un foyer ⁽¹⁾, on a bien soin de prendre, pour représenter le phénomène, la solution de l'équation des ondes sphériques qui reste *finie* au foyer, c'est-à-dire $\frac{\sin kr}{r}$ et non $\frac{e^{-ikr}}{r}$, et cela pour qu'il y ait un flux nul de corpuscules à travers une surface sphérique entourant le foyer, car celui-ci n'est pour les corpuscules ni une source, ni un puits.

(1) Voir par exemple : HENRI POINCARÉ, *Théorie mathématique de la lumière*, t. II, p. 163.

En résumé, nous voyons que, dans le cadre de la tentative que nous exposons, l'étude de l'onde sphérique divergente, comme celles des groupes d'ondes, nous a suggéré l'idée suivante : la correspondance que nous avons initialement postulée entre la partie régulière de l'onde u et la fonction Ψ de la Mécanique ondulatoire ne doit pas être considérée comme ayant un caractère absolument strict et général. Nous allons retrouver la même idée en étudiant la division d'un groupe d'ondes par un miroir semi-transparent.

§. Division d'un groupe d'ondes par un miroir semi-transparent. — Nous allons d'abord rappeler des considérations qui ont été développées

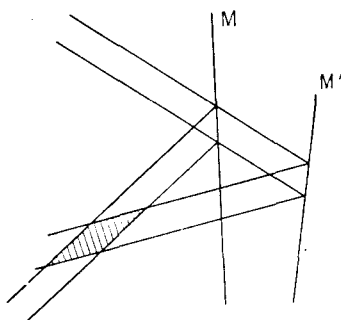


Fig. 15.

au sujet des miroirs semi-transparentes par M. Heisenberg dès le début de la discussion sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire.

Considérons, du point de vue des ondes Ψ , la réflexion du corpuscule sur un miroir semi-transparent M. L'onde Ψ incidente se partage en une onde transmise et une onde réfléchie qui représentent les deux possibilités existant pour le corpuscule : être transmis ou être réfléchi.

Adoptant l'interprétation purement probabiliste de la Mécanique ondulatoire, M. Heisenberg au Conseil Solvay d'octobre 1927 avait fait les remarques suivantes. Selon lui, on ne devait pas dire qu'en arrivant sur le miroir, le corpuscule « fait un choix » entre le faisceau réfléchi et le faisceau transmis car l'arrivée du corpuscule sur le miroir n'est pas un fait observable : au contraire, tant que le corpuscule n'a pas été localisé par une observation, on doit dire qu'il existe à la fois « à l'état potentiel » dans l'onde transmise et dans l'onde réfléchie. Si, à un moment donné, l'on parvient à déceler la présence du corpuscule dans l'un des faisceaux, l'autre faisceau cesse immédiatement d'exister parce qu'il correspond à une possibilité qui ne s'est pas réalisée et ceci

montre bien le caractère non objectif de l'onde Ψ . Mais, disait Heisenberg, si au lieu de chercher à localiser le corpuscule dans l'un des faisceaux, on disposait en M' un miroir parfaitement réfléchissant, on pourrait obtenir des interférences dans la région ombrée de la figure où les deux faisceaux viennent se superposer. Il y aurait donc alors des variations de probabilité de localisation dans cette région, ce qui montre que jusqu'à la localisation du corpuscule, il faut envisager à la fois le faisceau réfléchi et le faisceau transmis. Telle est la position sur cette question de l'interprétation purement probabiliste actuellement admise.

Analysons d'un peu plus près ce qui se passe lors de la division du train d'ondes incident par le miroir M semi-réfléchissant. Dans l'état

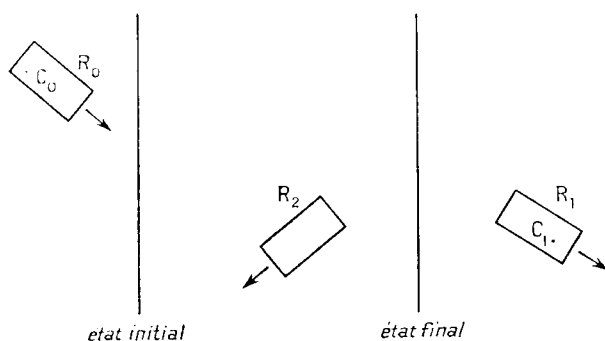


Fig. 16.

initial, nous supposons qu'un groupe d'ondes R_0 presque monochromatique se dirige vers le miroir. Dans la théorie classique des ondes, la présence du miroir a pour effet final (après une période transitoire pendant laquelle s'opère le passage du groupe d'ondes sur le miroir) de séparer le groupe d'ondes incident en deux groupes d'ondes occupant des régions R_1 et R_2 qui sont symétriques par rapport à la surface du miroir et égales à R_0 .

Si le miroir M a exactement le coefficient de réflexion $\frac{1}{2}$ et si dans l'onde initiale on a $\int a^2 d\tau = 1$, comme l'équation de propagation assure la constance au cours du temps de cette intégrale, nous aurons dans l'état final à l'intérieur de R_1 et R_2 une amplitude $\frac{a}{\sqrt{2}}$ de façon que

$$\int_{R_1} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 d\tau + \int_{R_2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 d\tau = 1.$$

Si l'on place alors le miroir parfaitement réfléchissant M' de la figure 15, les ondes réfléchies et transmises d'amplitude $\frac{a}{\sqrt{2}}$ interféreront dans la région ombrée. Sur ce point la théorie classique des ondes et la théorie des ondes Ψ sont d'accord, bien qu'elles interprètent différemment le sens physique des interférences dans la région ombrée. Mais si, au lieu de placer le miroir M' , nous avons fait une observation permettant de localiser le corpuscule dans l'un des faisceaux, par exemple dans R_1 , alors nous devrions dire après cette localisation qu'il n'y a plus d'onde Ψ dans R_2 (car il n'y a plus de possibilité de localisation du corpuscule dans R_2) et nous devrions renormaliser l'onde Ψ dans R_1 en lui attribuant à nouveau l'amplitude a au lieu de $\frac{a}{\sqrt{2}}$ de façon à avoir $\int_{R_1} a^2 d\tau = 1$.

Naturellement ceci n'a aucun sens dans la théorie classique des ondes continues car, dans cette théorie, les ondes ont un sens physique et une observation faite sur R_1 ne peut en rien modifier l'onde qui existe dans R_2 . Ainsi se trouve bien soulignée la différence de nature entre l'onde continue classique qui avait un caractère objectif et l'onde Ψ de la Mécanique ondulatoire usuelle qui, simple représentation de probabilité, a un caractère subjectif et dépend de nos informations.

6. Étude du même problème dans la théorie de la double solution. —

Introduisons maintenant la théorie de la double solution en faisant intervenir l'onde u : Nous devons supposer qu'à chaque instant le corpuscule a une position bien définie dans l'espace, même si nous n'avons fait aucune observation permettant effectivement de le localiser. Parti d'une position initiale dans R_0 , il viendra finalement occuper une certaine position dans R_1 ou dans R_2 , par exemple la position C_1 dans R_1 (fig. 16). Il est donc naturel de penser que, dans l'état final, l'onde u dont la région singulière entoure le point C_1 a une partie extérieure régulière qui remplit la région R_1 . Mais y a-t-il une fraction de la partie extérieure de u qui passe dans R_2 et qui par suite, en l'absence du miroir M' , s'éloigne ensuite indéfiniment du corpuscule en formant ainsi un groupe d'ondes isolé *sans région singulière*? Cette idée m'avait paru d'abord peu satisfaisante et j'avais un moment envisagé l'hypothèse suivante : au moment où, dans l'image classique, l'action du miroir partage le groupe d'ondes incident en deux groupes d'ondes *séparés* l'onde u passerait tout entière dans l'un des groupes d'ondes (par exemple R_1) l'autre groupe d'ondes étant vide d'onde u et représentant seulement, tant que nous n'aurons pas d'information sur la position du

corpuscule, la possibilité que le corpuscule soit venu dans R_2 . Je vais expliquer pourquoi cette hypothèse me paraît maintenant devoir être rejetée.

Commençons par rappeler le dispositif connu sous le nom d'interféromètre de Michelson.

Un faisceau de lumière parallèle tombe en A sur un miroir semi-transparent M incliné à 45° sur SA. Les faisceaux transmis et réfléchis vont ensuite se réfléchir respectivement sur des miroirs non transparents M_1 et M_2 ; puis le faisceau AB étant revenu en A se réfléchit partiellement sur le miroir M dans la direction AD tandis que le

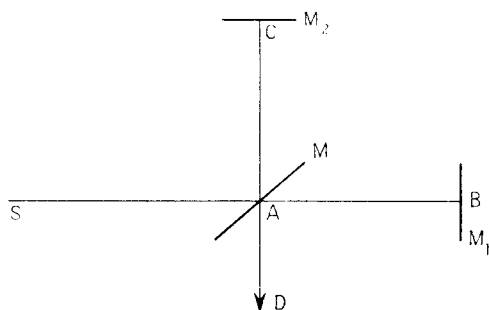


Fig. 17.

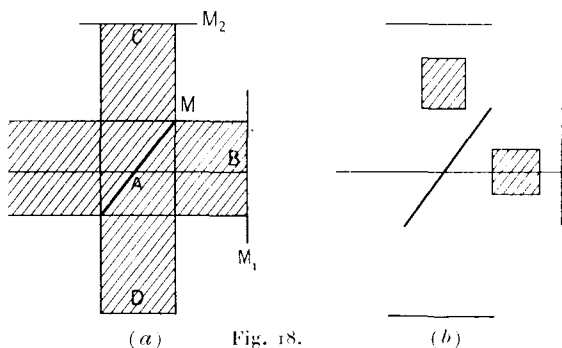
faisceau AC revenu en A est transmis partiellement dans la même direction AD. En D, on peut donc observer des interférences qui correspondent à la différence de marche éventuelle des rayons SACAD et SABAD. Le dispositif est, on le sait d'une extrême précision.

Voici maintenant la question qui se pose. Si le train d'ondes incident a une longueur très grande par rapport aux dimensions de l'interféromètre, il va inonder pendant un temps très court l'ensemble de l'appareil (*fig. 18, a*, région ombrée).

Il prendra donc la forme d'un train d'ondes désarticulé, mais d'un seul tenant. Si, au contraire, le groupe d'ondes est de dimensions petites par rapport à celles de l'interféromètre, après avoir été divisé par l'action du miroir M, il donnera naissance à deux petits trains d'ondes entièrement séparés qui accomplissent indépendamment les trajets ABA et ACA pour venir ensuite se rejoindre et interférer dans la direction AD (*fig. 18, b*).

La théorie ondulatoire classique prévoit dans les deux cas qu'il y a des interférences en D : au contraire, la théorie de l'onde u , si l'on admettait l'hypothèse exposée plus haut, conduirait à dire qu'il pourrait

y avoir des interférences dans le premier cas parce qu'il n'y aurait pas dislocation du train d'ondes incident et que tout se jouerait à l'intérieur d'un même groupe d'ondes, tandis que dans le second cas il n'y aurait pas d'interférences parce qu'il y aurait alors séparation complète dans l'espace des deux trains d'ondes dont l'un, vide d'onde u , serait en réalité inexistant car il ne représenterait qu'une possibilité non réalisée. Or, une telle conclusion, qui en vérité est *a priori* assez peu vraisemblable, est en opposition formelle avec l'expérience, comme me l'a signalé en particulier M. Renninger. En effet, Michelson et Dale ont obtenu des interférences avec des trains d'ondes qui avaient été séparés



dans l'espace par des distances de l'ordre de 2 km ⁽¹⁾. Nous devons donc rejeter l'idée suivant laquelle, par l'action d'un miroir semi-transparent, un train d'ondes se divise en deux trains d'ondes séparés dans l'espace, l'onde u se concentrerait dans le train d'ondes où est passé le corpuscule, l'autre train d'ondes étant vide d'onde u , car alors le second train d'ondes serait physiquement inexistant et il ne pourrait y avoir d'interférences entre ce train d'ondes inexistant et l'autre en cas de croisement ultérieur.

Ces considérations semblent donc nous amener nécessairement à la conception suivante. Lorsqu'un train d'ondes est partagé en deux par l'action d'un miroir semi-transparent, l'onde u se partage entre les deux trains d'ondes de sorte que finalement nous avons d'un côté un train d'ondes u sur lequel est implantée une région singulière qui est le corpuscule et de l'autre côté un train d'ondes u sans région singulière. L'idée nouvelle qui apparaît ici est qu'il peut exister des trains d'ondes u sans région singulière. Cette idée paraît d'ailleurs en accord avec le

⁽¹⁾ *Nature*, t. 113, 1923, p. 556.

formalisme actuel des « nombres d'occupation » en théorie quantique des champs, formalisme suivant lequel il peut y avoir associés à une onde, 0 ou 1 corpuscule dans le cas des fermions, 0, 1, ..., n corpuscules dans le cas des bosons : dans un cas comme dans l'autre, le nombre d'occupation peut être zéro, ce qui correspond bien à notre conception de trains d'ondes u sans région singulière.

Il ne semble pas que la conception d'ondes u ne portant aucune région singulière, aucun corpuscule, soulève en elle-même des difficultés.

Certaines apparaissent cependant quand on regarde de près ce qui se passe dans un cas comme celui du miroir semi-transparent de la figure 15. Raisonnons en supposant, pour préciser, que le pouvoir réflecteur est égal à $\frac{1}{2}$. Ce que nous venons de dire nous conduit à admettre que, si le corpuscule est finalement venu en C_1 dans le train d'ondes R_1 , il y a néanmoins une portion, partout régulière, de l'onde u qui a passé dans le train d'onde R_2 . Or, l'amplitude a de l'onde Ψ et l'amplitude f de l'onde u (en dehors de la région singulière) satisfont aux équations de continuité

$$(24) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \operatorname{div}(a^2 \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial f^2}{\partial t} + \operatorname{div}(f^2 \mathbf{v}) = 0,$$

\mathbf{v} étant dans les deux équations la même vitesse définie en chaque point par la formule du guidage. En éliminant $\operatorname{div} \mathbf{v}$ entre ces deux équations et en introduisant la dérivée totale $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$ prise le long d'une ligne de courant, on démontre aisément que $\frac{D}{Dt} \log \frac{f}{a} = \text{const.}$, c'est-à-dire que le quotient $\frac{f}{a}$ doit rester constant quand on se déplace le long d'une ligne de courant avec la vitesse \mathbf{v} . Or, en partant d'un point quelconque de R_0 et en suivant la ligne de courant qui passe par ce point, on atteint finalement un certain point de R_1 ou un certain point de R_2 suivant la position initiale choisie dans R_0 . Comme dans R_0 on a $a = Cf$ d'après nos hypothèses, il semble qu'on puisse en déduire qu'en tout point de R_1 ou de R_2 (sauf dans la région singulière qui entoure C_1) le rapport $\frac{f}{a}$ a la même valeur C qu'il avait initialement dans R_0 . Or, nous savons, d'après la théorie linéaire usuelle de l'onde Ψ , que a doit diminuer dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ quand on passe de R_0 à R_1 ou à R_2 : l'amplitude f devrait donc aussi diminuer dans le même rapport. Mais cette conclusion nous fait tomber dans une nouvelle difficulté.

Si, en effet, nous acceptons d'admettre que la traversée du miroir semi-transparent a pour conséquence d'affaiblir la partie extérieure régulière de l'onde u , alors la traversée successive d'un très grand nombre de miroirs aura pour conséquence que la partie extérieure de u tendra vers zéro. De nouveau, nous arrivons finalement à la conclusion que le corpuscule perdra progressivement son onde extérieure, conclusion difficile à admettre du point de vue physique.

Il serait beaucoup plus naturel, dans le cadre de nos conceptions, d'admettre qu'un corpuscule ayant traversé toute une série de miroirs semi-réfléchissants a exactement les mêmes propriétés que s'il était encore près de la source. La question est, en somme, de savoir si un corpuscule, qu'il soit associé à un groupe d'ondes en propagation libre, qu'il ait été émis par une source ponctuelle éloignée ou qu'il ait traversé des miroirs semi-transparents, garde une structure et des propriétés invariables ou si, au contraire, sa structure et ses propriétés changent, autrement dit s'il « vieillit ». Bien que la seconde hypothèse puisse peut-être être soutenue, la première paraît cependant plus vraisemblable. Mais celle-ci implique que l'onde u du corpuscule parvenue dans R_1 devrait avoir la même partie extérieure qu'elle avait primitivement dans R_0 , l'amplitude f étant restée la même. Or, ceci n'est-il pas inconciliable avec le résultat que nous avons démontré plus haut à l'aide des équations (24)?

Ce qui pourrait nous tirer d'affaire, c'est qu'en réalité la seconde équation (24) n'est pas rigoureusement valable si l'équation de l'onde u n'est pas linéaire. La séparation des termes réels et imaginaires dans l'équation de u , quand on pose $u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$, conduit à une équation de Jacobi généralisée et à une équation de continuité qui contiennent toutes deux un second membre des termes non linéaires. C'est cette circonstance qui, dans le cas de l'équation de Jacobi généralisée, nous a conduit au paragraphe 2 à apercevoir la possibilité de groupes d'ondes sans déformation. La même circonstance fait que la deuxième équation de continuité (24), qui rigoureusement est de la forme $\frac{\partial f^2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} f^2 = N'$, pourrait cesser d'être valable sur le bord des trains d'ondes et en principe ne l'est jamais dans la région singulière. Ce fait a pour conséquence qu'on ne peut plus affirmer que $\frac{f}{a}$ garde la même valeur dans R_1 et dans R_2 que dans R_0 . On peut dire aussi que les termes non linéaires de l'équation de u ont pour effet que le pourtour de la région singulière et les bords de trains d'ondes peuvent se comporter comme des sources

(ou des puits) pour l'onde u . Dans les groupes d'ondes stables sans déformation que nous avons considérés au paragraphe 2, ces sources devraient s'annuler; mais, quand un groupe d'ondes de ce type se déchirerait pour donner naissance à deux groupes d'ondes distincts R_1 et R_2 , ces sources pourraient réapparaître et faire varier les amplitudes de v dans R_1 et R_2 . Ces amplitudes seraient d'abord égales et le resteraient pendant un certain temps au cours duquel l'interférence entre R_1 et R_2 en cas de superposition ultérieure serait encore possible dans les conditions prévues par la théorie classique. Mais après un certain délai l'action des sources pourrait avoir pour effet de *régénérer* le groupe d'ondes primitif dans R_1 . Il se pourrait aussi que le groupe d'ondes R_2 sans corpuscule finisse par disparaître, peut-être par étalement indéfini. Ce ne sont là que des suggestions dont la justification, sans doute très ardue, ne serait possible que si nous parvenions à connaître la forme des termes non linéaires dans l'équation des ondes u ⁽¹⁾.

7. Retour sur la relation entre onde u et onde Ψ . — L'étude du passage d'un corpuscule à travers un miroir semi-transparent, quelle que soit la manière dont on soit finalement amené à la développer dans la théorie de la double solution, va nous permettre de préciser certains points de la liaison qui devrait exister entre onde u et onde Ψ . Dans le groupe d'ondes initial R_0 , l'onde Ψ normée ayant une amplitude a_0 (telle que $\int_{R_0} a_0^2 d\tau = 1$), la relation entre l'onde Ψ et la partie extérieure de l'onde u est $\Psi \simeq C_0 v$ avec une constante C_0 de valeur bien déterminée. Après la séparation des deux groupes d'ondes R_1 et R_2 égaux à R_0 , le corpuscule se trouvant dans l'un des groupes d'ondes sans qu'on sache lequel, on doit imaginer une onde Ψ remplissant les deux groupes d'ondes avec, nous l'avons vu, l'amplitude $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Si $|e_1|$

(1) Sans y attacher trop d'importance, nous pouvons illustrer l'idée que nous venons d'exposer à l'aide d'une image qui nous a été suggérée par M. J. L. Destouches. Dans une certaine mesure, on peut comparer un corpuscule en mouvement rectiligne et uniforme entouré de son groupe d'ondes à un bateau en mouvement sur la mer libre entouré de son sillage. Si le bateau passe près d'un mur, d'une digue, une partie de son sillage peut subir une réflexion et, si elle revient se superposer à une autre partie du sillage primitif, elle pourra donner lieu à des interférences; mais, quand ensuite le bateau se sera éloigné de la digue, il se retrouvera en mer libre avec son sillage primitif reconstitué tandis que la partie du sillage réfléchi par la digue aura été se perdre au large et aura disparu.

et $|c_2|$ représentent les amplitudes des parties extérieures de u dans R_1 et dans R_2 , on aura dans ces deux trains d'ondes respectivement

$$\alpha_1 = C_1 |c_1| \quad \text{et} \quad \alpha_2 = C_2 |c_2|$$

avec

$$C_1 = \frac{\alpha_0}{|c_1| \sqrt{2}} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\alpha_0}{|c_2| \sqrt{2}};$$

ainsi, quand on passe de R_0 à R_1 ou à R_2 , la constante de proportionnalité varie. Si nous avons alors connaissance du fait que le corpuscule se trouve dans R_1 , nous devons renormaliser à l'unité l'onde fictive de probabilité dans R_1 , ce qui lui rendra l'amplitude primitive α_0 , tandis que dans R_2 , nous devons poser $\Psi = 0$ car nous savons maintenant que le corpuscule ne se trouve pas dans R_2 . Naturellement, l'onde u qui, pour nous, est une réalité objective ne peut être modifiée ni dans R_1 , ni dans R_2 , par l'information que nous avons reçue sur la position de la région singulière. Nous devons donc maintenant poser dans R_1 la relation $\Psi = C'_1 c_1$, avec $C'_1 = \frac{\alpha_0}{|c_1|}$, c'est-à-dire que la constante de proportionnalité C_1 doit être multipliée par $\sqrt{2}$. Mais dans R_2 , il faut poser $\Psi = 0 \propto c_2$, c'est-à-dire que la constante de proportionnalité y devient nulle.

Nous voyons alors bien comment nous devons assouplir la liaison possible entre la partie régulière de l'onde u et l'onde Ψ pour rendre compatible le caractère objectif de l'onde u avec le caractère subjectif de l'onde Ψ . Dans le train d'ondes u où se trouve finalement le corpuscule, l'onde Ψ reste toujours proportionnelle à la partie extérieure de l'onde u , mais la constante de proportionnalité change quand il y a réduction du paquet de probabilité et renormalisation de l'onde Ψ . Dans le train d'ondes où ne se trouve pas le corpuscule, on doit, avant toute localisation de celui-ci, imaginer une onde Ψ qui représente sa probabilité de présence, mais, après la localisation du corpuscule dans R_1 , il n'y a plus dans R_2 qu'une onde u partout régulière *sans* onde Ψ . Ces considérations nous paraissent jeter une certaine clarté sur la nature de la liaison qui peut exister entre l'onde u réalité objective indépendant de nos informations et l'onde Ψ construction de notre esprit et représentation subjective des probabilités qui, elle, dépend essentiellement de nos informations. Nous avons précédemment signalé la nécessité d'établir entre les ondes u et Ψ une liaison assez souple pour qu'elle ne fasse pas participer l'onde u au caractère subjectif de

l'onde Ψ : nous apercevons maintenant comment on pourrait atteindre ce but.

Évidemment il est mathématiquement équivalent d'écrire $\Psi = C\psi$ ou $\psi = C\Psi$, mais l'avantage de la première façon d'écrire devient maintenant évident. Elle nous donne la possibilité de choisir à notre convenance la constante C , au besoin en lui attribuant des valeurs différentes dans des régions séparées de l'espace, de façon que l'onde Ψ *ainsi construite à partir de ψ* puisse jouer le rôle statistique que nous souhaitons lui attribuer. C'est pourquoi nous devons poser $C = 0$ pour les régions de l'espace où nous savons que l'onde u ne comporte pas de région singulière, puisque la probabilité de présence de la région singulière y est nulle.

8. Extension des idées précédentes aux problèmes de collision. —

On peut généraliser au cas des phénomènes de collision les idées que nous venons de développer sur l'exemple du miroir semi-transparent.

Raisonnons sur la collision de deux corpuscules. La théorie usuellement admise envisage dans l'état initial deux trains d'ondes Ψ occupant des régions séparées de l'espace R_0 et R'_0 et se rapprochant l'un de l'autre. Puis, après le phénomène de collision très complexe que la théorie actuelle ne peut représenter qu'en se servant de l'espace de configuration à six dimensions, on arrive à un état final où les trains d'ondes Ψ des deux corpuscules sont à nouveau entièrement séparés et où il y a plusieurs possibilités R_1, R_2, \dots , pour la position du train d'ondes du premier corpuscule et plusieurs possibilités R'_1, R'_2, \dots , pour la position du train d'ondes du second corpuscule. Ces trains d'ondes sont « corrélés », c'est-à-dire que, si le corpuscule 1 est dans R_1 , le corpuscule 2 est dans R'_1 , si le corpuscule 1 est dans R_2 , le corpuscule 2 est dans R'_2 , etc.

Dans l'état initial, suivant les conceptions de la double solution, les ondes u_0 et u'_0 des deux corpuscules occupent R_0 et R'_0 : les ondes Ψ correspondantes $\Psi_0 = C_0\psi_0$ et $\Psi'_0 = C'_0\psi'_0$ sont seulement de représentations de probabilités et les constantes C_0 et C'_0 doivent être choisies de façon à ce qu'elles puissent jouer ce rôle. Dans l'état final, l'onde u du premier corpuscule sera répartie entre R_1, R_2, \dots , celle du second entre R'_1, R'_2, \dots , mais les deux régions singulières doivent toujours se trouver dans deux trains d'ondes corrélés (par exemple le premier dans R_1 et le second dans R'_1). Les ondes fictives Ψ doivent être construites de façon que le carré de leur module représente la probabilité de présence des régions singulières

quand on ne sait pas dans quel couple de trains d'ondes corrélés elles se trouvent. Quand une observation ou une information nous a appris dans quel couple de train d'ondes corrélés se trouvent les corpuscules, alors nous devons renormaliser les ondes Ψ de manière qu'elles soient toutes nulles dans tous les couples de trains d'ondes corrélés, sauf dans celui où se trouvent les corpuscules. Naturellement cela ne modifiera nullement la valeur des ondes u dans les divers trains d'ondes puisque l'onde u est une réalité objective indépendante de nos informations.

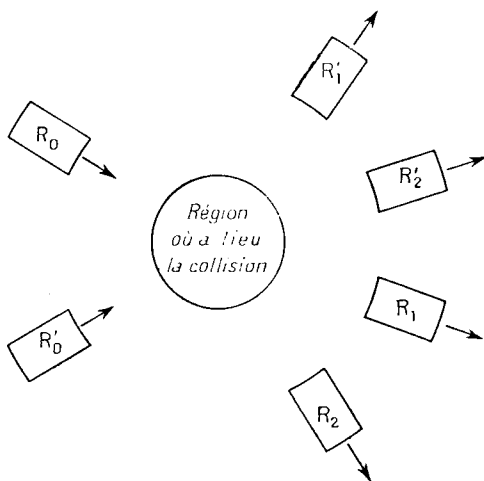


Fig. 19.

Les ondes Ψ se trouveront ainsi concentrées par la renormalisation dans les couples de trains d'ondes corrélés où se trouvent les régions singulières, les coefficients C de la relation $\Psi = Cc$ devenant nuls dans tous les autres couples de trains d'ondes corrélés. Ceci se conçoit aisément car les ondes Ψ , construction de notre esprit, ne sont pas en réalité liées à la structure objective de l'onde u et à ses valeurs locales, mais doivent simplement pouvoir représenter la probabilité de présence des régions singulières-corpuscules ⁽¹⁾.

9. Résumé du chapitre. — Nous avons étudié dans ce chapitre trois questions qu'il est très difficile de résoudre du point de vue où nous

⁽¹⁾ Ici encore on pourrait supposer que les trains d'ondes u pourvus d'une région singulière se régénèrent, alors que ceux qui en sont dépourvus dégénéreraient et pourraient disparaître.

nous sommes placé : corpuscule associé à un groupe d'ondes en propagation libre, émission de corpuscules par une source ponctuelle isotrope, corpuscule traversant un miroir semi-réfléchissant pour son onde associée.

Nous nous sommes alors trouvé en présence du dilemme suivant : ou bien admettre que la partie extérieure de l'onde u s'affaiblit progressivement de telle sorte que le corpuscule tend à « perdre » son onde u extérieure ou bien supposer que le corpuscule conserve au contraire intégralement son onde u initiale. La première hypothèse correspond à la forme des solutions que l'on a l'habitude de considérer en Physique classique et en Mécanique ondulatoire usuelle pour les équations *linéaires* des ondes continues. En théorie de la double solution, elle entraînerait qu'il devrait exister une différence entre les corpuscules « jeunes », c'est-à-dire récemment émis, et les corpuscules « vieux », c'est-à-dire ayant subi de nombreuses aventures depuis leur émission et partiellement dépouillés de leur onde u extérieure; mais il serait alors assez difficile de comprendre le fait, cependant presque certain, que les corpuscules « vieux » ont les mêmes propriétés, notamment les mêmes propriétés d'interférences, que les corpuscules « jeunes ». Il ne faut pas oublier, en effet, que l'on obtient couramment des phénomènes d'interférences avec des photons provenant d'étoiles lointaines qui ont voyagé dans l'espace pendant d'immenses durées ⁽¹⁾. La seconde hypothèse, au contraire, semble en théorie de la double solution plus satisfaisante du point de vue physique parce qu'elle correspondrait mieux au caractère de permanence des corpuscules; mais pour la justifier, il faudrait montrer qu'elle correspond à des propriétés de l'onde u essentiellement liées au caractère *non linéaire* de son équation de propagation. Malheureusement cette justification, rendue *a priori* très ardue par la difficulté qu'il y a toujours à étudier les solutions des équations non linéaires, restera impossible à développer complètement tant que subsistera notre ignorance de la forme des termes non linéaires à introduire dans l'équation des ondes u .

(¹) On pourrait cependant chercher à interpréter par le vieillissement des corpuscules l'apparente « récession » des nébuleuses spirales (au lieu d'invoquer l'hypothétique « expansion de l'Univers »).

CHAPITRE XIX.

ÉTATS STATIONNAIRES, TRANSITIONS QUANTIQUES, CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

1. **Les états stationnaires.** — Une des conceptions les plus fondamentales introduites par l'ancienne théorie des quanta a été celle d'état stationnaire d'un système quantifié. Dans sa théorie de l'atome, M. Bohr, en 1913, a introduit l'idée qu'un atome peut seulement se trouver dans un certain nombre d'états stationnaires quantifiés à l'exclusion de tout autre et il a rattaché cette idée à la théorie des quanta de Planck. L'atome serait susceptible de passer spontanément d'un état stationnaire d'énergie E_i à un autre état stationnaire d'énergie $E_k < E_i$ en émettant un quantum de rayonnement de fréquence ν_{ik} telle que $h\nu_{ik} = E_i - E_k$ (loi des fréquences de Bohr). Irradié par un rayonnement de fréquence ν_{ik} , l'atome peut aussi passer de l'état stationnaire d'énergie E_k à l'état stationnaire d'énergie supérieure E_i en absorbant un quantum d'énergie radiante $h\nu_{ik}$. Si l'atome dans l'état E_i subit le choc d'un corpuscule incident, il peut passer de l'état d'énergie E_i à l'état d'énergie E_k en cédant au corpuscule l'énergie $E_i - E_k$. Inversement, si l'atome est dans l'état d'énergie E_k , il peut passer dans l'état d'énergie E_i si le corpuscule incident a suffisamment d'énergie pour que l'atome puisse lui prendre l'énergie $E_i - E_k$. Tel est dans ses grandes lignes le schéma très simple de la théorie primitive de Bohr. L'étude expérimentale des phénomènes d'excitation et de désexcitation par choc ainsi que celle des phénomènes d'ionisation par choc où l'atome perd complètement l'un de ces électrons internes par suite d'une collision ont entièrement confirmé l'existence des états stationnaires qui est devenue l'une des conceptions fondamentales de la Physique quantique.

Dans la conception de M. Bohr, il n'y a plus que des états stationnaires et l'on exclut *a priori* toute description des transitions brusques qui accompagnent le changement d'état stationnaire. D'après M. Bohr,

l'atome dans un état stationnaire est, en quelque sorte, soustrait à l'action du temps : il n'évolue pas. Quant à la transition brusque qui le fait passer d'un état à un autre, c'est d'après lui quelque chose qu'il est absolument impossible de décrire par une image spatiotemporelle.

Lors de l'avènement de la Mécanique ondulatoire, la notion d'état stationnaire a reçu l'interprétation suivante : l'onde Ψ qui décrit l'état d'un système quantifié possède, quand le système est dans un état stationnaire, la forme d'une « onde stationnaire », c'est-à-dire qu'elle a pour expression pour le $n^{\text{ième}}$ état stationnaire

$$(1) \quad \Psi_n = a_n(q) e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}$$

où q représente l'ensemble des variables de configuration qui décrivent le système. Pour déterminer les états stationnaires, on devra trouver les solutions de la forme (1) de l'équation des ondes pour le système quantifié qui sont finies, uniformes et continues et qui satisfont aux conditions aux limites du problème considéré. Ces solutions constituent les « fonctions propres » de l'opérateur hamiltonien correspondant à la grandeur « énergie » et les « valeurs propres » E_n sont les énergies des états stationnaires quantifiés du système.

C'est M. Schrödinger qui, le premier, a calculé de cette façon, en 1926, les énergies des états stationnaires. Or, c'est lui aussi qui a le plus sévèrement critiqué la notion même d'état stationnaire. Dans un article récent (1), où il a d'ailleurs, en accord avec les idées que nous avons exposées précédemment, insisté fortement sur le rôle essentiel que doivent jouer en Mécanique ondulatoire les dimensions limitées des trains d'onde, il a remarqué avec humour que la considération exclusive des états stationnaires avait conduit à une théorie « qui décrit minutieusement les états stationnaires, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas intéressants puisqu'il ne s'y passe rien, et qui reste silencieuse sur les états intermédiaires ». Il remarque que l'état d'un atome doit en général être représenté par une superposition d'ondes stationnaires de la forme

$$(2) \quad \Psi = \sum_k c_k a_k(q) e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$$

et il en conclut qu'en Mécanique ondulatoire il doit être possible de représenter les transitions quantiques en respectant les « prérogatives » des fréquences propres $\frac{E_k}{h}$, mais *en supprimant complètement la*

(1) *Brit. J. Phil. Sc.*, vol. 3, 1952, nos 10 et 11.

prérogative des états stationnaires. Ces remarques sont très intéressantes et nous y reviendrons.

Ajoutons que M. Schrödinger voudrait, conformément à sa tendance initiale, supprimer autant que possible la notion de corpuscule et assimiler les phénomènes d'échange d'énergie quantifiée lors des chocs à des phénomènes de résonance. Nous ne le suivrons pas dans cette voie qui paraît très différente de la nôtre et nous allons maintenant étudier comment se présente, dans la théorie de la double solution, la conservation de l'énergie quand la fonction Ψ est une superposition de fonctions propres de l'hamiltonien.

2. Étude de la conservation de l'énergie lors du choc d'un corpuscule avec un atome. — Pour étudier un cas précis, nous allons considérer le choc d'un corpuscule dont l'énergie initiale peut être considérée comme ayant une valeur précise E_0 avec un atome dont la fonction d'ondes Ψ a l'expression générale (2). Le calcul par la Mécanique ondulatoire montre qu'après le choc, il y aura toute une série de possibilités affectées de probabilités diverses : pour chacune d'elles, le corpuscule s'éloignera de l'atome avec une énergie de la forme $E_0 \pm (E_l - E_m)$, où $E_l - E_m$ représente l'une des différences de niveaux énergétiques de l'atome quantifié. Si l'on constate après le choc que le corpuscule possède l'énergie $E_0 + E_l - E_m$, on devra en conclure que l'atome a subi la transition $l \rightarrow m$ et qu'il se trouve finalement dans l'état stationnaire d'énergie E_m . Si dans son état initial, l'atome s'était trouvé dans l'état stationnaire d'énergie E_l , on pourrait dire simplement qu'en subissant, lors du choc, la transition $E_l \rightarrow E_m$, il a cédé au corpuscule incident l'énergie $E_l - E_m$ et la conservation de l'énergie aurait alors un sens très clair. Mais ce sens est moins clair dans l'hypothèse où nous nous sommes placés parce que la fonction d'ondes Ψ a alors la forme initiale (2). Avec l'interprétation actuelle, nous devons dire alors que, dans son état initial, l'atome a « potentiellement » toutes les énergies E_k avec les probabilités respectives $|c_k|^2$. Le fait qu'après le choc, le corpuscule soit trouvé avec l'énergie $E_0 + (E_l - E_m)$ montre alors que, dans le choc, c'est la possibilité $E = E_l$ qui s'est « actualisée » pour l'atome et que celui-ci, ayant cédé au corpuscule incident l'énergie $E_l - E_m$, se trouve finalement dans l'état d'énergie E_m . On voit ainsi combien la conservation de l'énergie est ici plus difficile à énoncer que pour la Physique classique parce que l'énergie de l'atome n'a plus dans son état initial une valeur bien déterminée. Il en serait naturellement de même si l'onde Ψ du corpuscule incident comportait plusieurs composantes

spectrales et cela même si l'atome se trouvait alors avoir initialement une énergie bien définie.

Comme après le choc le corpuscule s'éloigne en général indéfiniment de l'atome, la constatation de la valeur finale de son énergie peut se faire très loin de l'atome. C'est cependant cette constatation qui, d'après l'interprétation actuelle, mettrait l'atome dans l'état d'énergie E_m ! Nous retrouvons là l'un des aspects du paradoxe des états corrélés mis en lumière par M. Schrödinger et précédemment exposé au chapitre VII (§ 4).

3. Point de vue de la théorie de la double solution. — Dans l'interprétation causale que nous exposons, la phase φ joue, nous le savons, le rôle d'une fonction de Jacobi extrapolée en dehors du domaine de l'Optique géométrique et l'énergie d'un corpuscule (ou d'un système) est, par suite, donnée par la formule

$$(3) \quad W = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Ici se présente une circonstance remarquable. Même en l'absence de champ extérieur variable avec le temps, l'énergie n'est pas en général constante. Prenons le cas simple d'un corpuscule en l'absence de tout champ extérieur. Si l'onde Ψ est une onde plane monochromatique, c'est-à-dire si le corpuscule se trouve dans un groupe d'ondes presque monochromatique sans être au voisinage immédiat de son bord, l'énergie du corpuscule restera constante. Mais dès que le Ψ est une superposition d'ondes planes monochromatiques avec un spectre étendu, on peut voir aisément par le calcul de la phase φ que cette phase ne sera plus une fonction linéaire du temps et que l'énergie du corpuscule définie par (3) ne sera plus constante.

Ce fait est relié à la circonstance suivante : le potentiel quantique Q est alors une fonction explicite du temps. Or on sait que, si \mathcal{L} désigne la fonction de Lagrange d'un corpuscule (ou d'un système), la dérivée totale de l'énergie W prise en suivant le mouvement est

$$(4) \quad \frac{dW}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il faut donc que \mathcal{L} ne dépende pas explicitement du temps. Or nous avons vu au chapitre X (§ 1), qu'en Dynamique de la double solution le schéma lagran-

gien est valable avec les définitions

$$(5) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 - F - Q; \quad W = \frac{1}{2} m v^2 + F + Q$$

(à l'approximation non relativiste), F étant le potentiel dont dérive le champ extérieur et Q le potentiel quantique. Donc, même si F est nul ou ne contient pas explicitement le temps, l'énergie ne sera constante que si Q ne dépend pas explicitement du temps. Or, dans le cas d'une superposition d'ondes planes monochromatiques, Q dépend en général explicitement du temps.

Prenons comme exemple le cas simple de l'atome d'hydrogène. L'électron n'y aura une énergie constante que dans les états stationnaires. Dans tous les états où l'onde Ψ a la forme générale (2), l'électron aura dans la théorie causale une trajectoire très compliquée définie en fonction de la phase φ de l'onde Ψ par la formule du guidage et son énergie ne demeurera pas constante au cours du mouvement.

Quand un corpuscule incident d'énergie E_0 bien définie vient frapper un atome, la théorie causale conduit donc à penser qu'en principe le résultat du choc serait entièrement prévisible si l'on pouvait connaître la position initiale du corpuscule dans le train d'ondes incident et celle des électrons dans l'atome. Mais, comme ces positions restent nécessairement ignorées, toute mesure des positions modifiant les positions initiales, nous devons nous contenter de calculer, en accord avec les formules de l'interprétation usuelle, les résultats possibles de la collision avec leurs probabilités respectives. Le calcul se faisant d'après la méthode usuelle, on trouvera le même résultat final : le corpuscule doit s'éloigner de l'atome avec une énergie bien définie égale à $E_0 + (E_l - E_m)$ correspondant à un gain ou à une perte d'énergie égale à l'une des différences de niveaux énergétiques de l'atome; corrélativement celui-ci restera dans un état final stationnaire d'énergie quantifiée E_m .

L'on voit ainsi que, comme dans l'interprétation usuelle, il n'y a plus, à proprement parler, dans notre interprétation de conservation de l'énergie puisque l'atome n'a pas en général une énergie constante dans son état initial. Tandis que, dans l'interprétation usuelle, l'atome dans son état initial aurait plusieurs valeurs « potentielles » pour son énergie affectées de probabilités diverses, en théorie causale l'électron atomique aurait dans l'état initial une énergie continuellement variable. Ni dans un cas, ni dans l'autre, les conditions classiques de valeurs initiales et finales bien définies de l'énergie ne sont satisfaites. La situation au point de vue de la conservation de l'énergie ne paraît donc pas au fond

être beaucoup meilleure dans l'interprétation actuelle que dans la théorie causale.

4. Autre cas instructif de collision entre atome et corpuscule. — A titre d'exemple, nous allons considérer un autre cas instructif de collision entre atome et corpuscule.

Soit un atome qui se trouve initialement dans un état stationnaire fondamental d'énergie minimum E_0 . Cet atome possède deux états excités d'énergies E_1 et $E_2 > E_1$. Le schéma de ses niveaux est donc le suivant :

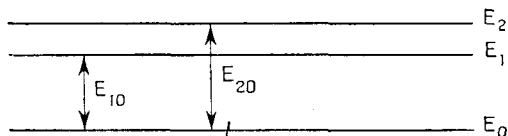


Fig. 20.

Posons $E_1 - E_0 = E_{10}$ et $E_2 - E_0 = E_{20}$: ce sont deux énergies d'excitation de l'atome dans son état normal. L'on a évidemment $E_{20} > E_{10}$.

Nous supposons de plus que, sur l'atome dans l'état E_0 , arrive un corpuscule dont l'onde Ψ est

$$(6) \quad \Psi = e^{\frac{2\pi i}{h} [E_{10}t - p_{10}z]} + e^{\frac{2\pi i}{h} [E_{20}t - p_{20}z]}.$$

En réalité, point qu'on oublie généralement de souligner dans ce genre de problème et qui pourrait avoir de l'importance, l'onde Ψ forcément limitée n'a cette forme (6) que dans la partie centrale de deux groupes d'ondes qui se superposent.

Avec l'interprétation usuelle, on doit dire que le corpuscule incident a potentiellement, avec une égale probabilité, les deux énergies E_{10} et E_{20} . Son choc avec l'atome peut donc provoquer dans cet atome l'une des transitions $E_0 \rightarrow E_1$ ou $E_0 \rightarrow E_2$. Dans le premier cas l'énergie cinétique finale de l'électron incident sera nulle; dans le second, elle sera égale soit à $E_{20} - E_{10}$, soit à zéro. On ne peut pas dire qu'il y ait conservation de l'énergie au sens classique puisque le système n'a pas dans l'état initial une énergie ayant une valeur bien définie.

Avec l'interprétation causale, au contraire, on écrira l'onde Ψ du corpuscule incident sous la forme

$$(7) \quad \Psi = 2 \cos \left[\frac{2\pi}{h} \left(\frac{E_{20} - E_{10}}{2} t - \frac{p_{20} - p_{10}}{2} z \right) \right] e^{\frac{2\pi i}{h} \left[\frac{E_{10} + E_{20}}{2} t - \frac{p_{10} + p_{20}}{2} z \right]}$$

équivalente à (6) et l'on aura

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{E_{10} + E_{20}}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{p_{10} + p_{20}}{2}.$$

L'énergie W du corpuscule incident est donc ici égale à la valeur constante $\frac{E_{10} + E_{20}}{2}$, ce qui correspond au fait que, l'amplitude de Ψ étant

$$(9) \quad a = 2 \cos \left[\frac{2\pi}{h} \left(\frac{E_{20} - E_{10}}{2} t - \frac{p_{20} - p_{10}}{2} z \right) \right],$$

le quotient $\frac{\square a}{a}$ et par suite le potentiel quantique Q sont constants et indépendants du temps.

Puisque l'énergie finale du corpuscule incident est soit zéro, soit $E_{20} - E_{10} = E_2 - E_1$, on voit que la variation de l'énergie du système corpuscule + atome correspond à l'un des schémas suivants :

$$(10) \quad E_0 + \frac{E_{10} + E_{20}}{2} \begin{cases} \rightarrow E_0 + E_{10} = E_0 + \frac{E_{10} + E_{20}}{2} - \frac{E_{20} - E_{10}}{2} < E_0 + \frac{E_{10} + E_{20}}{2} \\ \rightarrow \left(\begin{matrix} E_0 + E_{20} \\ E_0 + E_{10} + (E_{20} - E_{10}) \end{matrix} \right) = E_0 + \frac{E_{10} + E_{20}}{2} + \frac{E_{20} - E_{10}}{2} > E_0 + \frac{E_{10} + E_{20}}{2} \end{cases}$$

Ici, bien que nous trouvions une énergie constante pour l'état initial du corpuscule et que la valeur initiale de l'énergie du système soit constante et bien déterminée, il n'y a cependant pas conservation de l'énergie, la variation de l'énergie totale pendant le choc étant égale à $\pm \frac{1}{2}(E_2 - E_1)$. Cette variation est mathématiquement liée au fait que, pendant l'interaction, il y a intervention d'un potentiel quantique dépendant explicitement du temps. Il faut remarquer que les deux transitions possibles (10) ayant la même probabilité $\frac{1}{2}$ et donnant lieu à des variations d'énergie égales et de signe contraire, il y aurait une sorte de conservation statistique de l'énergie analogue à celle que MM. Bohr, Kramers et Slater avaient un moment envisagée après la découverte de l'effet Compton.

Mais on pourrait se demander si, en introduisant à côté de l'énergie $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ du corpuscule une énergie liée à l'onde environnante, on ne pourrait pas rétablir la conservation de l'énergie. Nous allons examiner cette question en nous aidant d'un résultat que j'avais obtenu dès 1927.

§. Le tenseur énergie-quantité de mouvement dans la théorie de l'onde-pilote. — Dans une Note aux *Comptes rendus* de novembre 1927

[13], j'avais déjà montré qu'il existait dans la théorie de l'onde-pilote un tenseur impulsion-énergie formé à l'aide de l'onde Ψ et possédant une propriété de conservation. Voici mon raisonnement.

Nous avons vu qu'en théorie causale, on peut développer une Dynamique du corpuscule où celui-ci aurait la masse propre variable

$$(11) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{\hbar^2}{4\pi^2 c^2} \left(\frac{\square \alpha}{\alpha} \right)}$$

et nous avons trouvé avec les notations de la Relativité généralisée les deux équations

$$(J) \quad g^{kl} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^l} - \varepsilon P_l \right) = M_0^2 c^2,$$

$$(C) \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left[\sqrt{-g} g^{kl} \alpha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right) \right] = 0;$$

ε étant la charge électrique du corpuscule et P le quadrivecteur « potentiel électromagnétique ». La vitesse d'Univers étant définie par $u^l = \frac{dx^l}{ds}$ avec $u_l u^l = 1$, la loi du guidage s'écrit

$$(12) \quad M_0 c u^l = g^{kl} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right).$$

Comme il résulte de (C) que le vecteur d'Univers de composantes covariantes égales à $\alpha^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right)$ a une divergence nulle, nous pouvons le supposer proportionnel au quadrivecteur

$$(13) \quad C^l = z_0 u^l$$

qui exprime la densité et le flux des corpuscules dans un nuage de corpuscules décrivant toutes les trajectoires associées à une même fonction Ψ . On est alors conduit à écrire

$$(14) \quad z_0 = k M_0 c \alpha^2.$$

La densité du nuage étant alors donnée par la quatrième composante du vecteur C a pour valeur

$$(15) \quad z = C^4 = k M_0 c \alpha^2 u^4 = k \alpha^2 g^{4k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \varepsilon P_k \right).$$

On peut voir aisément que, dans cette Dynamique, les équations du mouvement du corpuscule prennent la forme

$$(16) \quad \frac{d}{ds} (M_0 c u_l) = \frac{1}{2} M_0 c u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \varepsilon u^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i} \right) + c \frac{\partial M_0}{\partial x^l}.$$

Au second membre de cette équation, le premier terme représente l'action du champ de gravitation, le second l'action du champ électromagnétique et le troisième l'action du potentiel quantique.

Supposons qu'il n'y ait pas de champ de gravitation et considérons toujours le nuage de corpuscules associé à une même onde Ψ . En multipliant (16) par $M_0 a^2$ et en tenant compte de l'équation (C), on obtient après quelques transformations

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (T_i^k + \Pi_i^k + S_i^k) = 0,$$

où les S_i^k sont les composantes mixtes du tenseur impulsion-énergie électromagnétique bien connu. Les quantités T_i^k et Π_i^k sont données par

$$(18) \quad \begin{cases} T_i^k = \rho_0 M_0 u^k u_i, \\ \Pi_i^k = K \frac{h^2}{8\pi^2 c} g^{lk} \left[2 \frac{\partial a}{\partial x^i} \frac{\partial a}{\partial x^l} - g_{il} \left(g^{mn} \frac{\partial a}{\partial x^m} \frac{\partial a}{\partial x^n} + a \square a \right) \right]; \end{cases}$$

Les T_i^k sont les composantes mixtes du tenseur usuel impulsion-énergie corpusculaire pour un nuage de densité propre ρ_0 , formé de corpuscules ayant la masse propre M_0 . Quant au tenseur Π_i^k , il représente des sortes de tensions internes dans le nuage des corpuscules analogues aux tensions internes dans un fluide. Si nous laissons de côté le champ électromagnétique, nous voyons que l'équation (17) nous conduit à la conclusion suivante : en l'absence de champ électromagnétique, l'énergie et l'impulsion correspondant à la somme des tenseurs T_i^k et Π_i^k se conservent.

On pourrait être tenté d'utiliser ce résultat pour rétablir la conservation de l'énergie en théorie causale. Nous avons vu qu'en dehors du cas de l'onde plane monochromatique, le mouvement du corpuscule défini par la loi du guidage correspond à une énergie et à une impulsion continuellement variables. Comme l'énergie et l'impulsion du corpuscule sont liées au tenseur T_i^k , on pourrait chercher à interpréter l'intervention du tenseur Π en disant qu'il y a continuellement un échange d'énergie et de quantité de mouvement entre le corpuscule et la partie extérieure de son onde u (proportionnelle à Ψ), échange traduit par l'apparition du potentiel quantique. On interpréterait alors la relation (17) en disant qu'elle exprime la conservation de l'énergie et de l'impulsion *totales* du corpuscule et de son onde extérieure. Si, dans les exemples étudiés dans les paragraphes précédents, nous n'avions pas trouvé de conservation de l'énergie, ce serait simplement parce que nous n'avions pas tenu compte de l'énergie de la partie régulière de l'onde u .

Malheureusement, à la réflexion, cette interprétation ne paraît pas acceptable. Le raisonnement fait ci-dessus pour obtenir un tenseur impulsion-énergie part de l'onde statistique Ψ et définit le quadri-vecteur courant-densité C' et le tenseur T_i^k en assimilant α^2 à la densité moyenne d'un fluide. Or, ceci n'a de sens que pour une infinité de corpuscules décrivant toutes les trajectoires définies par l'onde Ψ et non pour un seul corpuscule décrivant l'une de ces trajectoires. Le théorème de conservation exprimé par (17) n'a donc qu'un sens statistique et l'on n'obtient pas avec lui une conservation applicable à un seul corpuscule comme il le faudrait pour qu'il y ait réellement conservation dans la théorie causale du mouvement individuel.

Évidemment, on pourrait définir un tenseur θ_i^k à partir de l'onde u comme on a défini plus haut Π_i^k à partir de l'onde Ψ : il suffirait d'adopter pour θ_i^k l'expression (18) de Π_i^k dans laquelle on aurait remplacé α par f , cette définition n'étant valable d'ailleurs qu'en dehors de la région singulière. Ce nouveau tenseur d'ailleurs proportionnel à Π_i^k , pourrait définir des tensions dans la partie extérieure de l'onde u , mais je ne vois pas la possibilité de démontrer, à partir de là, qu'il y ait un échange d'énergie et d'impulsion entre la région singulière et la partie régulière de l'onde u assurant la conservation globale de ces grandeurs.

Ainsi, à moins qu'il n'existe une manière de « sauver » la conservation de l'énergie et de l'impulsion que pour le moment je n'aperçois pas (¹), il semble bien que la théorie causale soit obligée d'admettre qu'en dehors de cas exceptionnels cette conservation n'est que statistique.

6. Retour sur les processus de mesure. — En tenant compte de ce qui vient d'être dit, nous allons revenir sur l'interprétation de la mesure dans la double solution. Nous raisonnerons sur la grandeur énergie bien que notre exposé soit transposable pour toute autre grandeur mesurable et nous considérons un corpuscule bien qu'avec des modifications de langage approprié les mêmes considérations puissent se transposer pour un système.

Comme exemple considérons le cas suivant. Dans l'état initial nous avons affaire à un corpuscule dont l'onde u extérieure (à laquelle l'onde statistique fictive Ψ doit être proportionnelle) est formée en général par une superposition de fonctions propres de l'opérateur hamiltonien. Tout processus de mesure de l'énergie doit aboutir à diviser le train d'ondes

(¹) Peut-être pourrait-on supposer que les corpuscules puissent échanger de l'énergie et de l'impulsion avec ce que nous nommons le « vide ».

initial en train d'ondes presque monochromatiques qui sont séparés dans l'espace et correspondent à une valeur bien définie de l'énergie.

Si $\Psi = \sum_k c_k \Psi_k$ représente le développement de l'onde Ψ dans l'état initial (et par suite de la partie extérieure de l'onde ψ à un facteur multiplicatif près), l'interprétation usuellement admise conduit à dire que dans cet état initial le corpuscule n'a pas une énergie bien déterminée, mais seulement des énergies possibles, chacune d'elles E_k ayant une probabilité $|c_k|^2$ de s'actualiser dans une mesure ultérieure de l'énergie. La théorie causale dira, au contraire, que dans l'état initial un corpuscule a un mouvement compliqué et une énergie continuellement variable. Le processus de mesure de l'énergie, en divisant le train d'ondes initial en trains d'ondes séparés dans l'espace et presque monochromatiques et en obligeant le corpuscule à rester *accroché* à l'un de ces trains d'ondes, impose au corpuscule d'avoir finalement une valeur déterminée de son énergie. Sans avoir à faire intervenir la division du train d'ondes, on pourrait se contenter de dire que le processus de mesure de l'énergie décroche la région singulière de son onde ψ primitive pour l'accrocher sur l'une des composantes monochromatiques de ψ .

Les deux interprétations rivales ne satisfont ni l'une, ni l'autre aux conditions d'une véritable conservation de l'énergie. Elles impliquent toutes les deux une intervention active du processus de mesure qui modifie complètement l'état du corpuscule conformément à une idée essentielle de la Physique quantique dont l'exactitude ne paraît pas douteuse. Dans la théorie de la double solution, l'intervention active de la mesure de l'énergie serait précisément *cet effet d'aiguillage de la région singulière, du doigt de gant, sur l'une des composantes monochromatiques de l'onde primitive de telle sorte que le corpuscule se trouvant finalement accroché à l'une des composantes monochromatiques se trouverait alors avoir une énergie constante* ⁽¹⁾.

(1) Mathématiquement cette idée d'aiguillage pourrait se traduire de la manière suivante :

Soit un corpuscule dont l'état initial correspond à l'onde Ψ normée $\Psi_0 = \sum_k c_k \varphi_k$ avec $\sum_k |c_k|^2 = 1$, les φ_k étant les fonctions propres de la grandeur à mesurer. Si, après la mesure, l'on apprend que la grandeur à mesurer a la valeur correspondant à l'indice l , l'on devra remplacer Ψ_0 par $\Psi_l = \varphi_l$. C'est l'aspect que prend ici la réduction du paquet de probabilité, opération subjective effectuée à la suite d'une information.

Au point de vue objectif de l'onde u , nous devons supposer que dans l'état initial

Des considérations analogues peuvent être développées sur d'autres exemples tels que le choc d'un corpuscule et d'un atome, chacun des deux constituants d'abord séparés ayant à l'origine un état représenté par une superposition de fonctions propres de leur hamiltonien individuel : dans tous les cas on retrouverait des conclusions semblables aux précédentes.

Il semble que l'interprétation offerte par la théorie de la double solution puisse être admise aussi bien que l'interprétation probabiliste usuelle : elle a même sur celle-ci l'avantage d'offrir à notre esprit une image claire « par figures et par mouvements » et d'échapper aux objections précédemment étudiées (chap. VII) qui ont pu être faites à l'interprétation usuelle. Toute la théorie de la mesure de M. von Neumann pourrait être reprise en se plaçant au point de vue de l'interprétation causale : il y aurait une étude intéressante à faire à ce sujet ⁽¹⁾.

7. Retour sur la question des états stationnaires et des transitions quantiques. — Comme nous l'avons dit, M. Schrödinger a très justement remarqué que l'état initial d'un système quantifié est, en général, non pas un état stationnaire, mais une superposition d'états stationnaires $(\Psi = \sum_k c_k \Psi_k)$, ce qui enlève à l'état stationnaire les prérogatives injustifiées qu'on lui attribue souvent depuis la théorie primitive de

Fonde u a en dehors de la région singulière la forme $u_0 = \frac{1}{C} \sum_k c_k \varphi_k$, C étant la constante

à valeur physique bien déterminée de la relation $\Psi = C\psi$. Le point de vue suggéré dans le texte conduit à dire que, pendant la mesure, le corpuscule s'est décroché de l'onde u_0 pour s'accrocher sur la composante d'indice l . L'implantation de la région singulière sur cette composante aurait pour conséquence qu'un processus objectif de durée finie liée à la non-linéarité ferait s'évanouir toutes les composantes autres que celle d'indice l et de renforcer celle-ci de telle sorte que finalement l'onde u aurait la forme $u_f = \frac{1}{C} \varphi_l$,

C étant toujours la même constante. Après la réduction du paquet de probabilité, la relation $\Psi = C\psi$ se trouverait donc finalement rétablie.

⁽¹⁾ Soit A une grandeur mesurable attachée à un corpuscule et φ_k les fonctions propres qui lui correspondent. Si l'état initial est une superposition de φ_k , la théorie de la double solution dira que la région singulière de l'onde u du corpuscule est initialement implantée sur l'onde $\psi = \sum_k c_k \varphi_k$. Elle ajoutera que, par suite des interactions liées à une mesure

de A , la région singulière se trouvera finalement implantée sur une onde ψ proportionnelle à l'un des φ_k . Dans la terminologie de M. von Neumann, on dira qu'il y a passage du « cas pur » initial au « mélange » final quand la région singulière se détachant de la superposition initiale est venue s'attacher à l'une de ses composantes *sans que l'on sache encore laquelle*.

Bohr. Et ceci est vrai aussi bien dans l'interprétation causale que dans l'interprétation usuelle avec cette différence que celle-ci considère l'état de l'atome comme impossible à décrire par un mouvement dans l'espace et comme correspondant à plusieurs valeurs possibles de l'énergie ayant des probabilités égales aux quantités $|c_k|^2$, alors que celle-là considère ce même état comme correspondant à un mouvement parfaitement déterminé au cours du temps, mais dont l'énergie varie continuellement.

L'émission d'un quantum de rayonnement par l'atome apparaît alors comme équivalent à un processus de mesure de l'énergie en ce sens qu'à la fin de l'émission, le photon émis est associé à un groupe d'ondes qui s'est séparé de l'atome quantifié et qu'en décelant ce photon on peut savoir dans quel état quantifié final se trouve l'atome et par suite lui attribuer une énergie définie et constante.

Le cas est donc analogue à ceux étudiés au paragraphe précédent. On peut en effet, bien que ce ne soit peut-être qu'une manière de parler, considérer l'atome dans son état initial comme équivalent à un système formé par l'atome et par un photon annihilé d'énergie nulle. On est donc ramené au cas d'un système formé initialement par un corpuscule d'énergie bien déterminée et par un atome dont l'état est représenté par une superposition d'ondes stationnaires. L'interprétation probabiliste nous dit alors que dans l'état initial le système a toute une série de valeurs E_k possibles pour son énergie, chacune ayant la probabilité $|c_k|^2$ et que dans l'état final, après une transition impossible à décrire par une image spatiotemporelle, il a pris un état stationnaire correspondant à l'une des énergies quantifiées E_i , le photon emportant une énergie égale à la différence $E_j - E_i$ de deux énergies quantifiées de l'atome : de ce point de vue, tout se passerait donc comme si l'atome avait d'abord choisi l'état stationnaire E_j parmi ceux de la superposition primitive, puis subi la transition $E_j \rightarrow E_i$ accompagnée de l'émission du photon.

Tout autre est naturellement le point de vue de l'interprétation causale. Pour elle, le mouvement initial des constituants de l'atome est en principe parfaitement descriptible à l'aide d'une image spatiotemporelle, mais il correspond à une énergie continuellement variable. Par une suite d'états successifs toujours descriptibles en principe par une image spatiotemporelle qui constituerait la transition quantique, le système parviendrait à un état final où le photon serait émis sous forme d'un groupe d'ondes séparé de l'atome, l'atome se trouvant alors dans un état final d'énergie quantifiée E_i et le photon possédant l'énergie $E_j - E_i$. Ici encore tout s'est passé finalement comme si l'atome avait choisi l'état quantifié E_j parmi ceux de la superposition primitive, puis

cédé au photon l'énergie $E_j - E_i$ avec conservation de l'énergie. Mais on aurait passé de l'état initial à l'état final par un mouvement bien défini permettant une description de la transition quantique en termes d'espace et de temps : d'après ce que nous avons vu précédemment, ce mouvement s'opérerait d'ailleurs sans conservation de l'énergie, cette conservation n'ayant lieu que statistiquement en moyenne pour un très grand nombre de processus analogues correspondant à des valeurs initiales diverses pour la position des constituants du système.

Plaçons-nous dans le cas où l'on peut attribuer l'émission du photon au changement d'état d'un seul électron intraatomique comme c'est le cas pour l'atome d'hydrogène. Alors dans l'état initial la région singulière qui constitue l'électron atomique se trouve accrochée sur une onde ν qui correspond à une superposition d'ondes stationnaires : le départ du photon après une période de mouvement troublé aura eu pour effet de décrocher l'électron de l'onde ν initiale pour l'accrocher sur l'une de ses composantes monochromatiques, ce qui aura rendu son énergie constante. Nous retrouvons ici une image employée au paragraphe précédent.

Nous devons maintenant insister sur un point qui a une très grande importance. Dans l'état actuel de la théorie, on évalue les probabilités des processus de transitions quantiques par une méthode de calcul, naguère suggérée par le principe de correspondance, en représentant l'action de la matière sur le champ électromagnétique par des expressions où figure le champ électromagnétique de la théorie classique des ondes électromagnétiques de Maxwell-Lorentz et où les éléments électrisés de la matière (les électrons intraatomiques) interviennent par l'intermédiaire du quadrivecteur courant-densité défini à partir de l'onde Ψ de l'atome. On a remarqué depuis près de 30 ans qu'il y a là une sorte de contradiction avec la façon dont on écrit l'équation des ondes à l'intérieur de l'atome car dans cette équation on fait figurer les potentiels coulombiens d'interaction entre les particules chargées, ce qui revient à les regarder comme ponctuelles et bien localisées dans l'atome. Donc, d'une part, pour obtenir la forme de l'onde Ψ , on considère les électrons comme bien localisés dans l'atome et, d'autre part, pour calculer l'interaction avec le rayonnement, on considère ces mêmes électrons comme dilués dans l'atome avec la densité statistique $|\Psi|^2$. Cette contradiction flagrante ne peut guère s'expliquer qu'en adoptant la conclusion suivante : toute la théorie actuelle des interactions entre matière et rayonnement et la prévision des probabilités de transition qui en découle n'ont qu'une valeur statistique, elles permettent de

prévoir exactement les phénomènes globaux d'émission, d'absorption, de diffusion, etc., mais ne fournissent aucune description exacte des phénomènes individuels. La théorie purement probabiliste actuelle se tire de la difficulté en niant, semble-t-il, l'existence même des phénomènes individuels; mais, outre que ce point de vue me paraît assez difficile à admettre, il me semble aussi en contradiction de l'emploi du potentiel coulombien pour la représentation des interactions.

Une autre raison me pousse à croire que la théorie actuelle des interactions entre matière et rayonnement n'a qu'une valeur statistique, c'est que le champ électromagnétique classique n'est sans aucun doute rien d'autre que l'onde Ψ a plusieurs composantes de cette particule de spin 1 qu'est le photon. Ceci ressort clairement de la théorie générale des particules à spin, en particulier sous la forme de la théorie de la fusion que nous lui avons donnée ⁽¹⁾. Dans la théorie de la double solution, l'onde Ψ , n'étant que fictive et statistique, ne peut pas conduire à une description réelle et individuelle des phénomènes, bien qu'elle puisse naturellement fournir des prévisions statistiques exactes. La théorie causale conduit donc à penser que la véritable description du champ électromagnétique et de ses interactions avec les particules électrisées doit faire intervenir non pas l'onde Ψ des photons, c'est-à-dire l'onde électromagnétique classique, mais bien leur onde u , c'est-à-dire *un champ électromagnétique avec régions singulières*.

Il est évidemment très difficile à l'heure actuelle d'imaginer comment on devrait décrire l'interaction entre l'onde u des électrons et l'onde u des photons (qui, étant des bosons, peuvent se grouper à plusieurs sur une même onde) pour obtenir une description réellement individuelle des phénomènes d'émission, d'absorption, de diffusion, etc. Pour y parvenir d'une façon satisfaisante, il faudrait sans doute d'abord arriver à se représenter, comme je l'ai proposé dans ma théorie de la fusion, les particules de spin différent de $\frac{1}{2}$ comme des particules pouvant résulter de la fusion de constituants de spin $\frac{1}{2}$, ce qui doit se traduire dans le langage de la double solution en disant que leur région singulière est formée par la confluence de plusieurs régions singulières qui viennent se fondre en une seule de symétrie généralement différente. Le phénomène inverse de la dissociation d'une particule en plusieurs autres particules devrait alors être représenté par une fragmentation de la

⁽¹⁾ Voir *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*, 2^e éd., Gauthier-Villars, 1954.

région singulière en plusieurs régions singulières; d'après les données actuelles sur les particules, elles semblent pouvoir « se transformer, pour ainsi dire à volonté, les unes dans les autres pourvu que le processus soit compatible avec les lois de conservation » (en particulier de la masse de la charge et du spin) ⁽¹⁾ et ce fait paraît indiquer que la fragmentation en question doit pouvoir s'effectuer de plusieurs manières. Avec ces conceptions, il devrait être possible d'interpréter l'émission et l'absorption des photons, la création et l'annihilation des paires d'électrons et plus généralement tout l'ensemble des phénomènes de ce genre que l'on rencontre maintenant constamment dans la nouvelle Physique des nucléons et des mésons. Par cette voie et en passant par l'intermédiaire du formalisme de seconde quantification, on devrait pouvoir retrouver, tout au moins à titre de représentation statistique moyenne, la théorie quantique des champs avec ces nombres d'occupation variables. Peut-être parviendrait-on ainsi à comprendre la véritable signification de ces méthodes de calcul qui, à l'heure actuelle, font plutôt figure de « recettes » pour des prévisions que de véritables théories explicatives.

Ces problèmes sont assurément très difficiles et il semble prématuré de les aborder dans l'état actuel de la théorie de la double solution. Mais difficile ne veut pas dire impossible et ce qui est insoluble aujourd'hui peut être résolu demain.

(¹) W. HEISENBERG, *La Physique de noyau atomique*, Albin Michel, 1954, p. 55.

CHAPITRE XX.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

1. Vue d'ensemble sur les résultats obtenus. — Si nous cherchons maintenant à résumer le contenu de la seconde partie de cet Ouvrage, nous pouvons dire que les chapitres VIII à XVI inclus contiennent un exposé d'idées qui se trouvaient déjà dans mes travaux de 1927, mais complétées par de nouvelles recherches. Les questions traitées dans ces chapitres nous paraissent dans l'ensemble à peu près bien posées. Il y aurait cependant à consolider le passage de la Mécanique ondulatoire du corpuscule unique dans un champ donné à la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules en interaction, à la compléter par une interprétation détaillée du principe de Pauli et aussi à rendre plus rigoureuse la justification du rôle statistique du $|\Psi|^2$. Bien qu'il y ait évidemment encore beaucoup de travail à faire dans ces directions, je n'ai pas l'impression qu'il existe de ce côté des difficultés insurmontables.

Beaucoup plus délicats sont les problèmes abordés dans les chapitres XVII, XVIII et XIX. La relation établie entre la forme extérieure (ou partie régulière e) de l'onde u et la forme de l'onde Ψ me paraît tout à fait essentielle pour pouvoir concilier la conception des ondes u avec les succès de l'interprétation actuelle, mais il nous a fallu essayer de rendre cette liaison assez souple pour ne pas faire participer l'onde u qui est, par hypothèse, une réalité objective, au caractère subjectif de l'onde statistique Ψ . L'étude des difficultés qui se présentent dans le cas des groupes d'ondes, dans celui des miroirs semi-transparents et plus généralement lors de la réduction des paquets de probabilité, difficultés, où intervient certainement l'existence souvent passée sous silence des fronts d'ondes, nous a conduit à des idées intéressantes, mais audacieuses, qui ne sont encore, nous devons l'avouer, que des suggestions. Leur développement rigoureux exigerait

des considérations mathématiques difficiles et ne serait même possible que si l'on parvenait, peut-être par des analogies avec la Relativité généralisée comme l'espère M. Vigier, à préciser la forme des équations de propagation non linéaires satisfaites par les ondes u . Enfin la question de la conservation de l'énergie et l'ensemble des considérations exposées au chapitre XIX demanderaient à être soigneusement approfondies.

Une des idées essentielles auxquelles nous sommes parvenu, nous paraît être la suivante : « la théorie usuelle, en se bornant *a priori* à des équations de propagation linéaires, fait disparaître les accidents locaux dus à la non-linéarité (tels que régions singulières et bords de trains d'ondes), elle efface ainsi les structures corpusculaires et, par suite, n'obtient plus qu'une image continue à caractère statistique; la possibilité d'obtenir ainsi une image statistique adéquate est due au fait que la partie régulière de l'onde u se trouve être, par sa forme analytique, étroitement apparentée à la forme usuellement admise pour l'onde Ψ , du moins avec les réserves que nous avons précisées ».

2. Analogie des conceptions de la théorie de la double solution avec des idées plus anciennes. — Il est curieux de remarquer que le développement de la théorie de la double solution nous a conduit à retrouver, sous des formes parfois un peu modifiées, des idées qui avaient été suggérées par divers auteurs au cours de la crise provoquée en Physique théorique par l'apparition des quanta.

Dès ses premiers travaux sur les quanta de lumière, M. Einstein avait insisté sur le fait que l'onde lumineuse (qui est, nous le savons aujourd'hui, l'onde Ψ associée au photon) était une sorte d'onde « fantôme » qui donnait seulement une description statistique de la répartition des photons; si l'on admet l'existence d'une réalité objective, cette manière de voir conduit à penser que les photons doivent être des sortes de singularités du véritable champ lumineux, l'onde lumineuse continue classique ne fournissant qu'une représentation statistique. Or, c'est précisément là l'idée qui a servi de base à la théorie de la double solution.

Plus tard, Einstein, méditant sur la dualité onde-corpuscule et sur le succès de l'interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire, a été conduit à penser que la probabilité de présence $|\Psi|^2$ devait résulter d'une sorte de mouvement caché des corpuscules à caractère brownien. Nous avons vu que la « loi du guidage » conduit en général à des mouvements corpusculaires très compliqués qui cepen-

dant ne peuvent être qualifiés de browniens. Mais nous avons vu aussi que les fluctuations inévitables des potentiels extérieurs ainsi que les fluctuations des conditions aux limites provoquant celles des potentiels quantiques doivent ajouter à la complexité des mouvements prévus par la loi du guidage et leur donner un caractère aléatoire qui permet de les qualifier de brownoides. L'image ainsi obtenue apparaît comme très voisine de celle qu'envisageait Einstein.

Les conceptions introduites dans les chapitres XVII et XVIII sont aussi à rapprocher de certaines remarques anciennes. M. Schrödinger avait pensé, au début de ses fameuses recherches, à obtenir une image du corpuscule en l'assimilant à un train d'ondes Ψ , mais la tendance constante des trains d'ondes à l'étalement, liée au caractère linéaire de leur propagation, ne permettait cependant pas de chercher ainsi à identifier le corpuscule avec l'ensemble d'un train d'ondes Ψ . Les idées que nous avons développées dans les derniers chapitres nous ont amené à nous figurer le phénomène ondulatoire dont le corpuscule serait le centre comme une sorte de « cellule » au sens biologique formée : 1° d'un noyau central qui serait la région singulière ou corpuscule au sens étroit du mot; 2° d'une région extérieure étendue (où $u \simeq C\Psi$) et 3° d'une sorte d'enveloppe constituée par des fronts d'ondes aux propriétés peut-être non linéaires. Cette sorte de cellule devrait dans l'ensemble son autonomie et sa stabilité à l'intervention de phénomènes non linéaires. L'ensemble de l'entité « corpuscule » au sens large du mot serait ainsi assimilable à un train d'ondes organisé autour d'un centre, solidaire de lui et doué d'une certaine permanence. On retrouverait donc, sous une forme convenablement modifiée, l'idée primitive de M. Schrödinger.

Nous avons vu aussi que la validité de la relation $\Psi = Cu$ dans la région extérieure des trains d'onde apportait une sorte de justification de la théorie de l'onde-pilote (malgré le caractère essentiellement différent des ondes u et Ψ , l'une objective et l'autre subjective) et, sans permettre de qualifier l'onde Ψ de réalité physique, expliquait le succès du point de vue de M. Bohm.

Enfin, en examinant le problème de l'émission de corpuscules par une source et la représentation de ce phénomène par une onde sphérique divergente, nous avons reconnu que l'onde sphérique divergente pourrait n'être qu'une représentation moyenne de l'émission isotrope par la source de trains d'ondes organisés du type dont nous venons de parler. On se rapprocherait ainsi de la conception du rayonnement en aiguille (nadelstrahlung) développée autrefois

par M. Einstein suivant laquelle une source ponctuelle enverrait dans toutes les directions des trains d'ondes limités.

Cet ensemble de rapprochements montre que la théorie causale de la double solution pourrait servir à faire une synthèse de diverses tentatives anciennes faites pour représenter d'une façon concrète le dualisme onde-corpuscule.

3. Possibilités de vérifications expérimentales. — Pour que la théorie causale puisse vraiment s'imposer, il faudrait non seulement qu'elle permette de lever les objections opposées à l'interprétation purement probabiliste (ce qu'elle semble dès maintenant faire en grande partie), mais aussi qu'elle conduise à prévoir des phénomènes constatables que l'interprétation actuelle ne prévoit pas. Sans pouvoir affirmer qu'il en sera ainsi, nous pouvons cependant préciser dans quelles directions l'on pourrait chercher de telles confirmations.

Tout d'abord, dans le domaine de la Physique du noyau, où les théories sont encore actuellement assez embryonnaires et assez peu couronnées de succès, le fait que dans un espace dont les dimensions sont seulement de l'ordre de 10^{-12} cm se trouveraient entassées, suivant les conceptions de la double solution un grand nombre de régions singulières permettrait de penser que l'interprétation usuelle pourrait là se trouver en défaut. En effet, au point de vue de la théorie de la double solution, la justification de l'interprétation usuelle du rôle des ondes Ψ repose sur l'hypothèse que les régions singulières sont à des distances mutuelles qui sont grandes par rapport à leurs dimensions, c'est-à-dire qu'elles ne doivent aucunement empiéter les unes sur les autres. Cette condition pourrait fort bien ne pas se trouver toujours réalisée dans les noyaux et alors les prévisions basées sur les propriétés statistiques de l'onde Ψ pourraient se trouver en défaut : une description du noyau d'un genre nouveau à l'aide d'ondes u à régions singulières très rapprochées ou même empiétant les unes sur les autres pourrait permettre de prévoir correctement certains phénomènes nucléaires.

Nous avons noté (chap. XI, § 6) que la démonstration de la formule du guidage implique l'hypothèse que la phase commune des ondes u et Ψ a la même valeur sur toute la sphère S dont nous avons entouré la région singulière. Or, cette hypothèse cesserait nécessairement d'être exacte pour des particules ayant des énergies suffisamment élevées et alors la signification statistique du Ψ , qui dans la théorie de la double solution dérive de la formule du guidage, pourrait ne plus être valable.

Comme les progrès de la technique expérimentale permettent d'obtenir des particules d'énergies de plus en plus grandes, on peut penser qu'il arrivera un moment où les prévisions faites à l'aide de la fonction Ψ par l'interprétation actuelle cesseront d'être valables. Il faudrait alors chercher à voir ce qui se passe pour la propagation des ondes u quand leur longueur d'onde devient de l'ordre des dimensions de la région singulière, ce qui devrait permettre une prévision des phénomènes observables au-delà de la limite de validité de l'usage des ondes Ψ .

S'il existe, suivant les conceptions indiquées au chapitre XVIII, des groupes d'ondes sans étalement, il se pourrait aussi que quelques-unes des propriétés usuellement attribuées aux groupes d'ondes par la théorie linéaire ne soient pas exactes et qu'il en résulte quelques faits observables non conformes aux prévisions usuelles tels qu'une limitation de la finesse des raies que l'on pourrait isoler en prélevant un petit intervalle spectral dans un fond continu.

Une autre voie de vérifications pour la théorie de la double solution devrait s'ouvrir du côté des particules de l'échelle atomique. On sait qu'actuellement cette théorie se heurte à de graves difficultés, notamment celle des énergies propres infinies. Une description des particules élémentaires qui les identifierait avec une région singulière du champ u dans le cadre spatiotemporel permettrait de retrouver la notion de « rayon » de la particule (rayon de l'électron par exemple) et d'éviter ainsi l'écueil des énergies propres infinies. On pourrait sans doute aussi, peut-être en faisant intervenir l'idée de fusion, ramener les propriétés des particules, telles que spin, moment magnétique ou même masse, à des différences de structure correspondant à des différences de forme de l'onde u à l'intérieur de la région singulière. Si ces espoirs étaient justifiés, on pourrait parvenir par cette voie à une description et à une classification naturelle des particules que la découverte incessante de nouvelles sortes de mésons rend chaque jour plus désirable. Assurément ce n'est là qu'un programme rendu de toute façon très difficile à exécuter par l'ignorance où nous sommes de ce qui peut se passer exactement à l'intérieur des régions singulières. Néanmoins il n'est pas interdit d'espérer que la théorie causale, en nous permettant de représenter les propriétés des particules dans un cadre spatiotemporel, nous fournisse un jour une théorie réellement claire et explicative des propriétés des particules : au contraire, la chose paraît irréalisable dans le cadre de l'interprétation probabiliste actuelle car celle-ci ne dispose comme instrument de description que d'une onde Ψ à caractère statistique et subjectif et de formalismes

abstraits et également statistiques comme ceux de la seconde quantification et de la théorie quantique des champs. Dans le cadre d'une future théorie des particules, des vérifications expérimentales de la théorie de la double solution apparaissent donc comme possibles.

4. Raccord de la théorie de la double solution avec la Relativité généralisée ⁽¹⁾. — L'analogie de la formule du guidage avec les démonstrations de MM. Georges Darmon et Einstein en Relativité généralisée porte à croire qu'il existe entre les deux points de vue une parenté profonde. M. Vigier a poursuivi avec beaucoup d'ardeur le développement de cette analogie en cherchant à introduire les fonctions d'onde u dans le cadre d'un espace-temps convenablement défini. Je ne me prononcerai pas sur la valeur des tentatives de M. Vigier qui pourraient sans doute être modifiées de diverses manières. Mais il est certain que des tentatives de ce genre présentent un grand intérêt parce qu'elles pourraient conduire à une unification des idées de la Relativité généralisée avec celles des quanta.

Le but à atteindre serait de se représenter chaque type de corpuscule (*y compris le photon*) comme une région singulière dans un champ ondulatoire u convenablement incorporé à la structure de l'espace-temps : dans cette représentation devrait s'introduire la constante de Planck d'une façon qui viendrait nous éclairer sur la véritable signification du quantum d'action. La manière même dont serait définie l'onde u de chaque type de corpuscule pourrait conduire à trouver la forme des équations non linéaires satisfaites par cette onde u (ou par ses composantes quand elle en a plusieurs) : on obtiendrait ainsi l'une des données essentielles qui seraient nécessaires pour un développement complet de la théorie de la double solution sous la forme que nous avons adoptée.

Cette manière de définir les corpuscules par une petite région où un certain champ, obéissant à des équations aux dérivées partielles non linéaires, présente des valeurs très élevées est tout à fait conforme aux conceptions que M. Einstein a toujours développées à ce sujet. Il a écrit en effet : « Pourtant, ce qui me paraît certain, c'est qu'il ne faut pas qu'il y ait dans les fondements d'une théorie consistante du champ un concept quelconque concernant les particules. Toute la théorie doit être basée uniquement sur des équations différentielles partielles et leurs solutions sans singularité » et plus loin : « Si une théorie du champ

(1) Pour cette question, on pourra se reporter à la Thèse de M. Vigier.

aboutit à une représentation des corpuscules libre de singularité, alors le comportement de ces corpuscules dans le temps est uniquement déterminé par les équations différentielles du champ » ⁽¹⁾. Soulignons que, dans la région que nous nommons singulière, la fonction u doit présenter de très grandes valeurs, mais sans doute pas une véritable singularité mathématique, ce qui est en accord avec les conceptions de M. Einstein. Le théorème du guidage correspond d'ailleurs exactement à la dernière phrase citée plus haut.

M. Einstein a qualifié les champs avec fortes concentrations locales qu'il pense devoir être la véritable représentation des corpuscules de « champs à bosses ⁽¹⁾ ». Dans notre conception les ondes u sont bien des champs ondulatoires à bosses.

Réalisant un espoir maintes fois exprimé par le génial physicien qui découvrit la même année la Relativité et les quanta de lumière, la théorie des ondes u aidera peut-être un jour à réaliser une magnifique synthèse de la Relativité généralisée et des Quanta.

⁽¹⁾ Albert EINSTEIN, *Conceptions scientifiques, morales et sociales*, Flammarion, 1952, p. 86 et 103.

⁽¹⁾ Bunch-like.



APPENDICE.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DU GUIDAGE.

Un travail récent de M. Gérard Petiau [14] nous a suggéré une nouvelle démonstration de la formule du guidage s'appuyant sur la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre [15].

Partant de l'équation de Klein-Gordon comme nous l'avons fait au chapitre IX, nous obtenons comme équation de continuité de la solution régulière $a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$,

$$(1) \quad \frac{\partial a}{\partial t} + A(x, y, z, t) \frac{\partial a}{\partial x} + B(x, y, z, t) \frac{\partial a}{\partial y} + C(x, y, z, t) \frac{\partial a}{\partial z} + D(x, y, z, t) a = 0,$$

avec

$$(2) \quad A = -c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_x}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V};$$

$$B = -c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_y}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}; \quad C = -c^2 \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{c} \Lambda_z}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}; \quad D = \frac{c^2}{2} \frac{\square \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}.$$

Si la phase φ est connue, on connaît A, B, C, D.

Pour la solution singulière $u = f e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi}$ de même phase φ , nous obtenons la même équation de continuité (1), mais où l'amplitude à singularité f remplace l'amplitude continue a .

Les équations différentielles correspondant à l'équation aux dérivées partielles (1) sont

$$(3) \quad dt = \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} = -\frac{da}{Da}.$$

Les trois premières équations (3) admettent trois intégrales premières

$$(4) \quad f_1(x, y, z, t) = \lambda, \quad f_2(x, y, z, t) = \mu, \quad f_3(x, y, z, t) = \nu,$$

qui, pour des valeurs constantes de λ , μ , ν , définissent des lignes de courant dans l'espace-temps correspondant, on le voit aisément, à la formule du guidage [sous la forme générale (36) du chapitre IX].

Mais nous devons en outre considérer la relation $\frac{da}{a} = -D(x, y, z, t)dt$.

Or, les variables x, y, z peuvent s'exprimer, à l'aide de (4), en fonction de λ, μ, ν et t , de sorte que $D(x, y, z, t) = F(\lambda, \mu, \nu, t)$. Le long d'une ligne de courant, λ, μ, ν étant constants, on a

$$(5) \quad \log a = \int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) \quad \text{ou} \quad a = \alpha e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt}$$

α étant une constante et l'intégration sur t étant effectuée à λ, μ, ν constants. La même expression (5) est valable pour f , puisque la phase φ est la même pour la solution régulière et pour la solution singulière.

La théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre nous apprend que la solution générale de (1) s'obtient en écrivant $\alpha = \Phi(\lambda, \mu, \nu)$ où Φ est une fonction arbitraire. Nous aurons donc comme forme commune pour a et pour f :

$$(6) \quad \frac{a}{f} = e^{\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi(\lambda, \mu, \nu),$$

le premier facteur du second membre étant le même pour a et pour f , mais la fonction Φ étant différente dans les deux cas. Comme a est par définition une fonction régulière, le premier facteur ne peut pas présenter de singularité, sans quoi il n'existerait pas de solution régulière correspondant à la forme adoptée pour φ , ce qui serait contraire à l'hypothèse. Par suite, f ne peut présenter une singularité au point x_0, y_0, z_0 de l'espace au temps t_0 que si la fonction Φ correspondante présente une singularité pour les valeurs

$$\lambda_0 = f_1(x_0, y_0, z_0, t_0), \quad \mu_0 = f_2(x_0, y_0, z_0, t_0), \quad \nu_0 = f_3(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

de λ, μ, ν . Mais alors la fonction f présente dans l'espace-temps une ligne singulière définie par $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \nu = \nu_0$; d'où le théorème :

S'il existe une solution u de l'équation linéaire des ondes présentant une singularité et ayant la même phase φ qu'une solution régulière v de la même équation, le point singulier de u est animé au cours du temps du mouvement prévu par la formule du guidage.

La démonstration donnée ci-dessus dans le cas de l'équation d'ondes de Klein-Gordon peut être présentée sous une forme plus générale applicable à toutes les équations d'ondes que l'on rencontre actuellement en Mécanique ondulatoire et en particulier aux équations de Dirac. Cette forme générale de la démonstration a l'avantage de mieux faire ressortir la véritable nature du résultat obtenu.

Toutes les équations d'ondes de la Mécanique ondulatoire permettent d'obtenir une image hydrodynamique en définissant une densité ρ et une densité de courant $\rho \vec{v}$ qui s'expriment bilinéairement à l'aide de la fonction d'onde et de sa conjuguée et qui obéissent à l'équation de continuité

$$(7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Supposons que l'équation d'ondes considérée admette deux solutions « couplées », l'une régulière Ψ , l'autre à singularité ponctuelle mobile u et que ces deux solutions aient les mêmes lignes de courant définies par un même champ de vecteurs \vec{v} . Pour la solution Ψ , la densité $\rho(\Psi)$ est régulière; pour la solution u la densité $\rho(u)$ présente une singularité ponctuelle. On peut écrire à la fois pour $\rho(\Psi)$ et pour $\rho(u)$

$$(8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

A cette équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre en ρ , correspondent les équations différentielles

$$(9) \quad dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = - \frac{d\rho}{\rho \operatorname{div} \vec{v}}.$$

Les trois premières équations admettent les intégrales :

$$(19) \quad f_1(x, y, z, t) = \lambda, \quad f_2(x, y, z, t) = \mu, \quad f_3(x, y, z, t) = \nu$$

qui, pour des valeurs constantes de λ , μ , ν , définissent une ligne de courant dans l'espace-temps. Posons $\operatorname{div} \vec{v} = F(\lambda, \mu, \nu, t)$; nous trouvons comme plus haut

$$(11) \quad \begin{cases} \rho(\Psi) = e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi_1(\lambda, \mu, \nu), \\ \rho(u) = e^{-\int^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi_2(\lambda, \mu, \nu), \end{cases}$$

les fonctions Φ_1 et Φ_2 n'étant pas déterminées par l'intégration. Le premier facteur étant le même dans les deux expressions (11), il doit

être régulier et par suite la fonction Φ_2 doit à l'instant initial présenter une singularité pour les valeurs $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$. Il en résulte comme précédemment que la singularité ponctuelle de u doit suivre une des lignes de courant.

Appliqué aux équations de Dirac, ce résultat montre bien que le guidage doit en ce cas être défini à l'aide du quadri-vecteur courant comme nous l'avions fait au Chapitre XVI.

Nous sommes ainsi parvenu à l'énoncé général suivant : « *Si une équation d'ondes de la Mécanique ondulatoire admet deux solutions, l'une régulière, l'autre à singularité ponctuelle, possédant les mêmes lignes de courant, la singularité doit au cours du temps suivre l'une des lignes de courant* ».

Remarquons que la démonstration précédente subsiste si l'onde u , au lieu de présenter une véritable singularité ponctuelle, présente une très petite région singulière où elle prend des valeurs très élevées. En effet, Φ_2 doit alors prendre des valeurs très élevées pour λ , μ , ν , très voisins de λ_0 , μ_0 , ν_0 et le mouvement de la région singulière doit être représenté par un tube d'univers extrêmement délié dont l'axe coïncide avec une ligne de courant.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 447; t. 184, 1927, p. 273; t. 185, 1927, p. 380; *J. Phys. Rad.*, 6^e série, t. 8, 1927, p. 225.
- [2] Louis de BROGLIE, *Électrons et photons (Rapport au V^e Conseil de Physique Soley)*, Gauthier-Villars, 1930, p. 115; *Introduction à l'étude de la Mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1930 (traduction anglaise, Méthuen, Londres).
- [3] David BOHM, *Phys. Rev.*, t. 83, 1952, p. 166 et 180.
- [4] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 641.
- [5] TAKEHITO TAKABAYASI, *Prog. théor. Phys.*, t. 8, 1952, p. 143; t. 9, 1953, p. 187.
- [6] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 265.
- [7] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1345; t. 235, 1952, p. 1453.
- [8] David BOHM, *Phys. Rev.*, t. 89, 1953, p. 1458.
- [9] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 557.
Jean-Pierre VIGIER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 235, 1952, p. 1107.
- [10] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1453.
- [11] Louis de BROGLIE (en collaboration avec J. P. Vigier), *La Physique quantique restera-t-elle indéterministe?*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [12] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 441.
- [13] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927, p. 1118.
- [14] Gérard PETIAU, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 344.
- [15] Louis de BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 737; t. 241, 1955, p. 345.
- [16] D. BOHM et J. P. VIGIER, *Phys. Rev.*, t. 96, 1954, p. 208.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE	V

PREMIÈRE PARTIE.

Les idées de base de la Mécanique ondulatoire et son interprétation probabiliste usuelle.

CHAPITRE I.

LES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Point de départ.....	3
2. Premiers développements de la Mécanique ondulatoire.....	6

CHAPITRE II.

ACCÈS A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE PAR LA MÉTHODE D'HAMILTON (ANALOGIE DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE AVEC L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE).

1. Mécanique classique du point matériel. Théorème de Jacobi.....	8
2. Propagation des ondes dans un milieu isotrope. Approximation de l'Optique géométrique.....	12
3. Passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire.....	15
4. Équation générale de la Mécanique ondulatoire du corpuscule.....	18
5. Procédé automatique permettant de retrouver l'équation des ondes.....	19
6. Théorème de la vitesse de groupe. Raccord avec la Mécanique classique.....	20
7. Équation de propagation de la Mécanique ondulatoire relativiste à un Ψ	24

CHAPITRE III.

PREMIERS PRINCIPES RELATIFS A L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DES ONDES Ψ .

1. Le grand problème de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire.....	27
2. Principe de localisation ou principe des interférences.....	28
3. Énoncé précis du principe des interférences. Fluide de probabilité.....	30
4. Les relations d'incertitude d'Heisenberg.....	31
5. Le principe de décomposition spectrale (Born).....	33
6. Commentaire des résultats précédents.....	34
7. Transposition relativiste de la théorie du fluide de probabilité.....	36

CHAPITRE IV.

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES.

	Pages.
1. L'ancienne dynamique des systèmes de points matériels.....	38
2. Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules.....	40
3. Interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules.....	42
4. Systèmes de corpuscules de même nature physique.....	44
5. Remarques sur la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules.....	46

CHAPITRE V.

VUE GÉNÉRALE SUR L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Idées générales.....	47
3. Analyse du rôle des opérations de mesure en Physique quantique.....	49
3. Formalisme général de l'interprétation probabiliste.....	50

CHAPITRE VI.

DIVERS ASPECTS DE L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Notion de superposition.....	54
2. Équivalence des représentations. Théorie des transformations.....	55
3. Mécanique ondulatoire et Mécanique quantique.....	58
4. Notion de complémentarité (Bohr).....	60
5. Réduction du paquet de probabilité par la mesure.....	61
6. L'interférence des probabilités.....	62
7. Théorème de M. von Neumann.....	66

CHAPITRE VII.

OBJECTIONS OPPOSÉES À L'INTERPRÉTATION PUREMENT PROBABILISTE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE.

1. Conséquences de la disparition de la notion de trajectoire.....	70
2. Objection de M. Einstein au Conseil Solvay de 1927.....	72
3. L'exemple de MM. <i>Einstein, Podolsky et Rosen</i>	74
4. Objection relative aux systèmes corrélés (Schrödinger).....	77
5. Diverses objections de M. Einstein.....	80
6. Conclusion.....	83

DEUXIÈME PARTIE.

La théorie de la double solution.

CHAPITRE VIII.

INTRODUCTION ET PROGRAMME.

1. Historique de la théorie de la double solution.....	85
2. Problèmes qui vont être traités dans les chapitres suivants.....	89

CHAPITRE IX.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION.

	Pages.
1. Idées générales.....	94
2. Principe de la double solution.....	95
3. Cas du mouvement rectiligne uniforme.....	96
4. Interprétation de l'onde Ψ dans le cas du mouvement rectiligne uniforme.....	98
5. Étude du cas des champs constants. Les équations (J) et (C).....	100
6. La formule du guidage.....	101
7. Introduction de l'onde Ψ : sa signification statistique.....	104
8. Formule du guidage et théorie de l'onde-pilote.....	106
9. Étude du cas général des champs non permanents.....	107

CHAPITRE X.

LA DYNAMIQUE DES CORPUSCULES EN THÉORIE CAUSALE.

1. Équations de Lagrange et de Hamilton.....	111
2. Formalisme relativiste de la Dynamique précédente.....	113
3. Le « potentiel quantique » et son interprétation.....	115

CHAPITRE XI.

QUELQUES CONSÉQUENCES DE LA FORMULE DU GUIDAGE.

1. Les états stationnaires de l'atome d'hydrogène.....	119
2. Les interférences au voisinage d'un miroir (franges de Wiener).....	123
a. Miroir parfaitement réfléchissant.....	123
b. Miroir imparfaitement réfléchissant.....	125
c. Apparition de vitesses supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide.....	125
3. Une objection récente de M. Einstein contre la formule du guidage.....	131

CHAPITRE XII.

PASSAGE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU CORPUSCULE UNIQUE
À LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES.

1. Nature du problème dans la théorie causale.....	134
2. Raisonnement du Mémoire de 1927.....	136
3. Autre manière d'attaquer la question.....	142
4. Comparaison du mouvement relatif de deux corpuscules en interaction avec la représentation du mouvement de ce système dans l'espace de configuration.....	146
a. Approximation de l'Optique géométrique.....	146
b. Étude du même problème en dehors des limites de l'Optique géométrique.....	151
5. Cas des particules de même nature physique.....	154

CHAPITRE XIII.

LA SIGNIFICATION PROBABILISTE DE $|\Psi|^2$ ET SA JUSTIFICATION.

1. Retour sur le raisonnement de 1927.....	158
2. Comparaison avec le théorème de Liouville et la théorie ergodique.....	160
3. Bref résumé du Mémoire de M. Bohm de janvier 1953.....	164
4. Remarques complémentaires.....	166

CHAPITRE XIV.

L'OBJECTION DE M. PAULI A LA THÉORIE DE L'ONDE-PILOTE.

	Pages.
1. Discussion de la théorie de l'onde-pilote au Conseil Solvay d'octobre 1927.....	168
2. Choc d'un corpuscule et d'un rotateur-plan d'après M. Fermi.....	169
3. Objection de M. Pauli contre la formule du guidage.....	174
4. Abandon des tentatives d'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire après 1927.....	176

CHAPITRE XV.

LA THÉORIE DE LA MESURE D'APRÈS M. DAVID BOHM
ET LE SCHÉMA STATISTIQUE DE LA THÉORIE CAUSALE.

1. Les Mémoires de M. Bohm de janvier 1952.....	180
2. La théorie de la mesure d'après M. Bohm.....	182
3. Schéma statistique de la théorie causale.....	188
4. Une remarque de M. Takabayasi sur les moments des distributions de probabilité.....	189
5. Examen d'une remarque de M. Bohr sur la collision d'un corpuscule avec un atome.....	191

CHAPITRE XVI.

EXTENSION DES IDÉES DE LA DOUBLE SOLUTION A LA THÉORIE DE DIRAC.

1. Introduction.....	194
2. Résumé de la théorie de l'électron de Dirac.....	194
3. Guidage du corpuscule en théorie de Dirac.....	198
4. Introduction de l'idée de double solution en théorie de Dirac.....	203
5. Conséquences des formules obtenues.....	206

CHAPITRE XVII.

LA STRUCTURE DE L'ONDE u ET SES RELATIONS AVEC L'ONDE Ψ .

1. Difficulté de prouver l'existence et de trouver la forme de l'onde u	210
2. Un théorème sur les fonctions de Green de l'équation des ondes.....	213
3. Introduction d'une équation non linéaire pour u	215
4. Difficulté de préciser exactement les relations entre l'onde u et l'onde Ψ	218
5. La forme extérieure de l'onde u . Cas des états stationnaires avec corpuscule immobile.....	222
6. Illustration par un exemple de la décomposition extérieure de l'onde u	226
7. Extensions diverses des idées précédentes.....	230
8. Extension à la théorie de Dirac.....	234
9. Remarques sur la concordance des phases et sur le guidage des corpuscules...	235
10. Avantages des conceptions précédentes. Difficultés qui subsistent.....	237

CHAPITRE XVIII.

LES TRAINS D'ONDES ET LA RÉDUCTION DES PAQUETS DE PROBABILITÉ.

1. Difficulté provenant de l'étalement spontané des trains d'ondes.....	238
2. La non-linéarité de l'équation des ondes pourrait permettre d'imaginer des groupes d'ondes sans étalement.....	241

TABLE DES MATIÈRES.

297

	Pages.
3. Affaiblissement de la liaison jusqu'ici admise entre onde u et onde Ψ	247
4. Représentation de l'émission d'une source ponctuelle par une onde divergente.	248
5. Division d'un groupe d'ondes par un miroir semi-transparent.....	252
6. Étude du même problème dans la théorie de la double solution.....	254
7. Retour sur la relation entre onde u et onde Ψ	259
8. Extension des idées précédentes aux problèmes de collision.....	261
9. Résumé du chapitre.....	262

CHAPITRE XIX.

ÉTATS STATIONNAIRES, TRANSITIONS QUANTIQUES, CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

1. États stationnaires.....	264
2. Étude de la conservation de l'énergie lors du choc d'un corpuscule avec un atome.....	266
3. Point de vue de la théorie de la double solution.....	267
4. Autre cas instructif de collision entre atome et corpuscule.....	269
5. Le tenseur énergie-quantité de mouvement dans la théorie de l'onde-pilote....	270
6. Retour sur les processus de mesure.....	273
7. Retour sur la question des états stationnaires et des transitions quantiques....	275

CHAPITRE XX.

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS.

1. Vue d'ensemble sur les résultats obtenus.....	280
2. Analogie des conceptions de la théorie de la double solution avec des idées plus anciennes.....	281
3. Possibilités de vérifications expérimentales.....	283
4. Raccord de la théorie de la double solution avec la Relativité généralisée.....	285
APPENDICE.....	287
BIBLIOGRAPHIE.....	291
TABLE DES MATIÈRES.....	293

IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS - PARIS

146746

Dépôt légal, Imprimeur, 1956, n° 1073
Dépôt légal, Éditeur, 1956, n° 641

ACHEVÉ D'IMPRIMER LE 15 JUIN 1956