LA THÉORIE DE LA MESURE
EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(INTERPRÉTATION USUELLE ET INTERPRÉTATION CAUSALE)

OUVRAGES DE LA COLLECTION

I. BROGLIE (L. DE) de l'Académie Française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne. — *La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ?* Exposé du problème suivi de la reproduction de certains documents et d'une Contribution de M. Jean-Pierre VIGIER. In-8 (16-25) de VII-113 pages, avec 4 figures; 1953.

II. FÉVRIER (Mme P.). — *L'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire et des Théories quantiques.* In-8 (16-25) de VIII-216 pages, avec 2 figures; 1956.

III. YIFTAH (S.). — *Constantes fondamentales des Théories physiques.* In-8 (16-25) de VII-124 pages, avec 2 figures ; 1956.

IV. TONNELAT (Mme M.-A.) Maître de Conférences à la Sorbonne. — *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements.* In-8 (16-25) de VIII-156 pages; 1955.

V. VIGIER (J.-P.). — *Structure des Micro-objets dans l'interprétation causale de la Théorie des quanta.* In-8 (16-25) de XI-192 pages, 26 figures; 1956.

VI. DESTOUCHES (J.-L.), Professeur à la Sorbonne. — *La quantification en Théorie fonctionnelle des Corpuscules.* VI-141 pages, avec figures; 1956.

LES GRANDS PROBLÈMES DES SCIENCES
OUVRAGES RÉUNIS PAR Mme P. FÉVRIER

VII.

LA THÉORIE DE LA MESURE EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(INTERPRÉTATION USUELLE ET INTERPRÉTATION CAUSALE)

PAR

M. Louis de BROGLIE
de l'Académie Française
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences,
Professeur à la Sorbonne

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1957

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs. 2e édition revue et corrigée. In-8 (16-25) de VI-208 pages; 1957.

Éléments de théorie des Quanta et de Mécanique ondulatoire. (*Collection Traité de Physique théorique et de Physique mathématique.* Fascicule III). In-8 (16-25) de 302 pages, 31 figures; 1953.

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*, publiée sous la direction de *E. Borel*, Fascicule V). In-8 (16-25) de VI-224 pages; 1950.

Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion. 2e édition revue et corrigée. In-8 (16-25) de VI-210 pages, 7 figures; 1954.

La théorie des particules de spin 1/2 (Électrons de Dirac). In-8 (16-25) de 164 pages; 1952.

Une tentative d'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire. In-8 (16-25) de VII-297 pages, avec 20 figures; 1956.

Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. In-8 (16-25) de VI-114 pages, avec 14 figures; 1950.

La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? Exposé du problème suivi de la reproduction de certains documents et d'une contribution de M. *Jean-Pierre Vigier.* (Fascicule I de la Collection « *Les Grands Problèmes des Sciences* ».) In-8 (16-25) de VII-113 pages, avec 4 figures; 1953.

PRÉFACE.

Le présent volume forme une sorte de complément de l'Ouvrage que j'ai récemment publié sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution (1). J'y reprends plus en détail certaines questions que me paraissent nécessiter un nouvel examen du rôle de la mesure en Physique quantique développé d'une façon plus concrète et plus proche de la réalité expérimentale qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Le plan de l'Ouvrage est le suivant. Après avoir, dans un premier chapitre, rappelé quelques principes bien connus de la Mécanique ondulatoire, j'expose dans les chapitres II et III la théorie de la Mesure due à M. J. von Neumann et, en reprenant des arguments développés naguère par Einstein et M. Schrödinger, je montre que cette théorie, malgré le caractère élégant et en apparence parfaitement satisfaisant de son formalisme, conduit cependant à des conséquences très difficilement acceptables. Les difficultés qu'elle soulève proviennent, d'une part, du fait qu'en accord avec les idées actuellement dominantes elle n'admet pas la localisation permanente des corpuscules dans l'espace et, d'autre part, qu'elle envisage les processus de mesure d'une manière trop abstraite.

Après avoir résumé dans les chapitres IV et V les conceptions fondamentales de la théorie de la double solution en y ajoutant quelques compléments qui n'avaient pas trouvé place dans mes exposés antérieurs, je reprends dans les chapitres VI et VII l'étude des processus de mesure d'un point de vue plus concret. J'y introduis les idées essentielles que les trains d'ondes sont toujours limités et que nous ne pouvons faire d'observations ou

(1) Bibliographie [3].

de mesures sur la réalité microphysique que par l'intermédiaire des phénomènes macroscopiques observables déclenchés par l'action locale d'un corpuscule. En ajoutant à ces remarques fondamentales l'idée de la localisation permanente des corpuscules dans l'espace telle qu'elle résulte de la théorie de la double solution, je montre qu'on obtient ainsi une image claire des processus de mesure qui ne soulève plus les mêmes objections que la théorie de von Neumann et de ses continuateurs.

Un dernier chapitre est consacré à un examen très rapide de la Thermodynamique de von Neumann et à son interprétation à l'aide des idées précédemment exposées.

Le but du présent Ouvrage est en somme de faire voir pour quelles raisons il me paraît nécessaire de rétablir l'image d'une localisation permanente des corpuscules microphysiques et pourquoi, redevenu conscient de cette nécessité, j'ai cherché dans ces dernières années à reprendre la tentative d'interprétation de la Mécanique ondulatoire que j'avais esquissée en 1927.

Septembre 1956.

Louis de Broglie

LA THÉORIE DE LA MESURE EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

INTERPRÉTATION USUELLE ET INTERPRÉTATION CAUSALE

CHAPITRE I.

RAPPEL DE GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET SUR LA MESURE.

1. Quelques principes connus de Mécanique ondulatoire. — L'interprétation actuellement admise de la Mécanique ondulatoire suppose que l'on peut décrire d'une façon aussi complète que possible un corpuscule ou un système de corpuscules à l'aide d'une fonction d'onde Ψ susceptible d'ailleurs d'avoir plusieurs composantes comme dans la théorie de l'électron de Dirac ou dans celle des corpuscules de spin plus élevé. La fonction Ψ est toujours supposée « normée » par la formule

$$\int |\Psi|^2 \, d\tau = 1. \tag{1}$$

L'évolution de la fonction d'onde au cours du temps est régie par une équation aux dérivées partielles, l'équation des ondes, qui dans le cas le plus simple, celui d'un corpuscule sans spin à l'approximation non relativiste, est l'équation bien connue de Schrödinger. Elle prend des formes plus compliquées pour les particules à spin (électron de Dirac par exemple) car dans ces cas elle devient en réalité un système d'équations aux dérivées partielles liant entre elles les diverses composantes du Ψ. D'une façon générale, l'équation d'ondes avec des conditions initiales et des conditions aux limites données détermine entièrement l'évolution de la fonction Ψ.

Oubliant complètement les origines de la Mécanique ondulatoire et les intuitions physiques sur lesquelles elle était fondée, la plupart des auteurs considèrent la fonction Ψ comme un simple instrument mathématique servant à prévoir les probabilités des divers résultats des mesures effectuées sur le corpuscule ou le système, cette fonction se trouvant (par hasard?) avoir la même forme que les ondes de la Physique classique.

Voici maintenant, brièvement résumés, les postulats qui constituent des sortes de « recettes » permettant d'utiliser la fonction Ψ, supposée connue, pour le calcul de la probabilité des mesures que l'on peut faire des grandeurs corpusculaires. On admet qu'à chacune de ces grandeurs correspond un opérateur linéaire et hermitien A dont l'équation aux valeurs propres

$$A\varphi = \alpha\varphi \tag{2}$$

permet de définir un ensemble continu ou discontinu (ou même partiellement continu et partiellement discontinu) de valeurs propres α et de fonctions propres $\varphi(\alpha)$ correspondantes. Les fonctions propres φ forment un système complet de fonctions de base orthonormales de sorte que l'on peut toujours écrire

$$\Psi = \int c(\alpha)\varphi(\alpha)\,d\alpha \tag{3}$$

ou plus simplement dans le cas d'un spectre discontinu

$$\Psi = \sum_i c_i\varphi_i \tag{4}$$

en numérotant par un indice les valeurs propres et les fonctions propres. Un formalisme mathématique comme l'intégrale de Stieltjes permettrait d'ailleurs de réunir les deux cas du spectre continu et du spectre discontinu en une seule formule. L'ensemble des valeurs propres de A forment le « spectre » de cet opérateur.

Le principe fondamental que l'on prend comme base est alors le suivant. Soit Ψ la fonction d'onde d'un corpuscule (ou d'un système) sur lequel on veut effectuer, à l'aide d'un dispositif approprié, la mesure d'une grandeur A. On développera le Ψ suivant les fonctions propres φ de l'opérateur A correspondant et l'on pourra affirmer que la probabilité pour que la mesure donne une valeur appartenant à un intervalle $d\alpha$ est $|c(\alpha)|^2 d\alpha$. Dans le cas d'un spectre discontinu, on dira plus simplement que la probabilité de la valeur α_i est donnée par $|c_i|^2$.

L'espérance mathématique de la valeur α_i ou, si l'on veut, la valeur moyenne du résultat de la mesure de A effectuée sur un très grand nombre de corpuscules ayant la même fonction Ψ sera

$$\bar{A} = \sum_i |c_i|^2 \alpha_i = \int \Psi^\star A \Psi \, d\tau. \tag{5}$$

Ces principes généraux appliqués à la mesure de la position d'un corpuscule donne le résultat suivant : la probabilité pour que les coordonnées d'un corpuscule soient trouvées comprises dans les intervalles $x \to x + dx$, $y \to y + dy$, $z \to z + dz$, c'est-à-dire pour que le corpuscule se trouve dans l'élément de volume $d\tau = dx\,dy\,dz$ est $|\Psi|^2 dx\,dy\,dz$. Un énoncé analogue est valable pour la probabilité de la présence du point figuratif d'un système dans l'espace de configuration qui lui correspond.

Les énoncés relatifs à $|\Psi|^2$ (principe des interférences ou de localisation) peuvent se déduire du formalisme général de sorte qu'au point de vue de ce formalisme, la probabilité de présence $|\Psi|^2$ paraît être sur le même pied que n'importe quelle autre probabilité $|c_i|^2$. L'ensemble de tous les développements possibles du Ψ suivant les différents systèmes de fonctions propres φ_i correspondant aux diverses grandeurs mesurables apparaissent ainsi, du point de vue formel, comme entièrement équivalents. Cette idée qui sert de base à la « théorie des transformations » donne lieu à d'élégants développements mathématiques : nous aurons à en discuter la valeur physique.

Le postulat général admis plus haut relatif à la signification statistique des $|c_i|^2$ entraîne, par des raisonnements que je ne reproduirai pas, la conséquence suivante : un même dispositif expérimental ne peut permettre de mesurer à la fois avec précision deux grandeurs A et B que si les opérateurs correspondants commutent, c'est-à-dire si l'on a $AB\varphi = BA\varphi$, quelle que soit φ. S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si en général $AB\varphi \neq BA\varphi$, alors tout dispositif expérimental de mesure permettant d'attribuer à A une valeur affectée d'une certaine incertitude laissera subsister sur la valeur de B une incertitude d'autant plus grande que la mesure de A aura été plus précise et inversement. L'exemple typique de deux grandeurs qui ne sont pas simultanément mesurables avec précision est fourni par tout couple de grandeurs « canoniquement » conjuguées au sens de la Mécanique analytique, comme par exemple la coordonnée x d'un corpuscule et la composante p_x correspondante de la quantité de mouvement. Dans ce dernier cas les opérateurs correspondants $\left(\text{qui sont } x \text{ et } -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ sont tels que $AB - BA = \frac{h}{2\pi i}$ et, par suite, ne commutent pas; on montre alors que les incertitudes existant sur les valeurs de x et de p_x satisfont toujours aux inégalités d'Heisenberg

$$\delta x \, \delta p_x \geqq h \tag{6}$$

et, par suite, ne peuvent jamais être simultanément nulles.

Il existe d'ailleurs des grandeurs qui, sans être canoniquement conjuguées ne commutent cependant pas, par exemple les trois composantes rectangulaires M_X, M_Y, M_Z du mouvement de la quantité de mouvement pour lesquels on trouve

$$M_X M_Y - M_Y M_X = \frac{h}{2\pi i} M_Z, \ldots$$

et l'on montre alors que les incertitudes sur la valeur de deux de ces composantes ne peuvent pas en général être nulles simultanément.

On peut traduire ces résultats dans un langage un peu différent en disant que notre principe général fait correspondre à la valeur de toute grandeur physique mesurable une distribution de probabilité correspondant à la forme du Ψ. Dans le cas discontinu, les probabilités des valeurs α_i sont $P_i = |c_i|^2$ et dans le cas continu la densité de probabilité sera $\rho(\alpha) = |c(\alpha)|^2$. L'état d'un corpuscule (ou d'un système) étant défini par une certaine fonction Ψ, à l'ensemble des grandeurs physiques mesurables correspondra un ensemble de distribution de probabilité que la théorie actuelle considère (peut-être à tort, nous le verrons) comme intervenant exactement sur le même pied pour le corpuscule (ou le système) dans l'état Ψ.

On peut alors définir pour chaque distribution de probabilité une « dispersion » égale à la racine carrée du carré moyen de l'écart par rapport de la valeur moyenne. On pose donc pour cette dispersion

$$\sigma(A) = \sqrt{\overline{(\alpha - \overline{\alpha})^2}} = \sqrt{\overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2}. \tag{7}$$

On peut ensuite démontrer que l'on a pour deux grandeurs A et B

$$\sigma(A)\,\sigma(B) \geqq \frac{1}{2}\left|\overline{AB - BA}\right|. \tag{8}$$

Si les opérateurs A et B commutent, le second membre de (8) est nul, ce que l'on interprètera en disant qu'on peut obtenir par une même opération de mesure des valeurs précises, donc à dispersion nulle, des grandeurs A et B. Si les opérateurs A et B ne commutent pas, le second membre de (8) donne une borne inférieure non nulle pour le produit des dispersions de sorte qu'aucune opération de mesure ne doit pouvoir fournir simultanément des valeurs précises pour A et pour B. Pour deux grandeurs canoniquement conjuguées, on a $AB - BA = \frac{h}{2\pi i}$, et l'on trouve

$$\sigma(A)\,\sigma(B) \geq \frac{h}{4\pi}, \tag{8 bis}$$

ce qui constitue une sorte d'énoncé plus précis des relations d'incertitude (6).

Avant de poursuivre l'étude des conséquences de ce formalisme, je voudrais insister sur ce qu'il a d'extrêmement abstrait. La fonction d'onde Ψ est considérée comme une simple fonction mathématique solution complexe d'une équation aux dérivées partielles qui aurait, pour ainsi dire fortuitement, la forme d'une équation de propagation d'ondes. En jetant un voile sur les considérations physiques qui m'avaient guidé au début de mes recherches et sur celles qui avaient été ensuite développées par M. Schrödinger, on ne cherche plus à se faire aucune image physique des rapports de l'onde et du corpuscule. On ne sait même plus bien si l'onde Ψ est autre chose qu'une expression mathématique permettant l'évaluation de probabilités et s'il lui reste quelque ombre de réalité physique. D'autre part, la considération simultanée de tous les développements de l'onde Ψ et la mise sur le pied d'égalité de toutes les répartitions de probabilités qui s'en déduisent a quelque chose d'étrange puisque l'on sait que chacune de ces répartitions n'aura une signification physique qu'*après* l'exécution de la mesure correspondante, mesure qui, nous allons le voir, modifie complètement l'état de chose initial. Évidemment on peut toujours dire que le physicien qui connaît le Ψ a le droit de s'en servir pour calculer les valeurs d'une grandeur physique qui sont les résultats possibles d'une mesure de cette grandeur et les probabilités correspondantes. Mais les répartitions de probabilités ainsi obtenues n'ont qu'une valeur subjective et ne peuvent prendre une valeur objective qu'après l'exécution effective de la mesure entraînant l'intervention d'un dispositif approprié. Nous reviendrons plus tard sur ces questions qui restent assez obscures dans le formalisme actuellement utilisé et nous allons poursuivre l'étude des conséquences de ce formalisme.

2. Réduction du paquet de probabilité. — Dans l'interprétation actuellement admise du formalisme exposé plus haut, la mesure joue un rôle qui, bien qu'un peu mystérieux, est essentiel. C'est elle qui, en nous apportant des informations nouvelles, change l'état de nos connaissances sur le système étudié et par suite, nous oblige à modifier brusquement la forme de l'onde Ψ qui représente nos connaîssances sur le corpuscule (ou sur le système). Si, par exemple, la mesure est une mesure de position plus ou moins précise, le train d'ondes Ψ initialement associé au corpuscule se trouvera « réduit » à un train d'ondes moins étendu qui peut même être presque ponctuel si la mesure est précise, puisque la région où la probabilité de présence $|\Psi^2|$ est différente de zéro a diminué d'étendue. D'où le nom de « réduction du paquet de probabilité » donné naguère par M. Heisenberg à cette modification du Ψ. Si la mesure consistait au contraire dans la détermination de l'une des composantes de la quantité de mouvement p_x, c'est dans l'espace des moments qu'aurait lieu la réduction du paquet de probabilité puisque ce serait alors l'étendue des valeurs de p_x figurant effectiuement dans la représentation de Fourier de Ψ qui aurait diminué.

La question de la réduction du paquet de probabilité pose dans l'interprétation actuelle un problème difficile; est-ce l'action du dispositif de mesure qui modifie l'onde Ψ ou est-ce la connaissance que nous acquérons des résultats de la mesure qui entraîne cette modification? Je ne sais pas si tous les auteurs qui adoptent l'interprétation probabiliste actuelle seraient d'accord sur la réponse à faire à cette question.

Les uns (et ce serait probablement le cas de M. Bohr) seraient soucieux de conserver un certain caractère de réalité physique à l'onde Ψ et diraient que c'est l'action de l'appareil de mesure sur l'onde Ψ qui provoque la réduction du paquet de probabilité. D'autres, peut-être plus logiques avec eux-mêmes, diraient que c'est la connaissance du résultat de la mesure qui nécessite la modification de l'onde puisque, tant que le résultat de la mesure ne nous est pas connu, ce sont les anciennes prévisions de probabilités correspondant à la forme primitive du Ψ qui pour nous restent valables pour faire des prévisions Mais si l'on adopte cette seconde opinion, l'onde Ψ n'est plus qu'une représentation *purement subjective* des probabilités et ne peut être à aucun degré une représentation de la réalité objective. Comment alors se fait-il qu'elle obéisse à une équation de propagation d'ondes et que, malgré tout, elle fournisse une représentation statistique probablement exacte de phénomènes dont la réalité objective ne saurait être mise en doute? La question reste vraiment obscure : nous y reviendrons.

La réduction du train d'ondes Ψ donne lieu à une situation nouvelle caractérisée par une nouvelle forme du Ψ, situation qui était imprévisible à l'avance puisque seules les probabilités des diverses mesures possibles pouvaient être calculées avant une mesure effective. Nous aurons à nous demander si cette imprévisibilité résulte d'une réelle indétermination, comme on l'admet actuellement, ou au contraire de la valeur de certaines variables cachées comme le prétend la théorie de la double solution, question en relation étroite avec un théorème énoncé par M. von Neumann dans sa théorie de la Mesure en Mécanique ondulatoire.

Les relations d'incertitude de Heisenberg montrent qu'un dispositif permettant d'effectuer simultanément des mesures diverses sur un corpuscule ne peut pas nous faire connaître à la fois avec précision la valeur de toutes les grandeurs caractérisant le corpuscule. Il y a donc une *connaissance maximum incomplète* de ces grandeurs qui est compatible avec les relations d'incertitude. Ayant acquis cette connaissance maximum, nous pouvons construire la fonction d'onde qui convient pour représenter nos connaissances immédiatement après la mesure et, à partir de cette forme initiale du Ψ, nous pourrions suivre son évolution ultérieure au cours du temps à l'aide de l'équation des ondes. Nous pourrons ainsi à tout instant calculer la probabilité des résultats des diverses mesures que l'on pourrait opérer à cet instant. Il en sera ainsi jusqu'à ce que nous connaissions le résultat de nouvelles mesures modifiant l'état de nos connaissances et interrompant brusquement l'évolution régulière de l'onde Ψ. L'évolution régulière de cette onde entre deux mesures, évolution réglée par l'équation d'ondes, est, elle, entièrement déterminée par la forme initiale du Ψ (et éventuellement par les conditions aux limites) puisque l'équation d'ondes est du premier ordre par rapport au temps. Ainsi il y a déterminisme de l'évolution du Ψ entre deux mesures, mais non pas déterminisme des phénomènes observables puisque la connaissance de la fonction d'onde ne donne pour ceux-ci que des probabilités. Si la description de la réalité physique par la fonction Ψ est une description *complète*, s'il n'existe pas de description plus complète introduisant par exemple des variables cachées, il n'y a pas de déterminisme des phénomènes physiques.

3. Effacement des phases par la mesure. Interférences des proba-

bilités. — La mesure introduit une discontinuité dans l'évolution de la fonction d'onde : la connaissance de celle-ci *après* la mesure ne permet aucunement de remonter à la forme qu'elle avait *avant* la mesure.

Considérons un très grand nombre de corpuscules (ou de systèmes) se trouvant initialement dans le même état représenté par le même Ψ. Mesurons pour chacun d'eux une certaine grandeur A de fonctions propres φ_l et de valeurs propres α_l. Après ces mesures, la proportion des corpuscules (ou systèmes) pour lesquels on aura trouvé pour A les diverses valeurs α_l nous fourniront les carrés des modules des coefficients c_l dans le développement $\Psi = \sum_l c_l \varphi_l$ de la fonction d'onde *avant* la mesure. La connaissance des Ψ pour tous les corpuscules (ou systèmes) après la mesure nous fournit donc les valeurs des $|c_l|$, mais pour connaître les c_l eux-mêmes, il nous manque la connaissance de leurs arguments, donc des phases relatives des composantes $c_l\varphi_l$ de la fonction d'onde initiale.

C'est cette remarque qui a amené M. Bohr à souligner que toute mesure a pour conséquence d'effacer complètement les phases. C'est cet effacement des phases par l'acte de mesure qui fait que celui-ci constitue une coupure dans l'évolution du Ψ. En effet, les différences de phases entre les composantes du développement $\sum_l c_l\varphi_l$ ont une importance capitale et toute connaissance relative à la fonction d'onde qui ne comporte pas la connaissance de ces différences de phase est radicalement incomplète. Cette importance des phases va se manifester clairement à nous dans l'étude du phénomène de l'interférence des probabilités.

Considérons deux grandeurs A et B dont les opérateurs ne commutent pas et qui, par suite, ne sont pas simultanément mesurables. Les valeurs et fonctions propres de A sont α_i et φ_i, celles de B sont β_k et χ_k. On démontre aisément que, A et B ne commutant pas, le système des φ_i ne peut pas coincider avec celui des χ_k. Cependant, comme les χ_k forment un système complet, chaque φ_i peut s'exprimer à l'aide des χ_k sous la forme

$$\varphi_i = \sum_k s_{ik}\chi_k, \tag{9}$$

les s_{ik} étant les éléments d'une matrice unitaire $\mathfrak{S}$. Dans ce développement figurent en général plus d'un terme au second membre puisque le système des φ_i et celui des χ_k ne coïncident pas. Supposons alors que l'état du corpuscule (ou système) examiné soit représenté par la fonction d'onde

$$\Psi = \sum_i c_i \varphi_i = \sum_{ik} c_i s_{ik} \chi_k. \tag{10}$$

Si alors on mesure la grandeur A, on trouve l'une des valeurs propres α_i, la probabilité de trouver α_j étant *a priori* $|c_j|^2$. Après la mesure, le corpuscule (ou système) se trouvera dans l'état φ_i et, dans ce nouvel état, une mesure de B conduit à la valeur β_k avec la probabilité $|s_{ik}|^2$. Ainsi la probabllité de trouver la valeur β_k pour B en mesurant d'abord A, puis B, sera égale à $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$.

Mais supposons maintenant que nous ayons effectué la mesure de B directement sur l'état initial. Alors d'après la forme du dernier membre de (10), le principe général relatif aux probabilités des résultats de mesure nous apprend que la probabilité de trouver β_k est égale à $\left|\sum_i c_i s_{ik}\right|^2$. Cette expression est entièrement différente de la précédente parce qu'elle dépend des phases (ou arguments) des c_i et des s_{ik} alors que $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ visiblement n'en dépend pas. C'est là ce qu'on nomme « l'interférence des probabilités ».

Illustrons ceci par un exemple simple. Prenons un domaine à une dimension de longueur L. Dans ce domaine, les fonctions propres normées de la quantité de mouvement sont $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2\pi i}{h} p_i x}$. Soit alors

$$\Psi = \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2\pi i}{h} p_i x} \qquad \left(\sum_i |c_i|^2 = 1\right) \tag{11}$$

la fonction d'onde du corpuscule dans son état initial. Si l'on mesure d'abord p, puis x, la probabilité de la position $x = x_0$ sera

$$\sum |c_i|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2i\pi}{h} p_i x_0} \right|^2$$

ou simplement $\frac{1}{L}$, ce qui exprime l'égale probabilité de toutes les positions sur le segment de longueur L.

Mais si, au contraire, on mesure directement la coordonnée x dans l'état initial, la probabilité de la valeur $x = x_0$ sera $|\Psi(x_0)|^2$ et elle fait intervenir l'interférence des ondes planes dont la superposition constitue le Ψ, résultat qui est nécessaire pour rendre compte des interférences en Optique et de la diffraction des électrons. L'on voit donc que l'interférence des probabilités, dont l'existence est nécessaire pour l'interprétation des faits expérimentaux, dépend essentiellement des phases dont le rôle se montre ainsi capital.

Le fait que la probabilité de la valeur β_k de B mesurée directement dans l'état initial soit $\left|\sum_i c_i s_{ik}\right|^2$ et non $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ pourrait au premier abord paraître contraire au théorème des probabilités composées, mais en réalité il n'en est rien : la probabilité $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ est bien celle que l'on doit attendre quand on fait d'abord la détermination de A, puis celle de B, puisqu'elle est égale à la somme des produits de la probabilité pour obtenir *d'abord* une valeur α_i pour A par la probabilité d'obtenir *ensuite* la valeur β_k pour B. Le théorème des probabilités composées est donc sauf et, si l'on envisage les probabilités uniquement au point de vue subjectif, on peut dire qu'il n'y a aucune raison pour la probabilité $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ soit égale à celle d'obtenir directement la valeur β_k de B par une mesure de cette grandeur dans l'état initial. Mais, si l'on analyse bien cette idée, l'on voit que toutes les répartitions de probabilité introduites par la théorie usuelle (sauf, sans doute, le $|\Psi|^2$) n'existent dans l'état initial que subjectivement pour le physicien qui veut faire des prévisions sur le résultat des mesures possibles; ces répartitions n'existent objectivement qu'après que la mesure correspondante a été effectuée quand on ignore encore le résultat de cette mesure. C'est cette circonstance qui expliquera plus loin pourquoi le schéma de l'interprétation probabiliste usuelle de la Mécanique ondulatoire n'est pas en accord avec le schéma habituellement admis par les statisticiens.

4. Divergence entre le schéma statistique de la Mécanique ondulatoire et le schéma usuel des statisticiens. — Dans le schéma usuel des statisticiens, que nous exposerons en supposant que l'on a affaire à des variables continues), on définit pour chaque variable aléatoire X une densité de probabilité $\rho_X(x)$ telle que $\rho_X(x)\,dx$ soit la probabilité pour que X ait une valeur comprise entre x et $x+dx$. Pour une autre variable aléatoire continue Y, on définira de même $\rho_Y(y)$.

On définit ensuite une densité $\rho(x, y)$ telle que $\rho(x, y)\,dx\,dy$ soit la probabilité d'obtenir par une même opération de mesure (les statisticiens disent souvent par une même *épreuve*) des valeurs de X et Y comprisent respectivement dans les intervalles $x \rightarrow x + dx$ et $y \rightarrow y + dy$. Cette définition paraît toute naturelle si l'on adopte une image concrète de la probabilité en se figurant des « individus » pour chacun desquels les grandeurs X et Y ont une valeur déterminée, la statistique s'introduisant par la considération simultanée d'un très grand nombre d'individus pour lesquels X et Y ont des valeurs différentes.

En dehors de $\rho_X(x)$, $\rho_Y(y)$, et $\rho(x, y)$, les statisticiens considèrent aussi la densité de probabilité de Y liée par X, $\rho_Y^{(X)}(x, y)$ qui correspond à la probabilité d'obtenir la valeur y de Y *quand on sait que* X *a la valeur* x et l'on définit de même la probabilité de X liée par Y à l'aide de $\rho_X^{(Y)}(x, y)$.

Maintenant l'on doit avoir entre les cinq densités de probabilité que nous venons de définir les relations suivantes que l'on considère comme évidentes :

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\rho_X(x) = \int \rho(x, y)\, dy, &\qquad &\rho_Y(y) = \int \rho(x, y)\, dx, \\ &\rho_X^{(Y)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_Y(y)}, &\qquad &\rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)}, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(13) \qquad \rho_X(x) = \int \rho_X^{(Y)}(x, y)\, \rho_Y(y)\, dy, \qquad \rho_Y(y) = \int \rho_Y^{(X)}(x, y)\, \rho_X(x)\, dx.$$

Or le fait essentiel est que le schéma précédent, habituellement considéré par les statisticiens comme allant de soi, n'est pas applicable aux répartitions de probabilités envisagées par l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire. En effet, il est en général impossible de définir pour deux grandeurs mesurables la densité $\rho(x, y)$ puisqu'il est en général impossible de mesurer simultanément la valeur des grandeurs X et Y. Les formules (12) n'ont donc plus de sens ici. Sans doute il est toujours possible de définir les densités $\rho_X(x)$, $\rho_Y(y)$, $\rho_X^{(Y)}(x, y)$ et $\rho_Y^{(X)}(x, y)$, mais elles ne sont plus reliées par les formules (12) et (13).

Reprenons comme exemple le cas précédemment examiné de deux grandeurs mesurables A et B non commutantes et récrivons les formules (9) et (10) en passant du cas discontinu au cas continu. Nous avons

$$(14) \qquad \varphi(\alpha) = \int s(\alpha, \beta)\, \chi(\beta)\, d\beta, \qquad \chi(\beta) = \int s^{-1}(\alpha, \beta)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Si Ψ est de la forme

$$(15)\qquad \Psi = \int c(\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha = \iint c(\alpha)\,s(\alpha,\,\beta)\,\chi(\beta)\,d\alpha\,d\beta,$$

on trouve

$$(16)\qquad \rho_A(\alpha) = |\,c(\alpha)\,|^2, \qquad \rho_B(\beta) = \left|\int c(\alpha)\,s(\alpha,\,\beta)\,d\alpha\right|^2,$$

la seconde formule exprimant l'interférence des probabilités, puis

$$(17)\qquad \rho_B^{(A)}(\alpha,\,\beta) = |\,c(\alpha)\,|^2\,|\,s(\alpha,\,\beta)\,|^2, \qquad \rho_A^{(B)}(\alpha,\,\beta) = \left|\int c(\gamma)\,s(\gamma,\,\beta)\,d\gamma\right|^2 |\,s^{-1}(\alpha,\,\beta)\,|^2,$$

mais ici les produits $\rho_B(\beta)\,\rho_A^{(B)}(\alpha,\,\beta)$ et $\rho_A(\alpha)\,\rho_B^{(A)}(\alpha,\,\beta)$ n'ont aucune raison d'être égaux, ce qui montre bien l'inexistence de la densité $\rho(\alpha,\beta)$ qui devrait être égale à leur valeur commune.

D'où vient ce caractère particulier, assez étrange, des distributions statistiques de la Mécanique quantique actuelle? La réponse paraît être contenue dans le rôle essentiel qu'y joue la mesure. Les distributions de probabilité de la Mécanique quantique actuelle (à l'exceptton peut-être de quelques-unes d'entre elles) ne constituent pas des probabilités objectives pouvant être considérées comme correspondant toutes, à un même instant, à une collections d'individus pour lesquelles les grandeurs auraient des valeurs bien déterminées. L'hypothèse implicite, qui pour le statisticien rend « évidentes » les relations (12) et (13), n'est pas ici réalisée.

C'est seulement *après* l'action du dispositif de mesure d'une grandeur sur le corpuscule (ou sur le système) que la répartition de probabilité peut être considérée comme réalisée objectivement; pour parler plus exactement, si l'on imagine que la mesure d'une certaine grandeur est effectuée simultanément sur une infinité de corpuscules (ou de systèmes) ayant initialement la même fonction Ψ, c'est seulement après l'exécution de la mesure sur tous ces corpuscules (ou systèmes) que l'on a réellement une collection d'individus possédant chacun une valeur précise de la valeur mesurée, ces valeurs étant réparties suivant la loi de probabilité en $|\,c_k|^2$. Et encore faut-il bien remarquer que la loi de probabilité en $|\,c_k\,|^2$ ne se trouve ainsi réalisée objectivement par un collectif que pour la grandeur mesurée et celles qui commutent avec elles, à l'exclusion des autres. Dans l'état initial, quand aucune mesure n'a encore été effectuée, le physicien, s'il connaît la fonction d'onde, peut calculer les diverses répartitions de probabilité qu'il peut ensuite se décider à mesurer; mais chacune de ces répartitions ne pourra se trouver ainsi réalisée et correspondre à un collectif qu'après l'exécution de la mesure correspondante. Jamais toutes les répartitions ne pourront se trouver à la fois réalisées puisqu'on ne peut pas mesurer simultanément toutes les grandeurs et que, pour mesurer deux grandeurs non commutantes, il faudrait employer deux dispositifs de mesure qui sont incompatibles.

Certes le physicien a toujours le droit de considérer simultanément avant toute mesure l'ensemble des distributions de probabilité qui peuvent se déduire des différents développements du Ψ initial, mais ces probabilités ont alors un caractère subjectif et ne sont pas des probabilités objectives statistiquement réalisées par un même collectif d'individus. Si donc on veut raisonner sur l'ensemble des distributions de probabilité correspondant à une forme donnée de la fonction d'onde, on ne devra *jamais* supposer que toutes ces distributions ont, avant toute mesure, la nature de probabilités objectives correspondant à un même collectif d'individus. C'est cela qui empêche, nous l'avons vu d'attribuer aux distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire usuelle les propriétés (12) et (13) qui sont évidentes pour des probabilités objectives se rapportant à un collectif d'individus à caractéristiques bien déterminées. C'est, pensons-nous, pour la même raison que le célèbre théorème de M. von Neumann dont nous parlerons bientôt n'est au fond qu'un truisme et ne prouve nullement l'impossibilité de rétablir le déterminisme en Mécanique ondulatoire par l'introduction de variables cachées.