

LA THÉORIE DE LA MESURE EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(INTERPRÉTATION USUELLE ET INTERPRÉTATION CAUSALE)

OUVRAGES DE LA COLLECTION

- I. BROGLIE (L. DE) de l'Académie Française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne. — *La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ?* Exposé du problème suivi de la reproduction de certains documents et d'une Contribution de M. Jean-Pierre VIGIER. In-8 (16-25) de VII-113 pages, avec 4 figures; 1953.
- II. FÉVRIER (M^{me} P.). — *L'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire et des Théories quantiques*. In-8 (16-25) de VIII-216 pages, avec 2 figures; 1956.
- III. YIFTAH (S.). — *Constantes fondamentales des Théories physiques*. In-8 (16-25) de VII-124 pages, avec 2 figures; 1956.
- IV. TONNELAT (M^{me} M.-A.) Maître de Conférences à la Sorbonne. — *La Théorie du champ unifié d'Einstein et quelques-uns de ses développements*. In-8 (16-25) de VIII-156 pages; 1955.
- V. VIGIER (J.-P.). — *Structure des Micro-objets dans l'interprétation causale de la Théorie des quanta*. In-8 (16-25) de XI-192 pages, 26 figures; 1956.
- VI. DESTOUCHES (J.-L.), Professeur à la Sorbonne. — *La quantification en Théorie fonctionnelle des Corpuscules*. VI-141 pages, avec figures; 1956.
-

LES GRANDS PROBLÈMES DES SCIENCES

OUVRAGES RÉUNIS PAR M^{me} P. FÉVRIER

VII.

LA THÉORIE DE LA MESURE EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

(INTERPRÉTATION USUELLE ET INTERPRÉTATION CAUSALE)

PAR

M. Louis de BROGLIE

de l'Académie Française
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences,
Professeur à la Sorbonne



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1957

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR

Mécanique ondulatoire du photon et Théorie quantique des champs.
2^e édition revue et corrigée. In-8 (16-25) de vi-208 pages; 1957.

Éléments de théorie des Quanta et de Mécanique ondulatoire.
(*Collection Traité de Physique théorique et de Physique mathématique.* Fascicule III). In-8 (16-25) de 302 pages, 31 figures; 1953.

La Mécanique ondulatoire des systèmes de Corpuscules (*Collection de Physique mathématique*, publiée sous la direction de E. Borel, Fascicule V). In-8 (16-25) de vi-224 pages; 1950.

Théorie générale des particules à spin. Méthode de fusion. 2^e édition revue et corrigée. In-8 (16-25) de vi-210 pages, 7 figures; 1954.

La théorie des particules de spin 1/2 (Électrons de Dirac). In-8 (16-25) de 164 pages; 1952.

Une tentative d'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire.
In-8 (16-25) de vii-207 pages, avec 20 figures; 1956.

Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques.
In-8 (16-25) de vi-114 pages, avec 14 figures; 1950.

La Physique quantique restera-t-elle indéterministe ? Exposé du problème suivi de la reproduction de certains documents et d'une contribution de M. Jean-Pierre Vigier. (Fascicule I de la Collection « *Les Grands Problèmes des Sciences* ».) In-8 (16-25) de vii-113 pages, avec 4 figures; 1953.

© 1957 by Gauthier-Villars.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

PRÉFACE.

Le présent volume forme une sorte de complément de l'Ouvrage que j'ai récemment publié sur l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution (¹). J'y reprends plus en détail certaines questions que me paraissent nécessiter un nouvel examen du rôle de la mesure en Physique quantique développé d'une façon plus concrète et plus proche de la réalité expérimentale qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

Le plan de l'Ouvrage est le suivant. Après avoir, dans un premier chapitre, rappelé quelques principes bien connus de la Mécanique ondulatoire, j'expose dans les chapitres II et III la théorie de la Mesure due à M. J. von Neumann et, en reprenant des arguments développés naguère par Einstein et M. Schrödinger, je montre que cette théorie, malgré le caractère élégant et en apparence parfaitement satisfaisant de son formalisme, conduit cependant à des conséquences très difficilement acceptables. Les difficultés qu'elle soulève proviennent, d'une part, du fait qu'en accord avec les idées actuellement dominantes elle n'admet pas la localisation permanente des corpuscules dans l'espace et, d'autre part, qu'elle envisage les processus de mesure d'une manière trop abstraite.

Après avoir résumé dans les chapitres IV et V les conceptions fondamentales de la théorie de la double solution en y ajoutant quelques compléments qui n'avaient pas trouvé place dans mes exposés antérieurs, je reprends dans les chapitres VI et VII l'étude des processus de mesure d'un point de vue plus concret. J'y introduis les idées essentielles que les trains d'ondes sont toujours limités et que nous ne pouvons faire d'observations ou

(¹) Bibliographie [3].

de mesures sur la réalité microphysique que par l'intermédiaire des phénomènes macroscopiques observables déclenchés par l'action locale d'un corpuscule. En ajoutant à ces remarques fondamentales l'idée de la localisation permanente des corpuscules dans l'espace telle qu'elle résulte de la théorie de la double solution, je montre qu'on obtient ainsi une image claire des processus de mesure qui ne soulève plus les mêmes objections que la théorie de von Neumann et de ses continuateurs.

Un dernier chapitre est consacré à un examen très rapide de la Thermodynamique de von Neumann et à son interprétation à l'aide des idées précédemment exposées.

Le but du présent Ouvrage est en somme de faire voir pour quelles raisons il me paraît nécessaire de rétablir l'image d'une localisation permanente des corpuscules microphysiques et pourquoi, redevenu conscient de cette nécessité, j'ai cherché dans ces dernières années à reprendre la tentative d'interprétation de la Mécanique ondulatoire que j'avais esquissée en 1927.

Septembre 1956.

LOUIS DE BROGLIE

LA THÉORIE DE LA MESURE EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

INTERPRÉTATION USUELLE ET INTERPRÉTATION CAUSALE

CHAPITRE I.

RAPPEL DE GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET SUR LA MESURE.

1. **Quelques principes connus de Mécanique ondulatoire.** — L'interprétation actuellement admise de la Mécanique ondulatoire suppose que l'on peut décrire d'une façon aussi complète que possible un corpuscule ou un système de corpuscules à l'aide d'une fonction d'onde Ψ susceptible d'ailleurs d'avoir plusieurs composantes comme dans la théorie de l'électron de Dirac ou dans celle des corpuscules de spin plus élevé. La fonction Ψ est toujours supposée « normée » par la formule

$$(1) \quad \int |\Psi|^2 d\tau = 1.$$

L'évolution de la fonction d'onde au cours du temps est régie par une équation aux dérivées partielles, l'équation des ondes, qui dans le cas le plus simple, celui d'un corpuscule sans spin à l'approximation non relativiste, est l'équation bien connue de Schrödinger. Elle prend des formes plus compliquées pour les particules à spin (électron de Dirac par exemple) car dans ces cas elle devient en réalité un système d'équations aux dérivées partielles liant entre elles les diverses composantes du Ψ . D'une façon générale, l'équation d'ondes avec des condi-

tions initiales et des conditions aux limites données détermine entièrement l'évolution de la fonction Ψ .

Oubliant complètement les origines de la Mécanique ondulatoire et les intuitions physiques sur lesquelles elle était fondée, la plupart des auteurs considèrent la fonction Ψ comme un simple instrument mathématique servant à prévoir les probabilités des divers résultats des mesures effectuées sur le corpuscule ou le système, cette fonction se trouvant (par hasard?) avoir la même forme que les ondes de la Physique classique.

Voici maintenant, brièvement résumés, les postulats qui constituent des sortes de « recettes » permettant d'utiliser la fonction Ψ , supposée connue, pour le calcul de la probabilité des mesures que l'on peut faire des grandeurs corpusculaires. On admet qu'à chacune de ces grandeurs correspond un opérateur linéaire et hermitien A dont l'équation aux valeurs propres

$$(2) \quad A\varphi = \alpha\varphi$$

permet de définir un ensemble continu ou discontinu (ou même partiellement continu et partiellement discontinu) de valeurs propres α et de fonctions propres $\varphi(\alpha)$ correspondantes. Les fonctions propres φ forment un système complet de fonctions de base orthonormales de sorte que l'on peut toujours écrire

$$(3) \quad \Psi = \int c(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha$$

ou plus simplement dans le cas d'un spectre discontinu

$$(4) \quad \Psi = \sum_i c_i \varphi_i$$

en numérotant par un indice les valeurs propres et les fonctions propres. Un formalisme mathématique comme l'intégrale de Stieltjes permettrait d'ailleurs de réunir les deux cas du spectre continu et du spectre discontinu en une seule formule. L'ensemble des valeurs propres de A forment le « spectre » de cet opérateur.

Le principe fondamental que l'on prend comme base est alors le suivant. Soit Ψ la fonction d'onde d'un corpuscule (ou d'un système) sur lequel on veut effectuer, à l'aide d'un dispositif approprié, la mesure d'une grandeur A . On développera le Ψ suivant les fonctions propres φ de l'opérateur A correspondant et l'on pourra affirmer que la probabilité pour que la mesure donne une valeur appartenant à un

intervalle $d\alpha$ est $|c(\alpha)|^2 d\alpha$. Dans le cas d'un spectre discontinu, on dira plus simplement que la probabilité de la valeur α_i est donnée par $|c_i|^2$.

L'espérance mathématique de la valeur α_i ou, si l'on veut, la valeur moyenne du résultat de la mesure de A effectuée sur un très grand nombre de corpuscules ayant la même fonction Ψ sera

$$(5) \quad \bar{A} = \sum_i |c_i|^2 \alpha_i = \int \Psi^* A \Psi d\tau.$$

Ces principes généraux appliqués à la mesure de la position d'un corpuscule donne le résultat suivant : la probabilité pour que les coordonnées d'un corpuscule soient trouvées comprises dans les intervalles $x \rightarrow x+dx$, $y \rightarrow y+dy$, $z \rightarrow z+dz$, c'est-à-dire pour que le corpuscule se trouve dans l'élément de volume $d\tau = dx dy dz$ est $|\Psi|^2 dx dy dz$. Un énoncé analogue est valable pour la probabilité de la présence du point figuratif d'un système dans l'espace de configuration qui lui correspond.

Les énoncés relatifs à $|\Psi|^2$ (principe des interférences ou de localisation) peuvent se déduire du formalisme général de sorte qu'au point de vue de ce formalisme, la probabilité de présence $|\Psi|^2$ paraît être sur le même pied que n'importe quelle autre probabilité $|c_i|^2$. L'ensemble de tous les développements possibles du Ψ suivant les différents systèmes de fonctions propres φ_i correspondant aux diverses grandeurs mesurables apparaissent ainsi, du point de vue formel, comme entièrement équivalents. Cette idée qui sert de base à la « théorie des transformations » donne lieu à d'élégants développements mathématiques : nous aurons à en discuter la valeur physique.

Le postulat général admis plus haut relatif à la signification statistique des $|c_i|^2$ entraîne, par des raisonnements que je ne reproduirai pas, la conséquence suivante : un même dispositif expérimental ne peut permettre de mesurer à la fois avec précision deux grandeurs A et B que si les opérateurs correspondants commutent, c'est-à-dire si l'on a $AB\varphi = BA\varphi$, quelle que soit φ . S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si en général $AB\varphi \neq BA\varphi$, alors tout dispositif expérimental de mesure permettant d'attribuer à A une valeur affectée d'une certaine incertitude laissera subsister sur la valeur de B une incertitude d'autant plus grande que la mesure de A aura été plus précise et inversement. L'exemple typique de deux grandeurs qui ne sont pas simultanément mesurables avec précision est fourni par tout couple de grandeurs « canonicquement » conjuguées au sens de la Mécanique analytique, comme

par exemple la coordonnée x d'un corpuscule et la composante p_x correspondante de la quantité de mouvement. Dans ce dernier cas les opérateurs correspondants (qui sont x et $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$) sont tels que $AB - BA = \frac{h}{2\pi i}$ et, par suite, ne commutent pas; on montre alors que les incertitudes existant sur les valeurs de x et de p_x satisfont toujours aux inégalités d'Heisenberg

$$(6) \quad \delta x \delta p_x \geq h$$

et, par suite, ne peuvent jamais être simultanément nulles.

Il existe d'ailleurs des grandeurs qui, sans être canoniquement conjuguées ne commutent cependant pas, par exemple les trois composantes rectangulaires M_x , M_y , M_z du mouvement de la quantité de mouvement pour lesquels on trouve

$$M_x M_y - M_y M_x = \frac{h}{2\pi i} M_z, \dots$$

et l'on montre alors que les incertitudes sur la valeur de deux de ces composantes ne peuvent pas en général être nulles simultanément.

On peut traduire ces résultats dans un langage un peu différent en disant que notre principe général fait correspondre à la valeur de toute grandeur physique mesurable une distribution de probabilité correspondant à la forme du Ψ . Dans le cas discontinu, les probabilités des valeurs α_i sont $P_i = |c_i|^2$ et dans le cas continu la densité de probabilité sera $\rho(\alpha) = |c(\alpha)|^2$. L'état d'un corpuscule (ou d'un système) étant défini par une certaine fonction Ψ , à l'ensemble des grandeurs physiques mesurables correspondra un ensemble de distribution de probabilité que la théorie actuelle considère (peut-être à tort, nous le verrons) comme intervenant exactement sur le même pied pour le corpuscule (ou le système) dans l'état Ψ .

On peut alors définir pour chaque distribution de probabilité une « dispersion » égale à la racine carrée du carré moyen de l'écart par rapport de la valeur moyenne. On pose donc pour cette dispersion

$$(7) \quad \sigma(A) = \sqrt{(\alpha - \bar{\alpha})^2} = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}^2}.$$

On peut ensuite démontrer que l'on a pour deux grandeurs A et B

$$(8) \quad \sigma(A) \sigma(B) \geq \frac{1}{2} |\overline{AB - BA}|.$$

Si les opérateurs A et B commutent, le second membre de (8) est

nul, ce que l'on interprètera en disant qu'on peut obtenir par une même opération de mesure des valeurs précises, donc à dispersion nulle, des grandeurs A et B. Si les opérateurs A et B ne commutent pas, le second membre de (8) donne une borne inférieure non nulle pour le produit des dispersions de sorte qu'aucune opération de mesure ne doit pouvoir fournir simultanément des valeurs précises pour A et pour B. Pour deux grandeurs canoniquement conjuguées, on a $AB - BA = \frac{h}{2\pi i}$, et l'on trouve

$$(8 \text{ bis}) \quad \sigma(A) \sigma(B) \geq \frac{h}{4\pi},$$

ce qui constitue une sorte d'énoncé plus précis des relations d'incertitude (6).

Avant de poursuivre l'étude des conséquences de ce formalisme, je voudrais insister sur ce qu'il a d'extrêmement abstrait. La fonction d'onde Ψ est considérée comme une simple fonction mathématique solution complexe d'une équation aux dérivées partielles qui aurait, pour ainsi dire fortuitement, la forme d'une équation de propagation d'ondes. En jetant un voile sur les considérations physiques qui m'avaient guidé au début de mes recherches et sur celles qui avaient été ensuite développées par M. Schrödinger, on ne cherche plus à se faire aucune image physique des rapports de l'onde et du corpuscule. On ne sait même plus bien si l'onde Ψ est autre chose qu'une expression mathématique permettant l'évaluation de probabilités et s'il lui reste quelque ombre de réalité physique. D'autre part, la considération simultanée de tous les développements de l'onde Ψ et la mise sur le pied d'égalité de toutes les répartitions de probabilités qui s'en déduisent a quelque chose d'étrange puisque l'on sait que chacune de ces répartitions n'aura une signification physique qu'*après* l'exécution de la mesure correspondante, mesure qui, nous allons le voir, modifie complètement l'état de chose initial. Évidemment on peut toujours dire que le physicien qui connaît le Ψ a le droit de s'en servir pour calculer les valeurs d'une grandeur physique qui sont les résultats possibles d'une mesure de cette grandeur et les probabilités correspondantes. Mais les répartitions de probabilités ainsi obtenues n'ont qu'une valeur subjective et ne peuvent prendre une valeur objective qu'après l'exécution effective de la mesure entraînant l'intervention d'un dispositif approprié. Nous reviendrons plus tard sur ces questions qui restent assez obscures dans le formalisme actuellement utilisé et nous allons poursuivre l'étude des conséquences de ce formalisme.

2. Réduction du paquet de probabilité. — Dans l'interprétation actuellement admise du formalisme exposé plus haut, la mesure joue un rôle qui, bien qu'un peu mystérieux, est essentiel. C'est elle qui, en nous apportant des informations nouvelles, change l'état de nos connaissances sur le système étudié et par suite, nous oblige à modifier brusquement la forme de l'onde Ψ qui représente nos connaissances sur le corpuscule (ou sur le système). Si, par exemple, la mesure est une mesure de position plus ou moins précise, le train d'ondes Ψ initialement associé au corpuscule se trouvera « réduit » à un train d'ondes moins étendu qui peut même être presque ponctuel si la mesure est précise, puisque la région où la probabilité de présence $|\Psi|^2$ est différente de zéro a diminué d'étendue. D'où le nom de « réduction du paquet de probabilité » donné naguère par M. Heisenberg à cette modification du Ψ . Si la mesure consistait au contraire dans la détermination de l'une des composantes de la quantité de mouvement p_x , c'est dans l'espace des moments qu'aurait lieu la réduction du paquet de probabilité puisque ce serait alors l'étendue des valeurs de p_x figurant effectivement dans la représentation de Fourier de Ψ qui aurait diminué.

La question de la réduction du paquet de probabilité pose dans l'interprétation actuelle un problème difficile; est-ce l'action du dispositif de mesure qui modifie l'onde Ψ ou est-ce la connaissance que nous acquérons des résultats de la mesure qui entraîne cette modification? Je ne sais pas si tous les auteurs qui adoptent l'interprétation probabiliste actuelle seraient d'accord sur la réponse à faire à cette question.

Les uns (et ce serait probablement le cas de M. Bohr) seraient soucieux de conserver un certain caractère de réalité physique à l'onde Ψ et diraient que c'est l'action de l'appareil de mesure sur l'onde Ψ qui provoque la réduction du paquet de probabilité. D'autres, peut-être plus logiques avec eux-mêmes, diraient que c'est la connaissance du résultat de la mesure qui nécessite la modification de l'onde puisque, tant que le résultat de la mesure ne nous est pas connu, ce sont les anciennes prévisions de probabilités correspondant à la forme primitive du Ψ qui pour nous restent valables pour faire des prévisions. Mais si l'on adopte cette seconde opinion, l'onde Ψ n'est plus qu'une représentation *purement subjective* des probabilités et ne peut être à aucun degré une représentation de la réalité objective. Comment alors se fait-il qu'elle obéisse à une équation de propagation d'ondes et que, malgré tout, elle fournisse une représentation statistique probablement

exacte de phénomènes dont la réalité objective ne saurait être mise en doute? La question reste vraiment obscure : nous y reviendrons.

La réduction du train d'ondes Ψ donne lieu à une situation nouvelle caractérisée par une nouvelle forme du Ψ , situation qui était imprévisible à l'avance puisque seules les probabilités des diverses mesures possibles pouvaient être calculées avant une mesure effective. Nous aurons à nous demander si cette imprévisibilité résulte d'une réelle indétermination, comme on l'admet actuellement, ou au contraire de la valeur de certaines variables cachées comme le prétend la théorie de la double solution, question en relation étroite avec un théorème énoncé par M. von Neumann dans sa théorie de la Mesure en Mécanique ondulatoire.

Les relations d'incertitude de Heisenberg montrent qu'un dispositif permettant d'effectuer simultanément des mesures diverses sur un corpuscule ne peut pas nous faire connaître à la fois avec précision la valeur de toutes les grandeurs caractérisant le corpuscule. Il y a donc une connaissance maximum incomplète de ces grandeurs qui est compatible avec les relations d'incertitude. Ayant acquis cette connaissance maximum, nous pouvons construire la fonction d'onde qui convient pour représenter nos connaissances immédiatement après la mesure et, à partir de cette forme initiale du Ψ , nous pourrions suivre son évolution ultérieure au cours du temps à l'aide de l'équation des ondes. Nous pourrions ainsi à tout instant calculer la probabilité des résultats des diverses mesures que l'on pourrait opérer à cet instant. Il en sera ainsi jusqu'à ce que nous connaissions le résultat de nouvelles mesures modifiant l'état de nos connaissances et interrompant brusquement l'évolution régulière de l'onde Ψ . L'évolution régulière de cette onde entre deux mesures, évolution réglée par l'équation d'ondes, est, elle, entièrement déterminée par la forme initiale du Ψ (et éventuellement par les conditions aux limites) puisque l'équation d'ondes est du premier ordre par rapport au temps. Ainsi il y a déterminisme de l'évolution du Ψ entre deux mesures, mais non pas déterminisme des phénomènes observables puisque la connaissance de la fonction d'onde ne donne pour ceux-ci que des probabilités. Si la description de la réalité physique par la fonction Ψ est une description *complète*, s'il n'existe pas de description plus complète introduisant par exemple des variables cachées, il n'y a pas de déterminisme des phénomènes physiques.

3. Effacement des phases par la mesure. Interférences des proba-

bilités. — La mesure introduit une discontinuité dans l'évolution de la fonction d'onde : la connaissance de celle-ci *après* la mesure ne permet aucunement de remonter à la forme qu'elle avait *avant* la mesure.

Considérons un très grand nombre de corpuscules (ou de systèmes) se trouvant initialement dans le même état représenté par le même Ψ . Mesurons pour chacun d'eux une certaine grandeur A de fonctions propres φ_l et de valeurs propres α_l . Après ces mesures, la proportion des corpuscules (ou systèmes) pour lesquels on aura trouvé pour A les diverses valeurs α_l nous fourniront les carrés des modules des coefficients c_l dans le développement $\Psi = \sum_l c_l \varphi_l$ de la fonction d'onde *avant* la mesure. La connaissance des Ψ pour tous les corpuscules (ou systèmes) après la mesure nous fournit donc les valeurs des $|c_l|$, mais pour connaître les c_l eux-mêmes, il nous manque la connaissance de leurs arguments, donc des phases relatives des composantes $c_l \varphi_l$ de la fonction d'onde initiale.

C'est cette remarque qui a amené M. Bohr à souligner que toute mesure a pour conséquence d'effacer complètement les phases. C'est cet effacement des phases par l'acte de mesure qui fait que celui-ci constitue une coupure dans l'évolution du Ψ . En effet, les différences de phases entre les composantes du développement $\sum_l c_l \varphi_l$ ont une importance capitale et toute connaissance relative à la fonction d'onde qui ne comporte pas la connaissance de ces différences de phase est radicalement incomplète. Cette importance des phases va se manifester clairement à nous dans l'étude du phénomène de l'interférence des probabilités.

Considérons deux grandeurs A et B dont les opérateurs ne commutent pas et qui, par suite, ne sont pas simultanément mesurables. Les valeurs et fonctions propres de A sont α_i et φ_i , celles de B sont β_k et χ_k . On démontre aisément que, A et B ne commutant pas, le système des φ_i ne peut pas coïncider avec celui des χ_k . Cependant, comme les χ_k forment un système complet, chaque φ_i peut s'exprimer à l'aide des χ_k sous la forme

$$(9) \quad \varphi_i = \sum_k s_{ik} \chi_k,$$

les s_{ik} étant les éléments d'une matrice unitaire \mathcal{S} . Dans ce développement figurent en général plus d'un terme au second membre puisque

le système des φ_i et celui des χ_k ne coïncident pas. Supposons alors que l'état du corpuscule (ou système) examiné soit représenté par la fonction d'onde

$$(10) \quad \Psi = \sum_i c_i \varphi_i = \sum_{ik} c_i s_{ik} \chi_k.$$

Si alors on mesure la grandeur A, on trouve l'une des valeurs propres α_i , la probabilité de trouver α_j étant *a priori* $|c_j|^2$. Après la mesure, le corpuscule (ou système) se trouvera dans l'état φ_i et, dans ce nouvel état, une mesure de B conduit à la valeur β_k avec la probabilité $|s_{ik}|^2$. Ainsi la probabilité de trouver la valeur β_k pour B en mesurant d'abord A, puis B, sera égale à $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$.

Mais supposons maintenant que nous ayons effectué la mesure de B directement sur l'état initial. Alors d'après la forme du dernier membre de (10), le principe général relatif aux probabilités des résultats de mesure nous apprend que la probabilité de trouver β_k est égale à $|\sum_i c_i s_{ik}|^2$. Cette expression est entièrement différente de la précédente parce qu'elle dépend des phases (ou arguments) des c_i et des s_{ik} alors que $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ visiblement n'en dépend pas. C'est là ce qu'on nomme « l'interférence des probabilités ».

Illustrons ceci par un exemple simple. Prenons un domaine à une dimension de longueur L. Dans ce domaine, les fonctions propres normées de la quantité de mouvement sont $\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2i\pi i}{h} p_i x}$. Soit alors

$$(11) \quad \Psi = \sum_i \frac{c_i}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2i\pi i}{h} p_i x} \quad \left(\sum_i |c_i|^2 = 1 \right)$$

la fonction d'onde du corpuscule dans son état initial. Si l'on mesure d'abord p , puis x , la probabilité de la position $x = x_0$ sera

$$\sum_i |c_i|^2 \left| \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{2i\pi i}{h} p_i x_0} \right|^2$$

ou simplement $\frac{1}{L}$, ce qui exprime l'égale probabilité de toutes les positions sur le segment de longueur L.

Mais si, au contraire, on mesure directement la coordonnée x dans l'état initial, la probabilité de la valeur $x = x_0$ sera $|\Psi(x_0)|^2$ et elle

fait intervenir l'interférence des ondes planes dont la superposition constitue le Ψ , résultat qui est nécessaire pour rendre compte des interférences en Optique et de la diffraction des électrons. L'on voit donc que l'interférence des probabilités, dont l'existence est nécessaire pour l'interprétation des faits expérimentaux, dépend essentiellement des phases dont le rôle se montre ainsi capital.

Le fait que la probabilité de la valeur β_k de B mesurée directement dans l'état initial soit $\left| \sum_i c_i s_{ik} \right|^2$ et non $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ pourrait au premier abord paraître contraire au théorème des probabilités composées, mais en réalité il n'en est rien : la probabilité $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ est bien celle que l'on doit attendre quand on fait d'abord la détermination de A, puis celle de B, puisqu'elle est égale à la somme des produits de la probabilité pour obtenir *d'abord* une valeur α_i pour A par la probabilité d'obtenir *ensuite* la valeur β_k pour B. Le théorème des probabilités composées est donc sauf et, si l'on envisage les probabilités uniquement au point de vue subjectif, on peut dire qu'il n'y a aucune raison pour la probabilité $\sum_i |c_i|^2 |s_{ik}|^2$ soit égale à celle d'obtenir directement la valeur β_k de B par une mesure de cette grandeur dans l'état initial. Mais, si l'on analyse bien cette idée, l'on voit que toutes les répartitions de probabilité introduites par la théorie usuelle (sauf, sans doute, le $|\Psi|^2$) n'existent dans l'état initial que subjectivement pour le physicien qui veut faire des prévisions sur le résultat des mesures possibles; ces répartitions n'existent objectivement qu'après que la mesure correspondante a été effectuée quand on ignore encore le résultat de cette mesure. C'est cette circonstance qui expliquera plus loin pourquoi le schéma de l'interprétation probabiliste usuelle de la Mécanique ondulatoire n'est pas en accord avec le schéma habituellement admis par les statisticiens.

4. Divergence entre le schéma statistique de la Mécanique ondulatoire et le schéma usuel des statisticiens. — Dans le schéma usuel des statisticiens, que nous exposerons en supposant que l'on a affaire à des variables continues), on définit pour chaque variable aléatoire X une densité de probabilité $\rho_X(x)$ telle que $\rho_X(x) dx$ soit la probabilité pour que X ait une valeur comprise entre x et $x + dx$. Pour une autre variable aléatoire continue Y, on définira de même $\rho_Y(y)$.

On définit ensuite une densité $\rho(x, y)$ telle que $\rho(x, y) dx dy$ soit

la probabilité d'obtenir par une même opération de mesure (les statisticiens disent souvent par une même *épreuve*) des valeurs de X et Y comprennent respectivement dans les intervalles $x \rightarrow x + dx$ et $y \rightarrow y + dy$. Cette définition paraît toute naturelle si l'on adopte une image concrète de la probabilité en se figurant des « individus » pour chacun desquels les grandeurs X et Y ont une valeur déterminée, la statistique s'introduisant par la considération simultanée d'un très grand nombre d'individus pour lesquels X et Y ont des valeurs différentes.

En dehors de $\rho_X(x)$, $\rho_Y(y)$, et $\rho(x, y)$, les statisticiens considèrent aussi la densité de probabilité de Y liée par X , $\rho_Y^{(X)}(x, y)$ qui correspond à la probabilité d'obtenir la valeur y de Y *quand on sait que* X *a la valeur* x et l'on définit de même la probabilité de X liée par Y à l'aide de $\rho_X^{(Y)}(x, y)$.

Maintenant l'on doit avoir entre les cinq densités de probabilité que nous venons de définir les relations suivantes que l'on considère comme évidentes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \rho_X(x) = \int \rho(x, y) dy, & \rho_Y(y) = \int \rho(x, y) dx, \\ \rho_X^{(Y)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_Y(y)}, & \rho_Y^{(X)}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_X(x)}, \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$(13) \quad \rho_X(x) = \int \rho_X^{(Y)}(x, y) \rho_Y(y) dy, \quad \rho_Y(y) = \int \rho_Y^{(X)}(x, y) \rho_X(x) dx.$$

Or le fait essentiel est que le schéma précédent, habituellement considéré par les statisticiens comme allant de soi, n'est pas applicable aux répartitions de probabilités envisagées par l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire. En effet, il est en général impossible de définir pour deux grandeurs mesurables la densité $\rho(x, y)$ puisqu'il est en général impossible de mesurer simultanément la valeur des grandeurs X et Y . Les formules (12) n'ont donc plus de sens ici. Sans doute il est toujours possible de définir les densités $\rho_X(x)$, $\rho_Y(y)$, $\rho_X^{(Y)}(x, y)$ et $\rho_Y^{(X)}(x, y)$, mais elles ne sont plus reliées par les formules (12) et (13).

Reprenons comme exemple le cas précédemment examiné de deux grandeurs mesurables A et B non commutantes et récrivons les formules (9) et (10) en passant du cas discontinu au cas continu. Nous avons

$$(14) \quad \varphi(\alpha) = \int s(\alpha, \beta) \chi(\beta) d\beta, \quad \chi(\beta) = \int s^{-1}(\alpha, \beta) \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Si Ψ est de la forme

$$(15) \quad \Psi = \int c(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = \iint c(\alpha) s(\alpha, \beta) \chi(\beta) d\alpha d\beta,$$

on trouve

$$(16) \quad \rho_A(\alpha) = |c(\alpha)|^2, \quad \rho_B(\beta) = \left| \int c(\alpha) s(\alpha, \beta) d\alpha \right|^2,$$

la seconde formule exprimant l'interférence des probabilités, puis

$$(17) \quad \rho_B^{(A)}(\alpha, \beta) = |c(\alpha)|^2 |s(\alpha, \beta)|^2, \quad \rho_A^{(B)}(\alpha, \beta) = \left| \int c(\gamma) s(\gamma, \beta) d\gamma \right|^2 |s^{-1}(\alpha, \beta)|^2,$$

mais ici les produits $\rho_B(\beta) \rho_A^{(B)}(\alpha, \beta)$ et $\rho_A(\alpha) \rho_B^{(A)}(\alpha, \beta)$ n'ont aucune raison d'être égaux, ce qui montre bien l'inexistence de la densité $\rho(\alpha, \beta)$ qui devrait être égale à leur valeur commune.

D'où vient ce caractère particulier, assez étrange, des distributions statistiques de la Mécanique quantique actuelle? La réponse paraît être contenue dans le rôle essentiel qu'y joue la mesure. Les distributions de probabilité de la Mécanique quantique actuelle (à l'exception peut-être de quelques-unes d'entre elles) ne constituent pas des probabilités objectives pouvant être considérées comme correspondant toutes, à un même instant, à une collections d'individus pour lesquelles les grandeurs auraient des valeurs bien déterminées. L'hypothèse implicite, qui pour le statisticien rend « évidentes » les relations (12) et (13), n'est pas ici réalisée.

C'est seulement *après* l'action du dispositif de mesure d'une grandeur sur le corpuscule (ou sur le système) que la répartition de probabilité peut être considérée comme réalisée objectivement; pour parler plus exactement, si l'on imagine que la mesure d'une certaine grandeur est effectuée simultanément sur une infinité de corpuscules (ou de systèmes) ayant initialement la même fonction Ψ , c'est seulement après l'exécution de la mesure sur tous ces corpuscules (ou systèmes) que l'on a réellement une collection d'individus possédant chacun une valeur précise de la valeur mesurée, ces valeurs étant réparties suivant la loi de probabilité en $|c_k|^2$. Et encore faut-il bien remarquer que la loi de probabilité en $|c_k|^2$ ne se trouve ainsi réalisée objectivement par un collectif que pour la grandeur mesurée et celles qui commutent avec elles, à l'exclusion des autres. Dans l'état initial, quand aucune mesure n'a encore été effectuée, le physicien, s'il connaît la fonction d'onde, peut calculer les diverses répartitions de probabilité qu'il peut ensuite se décider à mesurer; mais chacune de ces répartitions ne pourra se

trouver ainsi réalisée et correspondre à un collectif qu'après l'exécution de la mesure correspondante. Jamais toutes les répartitions ne pourront se trouver à la fois réalisées puisqu'on ne peut pas mesurer simultanément toutes les grandeurs et que, pour mesurer deux grandeurs non commutantes, il faudrait employer deux dispositifs de mesure qui sont incompatibles.

Certes le physicien a toujours le droit de considérer simultanément avant toute mesure l'ensemble des distributions de probabilité qui peuvent se déduire des différents développements du Ψ initial, mais ces probabilités ont alors un caractère subjectif et ne sont pas des probabilités objectives statistiquement réalisées par un même collectif d'individus. Si donc on veut raisonner sur l'ensemble des distributions de probabilité correspondant à une forme donnée de la fonction d'onde, on ne devra *jamais* supposer que toutes ces distributions ont, avant toute mesure, la nature de probabilités objectives correspondant à un même collectif d'individus. C'est cela qui empêche, nous l'avons vu d'attribuer aux distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire usuelle les propriétés (12) et (13) qui sont évidentes pour des probabilités objectives se rapportant à un collectif d'individus à caractéristiques bien déterminées. C'est, pensons-nous, pour la même raison que le célèbre théorème de M. von Neumann dont nous parlerons bientôt n'est au fond qu'un truisme et ne prouve nullement l'impossibilité de rétablir le déterminisme en Mécanique ondulatoire par l'introduction de variables cachées.

CHAPITRE II.

LA THÉORIE DE LA MESURE D'APRÈS M. VON NEUMANN ⁽¹⁾.

1. **Cas purs et mélanges.** — Reprenons d'abord quelques considérations sur l'interférence des probabilités. Soit un très grand nombre \mathcal{N} de corpuscules (ou de systèmes) qui ont tous la même fonction d'onde Ψ . A étant une grandeur physique mesurable de valeurs propres α_k et de fonctions propres φ_k , si l'on a $\Psi = \sum_k c_k \varphi_k$, la mesure de A doit conduire à trouver pour $|c_1|^2 \mathcal{N}$ systèmes la valeur α_1 , pour $|c_2|^2 \mathcal{N}$ systèmes la valeur α_2 , etc. La valeur moyenne de A sur $\sum_k |c_k|^2 \alpha_k$.

Imaginons maintenant qu'au lieu d'avoir \mathcal{N} systèmes dans le même état, nous ayons $|c_1|^2 \mathcal{N}$ dans l'état φ_1 , $|c_2|^2 \mathcal{N}$ systèmes dans l'état φ_2 , etc. Alors la mesure de A nous donnera les mêmes résultats statistiquement que dans le premier cas. On pourrait donc croire que les deux cas sont équivalents, mais nous allons voir qu'il n'en est rien.

Considérons en effet une grandeur physique mesurable B qui ne commute pas avec A. Les fonctions propres de B ne coïncident pas avec celles de A et si β_k et χ_k sont les valeurs propres et les fonctions propres de B, on aura $\varphi_k = \sum_l d_{kl} \chi_l$, le développement contenant en général plusieurs termes. Envisageons d'abord le premier cas, celui où nous avons \mathcal{N} systèmes tous dans le même état

$$\Psi = \sum_k c_k \varphi_k = \sum_{kl} c_k d_{kl} \chi_l.$$

Alors la mesure de B pour tous ces systèmes donnera $\mathcal{N} \left| \sum_k c_k d_{kl} \right|^2$ fois

⁽¹⁾ Voir bibliographie [1], [2].

la valeur β_l et la valeur moyenne de B sera

$$(1) \quad \bar{B} = \sum_l \left| \sum_k c_k d_{kl} \right|^2 \beta_l = \int \Psi^* B \Psi d\tau = \sum_{kl} c_k^* c_l B_{kl}^{(\varphi)},$$

avec

$$B_{kl}^{(\varphi)} = \int \varphi_k^* B \varphi_l d\tau.$$

Plaçons-nous ensuite dans le second cas où nous avons $\mathcal{N} |c_1|^2$ systèmes dans l'état φ_1 . La mesure de A sur les $\mathcal{N} |c_1|^2$ premiers systèmes donnera la valeur β_l pour une proportion de ces systèmes égale à $|d_{1l}|^2$, etc. Au total, la valeur β_l de B sera obtenue

$$\mathcal{N} \sum_k |c_k|^2 |d_{kl}|^2$$

fois et par suite la valeur moyenne de B sera

$$(2) \quad \bar{B} = \sum_{kl} |c_k|^2 |d_{kl}|^2 \beta_l = \sum_k |c_k|^2 B_{kk}^{(\varphi)},$$

avec

$$B_{kk}^{(\varphi)} = \int \varphi_k^* B \varphi_k d\tau.$$

On voit ainsi que, pour toute grandeur qui ne commute pas avec A, les deux cas envisagés sont tout à fait différents. Dans le premier, il y a interférence des probabilités, dans le second cette interférence n'a pas lieu. On ne peut donc pas considérer que les \mathcal{N} systèmes forment un collectif comprenant $\mathcal{N} |c_1|^2$ individus ayant pour A la valeur α_1 , etc. D'ailleurs, il est évident qu'il serait tout ainsi légitime de considérer les \mathcal{N} systèmes comme formant un collectif comportant $\mathcal{N} |d_1|^2$ systèmes ayant la valeur β_1 pour B, avec $d_1 = \sum_k c_k d_{k1}$, etc. et ce second

collectif ne coïnciderait pas avec le premier. Nous ne pouvons donc pas considérer l'ensemble des \mathcal{N} systèmes comme formant un collectif bien déterminé puisque ce collectif varierait suivant la grandeur envisagée. Nous retrouvons là l'idée que nous avons précédemment mise en lumière : les probabilités envisagées en Mécanique ondulatoire usuelle ne sont pas des probabilités objectives correspondant à un collectif unique réalisé dans l'état Ψ . Pour distinguer le cas où la répartition de probabilité pour une grandeur A n'a qu'une valeur subjective avant la mesure de celui où, après la mesure, cette répartition est réalisée,

M. von Neumann dit que le premier cas constitue un « cas pur » tandis que le second constitue un « mélange ».

Sans faire intervenir un acte de mesure, on peut imaginer \mathcal{N}_1 systèmes ayant une fonction d'onde $\Psi^{(1)}$, \mathcal{N}_2 systèmes ayant une fonction d'onde $\Psi^{(2)}$, etc. L'ensemble de tous les \mathcal{N} systèmes forment alors un « mélange » de \mathcal{N}_1 cas purs correspondant à $\Psi^{(1)}$, de \mathcal{N}_2 cas purs correspondant à $\Psi^{(2)}$, etc. Nous retrouverons le second cas étudié au début du paragraphe en prenant $\mathcal{N}_i = \mathcal{N} |c_i|^2$, Si nous posons $\frac{\mathcal{N}_i}{\mathcal{N}} = p_i$, nous aurons un « mélange » défini par l'ensemble des « poids statistiques » p_k avec $\sum_k p_k = 1$.

Si nous posons $c_k = \sqrt{p_k} e^{i\alpha_k}$, nous voyons que les $p_k = |c_k|^2$ sont les poids statistiques du mélange qui est équivalent, *en ce qui concerne la mesure de A*, au cas pur Ψ . Mais ce mélange n'est réalisé qu'après la mesure qui transforme le cas pur initial en ce mélange. Le mélange équivalent au cas pur Ψ pour la mesure d'une grandeur B non commutable avec A ferait intervenir des poids statistiques différents des précédents et ne serait réalisé que par une mesure faisant intervenir un dispositif d'un type différent. C'est pourquoi on ne peut pas réduire un cas pur à un mélange déterminé.

Nous avons vu que pour le cas pur Ψ , la valeur moyenne de B était donnée par la formule (1). Si l'on remplace ce cas pur par le mélange qui se trouve réalisé par la mesure de A, la valeur moyenne de B est donnée par la formule (2). Il est facile de préciser en quoi diffèrent les deux expressions (1) et (2). La formule (1) peut s'écrire

$$(3) \quad \bar{B} = \sum_{kl} |c_k| \cdot |c_l| e^{i(\alpha_l - \alpha_k)} B_{kl}^{(\varphi)}.$$

Si l'on suppose tout à fait inconnues les phases α_k (arguments des α_k) avec égale probabilité de leurs valeurs possibles, la valeur moyenne de l'expression (3) s'obtiendra en faisant une moyenne sur les valeurs des α_k supposées toutes également probables. Les termes où $k \neq l$ donneront zéro et nous retrouverons l'expression (2). Autrement dit, on passe du cas pur Ψ au mélange réalisé par la mesure de A en supposant que cette mesure a fait perdre entièrement la connaissance des phases α_k . Nous retrouvons bien ici la conclusion que la mesure de A effectuée sur l'état initial représenté par $\Psi = \sum_k c_k \varphi_k$ a pour effet d'effacer complètement les différences de phase existant entre les composantes φ_k du Ψ initial.

Finalement, nous avons obtenu une idée nette de la différence entre un « cas pur » défini par une fonction d'onde Ψ et un « mélange » formé par un ensemble de cas purs de fonctions d'onde Ψ_1, Ψ_2, \dots affectés de poids statistiques p_1, p_2, \dots .

2. La matrice statistique de J. von Neumann pour un cas pur. — Envisageons d'abord un cas pur défini par une fonction d'onde de forme donnée. Cette fonction peut être considérée comme un vecteur dans l'espace de Hilbert. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ est un système complet orthonormé de fonctions de base (par exemple les fonctions propres d'un opérateur A linéaire et hermitien), les φ_i peuvent être considérées comme formant un système complet de vecteurs unitaires dans l'espace de Hilbert et l'expression $\Psi = \sum_k c_k \varphi_k$ sera analogue à l'expression d'un vecteur à l'aide de ses composantes sur des directions orthogonales définies par des vecteurs unitaires. On peut dire que les c_k sont les composantes du Ψ dans le système de base des φ_k . L'espace de Hilbert que nous considérons est un espace complexe et les composantes c_k sont en général complexes.

Soient alors deux vecteurs de l'espace de Hilbert.

$$\Psi = \sum_k c_k \varphi_k \quad \text{et} \quad \chi = \sum_k d_k \varphi_k.$$

Par définition, leur produit scalaire est (D étant le domaine de variation des variables des φ)

$$(4) \quad (\Psi, \chi) = \int_D \Psi^* \chi \, d\tau = \sum_{kl} c_k^* d_l \int_D \varphi_k^* \varphi_l \, d\tau = \sum_{kl} c_k^* d_l \delta_{kl} = \sum_k c_k^* d_k$$

et l'on a

$$(5) \quad (\chi, \Psi) = (\Psi, \chi)^*;$$

on a bien ainsi la généralisation pour des vecteurs complexes de l'expression classique du produit scalaire.

Le produit scalaire d'un vecteur Ψ par lui-même, analogue au carré de la longueur d'un vecteur ordinaire, est appelé la « norme » de ce vecteur et a pour valeur

$$(6) \quad N(\Psi) = (\Psi, \Psi) = \int_D |\Psi|^2 \, d\tau = \sum_k |c_k|^2.$$

Si le vecteur est normé, on a

$$N(\Psi) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_k |c_k|^2 = 1.$$

Dans l'espace de Hilbert, un opérateur correspond à l'opérateur qui fait passer d'un vecteur à un autre. $\chi = A\Psi$ définit ainsi l'opération qui fait passer de Ψ à χ et l'on a

$$(7) \quad \sum_l d_l \varphi_l = A \sum_k c_k \varphi_k,$$

d'où, en multipliant par φ_j^* et en intégrant dans D,

$$(8) \quad d_j = \sum_k c_k \int_D \varphi_j^* A \varphi_k d\tau = \sum_k a_{jk} c_k.$$

Les a_{jk} , éléments de la matrice engendrée par A dans le système des φ_k , sont donc les coefficients de la transformation linéaire qui fait passer des composantes de Ψ à celle de χ . La conservation de la norme impose que la matrice a soit unitaire.

Ψ étant de nouveau la fonction d'un « cas pur », envisageons dans l'espace de Hilbert l'opération « projection sur le vecteur Ψ ». Soit P_Ψ l'opérateur correspondant. Il est évident que $P_\Psi^2 = P_\Psi$ et plus généralement que $P_\Psi^n = P_\Psi$. Toutes les puissances de P étant identiques, on dit que cet opérateur est « idempotent ».

Soit alors un système complet de fonctions de base ortho-normées $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$. Nous avons pour le Ψ un développement

$$\Psi = \sum_k c_k \varphi_k, \quad \text{avec} \quad c_k = \int_D \varphi_k^* \Psi d\tau \quad \text{et} \quad \sum_k |c_k|^2 = 1.$$

On peut évidemment trouver une infinité de systèmes de base ortho-normés dont le Ψ soit l'un des vecteurs de base. Dans l'un de ces systèmes, la fonction φ_k aura un développement de la forme

$$(9) \quad \varphi_k = d\Psi + \dots, \quad \text{avec} \quad d = \int_D \Psi^* \varphi_k d\tau = c_k^*.$$

L'opérateur P_Ψ qui est le « projecteur » sur Ψ est défini par

$$(10) \quad P_\Psi \varphi_k = d\Psi = c_k^* \Psi$$

pour tout φ_k . La matrice engendrée par l'opérateur P_Ψ dans le système de base des φ_k a pour élément d'indices m, n

$$(11) \quad (P_\Psi)_{mn} = \int_D \varphi_m^* P_\Psi \varphi_n d\tau = c_n^* \int_D \varphi_m^* \Psi d\tau = c_m c_n^*.$$

Ainsi la matrice P_Ψ attachée au cas pur considérée s'exprime à l'aide des coefficients du développement du Ψ dans le système de base utilisé. On a ainsi défini ce que M. von Neumann appelle la « matrice statis-

tique » attachée au cas pur Ψ : la formule (11) rend visible que cette matrice est hermitienne.

La matrice statistique possède deux propriétés fondamentales :

1° Sa matrice est égale à 1. En effet,

$$(12) \quad \text{Tr } P_{\Psi} = \sum_n (P_{\Psi})_{nn} = \sum_n c_n^* c_n = 1;$$

2° Elle est idempotente. En effet, on a

$$(13) \quad (P_{\Psi}^2)_{mn} = \sum_p c_m c_p^* \cdot c_p c_n^* = c_m c_n^* = (P_{\Psi})_{mn},$$

d'où, en matrice, $P_{\Psi}^2 = P_{\Psi}$ et, par récurrence, $P_{\Psi}^n = P_{\Psi}$.

Soit maintenant une grandeur A du système considéré. Les φ_k étant des fonctions de base orthonormées quelconques (ce ne sont plus ici les fonctions propres de A), nous avons vu que la valeur moyenne de A était

$$(14) \quad \bar{A} = \sum_{kl} c_k^* c_l A_{kl}^{(\varphi)},$$

les $A_{kl}^{(\varphi)}$ étant les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système des φ_k et c_k étant la composante du Ψ suivant φ_k . On peut aussi écrire

$$(15) \quad \bar{A} = \sum_{kl} (P_{\Psi})_{lk} A_{kl}^{(\varphi)} = \text{Tr}(P_{\Psi} A) = \text{Tr}(A P_{\Psi}).$$

Ainsi la connaissance de la matrice statistique nous fournit un moyen simple de calculer \bar{A} .

La matrice statistique d'un cas pur est souvent nommée « matrice statistique élémentaire » (einzelmatrix) par opposition aux matrices statistiques plus générales que nous allons rencontrer plus loin en étudiant les mélanges de cas purs.

Une matrice statistique élémentaire peut être aisément mise sous la forme diagonale. Il suffit pour cela de prendre comme système de base un système où le Ψ considéré soit l'une des fonctions de base, par exemple $\varphi_1 = \Psi$. La matrice statistique élémentaire prend alors la forme

$$(16) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}.$$

Tous les termes sont nuls sauf le premier terme diagonal qui est égal à 1 : ceci résulte aisément de (11). La trace de la matrice statistique est un invariant pour les changements de fonctions de base par suite d'une propriété connue des transformations unitaires : elle doit donc être égale à 1 comme le montre le tableau (16). Ce tableau permet aussi de vérifier immédiatement que la matrice statistique est idempotente.

3. La matrice statistique pour un mélange de cas purs. — Nous allons maintenant considérer un mélange de cas purs. Nous avons déjà défini un tel mélange en considérant \mathcal{N} systèmes dont $\mathcal{N}p_1$ sont dans l'état $\Psi^{(1)}$, $\mathcal{N}p_2$ dans l'état $\Psi^{(2)}$, ..., avec $\sum_k p_k = 1$. Mais nous pouvons

aussi introduire l'idée de mélange pour un seul système. Il se peut, en effet, que nous ignorions la forme exacte de la fonction d'onde d'un système et que nous sachions seulement qu'il a une probabilité p_1 d'être dans un état $\Psi^{(1)}$, une probabilité p_2 d'être dans un état $\Psi^{(2)}$ etc.,

une probabilité p_n d'être dans un état $\Psi^{(n)}$ avec $\sum_1^n p_k = 1$. L'état de nos connaissances sur le système est alors représenté par un mélange de cas purs avec les poids statistiques p_k .

Chacun des cas purs du mélange a sa matrice statistique élémentaire $P_{\Psi^{(k)}}$. Nous attribuerons au mélange une matrice statistique hermitienne

$$(17) \quad P = \sum_k^n p_k P_{\Psi^{(k)}},$$

avec

$$(18) \quad P_{lm} = \sum_k^n p_k c_l^{(k)} c_m^{(k)*},$$

où les poids statistiques p_k sont des nombres positifs compris entre 0 et 1 et dont la somme est égale à 1. Les $c_m^{(k)}$ sont les composantes des divers $\Psi^{(k)}$ dans le système de base $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. La matrice statistique (17) apparaît ainsi comme une superposition de matrices statistiques élémentaires.

Comme exemple, supposons que l'on ait pris comme fonctions de base les fonctions propres relatives à la position $\delta(q - q')$, δ étant la fonction singulière de Dirac. La formule

$$(19) \quad \Psi^{(k)}(q, t) = \int \Psi^{(k)}(q', t) \delta(q - q') dq'$$

montre qu'alors les $c_i^{(k)}$ sont égaux à $\Psi^{(k)}(q', t)$ et l'on trouve pour les composantes de la matrice statistique

$$(20) \quad P(q', q'') = \sum_k^n p_k \Psi^{(k)}(q') \Psi^{(k)*}(q'').$$

C'est là la matrice statistique de Dirac.

La valeur moyenne d'une grandeur mesurable A du système est

$$(21) \quad \bar{A} = \sum_k^n p_k A_{\Psi^{(k)}},$$

$\bar{A}_{\Psi^{(k)}}$ étant la valeur moyenne qu'aurait A si le système était dans l'état pur $\Psi^{(k)}$. D'après (15) nous obtenons alors

$$(22) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= \sum_k^n p_k \sum_j (P_{\Psi^{(k)}} A)_{jj} = \sum_j \left(\sum_k^n p_k P_{\Psi^{(k)}} A \right)_{jj} \\ &= \text{Tr}(PA) = \text{Tr}(AP). \end{aligned}$$

La formule est donc la même que pour un cas pur.

La matrice statistique d'un mélange, comme celles d'un cas pur, a toujours sa trace égale à 1, car

$$(23) \quad \text{Tr} P = \sum_m P_{mm} = \sum_m \sum_k^n p_k c_m^{(k)} c_m^{(k)*} = \sum_k^n p_k \sum_m |c_m^{(k)}|^2 = 1.$$

Par contre, tandis que la matrice d'un cas pur est toujours idempotente, il n'est pas de même pour la matrice statistique d'un mélange. On peut, en effet, démontrer que toute matrice statistique idempotente est élémentaire. Pour cela, on admet que $P^2 = P$ et l'on écrit P sous forme diagonale, ce qui est toujours possible. Si p_i est le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de P, la relation $P^2 = P$ exige que l'on ait $p_i^2 = p_i$ et les p_i sont donc nuls ou égaux à 1. L'équation $\text{Tr} P = 1$ satisfaites par toutes les matrices statistiques montre alors qu'un seul des p_i est différent de 0 et égal à 1. Le système a alors un Ψ unique qui se confond avec l'une des fonctions de base qui ramène P à sa forme diagonale. Donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice statistique soit idempotente est qu'elle soit élémentaire.

Considérons maintenant la matrice statistique non élémentaire d'un

mélange. Si les $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots, \Psi^n$ définissent les cas purs qui figurent dans le mélange étaient orthogonales (ce qui ne peut arriver qu'exceptionnellement), on pourrait les prendre comme les n premières fonctions de base d'un système orthonormé. Alors $c_m^{(k)} = \delta_{km}$, puisque $\Psi^{(k)}$ se réduit à φ_k et P_{lm} est nul pour $l \neq m$ tandis que les P_{kk} sont égaux aux p_k pour $k \leq n$ et nuls pour $k > n$. La matrice statistique prend alors la forme diagonale suivante :

$$(24) \quad \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_n & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}.$$

Mais c'est là un cas exceptionnel. En général les fonctions $\Psi^{(1)}, \dots, \Psi^{(n)}$ ne sont pas orthogonales. On peut cependant, même dans ce cas, ramener la matrice P à la forme diagonale, mais les éléments diagonaux p'_k ne sont plus égaux à $p_1, \dots, p_n, 0, 0, \dots$. La matrice P étant hermitienne, les p'_k sont des nombres réels. De plus, comme $\text{Tr} P = 1$, on a $\sum_k p'_k = 1$. Nous allons montrer que les p'_k ne peuvent être négatifs.

Pour cela, les ξ_k étant les composantes d'un vecteur Ξ dans l'espace de Hilbert, considérons le produit scalaire de Ξ par $P\Xi$. Il a pour valeur

$$(25) \quad (\Xi, P\Xi) = \sum_{mn} \xi_m^* \sum_k^n p_k c_m^{(k)} c_n^{(k)*} \xi_n = \sum_k^n p_k |(\Xi, \Psi^{(k)})|^2.$$

Le carré d'un module étant forcément positif ou nul, nous voyons que le produit scalaire (25) est nécessairement positif ou nul. Or, si nous mettons P sous sa forme diagonale, ce produit scalaire a pour expression

$$(26) \quad (\Xi, P\Xi) = \sum_m p'_m |\xi_m|^2$$

qui doit être ≥ 0 et ceci quel que soit Ξ . Donc les p'_m doivent tous être positifs ou nuls. Comme leur somme est égale à 1, on a $0 \leq p'_m \leq 1$. On en tire $p'_m - p_m'^2 \geq 0$, d'où pour un vecteur Ξ quelconque de l'espace de Hilbert

$$(27) \quad (\Xi, (P - P^2)\Xi) = \sum_m (p'_m - p_m'^2) |\xi_m|^2 \geq 0.$$

4. Irréductibilité des cas purs. — Nous arrivons maintenant à un

théorème qui joue un grand rôle dans la démonstration par laquelle M. von Neumann a voulu établir l'impossibilité d'expliquer le caractère probabiliste actuel de la Mécanique ondulatoire à l'aide de variables cachées.

L'important théorème en question s'énonce comme il suit :

Il est impossible de représenter un cas pur sous la forme d'un mélange, ou encore : Un cas pur n'est jamais réductible à une superposition de cas purs.

Il établit donc le caractère véritablement spécifique des cas purs.

En effet, si ce théorème n'était pas vrai, il devrait être possible, au moins dans certains cas, d'obtenir une relation de la forme

$$(28) \quad P = \sum_i \alpha_i Q_i,$$

P et les Q_i étant des matrices statistiques élémentaires, c'est-à-dire des matrices hermitiennes, idempotentes et de traces 1 et les α_i des nombres positifs tels que $\sum_i \alpha_i = 1$. Or on aurait alors

$$\begin{aligned} (29) \quad P^2 &= \sum_i \alpha_i^2 Q_i^2 + \sum_{i < j} \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j (Q_i Q_j + Q_j Q_i) \\ &= \sum_i \alpha_i^2 Q_i^2 + \sum_{i < j} \frac{1}{2} \alpha_i \alpha_j [Q_i^2 + Q_j^2 - (Q_i - Q_j)^2] \\ &= \sum_i \left[\alpha_i^2 + \alpha_i \sum_{j < i} \alpha_j \right] Q_i^2 - \sum_{i > j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2 \\ &= \sum_i \alpha_i Q_i^2 - \sum_{i > j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2, \end{aligned}$$

car $\sum_{j < i} \alpha_j = 1 - \alpha_i$. Donc on aurait

$$(30) \quad P^2 - P = \sum_i \alpha_i (Q_i^2 - Q_i) - \sum_{i > j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2.$$

Mais $P^2 = P$ et $Q_i^2 = Q_i$, d'où

$$(31) \quad \sum_{i > j} \alpha_i \alpha_j (Q_i - Q_j)^2 = 0$$

et, puisque tous les α_i sont positifs,

$$(32) \quad (Q_i - Q_j)^2 = 0.$$

Or le carré d'une matrice hermitienne ne peut être nul que si la matrice elle-même est nulle : en effet, si A est une matrice hermitienne, les éléments de A^2 sont

$$(a^2)_{ik} = \sum_l a_{il} a_{lk} = \sum_l a_{il} a_{kl}^*$$

et si les $(a^2)_{ii}$ sont nuls, on doit avoir aussi $\sum_l |a_{il}|^2 = 0$, ce qui exige que $a_{il} = 0$ et, par suite, $A = 0$.

$Q_i - Q_j$ étant une matrice hermitienne, la condition (32) entraîne $Q_i = Q_j$. Tous les Q_i seraient les mêmes et l'on aurait

$$P = \sum_i z_i Q_i = Q_i, \quad \text{puisque} \quad \sum_i z_i = 1.$$

Dès lors P ne serait pas vraiment une somme de matrices statistiques élémentaires, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Il est donc bien prouvé que les cas purs sont irréductibles et ne peuvent jamais être ramenés à des mélanges de cas purs. Le cas pur de la Mécanique ondulatoire possède donc les deux propriétés suivantes : 1° Il est représenté par une matrice statistique élémentaire (idempotente) alors que tout mélange a une matrice statistique qui n'est pas élémentaire (non idempotente); 2° Il ne peut par aucun moyen être ramené à un mélange de cas purs.

5. Les lois statistiques de la Mécanique quantique seraient impossibles à interpréter par l'introduction de variables cachées. — En Physique théorique classique, chaque fois que l'on devait faire intervenir des probabilités au lieu des lois rigoureuses, on supposait toujours qu'il existait un déterminisme des phénomènes, mais que ce déterminisme était trop compliqué ou trop subtil pour que nous puissions le suivre en détail, les apparences observables étant d'ordre statistique et s'exprimant pour cette raison par des probabilités. Les lois de probabilité et le hasard qu'elles semblent faire intervenir ne seraient pas la preuve d'une véritable contingence, mais le résultat de notre incapacité à suivre un déterminisme trop fin ou trop compliqué. C'est là la définition du hasard que l'on trouve sous la plume de tous les savants avant le développement de la Mécanique ondulatoire et, en particulier, dans les œuvres de Henri Poincaré.

L'exemple le plus connu d'une telle théorie pseudo-statistique en Physique est la théorie cinétique des gaz. On y admet que les mouve-

ments des molécules des gaz ainsi que leurs chocs mutuels sont régis par les lois rigoureuses de la Mécanique classique de sorte qu'il y a un déterminisme sous-jacent. Mais les molécules sont tellement nombreuses, leurs mouvements sont si compliqués que nous ne pouvons aucunement suivre dans ses détails ce déterminisme élémentaire : d'ailleurs les mouvements moléculaires échappent complètement à nos sens et nous ne pouvons prévoir que des effets macroscopiques de ces mouvements tels que pression, température, fluctuations locales de densité ou d'énergie, agitation brownienne d'un granule visible due au choc irrégulier des molécules, etc. Ces phénomènes macroscopiques résultant d'un nombre énorme de phénomènes élémentaires compliqués nous semblent relever d'une théorie statistique faisant intervenir uniquement des probabilités, mais cette intervention du hasard n'est qu'une apparence et par exemple les mouvements désordonnés d'un granule dans son agitation brownienne nous apparaîtraient régis par un déterminisme rigoureux si nous savions calculer tous les mouvements des molécules du gaz ambiant et leurs chocs avec le granule.

Puisque cette élimination du hasard au profit d'un déterminisme sous-jacent avait réussi en Physique classique, il pouvait paraître tentant de l'introduire en Physique quantique. Nous avons trouvé en Mécanique ondulatoire des lois de probabilité : ne pourrait-on pas supposer qu'elles résultent de notre ignorance d'un déterminisme caché ? Si l'on réussissait dans cette entreprise, on aurait une fois de plus éliminé l'indéterminisme et maintenu la conception classique du hasard : si, au contraire, l'on échouait, il faudrait abandonner le déterminisme et admettre une contingence absolue des phénomènes microphysiques. Pour employer le langage de M. von Neumann, dans le dernier cas la Mécanique ondulatoire serait une théorie « véritablement statistique ». Or M. von Neumann a cru pouvoir trancher définitivement la question en démontrant un théorème dont il pensait pouvoir déduire l'impossibilité de ramener les lois de probabilité de la Mécanique ondulatoire à un déterminisme caché.

Pour établir sa démonstration, M. von Neumann est parti des remarques suivantes :

Admettre un déterminisme sous-jacent, c'est admettre l'existence de variables dont nous ignorons les valeurs exactes (paramètres cachés) telles, par exemple, que les positions et les vitesses des molécules d'un gaz et les probabilités s'introduisent alors par suite de notre ignorance de ces paramètres cachés. Dans une théorie déterministe à paramètres cachés, l'état réel d'un gaz par exemple est à chaque instant entièrement

déterminé : toutes les molécules du gaz ont des positions et des vitesses bien définies et, si nous connaissions tous ces paramètres, nous pourrions représenter l'état du gaz par un point dans l'extension-en-phase. Mais nous ignorons la valeur exacte des paramètres cachés et, pour représenter les apparences statistiques globales seules accessibles à nos sens, nous envisageons un « mélange » d'états élémentaires avec des poids statistiques convenablement choisis. Les états élémentaires formant le mélange correspondent à des valeurs bien déterminées de toutes les grandeurs : ils sont donc indécomposables et aussi « sans dispersion », car toute grandeur A ayant une valeur bien définie est égale à sa valeur moyenne et la dispersion $\sigma = \sqrt{\overline{A^2} - (\overline{A})^2}$ est nulle, ainsi d'ailleurs que toutes les différences $\overline{A^n} - (\overline{A})^n$.

En d'autres termes, toute théorie statistique déterministe à paramètres cachés introduit un collectif portant sur des individus pour lesquels toutes les grandeurs qui les caractérisent ont des valeurs bien déterminées et sont par suite exemptes de dispersion. Les dispersions n'apparaissent que pour le collectif dans son ensemble. Dans ces conditions, les distributions de probabilité valables pour le collectif doivent satisfaire au schéma usuel des statisticiens que nous avons étudié précédemment. Or nous savons que ce n'est pas le cas des distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire usuelle et l'on peut se croire déjà autorisé à en déduire que la Mécanique ondulatoire ne peut pas être interprétée par une théorie déterministe à paramètres cachés.

M. von Neumann a retrouvé ce résultat par la voie suivante : Il part de la remarque qu'une théorie statistique ne peut se ramener à un schéma déterministe à paramètres cachés que si les distributions de probabilité apparaissant dans cette théorie peuvent toutes se ramener à des mélanges d'états élémentaires indécomposables et sans dispersion. Il a démontré que ce n'était pas le cas des distributions envisagées en Mécanique ondulatoire en s'appuyant sur le théorème suivant :

Les états que l'on rencontre en Mécanique ondulatoire ne sont jamais sans dispersion.

Autrement dit, pour aucun état réalisable, on ne peut avoir pour toute grandeur mesurable $\overline{A^2} = (\overline{A})^2$.

En réalité, la démonstration belle, mais un peu lourde, de M. von Neumann ne nous apprend rien de bien nouveau. Dès que l'on connaît les relations d'incertitude sous la forme $\sigma(x)\sigma(p_x) \geq \frac{h}{4\pi}$, l'on

sait déjà que, pour les distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire usuelle, toutes les grandeurs ne peuvent pas être sous dispersion.

Mais suivons le raisonnement de M. von Neumann. Nous avons vu que tout état (qu'il soit mélange ou cas pur) est caractérisé par une matrice statistique hermitienne et de trace égale à 1 telle que la valeur moyenne de toute grandeur dans cet état soit donnée par la formule (15). Donc, pour qu'un état soit sous dispersion, il faudrait que l'on ait pour toute grandeur A

$$(33) \quad \text{Tr}(PA^2) = [\text{Tr}(PA)]^2.$$

Soit maintenant un système complet $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots$ de fonctions de base orthonormées. Considérons dans l'espace de Hilbert l'opérateur qui projette tout vecteur de cet espace sur le vecteur φ_i . Ce projecteur est un opérateur P_{φ_i} hermitien linéaire et nous pouvons prendre $A = P_{\varphi_i}$. Si l'état était sans dispersion, il faudrait avoir en particulier

$$(34) \quad \text{Tr}(PP_{\varphi_i}^2) = [\text{Tr}(PP_{\varphi_i})]^2.$$

Mais, comme on a $P_{\varphi_i}^2 = P_{\varphi_i}$, il vient

$$(35) \quad \text{Tr}(PP_{\varphi_i}) = [\text{Tr}(PP_{\varphi_i})]^2.$$

Or

$$(36) \quad \text{Tr}(PP_{\varphi_i}) = \sum_k (PP_{\varphi_i})_{kk} = \sum_k \int_0 \varphi_k^* PP_{\varphi_i} \varphi_k d\tau$$

et comme $P_{\varphi_i} \varphi_k = \delta_{ik} \varphi_i$, on obtient finalement

$$(37) \quad \text{Tr}(PP_{\varphi_i}) = \sum_k \int_0 \varphi_k^* P \varphi_i d\tau \delta_{ik} = \int_0 \varphi_i^* P \varphi_i d\tau = P_{ii}.$$

Cette trace devant être égale à son carré, ou $P_{ii} = 1$ ou $P_{ii} = 0$. Et ceci doit être vrai pour tous les indices i , car nous pouvons raisonner de même pour tous les P_{φ_i} . Mais on pourrait supposer que certains P_{ii} sont égaux à 1 et d'autres à 0 et pour satisfaire à la relation $\sum_i P_{ii} = 1$, il

faudrait alors que tous les P_{ii} soient nuls sauf un. Mais cette dernière hypothèse peut être rejetée car nous pouvons faire varier d'une façon continue le système des fonctions de base orthonormées dans l'espace de Hilbert par une opération qui correspond à une rotation des axes dans cet espace fonctionnel. Nous pouvons ainsi faire venir successivement coïncider, par une opération continue, chacun des axes primitifs avec

les autres axes. Au cours de cette opération, chacun des P_{ii} doit varier d'une façon continue et, comme ils ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, ils doivent garder leurs valeurs initiales. Donc, ou bien les P_{ii} sont tous égaux à 1 ou bien ils sont tous égaux à 0. Or aucune de ces deux hypothèses n'est compatible avec $\sum_i P_{ii} = 1$, car $\sum_i P_{ii}$ serait infinie dans un cas et nulle dans l'autre.

Finalement il ne peut exister aucune matrice statistique P acceptable qui corresponde à une absence de dispersion pour toutes les grandeurs et M. von Neumann en a conclu qu'il est impossible de rendre compte des distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire par un déterminisme caché.

6. Critique de la conclusion précédente. — Après y avoir longuement réfléchi, je pense maintenant que la démonstration de M. von Neumann n'a pas la portée qu'il lui a attribuée. Elle montre bien que les distributions de probabilité de la Mécanique ondulatoire usuelle ne sont jamais toutes à la fois sans dispersion, qu'elles ne peuvent pas par suite correspondre à un collectif d'individus à propriétés bien déterminées. Mais cela nous l'avions déjà constaté et ce résultat est d'ailleurs contenu dans les relations d'incertitude.

Quant à en déduire l'impossibilité d'interpréter la Mécanique ondulatoire par un schéma déterministe à variables cachées, c'est une autre affaire. Nous l'avons déjà dit, les distributions de probabilité en $|c_k|^2$ ne sont en général réalisées qu'*après* l'exécution de la mesure correspondante. Comme les dispositifs de mesure pour les diverses grandeurs sont en général incompatibles, on n'a *a priori* aucune raison de s'attendre à ce que toutes les distributions de probabilité en $|c_k|^2$ correspondant à un même collectif et, en fait, cela n'est pas. Mais rien n'empêche d'imaginer qu'en introduisant des variables cachées, on puisse définir des distributions de probabilité, *cachées elles aussi*, qui dans l'état initial, avant l'exécution de toute mesure, correspondrait à un collectif unique et permettrait d'obtenir un schéma déterministe. Ces distributions de probabilité existant dans l'état initial avant toute mesure resteraient cachées parce qu'en général l'exécution de la mesure d'une grandeur A , en agissant sur le système étudié, ferait disparaître cette distribution de probabilité cachée initiale et ferait apparaître celle que l'on considère habituellement. Nous verrons que cette hypothèse parfaitement admissible est celle qui correspond à l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire à l'aide des idées de double solution ou d'onde pilote et nous

l'étudierons plus loin en détail. En dernière analyse, le célèbre théorème de M. von Neumann ne me paraît pas avoir la portée qu'on lui avait attribuée et ne me semble pas constituer un obstacle insurmontable à l'édification d'une interprétation déterministe de la Mécanique ondulatoire introduisant des variables cachées.

CHAPITRE III.

LA THÉORIE DE LA MESURE D'APRÈS M. VON NEUMANN (*suite*).

1. **Généralités sur la mesure.** — Comme nous l'avons vu, la mesure joue un rôle essentiel dans la Physique quantique. Ce rôle est, en effet, tout à fait différent en Microphysique de ce qu'il était en Physique macroscopique classique. En Physique classique, la mesure, du moins quand elle est effectuée avec des précautions convenables, est une simple « constatation » qui précise nos connaissances sur la réalité objective sans troubler appréciablement celle-ci. Les états élémentaires réels étant supposés parfaitement déterminés, toute ignorance de notre part se traduirait par des probabilités portant sur un mélange avec des poids statistiques convenables des divers états élémentaires et les mesures étaient considérées comme susceptibles de diminuer notre ignorance ou même de la supprimer en nous faisant connaître un état élémentaire parfaitement déterminé (par exemple un corpuscule avec les valeurs exactes des grandeurs de position et de mouvement qui le caractérisent).

Les distributions de probabilité qui se présentent en Physique classique ont donc toujours le caractère de mélanges d'états élémentaires où toutes les grandeurs ont des valeurs déterminées (c'est-à-dire de collectifs portant sur des individus dont toutes les caractéristiques ont des valeurs bien définies). La mesure est alors supposée nous faire connaître la valeur réelle d'une grandeur telle qu'elle existait objectivement avant la mesure et, si la mesure est bien faite, sans la modifier appréciablement.

Il en est tout autrement dans la théorie quantique. Ici le maximum de nos connaissances sur un système est réalisé quand nous pouvons le considérer comme un cas pur, c'est-à-dire lui attribuer une fonction Ψ bien déterminée. Dans cet état de connaissance maximum, il nous est

impossible de préciser la valeur de toutes les grandeurs du système puisqu'aucun dispositif expérimental ne peut nous les fournir toutes à la fois. Au cas pur Ψ , correspondent des distributions de probabilité (qui, en principe, ne seraient réalisées qu'après l'exécution de la mesure correspondante) comportant des dispersions non nulles pour certaines grandeurs. Une nouvelle mesure effectuée ensuite ne peut nous fournir au mieux qu'un nouveau cas pur comportant lui aussi des dispersions non nulles pour certaines grandeurs : elle augmente notre connaissance de certaines grandeurs, mais de telle façon que notre connaissance optimum de l'état du système reste toujours représentée par un cas pur avec des dispersions. De plus, la mesure n'augmente aucunement notre connaissance de l'état du système antérieur à la mesure car *elle crée par son action sur le système un état entièrement nouveau*.

Je pense que ce sont là des résultats de la Physique quantique qui ont un caractère définitif, mais, contrairement à ce que l'on admet, ils n'entraînent pas du tout l'impossibilité de maintenir l'idée classique d'individus, de corpuscules, pour lesquels toutes les grandeurs ont des valeurs déterminées. On peut imaginer, nous le verrons, que dans tout cas pur il existe un collectif unique donnant des répartitions de probabilité pour toutes les grandeurs et satisfaisant à toutes les règles habituelles de la statistique [avec l'existence de $\rho(x, y)$]. Seulement ces répartitions de probabilité ne sont pas en général celles qu'on envisage d'ordinaire en Mécanique ondulatoire, car chacune de celles-ci n'est réalisée qu'après l'exécution de la mesure correspondante. Les répartitions que nous introduirons ne peuvent pas être mises en évidence puisque, pour le faire, il faudrait exécuter des mesures et que toute mesure, par l'action qu'elle exerce sur les objets qui lui sont soumis, change en général les répartitions de probabilité. C'est finalement précisément le rôle nouveau joué par la mesure en Microphysique qui nous permettra d'imaginer sans contradiction des répartitions de probabilité qui restent cachées. Nous reviendrons sur cette question.

Faisons encore une remarque importante sur laquelle nous aurons aussi à revenir. Un dispositif de mesure, portant sur des individus microphysiques, comporte nécessairement l'apparition d'un phénomène macroscopique observable déclenché par un individu microphysique. Il faut bien qu'il en soit ainsi puisque la mesure ne peut résulter que d'une observation faite par le physicien. Ainsi, dans une chambre de Wilson, l'observation d'une trajectoire corpusculaire, qui peut permettre soit une localisation, soit l'évaluation d'une énergie ou d'une quantité de mouvement, résulte d'un phénomène de condensations de

gouttelettes observable macroscopiquement qui est déclenché par l'action ionisante du corpuscule en mouvement. Il en est de même pour les enregistrements photographiques où l'action élémentaire d'un corpuscule (photon ou particule chargée) déclenche un phénomène chimique observable macroscopiquement. Cette remarque très importante nous servira ultérieurement pour reprendre sur des bases nouvelles la théorie de la Mesure.

2. Statistique de deux systèmes en interaction d'après M. von Neumann. — Reprenons les analyses de M. von Neumann et considérons deux corpuscules ou deux systèmes de corpuscules intervenant dans une mesure. M. von Neumann dit que le premier est le « système étudié » et le second « l'appareil de mesure ». Nous aurons à critiquer ces dénominations, mais passons.

Soient $u_k(x)$ un ensemble de fonctions propres orthonormées pour le premier système, $v_\rho(y)$ un ensemble analogue pour le second système. Quand les deux systèmes sont isolés l'un de l'autre (état initial), leurs fonctions d'onde Ψ_I et Ψ_{II} évoluent séparément conformément à l'équation d'ondes correspondante et l'on peut poser

$$(1) \quad \Psi_I = \sum_k c_k(t) u_k(x), \quad \Psi_{II} = \sum_\rho d_\rho(t) v_\rho(y).$$

Le système I étant évidemment dans un cas pur reste dans ce cas pur. Le système total, dont l'hamiltonien H est alors la somme des hamiltoniens $H_I + H_{II}$ des deux systèmes, a pour fonction d'onde

$$(2) \quad \Psi(x, y, t) = \Psi_I(x, t) \Psi_{II}(y, t) = \sum_{k, \rho} c_k(t) d_\rho(t) u_k(x) v_\rho(y).$$

Elle représente un cas pur du système qui subsiste tant que l'interaction n'est pas commencée.

Quand l'interaction commence, il s'ajoute aux termes $H_I + H_{II}$ de l'hamiltonien global un terme d'interaction H_i qui dépend des coordonnées x et y des deux systèmes sous une forme qui n'est pas simplement additive. Alors la fonction d'onde du système global cesse d'être le produit d'un $u_k(x)$ par un $v_\rho(y)$, mais comme les produits $u_k(x) v_\rho(y)$ continuent à former un système de base complet et orthonormé pour l'ensemble des variables x et y , on pourra écrire

$$(3) \quad \Psi(x, y, t) = \sum_{k, \rho} C_{k\rho}(t) u_k(x) v_\rho(y),$$

mais les $C_{k\rho}$ ne sont plus de la forme $c_k d_\rho$. Comme nous avons toujours pour le système total une onde Ψ évoluant suivant une équation d'ondes, l'état du système total reste toujours un cas pur. La matrice statistique correspondante est donnée par

$$(4) \quad P_{k\rho, l\sigma} = C_{k\rho} C_{l\sigma}^*.$$

Remarquons qu'il faut ici deux indices pour représenter un état du système global. Portons maintenant notre attention sur le système I et envisageons une certaine grandeur A de ce système telle que la matrice correspondante soit définie par

$$(5) \quad A_{kl} = \int_D u_k^*(x) A u_l(x) dx.$$

La valeur moyenne de A pendant l'interaction est

$$(6) \quad \bar{A} = \int_D \Psi^* A \Psi d\tau = \sum_{k\rho l\sigma} C_{k\rho}^* C_{l\sigma} \int_D u_k^* A u_l dx \int_D v_\rho^* v_\sigma dy = \sum_{k l \rho} C_{k\rho}^* C_{l\rho} A_{kl}.$$

Or la matrice statistique du système I pendant l'interaction devra être telle que

$$(7) \quad \bar{A} = \text{Tr}(P_I A),$$

ce qui conduit à écrire

$$(8) \quad (P_I)_{lk} = \sum_{\rho} C_{l\rho} C_{k\rho}^*.$$

On trouvera de même pour la matrice statistique du système II,

$$(9) \quad (P_{II})_{\sigma\rho} = \sum_k C_{k\sigma} C_{k\rho}^*.$$

La matrice statistique P du système total est hermitienne, de trace égale à 1 et idempotente comme on le vérifie aisément sur (4) en tenant compte du caractère orthonormé des produits $u_k(x) v_\rho(y)$: c'est donc une matrice statistique élémentaire. Il n'en est pas de même des matrices P_I et P_{II} qui permettent le calcul de la valeur moyenne des grandeurs pour l'un ou l'autre système. Ce sont bien des matrices hermitiennes de trace 1, mais elles ne sont pas idempotentes. Donc les statistiques des systèmes I et II considérés séparément ne sont plus des cas purs, mais des mélanges.

Pour préciser la composition de ces mélanges, reprenons la formule (3). Pour une valeur donnée de l'indice ρ , nous avons dans le

développement (3) une somme de termes de la forme

$$v_{\rho}(Y) \sum_k C_{k\rho}(t) u_k(x), \quad \text{avec} \quad \sum_{k\rho} |C_{k\rho}|^2 = 1.$$

On peut donc dire que pour une valeur donnée de ρ (c'est-à-dire pour un certain état du système II), le système I a une probabilité proportionnelle à $|C_{k\rho}|^2$ de se trouver dans l'état k : en valeur absolue, cette probabilité sera égale à $|C_k^{(\rho)}|^2$ si l'on pose

$$(10) \quad C_k^{(\rho)} = \frac{C_{k\rho}}{\sqrt{\sum_l |C_{l\rho}|^2}}$$

de façon à avoir $\sum_k |C_k^{(\rho)}|^2 = 1$.

On pourra alors écrire

$$(11) \quad (P_I)_{kl} = \sum_{\rho} p_{\rho} C_k^{(\rho)} C_l^{(\rho)*},$$

avec

$$(12) \quad p_{\rho} = \sum_l |C_{l\rho}|^2$$

et l'on trouverait de même

$$(13) \quad (P_{II})_{\rho\sigma} = \sum_k p_k C_{\rho}^{(k)} C_{\sigma}^{(k)*},$$

avec

$$(14) \quad C_{\rho}^{(k)} = \frac{C_{k\rho}}{\sqrt{\sum_{\sigma} |C_{k\sigma}|^2}}, \quad p_k = \sum_{\sigma} |C_{k\sigma}|^2.$$

Les matrices P_I et P_{II} apparaissent donc bien comme définissant des mélanges avec les poids statistiques p_{ρ} et p_k respectivement.

Ainsi, tandis que le système total reste dans un cas pur malgré l'interaction, chacun des deux systèmes partiels considéré isolément est transformé par l'interaction de cas pur en mélange. Et M. von Neumann ajoute : « Tandis que la connaissance du système global reste maximum, celle des deux systèmes composants cesse d'être maximum. Chaque système partiel peut être considéré comme se trouvant dans un cas pur que nous ignorons, le mélange représentant cette ignorance. Une simple constatation pourra alors suffire à lever cette ignorance en nous faisant connaître le cas pur effectivement réalisé. »

En étudiant la forme des matrices statistiques P_I et P_{II} , on constate que, pour chaque système, le mélange est déterminé par les états de l'autre système. C'est ce qui se traduit par exemple dans la formule (11) par le fait que la somme dans le second membre porte sur un indice ρ qui concerne le second système. C'est en constatant l'état du deuxième système (c'est-à-dire la valeur de ρ effectivement réalisée) que nous pourrions dire quel cas pur il faut attribuer au premier. Mais, et c'est un point capital insuffisamment mis en relief dans la théorie de M. von Neumann, pour constater l'état du second système, il faudra que celui-ci déclenche un phénomène macroscopique que nous puissions observer directement. C'est un point qui nous apparaîtra plus clairement quand nous reprendrons la question d'une manière plus physique.

3. La mesure d'une grandeur dans le formalisme de M. von Neumann.

— Nous venons d'étudier l'interaction de deux systèmes, mais pour que cette interaction puisse nous fournir la mesure d'une grandeur du premier système, il faut que le résultat de l'interaction soit d'un type particulier. Autrement dit, n'importe quelle interaction ne peut pas servir à la mesure d'une grandeur du premier système. Nous avons vu, en effet, qu'en constatant macroscopiquement l'état du second système après la mesure, on peut en déduire que le premier se trouve dans un certain cas pur. Mais, comme dans un cas pur une grandeur physique n'a pas en général une valeur précise, nous n'obtiendrons pas ainsi en général une mesure de la grandeur qui nous intéressait.

Soit A la grandeur physique du premier système que nous désirons mesurer. Prenons pour fonctions de base du premier système les fonctions propres de A . Pour que l'interaction avec le second système puisse servir à mesurer A , il faut qu'il existe une grandeur B du second système telle que, $v_\rho(y)$ étant les fonctions propres de B , le Ψ du système total soit après l'interaction de la forme

$$(15) \quad \Psi = \sum_{k\rho} C_{k\rho} u_k(x) v_\rho(y),$$

avec $C_{k\rho} = C_k \delta_{k\rho}$, c'est-à-dire que l'on ait

$$(16) \quad \Psi = \sum_k C_k u_k(x) v_k(y).$$

On peut alors établir une correspondance biunivoque entre les v et les u ou, si l'on préfère s'exprimer autrement, entre le phénomène

observable déclenché par le second système et la valeur de A pour le premier. Nous reprendrons ultérieurement ce point en détail d'une façon qui le rendra beaucoup plus clair.

Calculons P_1 quand (16) est réalisée. Nous avons

$$(17) \quad C_k^{(\rho)} = \frac{C_{k\rho}}{\sqrt{\sum_l |C_{l\rho}|^2}} = \frac{C_k \delta_{k\rho}}{C_\rho}$$

et

$$(18) \quad P_\rho = \sum_l |C_{l\rho}|^2 = \sum_l |\delta_{\rho l} C_l|^2 = |C_\rho|^2,$$

d'où

$$(19) \quad (P_1)_{kl} = \sum_\rho P_\rho C_k^{(\rho)} C_l^{(\rho)*} = \sum_\rho P_\rho \delta_{k\rho} \frac{C_k}{C_\rho} \delta_{l\rho} \frac{C_l^*}{C_\rho} = \delta_{kl} P_k = \delta_{kl} |C_k|^2,$$

P_1 est donc une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les $|C_k|^2$. On voit aisément qu'il en est de même pour P_{II} qui est identique à P_1 .

On a donc ainsi un mélange d'états correspondant chacun à une valeur de α_k et à une valeur de β_k *qui se correspondent biunivoquement*, la probabilité de la paire de valeurs α_k, β_k étant $|C_k|^2$. La constatation de la valeur β_k de B par un phénomène observable déclenché par le second système permet alors d'attribuer à A la valeur α_k : il y a donc réellement « mesure ». La constatation que nous devons supposer résulter d'un phénomène macroscopique que l'on peut observer ou enregistrer précise notre connaissance de A en nous montrant qu'elle est, dans le mélange provoqué par l'interaction, la valeur de A qui se réalise effectivement.

Examinons dans quelles conditions l'hypothèse faite sur la forme (16) du Ψ peut se trouver satisfaite. Supposons qu'avant la mesure le système II soit dans l'état $v_0(y)$ et le système I dans l'état $u_k(x)$. Alors la fonction d'onde du système global dans l'état initial sera

$$(20) \quad \Psi(x, y) = v_0(y) u_k(x).$$

L'hypothèse faite sur la forme finale du Ψ sera réalisée si, à la fin du processus d'interaction, on a, quelle que soit la fonction propre $u_k(x)$ réalisée à l'origine,

$$(21) \quad \Psi(x, y) = u_k(x) v_k(y),$$

$v_k(y)$ étant une fonction propre de la grandeur B qui correspond biunivoquement à $u_k(x)$. En effet, à cause du caractère linéaire de l'équation

d'ondes, si l'état initial, au lieu d'être représenté par (20), l'est par la superposition

$$(22) \quad \Psi(x, y) = \sum_k C_k v_0(y) u_k(x),$$

à la fin de l'interaction la fonction d'onde aura bien la forme (16) et la mesure de A sera possible.

Dans l'exposé que nous venons de faire de la théorie de la Mesure d'après M. von Neumann, nous avons évité de dire, comme on le fait généralement dans les exposés usuels, que le système II est un appareil de mesure et que la grandeur B est, par exemple, la position d'une aiguille. En fait, le système II doit être un système microscopique de l'échelle atomique comme le système I et son rôle est de *déclencher* dans un dispositif de mesure un phénomène macroscopique observable. Aucune mesure ne peut se faire en faisant agir directement un corpuscule sur un corps macroscopique.

D'ailleurs la théorie de M. von Neumann présente à notre avis, comme d'ailleurs beaucoup de théories de la Physique quantique actuelle, un caractère exagérément abstrait. Elle ne précise pas assez les conditions physiques du processus de mesure et la nécessité du déclenchement dans ces processus d'un phénomène macroscopique observable : se contentant d'un pur formalisme, elle ne nous donne aucune image physique précise de la façon dont un processus de mesure peut nous faire passer d'un cas pur à un mélange.

4. Conséquences peu admissibles de la théorie de la Mesure dans l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire. — L'évolution de l'onde Ψ , dit M. von Neuman, se déroule continûment pendant la mesure, le système global restant dans un cas pur tandis que l'état de chacun des systèmes partiels devient un mélange bien défini. Il y a rupture de la continuité de cette évolution et création d'une situation nouvelle quand l'observateur, constatant l'état du système II, peut attribuer au système I une fonction d'onde qui corresponde à une valeur bien définie de la grandeur A. Dans cette manière de voir, c'est donc la « conscience de l'observateur » qui, en constatant l'état du système II, permet de réduire à l'un de ces termes le mélange relatif à l'état du système étudié tel qu'il résulte de l'interaction.

Que la connaissance d'une grandeur à la suite d'une mesure résulte d'une prise de conscience du résultat de la mesure par l'observateur, cela est bien évident. Mais il semble qu'entraînés par l'interprétation

actuelle de la Mécanique ondulatoire qui ne peut donner à l'onde Ψ qu'une signification subjective, M. von Neumann et ses commentateurs en soient arrivés à des conceptions vraiment difficiles à admettre. Je vais en donner le résumé d'après l'exposé fait naguère par MM. London et Bauer ⁽¹⁾.

Considérons trois systèmes partiels : l'objet étudié (x), l'appareil de mesure (y) et l'observateur (z) qui forment un système global unique. Décrivons le système global à l'aide de la fonction d'onde

$$(23) \quad \Psi(x, y, z) = \sum_k c_k u_k(x) v_k(y) w_k(z).$$

Pour le système global, nous avons un cas pur qui subsiste pendant la mesure et pour les systèmes partiels, nous avons un mélange. La fonction d'onde (23) nous donne une connaissance maximum du système global sans que l'on connaisse exactement l'état de l'objet étudié (x).

Mais l'observateur a un autre point de vue car pour lui c'est seulement l'objet (x) et l'appareil de mesure (y) qui appartiennent au monde objectif extérieur. En ce qui les concerne, il est dans une situation toute différente car il possède la conscience ou faculté d'introspection qui lui permet de connaître directement son état. C'est en vertu de cette connaissance immédiate qu'il se croit le droit (?) de créer sa propre objectivité en coupant la chaîne des coordinations statistiques exprimées par le Ψ et en constatant : « Je suis dans l'état w_k , donc l'appareil de mesure est dans l'état v_k et par suite l'objet dans l'état u_k », constatation qui entraîne l'attribution d'une valeur bien déterminée à la grandeur A , c'est-à-dire une mesure de cette grandeur.

Tel est l'exposé de MM. London et Bauer qui ajoutent : « Ce n'est donc pas une interaction mystérieuse entre l'appareil de mesure et l'objet qui produit dans la mesure l'apparition d'un nouveau Ψ du système. C'est seulement la conscience d'un Moi qui se sépare de la fonction $\Psi(x, y, z)$ ancienne et constitue une nouvelle objectivité en vertu de son observation consciente en attribuant désormais à l'objet une nouvelle fonction d'onde $u_k(x)$. »

J'ai cité ce texte, mais je ne le comprends pas bien : « ce Moi qui se sépare de la fonction d'onde » me paraît beaucoup plus mystérieux que ne le pourrait être une interaction entre l'objet et l'appareil de mesure.

(1) Voir bibliographie [2].

On comprend que M. Schrödinger ait pu dire avec un jeu de mot ironique : « La théorie de l'onde Ψ est devenue une théorie psychologique ». Il ne sert pas à grand chose d'ajouter que ces considérations viennent à l'appui de l'opinion de M. Bohr suivant laquelle en Physique quantique on ne peut plus tracer une limite exacte entre l'objectif et le subjectif car cette affirmation est, elle aussi, peu compréhensible et n'éclaircit rien. Plus on y réfléchit et plus on a l'impression que toute cette interprétation est à reprendre sur une autre base.

Continuons l'étude du fascicule London-Bauer. Les auteurs remarquent que leurs idées soulèvent une difficulté : si la réalité objective est créée par un acte de conscience de l'observateur, cette réalité ne va-t-elle pas varier d'un observateur à l'autre ? Or il est certain qu'il n'en est pas ainsi sans quoi toute science collective, toute science commune aux hommes serait impossible. Mais, nous dit-on, il faut remarquer que la constatation qui permet la mesure est une constatation macroscopique ne modifiant pas l'état de choses observé. Rien n'empêche par suite un autre observateur de faire le même relevé et c'est un fait d'expérience qu'aux erreurs d'observation près, tous les observateurs font la même constatation. C'est ce fait, ajoute-t-on, qui permet de faire abstraction de la personnalité de l'observateur et de créer une science ayant un caractère objectif. En somme, dans le mélange qui résulte de l'interaction de mesure, il y a une possibilité et une *seule* qui se révèle comme réalisée pour *tous* les observateurs.

Cette explication nous paraît insuffisante car elle revient à constater le fait que l'on veut expliquer. L'existence d'une science commune aux hommes nous paraît bien difficile à comprendre dans une théorie qui veut tout décrire à l'aide d'une fonction Ψ à caractère subjectif, fonction qui dépend de ce qui se passe dans la conscience de l'observateur. L'accord indéniable des observations faites par des observateurs différents ne nous paraît pouvoir se comprendre que si l'on n'admet pas l'existence d'une réalité objective et, si l'on admet son existence, cette réalité objective doit pouvoir être décrite par autre chose que par cette fonction Ψ subjective que l'interprétation actuellement orthodoxe de la Mécanique ondulatoire nous condamne à uniquement envisager.

L'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire semble ainsi se perdre dans des contradictions parce qu'elle ne sait pas quel sens exact attribuer à l'onde Ψ . Logiquement, elle est amenée à lui attribuer le sens d'une simple représentation de probabilité purement subjective, dépendant des connaissances de l'observateur et de ses « prises de conscience » et soumise à la réduction du paquet de probabilité lorsque

l'utilisateur reçoit des informations nouvelles. Mais alors elle ne peut plus rendre compte de l'existence d'une science commune aux hommes et d'une réalité objective indépendante des observateurs. Il existe d'ailleurs des arguments pour attribuer à l'onde Ψ une réalité objective. Ainsi supposons qu'un observateur ait connaissance de l'état Ψ d'un corpuscule (ou d'un système) et qu'il calcule avec cette fonction d'onde les probabilités du résultat d'une mesure à effectuer. Si avant qu'il effectue la mesure projetée un autre observateur a fait à *l'insu du premier* une mesure sur le corpuscule, en général les prévisions statistiques du premier observateur se trouveront être fausses. C'est donc l'action du dispositif de mesure et non la prise de conscience de l'observateur qui modifie le Ψ et ceci semble imposer de rendre à la fonction d'onde un certain caractère de réalité objective. M. Bohr semble toujours avoir reconnu ce caractère, mais sa pensée très subtile est souvent obscure. En réalité, presque tous les auteurs qui ont exposé l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire ont passé alternativement de l'idée d'une fonction Ψ simple représentation subjective de probabilité à l'idée d'une onde gardant un certain caractère de réalité et c'est à l'aide de ce subterfuge inconscient qu'ils ont pu éviter les contradictions trop flagrantes.

Quant au corpuscule, on sait encore moins qu'elle est son exacte nature et l'on se borne à dire : « En Microphysique quantique, un corpuscule est porteur non pas de grandeurs à valeurs déterminées, mais d'un ensemble de répartitions potentielles se rapportant à chaque grandeur mesurable, répartitions dont chacune ne peut entrer en vigueur que lors de la mesure correspondante ». Et cela ne donne pas une idée bien claire de ce que peut être un corpuscule.

Nous allons maintenant examiner si l'on ne pourrait pas, en adoptant une interprétation causale et objective plus claire de la Mécanique ondulatoire, parvenir à mieux comprendre ce qui se passe dans les processus de mesure.

CHAPITRE IV.

INTERPRÉTATION CAUSALE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE. (THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION).

1. **Idées de base de la théorie de la double solution.**— Je vais résumer rapidement les bases de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la « double solution » que j'avais esquissée dès 1927 et que j'ai à nouveau développée depuis quelques années à la suite d'un travail de M. David Bohm et en collaboration avec M. J. P. Vigier. J'ai fait un exposé de cette question dans un Ouvrage récemment paru auquel on pourra se reporter ⁽¹⁾.

Aux début de mes travaux sur la Mécanique ondulatoire, mon idée initiale avait été qu'il fallait conserver la conception d'une réalité physique indépendante de l'observateur et chercher, comme l'avait toujours fait la Physique classique, une représentation claire des processus physiques dans le cadre de l'espace et du temps. J'avais ainsi été amené à rechercher une vue synthétique de la dualité des ondes et des corpuscules compatible avec les idées que j'avais introduites (*Mécanique ondulatoire*, 1923-1924) et qui venaient de se confirmer d'une façon remarquable (travaux de M. Schrödinger en 1926, découverte de la diffraction des électrons en 1927). Suivant un courant d'idées qui s'était manifesté dans les travaux de Mie et d'Einstein, je cherchais à me représenter le corpuscule comme une sorte d'accident local, de singularité, au sein d'un phénomène ondulatoire étendu. Cela m'avait amené à me représenter la réalité physique non pas par les solutions continues Ψ de l'équation des ondes exclusivement considérées par M. Schrödinger et ses continuateurs, mais par d'autres solutions de

(¹) Bibliographie [3]. Voir aussi la thèse de M. Vigier [4].

cette même équation que pour les distinguer des solutions régulières Ψ je désignais par u et qui comporteraient une singularité. En y réfléchissant, je voyais tout de suite un grand avantage à cette conception d'un corpuscule ainsi « incorporé » à un champ ondulatoire étendu et, par conséquent, solidaire de l'évolution globale de ce champ : elle me paraissait permettre de comprendre que le corpuscule soit localisé et que cependant son mouvement puisse être influencé par la présence d'obstacles éloignés de sa trajectoire, comme cela est nécessaire pour pouvoir interpréter, en conservant l'idée de corpuscule localisé, l'existence des phénomènes d'interférences et de diffraction.

Néanmoins l'interprétation probabiliste de l'onde régulière Ψ , primitivement issue des travaux de M. Born et confirmée par ses succès, me paraissait devoir être maintenue. Tandis que l'onde u serait la véritable description de la structure des unités physiques, l'onde Ψ serait une onde fictive, à caractère subjectif, susceptible de nous fournir des renseignements statistiques exacts sur la position et le mouvement des corpuscules. Mais, pour qu'elle puisse remplir ce rôle, encore faut-il qu'elle soit reliée d'une certaine façon à l'onde u .

Mes premières recherches sur la Mécanique ondulatoire m'avait conduit à attribuer une importance particulière à la « phase » de l'onde que j'associais au corpuscule. C'est essentiellement l'accord des phases du corpuscule considéré comme une sorte d'horloge et de l'onde environnante qui m'avait amené à écrire les formules fondamentales de la Mécanique ondulatoire ($\varpi = h\nu$; $\lambda = \frac{h}{p}$) : c'était donc la fréquence et la longueur d'onde, éléments contenus dans la phase, qui établissaient ainsi un pont entre la propagation de l'onde et le mouvement du corpuscule. Ceci me conduisait à écrire la fonction d'onde usuellement envisagée sous la forme

$$(1) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi},$$

avec a et φ réels et à attribuer à la phase φ (qui à l'approximation de l'Optique géométrique coïncide avec la fonction de Jacobi S) une signification physique profonde. Au contraire, l'amplitude a , qui est continue, ne me semblait pas avoir une signification objective, mais seulement une signification statistique.

Parmi les probabilités envisagées par l'interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire déjà admise à cette époque, la probabilité de présence $|\Psi|^2 = a^2$ me paraissait avoir une sorte de priorité car elle correspondait à mes yeux à la possibilité que le corpuscule soit en un

point donné, indépendamment de tout processus de mesure. Les autres probabilités telles que $|c(\vec{p})|^2$ pour la valeur \vec{p} de la quantité de mouvement [$c(\vec{p})$ étant le coefficient de Fourier correspondant à \vec{p} dans le développement du Ψ suivant les ondes planes monochromatiques] devait avoir selon moi un sens moins immédiat : elles ne seraient valables qu'après l'action, sur l'onde réelle u à laquelle le corpuscule est incorporé, d'un dispositif de mesure de la grandeur envisagée quand on ne connaît pas encore le résultat de cette mesure.

Muni de ces idées générales, j'avais admis le principe suivant auquel j'avais donné le nom de « principe de la double solution » :

A toute solution régulière du type (1) de l'équation des ondes de la Mécanique ondulatoire, doit correspondre une solution à singularité du type

$$(2) \quad u = f e^{\frac{2\pi i}{h} \psi},$$

ayant la même phase φ que la solution (1), mais avec une amplitude f présentant une singularité ponctuelle, en général mobile.

A l'époque où j'écrivais mon Mémoire sur la double solution au printemps de 1927, on connaissait l'équation des ondes de Schrödinger

$$(3) \quad \Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

correspondant au mouvement d'un corpuscule de masse m dans un champ dérivant de la fonction potentielle $V(x, y, z, t)$ supposée connue. Aujourd'hui on doit considérer l'équation (3) comme valable seulement à l'approximation newtonienne pour les corpuscules de spin 0. Peu après les premiers Mémoires de Schrödinger, on avait aperçu quelle doit être l'équation qui généralise l'équation (3) quand on doit tenir compte des corrections de relativité. Cette nouvelle équation qu'on nomme habituellement « l'équation de Klein-Gordon » et qui constitue l'équation des ondes relativistes pour les particules de spin 0 s'écrit

$$(4) \quad \square \Psi - \frac{4\pi i \varepsilon}{c^2} V \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \sum_{xyz} \frac{4\pi i}{h} \frac{\varepsilon}{c} A_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{4\pi^2}{h^2} [m_0^2 c^2 - \varepsilon^2 (V^2 - A^2)] \Psi = 0,$$

où m_0 est la masse propre de la particule, ε sa charge électrique, c la vitesse de la lumière dans le vide, V et \vec{A} les potentiels scalaire et vecteur dont dérive le champ électromagnétique auquel le corpuscule est soumis.

L'équation (4) étant la plus générale et contenant l'équation (3) comme forme dégénérée à l'approximation non relativiste, c'est sur l'équation (4) que j'avais raisonné. Dans le cas de l'absence de champ, on a alors

$$(5) \quad \square \Psi + \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 c^2 \Psi = 0$$

et la solution la plus simple de cette équation quand on se limite aux ondes continues est l'onde plane monochromatique

$$(6) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p\vec{z})},$$

avec a constant et $\frac{W^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2$. W est l'énergie du corpuscule en mouvement avec la vitesse $v = \beta c$, soit $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et \vec{p} est sa quantité de mouvement $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, la direction du mouvement étant prise comme axe des z .

Or j'avais facilement trouvé que l'équation de Klein-Gordon admet aussi la solution à singularité mobile

$$(7) \quad u(x, y, z, t) = \frac{\text{const.}}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - \beta^2}}} e^{\frac{2\pi i}{h}(Wt - p\vec{z})}$$

qui prend, dans le système propre du corpuscule où $v = 0$, la forme

$$(8) \quad u(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{\text{const.}}{r_0} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t_0} \quad (r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}).$$

La solution (7) a la même phase que la solution (6), mais son amplitude présente une singularité ponctuelle au point $x = y = 0$, $z = vt$ qui se déplace avec la vitesse v dans la direction de propagation de l'onde, ce qui fournit une image claire du mouvement du corpuscule. Dans ce cas particulier on obtient ainsi exactement ce que je cherchais et la valeur constante de l'amplitude de l'onde Ψ apparaît comme ayant simplement la signification suivante : si l'on ignore la position du corpuscule-singularité, on doit considérer toutes les trajectoires parallèles et toutes les positions possibles du corpuscule à tout instant t comme également probables.

Encouragé par ce premier succès, j'ai considéré le cas général de l'équation (4) avec des potentiels V et \vec{A} fonctions continues données

de x, y, z, t et j'ai pu dès 1927 démontrer les résultats suivants :

1° s'il existe deux solutions Ψ et u de l'équation (4) l'une à amplitude continue, l'autre à amplitude comportant une singularité ponctuelle mobile et *qui ont la même phase* φ [ce qui veut dire qu'elles peuvent être écrites sous les formes (1) et (2)], la singularité de u se déplacera dans l'espace avec la vitesse instantanée \vec{v} définie par la formule

$$(9) \quad \vec{v}(x, y, z, t) = -c^2 \frac{\vec{\text{grad}} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}}{\frac{d\varphi}{dt} - \varepsilon V}.$$

C'est la « formule du guidage », qui, quand on peut négliger les corrections de relativité et supposer nul le champ magnétique (c'est-à-dire poser $\frac{d\varphi}{dt} - \varepsilon V \simeq m_0 c^2$ et $\vec{A} = 0$), donnera simplement

$$(10) \quad \vec{v} = -\frac{1}{m} \vec{\text{grad}} \varphi,$$

forme qui correspond à l'équation (3) de Schrödinger. Si, de plus, la propagation s'opère à l'approximation de l'Optique géométrique, on pourra poser $\varphi \simeq S$ où S est la fonction de Jacobi et (10) ne sera alors pas autre chose que la formule classique $m\vec{v} = -\vec{\text{grad}} S$ de la théorie d'Hamilton-Jacobi.

2° Le mouvement du corpuscule est le même que s'il était soumis en plus de la force classique dérivant des potentiels V et \vec{A} à une force « quantique » égale à $-\vec{\text{grad}} Q$, Q étant un « potentiel quantique » ignoré des théories classiques et qui, à l'approximation non relativiste de l'équation (3), s'écrit simplement

$$(11) \quad Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\Delta f}{f} \right) = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\Delta \alpha}{a} \right),$$

les quantités entre parenthèses étant calculées au point où se trouve le corpuscule à l'instant t et l'égalité des deux expressions (11) de Q découlant automatiquement de l'hypothèse que les deux ondes Ψ et u ont la même phase φ .

La formule du guidage et la définition du potentiel quantique permettent de mettre sous forme lagrangienne la dynamique du corpuscule

incorporé comme singularité dans son onde. Je n'insiste pas sur ce point que j'ai traité ailleurs ⁽¹⁾.

2. Autre manière d'exprimer la formule du guidage et généralisations. — La formule du guidage traduit sous forme mathématique le fait que le corpuscule, parce qu'il est intégré dans l'onde, est analogue à une horloge qui se déplace en restant en phase avec l'onde. A ce point de vue, elle est le couronnement de mes considérations initiales sur l'onde et le corpuscule en Mécanique ondulatoire. Mais on peut lui donner une autre forme qui permettra une généralisation plus grande.

Toutes les formes actuellement connues de la Mécanique ondulatoire permettent de construire une image hydrodynamique associée à la propagation de l'onde, c'est-à-dire de définir un fluide fictif dont la densité ρ et la densité de flux $\rho \vec{v}$ sont données en chaque point à chaque instant par des fonctions bilinéaires de la fonction d'onde et de la fonction complexe conjuguée.

Ainsi dans le cas de l'équation (3) de Schrödinger, le fluide fictif et son mouvement sont donnés par les formules primitivement utilisées par Madelung

$$(12) \quad \rho = \Psi \Psi^* = |\Psi|^2, \quad \rho \vec{v} = -\frac{h}{4\pi i m} (\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Psi^*),$$

où Ψ^* est la quantité complexe conjuguée de Ψ . Grâce à (1), on peut écrire aussi

$$(13) \quad \rho = a^2, \quad \vec{v} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

L'on voit par l'expression de \vec{v} que la formule du guidage peut s'exprimer en disant que le corpuscule suit *une* des lignes de courant.

Dans le cas de l'équation (4) de Klein-Gordon, le fluide fictif doit être défini par

$$(14) \quad \begin{cases} \rho = \frac{h}{4\pi i} \frac{1}{m_0 c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} \Psi \Psi^*, \\ \rho \vec{v} = -\frac{h}{4\pi i m_0} (\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}} \Psi^*) - \frac{\varepsilon}{m_0 c} \vec{\Lambda} \Psi^* \Psi \end{cases}$$

ou, grâce à (1),

$$(15) \quad \rho = \frac{1}{m_0 c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} a^2 - \frac{\varepsilon}{m_0 c^2} V a^2, \quad \rho \vec{v} = -\frac{1}{m_0} a^2 \overrightarrow{\text{grad}} \varphi - \frac{\varepsilon}{m_0 c} a^2 \vec{\Lambda},$$

(1) Voir [3], chap. X.

d'où

$$(16) \quad \vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad } \varphi} + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}}{\frac{d\varphi}{dt} - \varepsilon V}.$$

Nous retrouvons la formule du guidage pour l'équation de Klein-Gordon : le corpuscule suit donc encore une ligne du courant. Nous voyons d'ailleurs aussi que l'hypothèse exprimée par (1) et (2) suivant laquelle Ψ et u ont la même phase φ revient à supposer que les lignes de courant sont les mêmes pour les deux ondes, ou si l'on préfère que le champ des vecteurs vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ est le même pour les deux.

Sous cette forme, la relation établie entre les deux ondes u et Ψ va pouvoir se généraliser aux équations des particules de spin non nul. Ainsi, pour les particules de spin $\frac{h}{4\pi}$ tels que les électrons, l'onde Ψ a quatre composantes Ψ_k qui obéissent aux quatre équations aux dérivées partielles simultanées (équations de Dirac)

$$(17) \quad \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon V \right) \Psi_k = \left[\sum_{j=1}^3 \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\varepsilon}{c} A_j \right) \alpha_j + m_0 c \alpha_4 \right] \Psi_k,$$

avec $k=1, 2, 3, 4$. Les matrices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les matrices de Dirac à quatre lignes et quatre colonnes telles que

$$(18) \quad \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2 \delta_{ij} I,$$

I étant la matrice unité. Le fluide fictif est alors défini par

$$(19) \quad \varphi = \sum_k^4 |\Psi_k|^2, \quad \varphi_j = -c \sum_k^4 \Psi_k^* \alpha_j \Psi_k \quad (j=1, 2, 3),$$

d'où pour les composantes de la vitesse du fluide

$$(20) \quad v_j = -c \frac{\sum_k^4 \Psi_k^* \alpha_j \Psi_k}{\sum_k^4 \Psi_k^* \Psi_k} = -c \frac{\sum_k^4 u_k^* \alpha_j u_k}{\sum_k^4 u_k^* u_k}.$$

En théorie de la double solution, c'est cette vitesse qu'il convient d'attribuer au corpuscule-singularité de sorte que (20) constitue la formule du guidage en théorie de Dirac (où l'on ne peut plus en général

introduire une phase φ unique pour les quatre composantes de l'onde). On devra ici remplacer le postulat des phases φ par celui que le champ de vitesses \vec{v} est commun à Ψ et à u , ce qui justifiera l'égalité des deux expressions (20) de v_j .

Pour les particules de spin supérieur à $\frac{h}{4\pi}$ (photons, particules α , gravitons, etc.), on a des fonctions d'onde à plus de quatre composantes qui obéissent toujours à un système d'équations aux dérivées partielles simultanées. Mais toujours on pourra définir par des formules bilinéaires analogues à (14) et (19) la densité ρ et le flux $\rho \vec{v}$ d'un fluide fictif et obtenir la formule du guidage correspondante en admettant que le corpuscule-singularité de l'onde u , suit toujours une des lignes de courant communes aux ondes Ψ et u .

Maintenant un fait fondamental est que, pour toutes les équations d'onde que l'on peut avoir à considérer, le fluide fictif est conservatif et obéit à l'équation de continuité

$$(21) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

qui est une conséquence des équations d'ondes. C'est l'équation (21) qui permet de prendre la densité ρ comme probabilité de présence et de « normer » le Ψ (qui est une simple représentation de probabilité) par la formule $\int_D \rho \, d\tau = 1$. Dans le cas de l'équation de Schrödinger, on obtient ainsi comme formule de normalisation $\int_D |\Psi|^2 \, d\tau = 1$ et l'on doit prendre $|\Psi|^2 = a^2$ comme probabilité de présence. Nous allons voir que c'est en partant de l'équation (21) que l'on peut obtenir dans tous les cas la démonstration de la formule du guidage.

3. Démonstration de la formule du guidage. — Nous commencerons par remarquer que, si l'on admet qu'à toute solution régulière Ψ de l'équation des ondes correspond une solution u à singularité mobile *ayant les mêmes lignes de courant*, les deux densités $\rho(u)$ et $\rho(\Psi)$ obéissent à la même équation de continuité puisque le champ de vecteurs \vec{v} est le même dans les deux cas, mais, tandis que $\rho(\Psi)$ est partout régulière, $\rho(u)$ devra présenter une singularité ponctuelle, en général mobile.

Une première manière d'obtenir la formule de guidage, qui est au

fond équivalente à celle que j'avais donnée en 1937 ⁽¹⁾, consiste à écrire pour $\rho(u)$ l'équation de continuité sous la forme

$$(22) \quad \frac{d}{dt} \rho(u) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho(u) + \rho(u) \text{div} \vec{v} = 0,$$

d'où, après division par $\rho(u)$

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \log \rho(u) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \log \rho(u) = - \text{div} \vec{v},$$

Si u et, par suite, $\rho(u)$ prennent des valeurs très élevées dans une très petite région (éventuellement autour d'une singularité) $\log \rho(u)$ et ses dérivées y auront des valeurs très élevées; pour \vec{v} donnée, le second membre de (23) sera alors négligeable devant le premier et, en désignant par $\frac{D}{Dt}$ la dérivée totale par rapport au temps prise le long de la ligne de courant $\left(\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right)$, on aura

$$(24) \quad \frac{D}{Dt} \log \rho(u) = 0.$$

Donc $\log \rho(u)$ et, par suite, $\rho(u)$ demeureront constants quand on suivra la ligne de courant avec la vitesse \vec{v} . Ainsi, tandis que pour des valeurs modérées de ρ , il y a en général (pour $\text{div} \vec{v} \neq 0$) convergence et divergence des lignes de courant et que, par suite, ρ ne conserve pas une valeur constante quand on se déplace le long d'une ligne de courant avec la vitesse \vec{v} , il n'en est plus de même quand ρ prend des valeurs extrêmement élevées : alors les valeurs localement très élevées de la densité se déplacent le long des lignes de courant avec la vitesse \vec{v} sans se disperser, ni s'affaiblir. On voit ainsi que la singularité de $\rho(u)$ suivra l'une des lignes courant, communes par hypothèse à u et à Ψ , avec la vitesse \vec{v} correspondante, ce qui nous donne la forme générale de la formule du guidage.

Une autre méthode pour obtenir la formule du guidage consiste à intégrer par la méthode bien connue l'équation de continuité écrite sous la forme

$$(25) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \text{div} \vec{v} = 0,$$

(1) On trouvera celle-ci en [3], p. 101 et suiv.

L'on sait que l'intégration d'une telle équation aux dérivées partielles linéaire de premier ordre peut se ramener à l'intégration du système d'équations différentielles

$$(26) \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt = - \frac{d\rho}{\rho \operatorname{div} \vec{v}},$$

où v_x, v_y, v_z sont des fonctions supposées connues de x, y, z, t . L'intégration des trois premières équations différentielles (26) donne des intégrales de la forme

$$(27) \quad f_1(x, y, z, t) = \lambda, \quad f_2(x, y, z, t) = \mu, \quad f_3(x, y, z, t) = \nu.$$

Lorsque λ, μ, ν ont des valeurs constantes, ces formules définissent dans l'espace-temps une ligne de courant d'univers, c'est-à-dire une ligne d'univers en chaque point de laquelle $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ sont respectivement égales aux valeurs v_x, v_y, v_z en ce point. Cette ligne de courant d'univers représente à la fois la trajectoire et le mouvement des molécules du fluide fictif.

Les équations (27) permettent d'exprimer x, y, z, t en fonction de λ, μ, ν, t et, par suite, d'exprimer $\operatorname{div} \vec{v}$ sous la forme $F(\lambda, \mu, \nu, t)$. Pour obtenir l'intégration de l'équation aux dérivées partielles, il suffit alors d'écrire la quatrième équation différentielle (26) sous la forme

$$(28) \quad dt = - \frac{d\rho}{F(\lambda, \mu, \nu, t)\rho}$$

puis de l'intégrer à λ, μ, ν constants, ce qui donne

$$(29) \quad \rho = e^{-\int_0^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi(\lambda, \mu, \nu),$$

où l'intégration dans l'exposant de l'exponentielle doit être effectuée sur t à λ, μ, ν constants et où Φ est une fonction arbitraire. On aura donc, puisque l'équation de continuité est par hypothèse valable pour Ψ et pour u avec les mêmes valeurs de v_x, v_y, v_z

$$(30) \quad \begin{cases} \rho(\Psi) = e^{-\int_0^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi_1(\lambda, \mu, \nu), \\ \rho(u) = e^{-\int_0^t F(\lambda, \mu, \nu, t) dt} \Phi_2(\lambda, \mu, \nu). \end{cases}$$

Puisque $\rho(\Psi)$ est régulier, les deux facteurs dans son expression doivent être réguliers. Dans l'expression de $\rho(u)$, le premier facteur

étant le même que dans l'expression de $\rho(\Psi)$, doit aussi être régulier : la singularité de $\rho(u)$ doit donc provenir de Φ_2 . Il en résulte que Φ_2 doit avoir une singularité pour une certaine valeur de λ, μ, ν , soit $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \nu = \nu_0$, ce qui traduit l'existence d'une singularité ponctuelle de u occupant une position x_0, y_0, z_0 à l'instant t_0 . Mais alors cette singularité se retrouvera tout le long de la ligne de courant d'univers définie par les valeurs λ_0, μ_0, ν_0 de λ, μ, ν . Autrement dit, $\rho(u)$ et par suite u présenteront une singularité ponctuelle dans l'espace à tout instant t et le mouvement de cette singularité au cours du temps sera représentée dans l'espace-temps par la ligne de courant d'univers définie par $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0$ et $\nu = \nu_0$.

La singularité, quand elle occupe à l'instant t la position x, y, z , est donc animée de la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$. C'est encore le théorème du guidage sous sa forme la plus générale et nous pouvons énoncer notre résultat en disant : *Si deux solutions des équations d'onde de la Mécanique ondulatoire, l'une régulière et l'autre à singularité ponctuelle mobile, admettent les mêmes lignes de courant, la singularité de la seconde solution suit l'une de ces lignes de courant.*

Il est important de remarquer que notre démonstration serait encore valable si la solution u , au lieu de présenter une véritable singularité mathématique, comportait seulement une très petite région en général mobile où elle atteint des valeurs très élevées tandis que la solution régulière couplée Ψ ne comporte pas d'accident analogue. Alors les expressions (30) montrent encore que l'existence de cette « région singulière » doit se traduire par une forme particulière de Φ_2 qui doit présenter des valeurs très élevées quand λ, μ, ν ont des valeurs voisines de certaines valeurs λ_0, μ_0, ν_0 . Mais ceci signifie encore le mouvement au cours du temps de la très petite région où u prend de très grandes valeurs est représenté dans l'espace-temps par un tube d'univers très délié dont l'axe est défini par $\lambda = \lambda_0, \mu = \mu_0, \nu = \nu_0$.

Sous la forme générale que nous venons de lui donner, la théorie du guidage permet de mieux apercevoir le rapport entre l'onde u et l'onde Ψ . Ces ondes devant avoir les mêmes lignes de courant, l'onde Ψ représente aussi bien que l'onde u l'ensemble des mouvements possibles du corpuscule, mais il lui manque un élément essentiel qui est le corpuscule lui-même décrivant l'une des lignes de courant : c'est pourquoi, selon ce point de vue, si l'onde Ψ peut donner une *image statistique exacte* des mouvements du corpuscule, elle ne peut constituer une *description complète* de la réalité physique. Nous rejoignons ici une opinion qu'Einstein a toujours soutenue.

4. Introduction de la non-linéarité et forme de la fonction d'onde u . —

Quand j'ai repris, il y a quelques années, avec l'active collaboration de M. Vigier, l'étude de la théorie de la double solution, nous avons tout de suite été frappés par la grande analogie qu'elle présente avec les idées d'Einstein sur la liaison des corpuscules et des champs qui s'apparentent aussi à celle de Mie dans sa théorie non linéaire de l'Électromagnétisme. Dans la théorie de la double solution comme dans les conceptions de Mie et d'Einstein, le but recherché est *d'incorporer* le corpuscule au champ sous la forme d'une très petite région où le champ prendrait des valeurs très élevées (pouvant comporter ou ne pas comporter une véritable singularité mathématique). Mais dans la théorie de la double solution, le champ auquel on cherche à incorporer le corpuscule n'est plus le champ électromagnétique ou le champ gravifique, mais le champ u ondulatoire et quantique qui doit donner une représentation objective de la structure du corpuscule.

Parvenu à ce point, nous apercevons la nécessité d'introduire une idée nouvelle.

En effet, quand on admet pour un champ des équations d'évolution linéaires, même en y introduisant comme en théorie de Lorentz des termes de sources indépendants du champ, on ne peut pas comprendre comment un corpuscule peut avoir son mouvement déterminé par l'évolution du champ : c'est un point sur lequel Einstein a beaucoup insisté. Pour échapper à cette difficulté, il est nécessaire de supposer que les équations du champ soient *non linéaires*. L'idée de non-linéarité, qui est nouvelle en Mécanique ondulatoire, y a cependant été introduite dans ces dernières années par quelques auteurs, notamment par M. Heisenberg, mais dans le cadre d'idées très différentes des nôtres.

Cependant ce que nous avons dit précédemment nous amène à penser que, si l'équation de l'onde u est non linéaire, les termes non linéaires qui y figurent ne doivent avoir de l'importance que dans la petite région singulière où les valeurs de u sont très élevées, très petite région qui constitue le corpuscule : en dehors de cette très petite région, les termes non linéaires doivent être très petits et l'équation de propagation de u doit devenir approximativement linéaire et coïncider avec l'équation de propagation usuellement admise pour l'onde Ψ , ce qui nous ramène à l'hypothèse précédemment admise que u et Ψ obéissent à la même équation.

En creusant cette idée, nous nous sommes aperçus, M. Vigier et moi, que, pour pouvoir rendre compte du succès du calcul usuel des phénomènes d'interférences et de diffraction et aussi du succès du calcul

usuel des valeurs propres de l'énergie correspondant aux états stationnaires des systèmes quantifiés, il était nécessaire de préciser la forme de l'onde u par l'hypothèse suivante : dans la région singulière où l'équation de u est très approximativement linéaire, u doit avoir la forme

$$(31) \quad u = u_0 + v,$$

où u_0 est une solution de l'équation linéaire à singularité ponctuelle au centre de la région singulière et où v est une solution régulière de la même équation. Nous préciserons comme il suit la forme des deux termes de l'expression (31). Le terme u_0 doit être extrêmement petit par rapport à v en dehors du voisinage immédiat de la région singulière : cette hypothèse a une très grande importance. La fonction u_0 croît extrêmement rapidement quand on approche de la région singulière et elle deviendrait infinie au centre de cette région si l'on pouvait l'y prolonger, c'est-à-dire si l'équation linéaire restait valable à l'intérieur de la région singulière. Quant à v , c'est une solution régulière de l'équation linéaire qui doit, du moins en général, coïncider à un facteur constant près avec la forme usuellement admise pour l'onde Ψ dans le problème considéré. Nous montrerons plus loin que l'ensemble des hypothèses que nous venons de faire peut se trouver réalisé.

Ainsi la solution u_0 de l'équation linéaire apparaît de l'extérieur comme une sorte d'aiguille très fine implantée sur une onde v qui a même forme que l'onde Ψ . Or, d'après le théorème du guidage, la fonction ou aiguille u_0 devra se déplacer le long de l'une des lignes de courant de l'onde v . Mais, si l'équation de l'onde u était partout linéaire et coïncidait partout avec l'équation usuelle de la Mécanique ondulatoire, les solutions u_0 et v seraient totalement indépendantes : il n'y aurait aucune raison pour qu'elles admettent les mêmes lignes de courant et pour que le déplacement de l'aiguille u_0 soit déterminé par les lignes de courant de v . Il en est tout autrement si l'équation de u n'est pas linéaire dans la région singulière où, en raison des grandes valeurs de u_0 , les termes non linéaires sont importants : dans cette région, les termes u_0 et v sont liés l'un à l'autre par la non-linéarité. En d'autres termes, l'équation non-linéaire en u admet *une* solution u et ce n'est qu'approximativement dans la région extérieure à la région singulière que la décomposition (31) est valable : ceci apparaîtra très clairement sur l'exemple que je vais donner tout à l'heure.

D'ailleurs la non-linéarité très localisée de l'équation de l'onde u apparaît comme essentielle pour bien comprendre le sens du théorème du guidage. Les démonstrations que nous avons données de ce théorème

en partant de l'équation linéaire reposent sur l'hypothèse que la solution régulière v (ou Ψ) et la solution régulière $u = u_0 + v$ ont les mêmes lignes de courant. Or cette hypothèse est entièrement arbitraire dans le cadre d'une théorie partout linéaire : elle cesse de l'être s'il existe une non-linéarité locale dans la petite région singulière car alors la non-linéarité, bien que très localisée, est en quelque sorte le « ciment » qui unit les solutions u_0 et v ⁽¹⁾.

Nous allons maintenant donner un exemple qui illustre utilement toutes ces considérations.

5. Illustration par un exemple des hypothèses faites sur u . — Considérons le cas simple d'un corpuscule de spin 0 immobile dans un système galiléen, le centre de sa région singulière étant pris comme origine des coordonnées, et supposons arbitrairement que l'équation de l'onde u soit l'équation non linéaire

$$(32) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + k_0^2 u = - \frac{1}{C^2} e^{-\frac{a}{r}} \frac{a^2}{r^4} u^2 u^*,$$

avec $k_0 = \frac{2\pi}{h} m_0 c$. Égalé à zéro, le premier membre de (32) nous donnerait l'équation de Klein-Gordon. Le second membre non linéaire a une forme en $u^2 u^*$ déjà envisagée par les auteurs qui ont cherché récemment à introduire de la non-linéarité en Mécanique ondulatoire : il contient une fonction de la distance à l'origine r que nous avons choisie arbitrairement et deux constantes C et a dont la première est une constante numérique et la seconde une très petite longueur qui définit une sorte de « rayon » du corpuscule à symétrie sphérique. Plus loin nous poserons, par définition, $\varepsilon = Ca$.

Comme on doit avoir $u = f e^{ik_0 ct}$ avec f fonction de r seulement, on trouve pour f l'équation

$$(33) \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{C^2} e^{-\frac{a}{r}} \frac{a^2}{r^4} f^3,$$

(1) Remarquons que le théorème du guidage peut s'exprimer en disant que, dans l'espace-temps, les valeurs très élevées de la fonction d'onde u sont contenues à l'intérieur d'un tube d'Univers très délié dont les parois sont formées par des lignes de courant de l'onde « extérieure » v (partie régulière de l'onde u). Quand on énonce sous cette forme la formule du guidage, sa parenté avec la manière dont MM. Georges Darmais et André Lichnérowicz énoncent le principe des géodésiques en Relativité générale devient évidente (voir, par exemple, LICHNÉROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, 1955, livre I. chap. III).

équation qui admet la solution

$$(34) \quad f = C e^{\frac{a}{r}}.$$

Cette solution prend des valeurs très élevées au voisinage de l'origine (pour $r \ll a$) et elle a même une singularité en $r = 0$.

Nous pouvons ici admettre que la région extérieure à la région singulière est définie par $r \gg a$. On voit alors que, dans la région extérieure ainsi définie, f prend la forme approximative

$$(35) \quad f = C + \frac{\varepsilon}{r} \quad (\varepsilon = Ca).$$

Ceci s'explique par le fait, facile à vérifier, que $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ et $\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$ sont de l'ordre de $\frac{C}{r^2} \frac{a}{r}$ tandis que le second membre de (33) est de l'ordre de $\frac{C}{r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^2$, donc négligeable par rapport au premier membre si $r \gg a$. Dans la région extérieure, l'équation non linéaire (33) se réduit sensiblement à l'équation linéaire $\Delta f = 0$ et il est naturel de trouver que f prend approximativement la forme d'une solution à symétrie sphérique de cette équation.

Dans la région singulière qui entoure l'origine, là où r est de l'ordre de a ou inférieur à a , les deux membres de l'équation non linéaire deviennent du même ordre de grandeur et il faut prendre pour f l'expression rigoureuse (34).

Maintenant, si l'équation linéaire $\Delta f = 0$ était valable partout, sa solution générale à symétrie sphérique serait

$$(36) \quad f = A + \frac{B}{r},$$

où A et B auraient des valeurs constantes arbitraires. Dans la région extérieure où l'équation de l'onde u se réduit sensiblement à l'équation de Klein-Gordon, nous avons trouvé pour f la forme approximative (35) qui coïncide bien avec la forme générale (36), mais avec des valeurs particulières déterminées de A et de B , savoir $A = C$ et $B = \varepsilon = Ca$. Et l'on voit bien que ces valeurs particulières sont imposées par la non-linéarité de l'équation de l'onde u dans la très petite région singulière qui entoure l'origine.

La solution approximative (35) correspond d'ailleurs bien à la forme $u_0 + v$, u_0 ayant une singularité et v étant une fonction régulière. De plus, comme on a ici $\frac{u_0}{v} = \frac{\varepsilon}{Cr} = \frac{a}{r}$, on voit aussi que u_0 devient

beaucoup plus petit que r dès qu'on s'éloigne de la région singulière. Nous avons ainsi retrouvé la décomposition $u = u_0 + v$ dans la région extérieure avec toutes les caractéristiques que nous lui souhaitions.

On peut d'ailleurs noter que u se trouve être la somme de la solution singulière $\frac{\varepsilon}{r} e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}$ que j'avais déjà envisagée en 1927 pour un corpuscule immobile obéissant à une équation de Klein-Gordon en l'absence de champ ⁽¹⁾ et d'une solution régulière $C e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 t}$ qui, rapportée à un système de référence où le corpuscule aurait un mouvement rectiligne et uniforme, prendrait la forme de l'onde plane monochromatique classique envisagée dès les débuts de la Mécanique ondulatoire. Dans ce système de référence en dehors de la région singulière mobile la forme de u serait donc, d'après (7),

$$(37) \quad u = \left(C + \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - ct)^2}{1 - \beta^2}}} \right) e^{\frac{2\pi i}{h} (Wt - pz)}$$

Tout ceci se recoupe très bien.

Ajoutons encore une remarque. La solution (34) présente une singularité en $r = 0$. Si, en accord avec une opinion souvent exprimée par Einstein, on considérerait comme désirable d'éviter toute singularité mathématique dans la représentation du corpuscule incorporé au champ, on n'aurait qu'à prendre pour équation non linéaire de u , à la place de l'équation (32), celle qu'on obtient en y remplaçant la variable r par la variable $\rho = r + \alpha$, où α est une longueur positive très petite par rapport à a ($0 \leq \alpha \ll a$). Grâce à cet artifice, on transforme la solution (34) en

$$(38) \quad f = C e^{\frac{u}{\rho}} = C e^{\frac{u}{r + \alpha}}$$

de sorte que f possède une valeur très élevée, mais finie pour $r = 0$. La modification introduite ne se fait évidemment sentir que dans le centre de la région singulière, là où $r \ll a$ devient de l'ordre de α . Il en résulte aisément que les valeurs que nous avons déduites de l'équation (32) restent encore valables.

Naturellement nous n'avons aucune raison de penser que l'équation (32) avec son second membre arbitrairement choisi soit la véritable

(1) Voir ci-dessus équation (8).

équation non linéaire de l'onde u pour un corpuscule de spin 0. Mais elle a l'avantage de nous offrir un exemple simple de la façon dont une non-linéarité très localisée de l'équation du champ ondulatoire u peut souder ensemble les deux termes de l'expression $u = u_0 + v$ valable à l'extérieur de la région singulière et déterminer complètement la valeur des coefficients C et ε qui figurent dans u_0 et v .

6. La relation entre u et Ψ — Cherchons à préciser maintenant la relation entre la fonction v et la fonction Ψ utilisée en Mécanique ondulatoire. Comme la fonction u est dans la théorie de la double solution une réalité physique objective indépendante des connaissances de l'observateur, la fonction v qui est une partie de u et qui se confond pratiquement avec u dès qu'on s'éloigne de la région singulière (parce qu'alors $u_0 \ll v$), a aussi le caractère d'une réalité objective. En particulier, v doit avoir une amplitude parfaitement déterminée qui n'est pas à la disposition de l'utilisateur et qui ne peut pas être normée à son gré. Mais l'observateur peut construire dans son esprit une fonction Ψ qui doit en principe être partout proportionnelle à v , mais avec un coefficient de proportionnalité C que l'utilisateur, libre de lui donner la valeur qu'il désire, peut choisir de façon que la fonction Ψ soit normée. Cette fonction serait donc une construction de l'esprit, à caractère subjectif ayant uniquement pour rôle de permettre le calcul de certaines probabilités, mais elle devrait être construite par l'utilisateur, dans la mesure où ses informations sur la forme de la fonction v sont exactes, à l'aide de la relation

$$(39) \quad \Psi = Cv.$$

C'est parce que la fonction Ψ serait construite ainsi à partir de v qui est une réalité objective, qu'elle permettrait, malgré son caractère subjectif, une évaluation statistique exacte des probabilités ⁽¹⁾.

Si la fonction v occupe plusieurs régions disjointes de l'espace physique, le corpuscule se trouvant dans l'une d'elles, l'utilisateur

⁽¹⁾ Au sujet de la formule $\Psi(x, y, z, t) = Cv(x, y, z, t)$, on peut remarquer avec M. Jean-Louis Destouches que, malgré l'égalité des deux membres de cette équation, la signification des lettres x, y, z n'est pas la même à droite et à gauche. Dans v , elles désignent les *variables* courantes d'espace, tandis que dans Ψ elles représentent les *coordonnées* du corpuscule. Dans le cas d'un seul corpuscule dans un champ donné que nous étudions seul ici, cette remarque qui est exacte peut paraître un peu subtile : elle prend toute sa valeur quand on étudie l'interprétation de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules dans l'espace de configuration par la théorie de la double solution.

pourra, suivant l'état de ses connaissances sur la position du corpuscule, choisir la constante C de façon différente pour chacune des régions en question et l'on peut voir aisément comment cela permet d'interpréter la réduction du paquet de probabilité.

Dans le même ordre d'idées, il est intéressant de réfléchir à l'idée « d'onde-pilote » que j'avais introduite en 1927 et qui a été reprise dans des travaux récents, notamment dans ceux de M. David Bohm. J'avais remarqué en 1927 que le corpuscule devant, selon la formule du guidage, suivre l'une des lignes de courant de l'onde Ψ , on pouvait adopter le point de vue suivant : ne considérer que l'onde Ψ de la Mécanique ondulatoire usuelle et ajouter arbitrairement la notion d'un corpuscule qui se déplaçant le long de l'une des lignes de courant de l'onde se trouverait ainsi être guidé par l'onde Ψ , ce qui permettrait de donner à celle-ci le nom d'onde-pilote. Mais je considérerais alors, et je considère plus que jamais aujourd'hui, la théorie de la double solution qui incorpore le corpuscule à l'onde comme beaucoup plus profonde. D'ailleurs, l'onde Ψ de la Mécanique ondulatoire usuelle a sans aucun doute un caractère subjectif puisqu'elle change avec nos informations et l'on ne peut admettre comme réel le « guidage » du corpuscule par quelque chose de subjectif.

La question s'éclaire si l'on distingue v de Ψ . L'onde u comportant un accident très localisé représenté par u_0 , tout se passe comme si cet accident (le corpuscule) était guidé dans son mouvement par l'onde v dont il suit l'une des lignes de courant. En réalité, avec les conceptions exposées plus haut, il en serait ainsi parce que u_0 et v forment un ensemble unique, la fonction d'onde u (égale à $u_0 + v$ à l'extérieur de la région singulière), u_0 et v étant soudées ensemble par la non-linéarité dans la région singulière. Mais on peut, en faisant abstraction de ces raisons profondes, considérer le corpuscule comme piloté par l'onde v . Ici il n'y a plus aucun paradoxe parce que l'onde v est une réalité physique et que, par conséquent, le corpuscule peut être guidé par elle. Mais comme l'onde Ψ doit, en principe, être choisie proportionnelle à v et avoir par suite les mêmes lignes de courant, on a l'impression que le corpuscule est guidé par l'onde Ψ , ce qui est paradoxal. Nous pouvons donc nous servir de l'image du corpuscule guidé par une onde régulière dont il suit une des lignes de courant, mais à condition de nous souvenir que cette onde régulière est l'onde v et que le corpuscule n'est pas un objet arbitrairement surajouté à cette onde, mais constitue avec elle une réalité unique, l'onde u à région singulière.

Nous pensons aussi que la distinction qui vient d'être précisée entre

l'onde Ψ et l'onde ψ permet de comprendre pourquoi, depuis une trentaine d'années, les théoriciens paraissent avoir constamment oscillé plus ou moins consciemment entre l'idée d'une onde à caractère objectif et celle d'une fonction ondulatoire simple représentation abstraite de probabilités.

CHAPITRE V.

QUELQUES COMPLÉMENTS SUR LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION ET SUR LE GUIDAGE.

1. Existence des solutions singulières dans le problème extérieur. —

Nous appellerons problème extérieur l'étude des solutions de l'équation de l'onde u à l'extérieur de la région singulière, là où cette équation se confond, au moins en première approximation, avec l'équation linéaire de propagation envisagée pour le corpuscule considéré par la Mécanique ondulatoire usuelle et où elle admet une solution approximative de la forme $u_0 + v$.

En 1927, j'employais exclusivement l'équation de Klein-Gordon et sa forme dégénérée, l'équation de Schrödinger, et je ne distinguais pas v de Ψ . J'aurais voulu démontrer qu'à chaque solution Ψ de la Mécanique ondulatoire déjà usuelle correspondait une solution à singularité mobile u_0 ayant la même phase que Ψ . Dans le cas de l'absence du champ, j'avais trouvé la solution précédemment indiquée ⁽¹⁾; mais c'était là un cas très particulier et je n'avais pas vu comment on pourrait établir d'une façon générale l'existence de la fonction u_0 .

Aujourd'hui où l'ensemble de la théorie de la double solution a pris une forme plus cohérente et plus précise, l'étude de l'existence des solutions singulières du problème extérieur et de leur couplage avec les solutions régulières conserve tout son intérêt. Un progrès notable en ce sens a été accompli récemment dans la thèse de M. Francis Fer. Dans ce travail, l'auteur a considéré un type d'équations aux dérivées partielles qui contient comme cas particulier l'équation de Klein-Gordon. Utili-

(¹) Chap. IV, form. (7) et (8).

sant des méthodes générales d'intégration des équations aux dérivées partielles, il a démontré l'existence de solutions à singularité qui s'expriment par des formules du type de celle des potentiels retardés. Étudiant le raccordement de ces solutions singulières avec les solutions régulières, M. Fer est conduit à retrouver pour le mouvement de la singularité celui qui est prévu par la formule du guidage. Le travail de M. Fer paraît donc apporter une contribution importante à l'établissement de l'existence des solutions singulières dans le problème extérieur en théorie de la double solution.

Naturellement, ce problème extérieur, analogue à celui qui se pose en Relativité générale quand on étudie le champ à l'extérieur d'un tube d'univers très délié meublé de matière, correspond à un point de vue incomplet si l'on admet que la véritable équation satisfaite par u est non linéaire et que la décomposition $u = u_0 + v$ est seulement une expression approximative valable seulement dans la région extérieure.

Sans pouvoir donner ici une démonstration générale de l'existence de u_0 dans le problème extérieur, je vais insister sur une méthode qui semble permettre de construire effectivement la fonction u du problème extérieur dans le cas des états stationnaires.

2. La formule de Rayleigh-Sommerfeld. — Ce qu'il y a de curieux dans la méthode que nous allons exposer, c'est qu'elle a eu son point de départ dans la constatation d'un fait qui paraissait constituer une très importante difficulté pour la théorie de la double solution.

Cette difficulté provient de la théorie des fonctions de Green pour les équations d'onde qui est exposée dans beaucoup d'Ouvrages ⁽¹⁾ et qui est intimement liée à la théorie générale des équations intégrales linéaires.

Considérons une fonction d'onde u obéissant à une équation d'ondes telle que si u est une solution monochromatique, c'est-à-dire ne dépendant du temps que par un facteur e^{iket} , elle prenne la forme

$$(1) \quad \Delta u + [k^2 - F(x, y, z)]u = 0.$$

Nous savons que c'est le cas par exemple de l'équation de Schrödinger et qu'alors k^2 est proportionnel à l'énergie E du corpuscule.

Envisageons un domaine D de l'espace physique d'un seul tenant et de dimensions finies. Les ondes stationnaires dont le domaine D peut être le siège sont définies comme des ondes monochromatiques solutions

⁽¹⁾ Voir en particulier, bibliographie [5] et [6].

de (1) qui s'annulent aux limites du domaine D. Si l'on se borne, comme en Mécanique ondulatoire usuelle, à considérer des solutions régulières Ψ de l'équation (1), on démontre que l'onde stationnaire n'existe que si la constante k a une des valeurs comprises dans une suite k_1, \dots, k_n, \dots dont l'ensemble forme le spectre de « valeurs propres » du problème considéré. En Mécanique ondulatoire, les valeurs propres définissent, on le sait, les énergies quantifiées du corpuscule dans le domaine D. Les fonctions d'onde régulières et nulles aux limites Ψ_n qui leur correspondent sont les « fonctions propres ».

Mais on pourrait aussi envisager des solutions de l'équation (1) qui seraient nulles aux limites du domaine D, mais qui présenteraient en un point Q de ce domaine une singularité ponctuelle. Ces solutions sont les « fonctions de Green » de l'équation (1) pour le domaine D et le point « source » Q. Ces fonctions de Green $G(M, Q)$ dépendent donc du point courant M et du point source Q. On les astreint aux deux conditions suivantes :

1° Êtres nulles aux limites du domaine D ;

2° Présenter au point Q une singularité ponctuelle telle que, lorsque M tend vers Q, la fonction $G(M, Q)$ croît comme $\frac{1}{MQ} = \frac{1}{r}$.

Or la théorie générale des équations intégrales linéaires nous fournit, au sujet de l'existence des fonctions de Green, le théorème que voici :

La fonction de Green $G(M, Q)$ existe toujours quand la constante k a une valeur qui ne coïncide avec aucune des valeurs propres k_1, k_2, \dots . Si k coïncide avec l'une des valeurs propres k_n , alors la fonction de Green $G(M, Q)$ n'existe que dans le cas très particulier où la fonction propre correspondante $\Psi_n(M)$ est nulle au point Q.

On peut retrouver ce résultat en construisant effectivement la fonction de Green à l'aide d'une formule donnée naguère par Lord Rayleigh et fréquemment utilisée ensuite par Sommerfeld.

Pour la démontrer, nous partirons de la remarque qu'en raison de la singularité ponctuelle en $\frac{1}{r}$ que la fonction de Green doit présenter au point Q, on doit écrire l'équation satisfaite par $u = G(M, Q)$ sous la forme

$$(2) \quad \Delta u + [k^2 - F(x, y, z)]u = \varepsilon \delta(M - Q),$$

où l'on a introduit au second membre un terme de source comportant

un coefficient numérique ε analogue à une charge électrique dont la valeur est arbitraire et la fonction singulière de Dirac $\delta(\mathbf{M} - \mathbf{Q})$. L'équation (1) sera alors satisfaite par u partout sauf au point \mathbf{Q} où elle aura une singularité en $\frac{1}{r}$.

Or on peut développer $\delta(\mathbf{M} - \mathbf{Q})$ suivant les fonctions propres $\Psi_i(\mathbf{M})$ sous la forme

$$(3) \quad \delta(\mathbf{M} - \mathbf{Q}) = \sum_i c_i \Psi_i(\mathbf{M}),$$

avec

$$(4) \quad c_i = \int \delta(\mathbf{M} - \mathbf{Q}) \Psi_i^*(\mathbf{M}) d\tau = \Psi_i^*(\mathbf{Q}),$$

d'où

$$(5) \quad \delta(\mathbf{M} - \mathbf{Q}) = \sum_i \Psi_i^*(\mathbf{Q}) \Psi_i(\mathbf{M}).$$

Si nous développons également $u = G(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$ sous la forme

$$(6) \quad u = \sum_i d_i \Psi_i(\mathbf{M})$$

on devra avoir

$$(7) \quad [\Delta + k^2 - F(xy, z)] \sum_i d_i \Psi_i(\mathbf{M}) = \varepsilon \sum_i \Psi_i^*(\mathbf{Q}) \Psi_i(\mathbf{M}),$$

et puisque $\Psi_i(\mathbf{M})$ est solution de l'équation (1) avec $k = k_i$, il vient

$$(8) \quad \sum_i (k^2 - k_i^2) d_i \Psi_i(\mathbf{M}) = \varepsilon \sum_i \Psi_i^*(\mathbf{Q}) \Psi_i(\mathbf{M}),$$

d'où l'on tire, puisque les Ψ_i forment un système complet,

$$(9) \quad d_i = \frac{\varepsilon \Psi_i^*(\mathbf{Q})}{k^2 - k_i^2}.$$

En portant dans (6), on obtient la formule de Rayleigh-Sommerfeld

$$(10) \quad u(\mathbf{M}) = G(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = \sum_i \frac{\varepsilon \Psi_i^*(\mathbf{Q}) \Psi_i(\mathbf{M})}{k^2 - k_i^2}.$$

Il convient de remarquer que la série figurant au dernier membre de (10) n'est pas absolument convergente. Malgré ce défaut, elle peut en général, comme Sommerfeld l'a montré, être utilisée sans danger.

Sur la formule (10), on retrouve aisément les résultats fournis par la théorie des équations intégrales linéaires. En effet, si la constante k ne

coïncide avec aucun des k_i , la formule (10) nous fournit la fonction de Green dont l'existence se trouve ainsi démontrée. Si, au contraire, k coïncide avec l'un des k_i , mettons k_n , alors le terme d'indice n dans la somme (10) est infini et la formule ne nous fournit pas une fonction de Green acceptable sauf dans le cas très particulier où $\Psi_n(Q)$ est nul. Nous retrouvons donc bien les résultats énoncés plus haut.

Or, en y réfléchissant, ces résultats apparaissent d'abord comme désastreux pour la théorie de la double solution. En effet, dans cette théorie il paraissait évident que l'on devait faire correspondre à l'état stationnaire usuellement représenté par la fonction $\Psi_n(M)$ et correspondant à la valeur k_n une fonction $u = G(M, Q)$ nulle aux limites de D comme Ψ_n , présentant une singularité ponctuelle au point Q où se trouverait le corpuscule et correspondant, elle aussi, à la valeur k_n de la constante k . Mais précisément cette fonction de Green n'existe pas ou, du moins, elle ne pourrait exister que si le corpuscule se trouvait en un point Q telle que $\Psi_n(Q) = 0$. Malheureusement, en vertu de la signification statistique certainement exacte de $|\Psi|^2$, le corpuscule aurait alors une probabilité nulle de se trouver en Q . La contradiction est flagrante et paraît constituer une redoutable objection contre la théorie de la double solution.

Néanmoins, nous allons voir, en regardant les choses de plus près, que la formule de Rayleigh-Sommerfeld, bien loin de constituer une objection contre l'existence de l'onde u dans le cas stationnaire, fournit au contraire un moyen de la construire.

3. Construction de la fonction u à l'aide de la formule de Rayleigh-Sommerfeld dans le cas des états stationnaires. — Nous partons de la remarque suivante : $u = u_0 + v$ étant supposée nulle aux limites du domaine D , la fonction v ne doit pas être rigoureusement nulle sur ces limites, mais égale à $-u_0$. En écartant le cas extrêmement improbable où Q serait situé si près de la limite de D que la très petite région singulière entourant Q viendrait toucher cette limite, les valeurs $-u_0$ que doit prendre v sur les frontières sont partout extrêmement petites, mais cependant elles ne sont pas rigoureusement nulles. Par suite, v ne peut pas être considérée comme exactement proportionnelle à la fonction propre Ψ_n usuellement calculée. Donc v doit être une solution de l'équation d'ondes linéaire qui correspond à une valeur de k extrêmement voisine de k_n , mais non tout à fait exactement égale à k_n .

Nous sommes ainsi amenés à penser que la fonction u correspondant à l'état stationnaire d'indice n doit être égale à la fonction de Green

$G(M, Q)$ qui correspond à une valeur de k très légèrement différente de k_n . Dès lors cette fonction de Green existe et elle doit nous être donnée par la formule de Rayleigh-Sommerfeld !

Pour examiner la forme de cette fonction u , écrivons la formule (10) en isolant le terme d'indice n et en désignant par δk_n la différence $k - k_n$ que, pour abréger, je nommerai « le glissement de fréquence ». On pourra écrire très approximativement

$$(11) \quad u(M, Q) = \sum_{i \neq n} \frac{\varepsilon \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k^2 - k_i^2} + \frac{\varepsilon \Psi_n^*(Q) \Psi_n(M)}{2 k_n \delta k_n}.$$

Soit alors $\Psi'_n(M)$ une fonction solution de l'équation d'ondes pour $k = k_n + \delta k_n$, δk_n correspondant au très petit glissement de fréquence dont nous déterminerons plus loin la valeur. La fonction Ψ'_n étant très voisine de la fonction propre Ψ_n , nous poserons

$$\Psi'_n(M) = \Psi_n(M) + \delta \Psi_n(M),$$

$\delta \Psi_n$ étant la très petite variation de Ψ_n quand k_n varie de δk_n (1). On aura alors

$$(12) \quad u(M, Q) = \sum_{i \neq n} \frac{\varepsilon \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k^2 - k_i^2} - \frac{\varepsilon \Psi_n^*(Q) \delta \Psi_n(M)}{2 k_n \delta k_n} + \frac{\varepsilon \Psi_n^*(Q) \Psi'_n(M)}{2 k_n \delta k_n}.$$

Nous sommes ainsi assurés d'avoir obtenu une solution du problème extérieur nulle aux limites de D et présentant au point Q une singularité ponctuelle en r^{-1} puisque nous n'avons fait qu'appliquer la formule de Rayleigh-Sommerfeld pour une valeur de k différente de tous les k_i .

Comme la fonction $\Psi'_n(M)$ est régulière, la singularité ne peut affecter que les deux premiers termes du second membre de (12). Donc si nous posons

$$(13) \quad \begin{cases} u_0(M, Q) = \sum_{i \neq n} \frac{\varepsilon \Psi_i^*(Q) \Psi_i(M)}{k^2 - k_i^2} - \frac{\varepsilon \Psi_n^*(Q) \delta \Psi_n(M)}{2 k_n \delta k_n}, \\ v(M) = \frac{\varepsilon \Psi_n^*(Q)}{2 k_n \delta k_n} \Psi'_n(M) = C \Psi'_n(M), \end{cases}$$

avec

$$(14) \quad C = \frac{\varepsilon \Psi_n^*(Q)}{2 k_n \delta k_n},$$

(1) Ψ'_n est égal à $\Psi_n + \frac{\partial \Psi_n}{\partial k_n} \delta k_n$. En négligeant les termes en δk_n^2 , on voit que Ψ'_n est solution (non nulle aux limites de D) de l'équation $[\Delta - F + (k_n + \delta k_n)^2] \Psi'_n = 0$ en tenant compte de l'équation $(\Delta - F + k_n^2) \Psi_n = 0$ et de sa dérivée par rapport à k_n .

nous aurons finalement ramené la fonction u à la forme $u = u_0 + v$, u_0 et v étant solutions de l'équation linéaire, u_0 ayant une singularité ponctuelle en Q et v étant régulière. De plus nous voyons que v est de la forme $C\Psi'_n \simeq C\Psi_n$, c'est-à-dire très sensiblement proportionnelle à la fonction Ψ_n qui est la fonction propre considérée en Mécanique ondulatoire usuelle.

Si le rapport $\frac{\varepsilon}{C}$ est considéré comme bien déterminé, nous obtenons comme expression du glissement de fréquence δk_n la valeur entièrement déterminée par la position de la singularité

$$(15) \quad \delta k_n = \frac{\varepsilon}{C} \frac{\Psi_n^*(Q)}{2k_n}.$$

Mais, dans le problème extérieur où l'on ne considère que l'équation d'ondes linéaire, la valeur de $\frac{\varepsilon}{C}$ est arbitraire. En effet, ε est introduit artificiellement avec une valeur déterminée dans le second membre de (2) : quant à C , cette constante n'a aucune valeur imposée *a priori*. La formule (15) ne nous fournit donc pas une valeur déterminée pour δk_n .

Mais nous avons vu précédemment que le point de vue adopté dans le problème extérieur où l'on considère implicitement l'équation linéaire sans second membre (1) comme valable partout sauf au point Q est insuffisant. Nous devons admettre qu'au voisinage immédiat de Q existe une très petite région singulière où l'équation (1) n'est plus valable et où l'on doit tenir compte d'un second membre non linéaire. Or, comme je l'ai montré sur un exemple au chapitre précédent (§ 3), la non-linéarité localisée dans la région singulière peut suffire pour imposer des valeurs parfaitement déterminées à ε , C et $\frac{\varepsilon}{C}$. Il en résulte que cette non-linéarité locale doit permettre d'obtenir par la formule (15) une valeur parfaitement déterminée et extrêmement petite du glissement de fréquence δk_n .

Il convient de faire ici une remarque qui pourrait avoir son importance. Si la théorie qui précède est exacte, comme la fréquence k de l'onde « véritable » u différerait très légèrement de k_n , la méthode habituelle de calcul des énergies quantifiées en Mécanique ondulatoire qui déduit ces énergies des valeurs propres de l'équation de Schrödinger serait entachée d'une très légère inexactitude. Mais dans l'état actuel de la théorie de la double solution, nous pouvons toujours supposer le

rapport $\frac{\varepsilon}{C}$ assez petit pour qu'il n'en résulte aucun effet observable même dans les mesures spectroscopiques les plus précises.

J'ai donné ailleurs ⁽¹⁾ le calcul complet de la fonction u dans le cas d'un corpuscule immobile au centre d'une enceinte sphérique et montré qu'elle peut se représenter par la formule de Rayleigh-Sommerfeld. Le calcul est rendu très facile par le fait que les fonctions propres et la fonction de Green ont alors des formes très simples $\left(\frac{\sin k_n r}{r} \text{ et } \frac{\cos kr}{r}\right)$. M. André Rot vient de faire ⁽²⁾ un calcul analogue dans le cas plus général d'un corpuscule occupant une position quelconque dans une enceinte sphérique, puis de l'étendre au cas de tout domaines D fini quand il y a séparation des variables et même à certains cas de domaines infinis.

Quoiqu'il en soit il semble que, du moins dans le cas de domaines finis et sous réserve de l'examen de certaines questions de convergence, la formule de Rayleigh-Sommerfeld, qui paraissait constituer une grave difficulté pour la théorie de la double solution, fournit au contraire une méthode pour construire dans le domaine extérieur une fonction d'onde u possédant toutes les propriétés requises.

4. Interprétation de la signification statistique du $|\Psi|^2$ dans les états stationnaires. — Nous allons maintenant étudier un problème qui a été souvent considéré comme fournissant une forte objection contre la formule du guidage.

Dans toute tentative de réinterprétation causale de la Mécanique ondulatoire, on doit se demander comment on peut justifier le fait, depuis longtemps bien établi, que le carré du module de la fonction d'onde Ψ donne la probabilité de présence du corpuscule en chaque point à chaque instant. MM. Bohm et Vigier ⁽³⁾ ont apporté une contribution importante à la solution de ce problème en montrant que, si le mouvement du corpuscule défini par la « formule du guidage » subit constamment de petites perturbations aléatoires, la probabilité de présence en $|\Psi|^2$ doit s'établir très rapidement. Ces petites perturbations aléatoires jouent le même rôle que le « chaos moléculaire » dans la Mécanique statistique de Boltzmann. A quoi peuvent être dues ces

⁽¹⁾ Voir [3] p. 226-230

⁽²⁾ *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 483 et 1281.

⁽³⁾ D. BOHM, *Phys. Rev.*, t. 85, 1952, p. 166 et 180; D. BOHM et J. P. VIGIER, *Phys. Rev.*, t. 96, 1954, p. 208.

incessantes petites perturbations aléatoires ? A des interactions avec d'autres systèmes passant à proximité (collisions), à de faibles fluctuations des conditions aux limites imposées à l'onde, peut-être même, d'après M. Vigier, à des interactions avec un champ ondulatoire tourbillonnaire et incoordonné qui remplirait ce que nous appelons « le vide ».

D'un point de vue général, on peut remarquer que, dans toute théorie qui impose au corpuscule une loi de mouvement bien déterminée, il est nécessaire pour obtenir une Mécanique statistique d'introduire un élément aléatoire (chaos moléculaire de Boltzmann en Mécanique classique, hypothèse des perturbations de Bohm et Vigier dans l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire). Mais le résultat statistique que l'introduction de cet élément aléatoire permet de justifier est en quelque sorte contenu d'avance dans les équations du mouvement dont on part, ce qui permet de prévoir ce résultat *a priori*. Ainsi dans le cadre des anciennes Mécaniques de Newton et d'Einstein, on peut démontrer le théorème de Liouville qui affirme la conservation au cours du temps du domaine d'extension en phase occupé par les points représentatifs dans cet espace abstrait d'un nuage de corpuscule se déplaçant dans l'espace physique suivant les lois de la Dynamique. Ce théorème rend probable *a priori* qu'en Mécanique statistique classique ou relativiste, le principe statistique fondamental doit être l'égalité probabilité des éléments égaux de l'extension en phase. Mais la démonstration rigoureuse de cette proposition, objet des théories ergodiques, paraît exiger toujours l'introduction plus ou moins explicite d'un élément aléatoire analogue au chaos moléculaire de Boltzmann.

De même, dans les théories de la double solution ou de l'onde pilote (la distinction entre les deux est ici sans importance), le rôle joué dans les Mécaniques anciennes par le théorème de Liouville appartient à l'équation de continuité $\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \right]$ valable pour le fluide fictif associé à la propagation de l'onde régulière. Cette équation rend probable *a priori* que, dans la nouvelle Dynamique découlant de la formule du guidage, la quantité $\rho \, dv$ (où $\rho = |\Psi|^2$ avec l'équation de Schrödinger) soit la probabilité pour que le corpuscule soit présent à l'instant t dans l'élément de volume dv de l'espace physique. Mais ici encore cette affirmation ne peut être vraiment justifiée, par des raisonnements analogues à ceux de MM. Bohm et Vigier, qu'en introduisant un élément aléatoire constitué par les incessantes petites perturbations dont nous avons parlé plus haut.

Quelle que soit l'origine physique de ces perturbations, nous pouvons nous les représenter de la façon suivante. Supposons qu'abstraction faite de ces perturbations, l'onde régulière associée à un corpuscule (onde Ψ ou onde ν peu importe si on les suppose proportionnelles) soit de la forme $a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ avec a et φ réels: le mouvement du corpuscule incorporé à cette onde « non perturbée » sera défini par la formule du guidage qui, en se bornant au cas simple de l'équation de Schrödinger, s'écrira

$$(15 \text{ bis}) \quad \vec{\nu} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

Introduisons les petites perturbations: bien qu'elles soient très nombreuses pendant chaque unité de notre temps macroscopique (par exemple, par seconde), nous les supposons très courtes et séparées dans le temps par des intervalles très longs par rapport à leur durée. Pendant l'une de ces perturbations, l'onde prendra la forme $(a + \varepsilon) e^{\frac{2\pi i}{h} (\varphi + \eta)}$, où ε et η sont les petites perturbations de l'amplitude et de la phase. En raison du caractère aléatoire des perturbations, il est naturel de supposer que les valeurs moyennes dans le temps $\bar{\varepsilon}$ et $\bar{\eta}$ sont nulles. Pendant la durée de la perturbation, la vitesse du corpuscule devient la somme de la vitesse non perturbée donnée par (15 bis) et de la vitesse additionnelle $\vec{\nu}' = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \eta$. Bien que la valeur moyenne de $\vec{\nu}'$ soit nulle, ces vitesses additionnelles feront passer le corpuscule de sa trajectoire non perturbée initiale à une autre trajectoire non perturbée, puis de celle-ci à une troisième, etc. Finalement, bien que la durée de chacune des perturbations soit par hypothèse beaucoup plus courte que celle des intervalles pendant lesquelles le corpuscule décrit une trajectoire non perturbée, le nombre énorme des perturbations subies par seconde aura pour effet qu'au bout d'un temps très court à notre échelle, la probabilité de présence $|\Psi|^2 = \alpha^2$ se trouvera réalisée: c'est ce que paraissent démontrer les raisonnements de MM. Bohm et Vigier. Cette probabilité se trouve d'ailleurs être aussi égale à la valeur moyenne du carré de l'amplitude perturbée $\overline{(a + \varepsilon)^2}$ si l'on s'en tient au premier ordre, puisque $\bar{\varepsilon} = 0$.

Nous en arrivons maintenant à l'application de la formule du guidage au cas des états stationnaires, application qui semble au premier abord conduire à une grosse difficulté. Considérons un état stationnaire d'un système quantifié, par exemple d'un électron dans l'atome d'hydrogène.

En général, la fonction d'onde correspondante est de la forme

$a(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}$, E_n étant la valeur quantifiée de l'énergie et a une fonction réelle des variables x, y, z . La formule (15) nous indique alors que l'électron doit rester immobile en un point quelconque, mais bien déterminé de l'atome; ceci correspond au fait que la force quantique

$\overrightarrow{\text{grad}} Q$ dérivant du potentiel quantique Q fait alors équilibre à la force électrostatique. Dans d'autres cas, on pourra trouver que l'électron est animé d'un mouvement périodique simple; ainsi, pour l'électron dans l'atome d'hydrogène, quand la fonction d'onde est de la forme

$\Psi = F(r, \theta) e^{im\alpha} e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}$, où r, θ, α sont les coordonnées polaires autour du noyau, comme la phase est alors une fonction linéaire de l'angle de longitude α , l'électron doit, d'après la formule (15), décrire un « parallèle » autour de l'axe polaire avec une vitesse uniforme. Dans tous les cas, que l'électron soit immobile ou animé d'un mouvement périodique très simple, on ne voit absolument pas comment la probabilité de présence $|\Psi|^2 = a^2$ peut se trouver réalisée. L'objection paraît grave.

Mais introduisons maintenant les petites perturbations aléatoires brusques et espacées et commençons par envisager le cas où l'électron de l'atome d'hydrogène a comme mouvement non perturbé un mouvement circulaire uniforme. On peut voir facilement que la longueur de la trajectoire circulaire doit être de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-9} cm et la vitesse de l'électron de l'ordre de 10^9 cm/s. La période du mouvement est donc de l'ordre de 10^{-18} s. Admettons alors, à titre d'exemple, qu'il se produise en moyenne un milliard de perturbations brusques par seconde : le corpuscule aura néanmoins le temps de décrire en moyenne dans chaque intervalle de temps entre deux perturbations consécutives un milliard de tours sur sa trajectoire non perturbée. Cet exemple montre que le corpuscule pourra être considéré comme animé *presque constamment* du mouvement non perturbé défini par la formule (15) bien qu'il change de trajectoire circulaire un milliard de fois par seconde. Ceci nous permet de comprendre comment, malgré la forme circulaire des trajectoires non perturbées, on puisse s'attendre à trouver l'électron en n'importe quel point de l'atome avec la probabilité $|\Psi|^2$.

Dans le cas où l'électron dans son état non perturbé reste immobile en un point de l'atome, on peut dire que le mouvement non perturbé se réduit à l'immobilité. Mais si nous admettons toujours qu'il se produit en moyenne un milliard de perturbations par seconde, l'électron sera

projeté un milliard de fois par seconde en moyenne d'une position dans une autre et, au bout d'une seconde, il aura occupé un milliard de positions différentes dans l'atome, et cela bien qu'il soit resté en moyenne dans chacune de ces positions pendant un temps très long par rapport à la période de son onde (qui, étant toujours voisine de $\frac{h}{m_0 c^2}$, est de l'ordre de 10^{-20} s). Ici encore, nous arrivons à comprendre comment, grâce au sautaillement continu du corpuscule dû aux perturbations, peut se réaliser la probabilité de présence en $|\Psi|^2$ bien que le corpuscule reste *presque constamment* immobile.

5. Deux théorèmes de la théorie de la double solution-onde pilote. — Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes intéressants de l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire que l'on peut énoncer dans le langage de la théorie de l'onde pilote qui est ici équivalente à la théorie de la double solution. Ces théorèmes nous sont connus depuis assez longtemps : ils ont été d'ailleurs donnés par d'autres auteurs, notamment par M. Herbert Franke.

a. Théorème sur l'expression de l'énergie cinétique. — Dans la Mécanique ondulatoire usuelle, on considère la fonction d'onde Ψ comme une grandeur complexe indécomposable dont on ne fait pas intervenir *séparément* le module et l'argument. On prend comme opérateur hamiltonien

$$(16) \quad H = \frac{1}{2m} P^2 + V \quad \left(P^2 = -\frac{h^2}{4\pi^2} \Delta \right),$$

l'opérateur $\frac{P^2}{2m}$ correspondant à l'énergie cinétique T de la théorie classique. La valeur moyenne de l'énergie totale E dans l'état Ψ est alors dans le formalisme usuel

$$(17) \quad \bar{E} = \int_D \Psi^* \left(-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta + V \right) \Psi \, d\tau.$$

En théorie de la double solution-onde pilote, on écrit $\Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} \varphi}$ et l'on fait jouer des rôles distincts à l'amplitude a et à la phase φ . Par substitution dans l'équation d'ondes, on obtient l'équation de Jacobi généralisée

$$(18) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv E = \frac{1}{2m} (\text{grad } \varphi)^2 + V + Q,$$

avec

$$(19) \quad Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a}.$$

De plus, l'on obtient aussi l'équation de continuité

$$(20) \quad \frac{d}{dt}(a^2) + \operatorname{div}\left(-\frac{a^2}{m} \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}\right) = 0.$$

Comme l'énergie cinétique T du corpuscule a ici, d'après la formule du guidage (15), la valeur bien définie $T = \frac{1}{2m} (\operatorname{grad} \varphi)^2$, on voit que l'énergie totale E est la somme de l'énergie cinétique, du potentiel classique V et du potentiel quantique Q . La densité de probabilité de présence étant $|\Psi|^2 = a^2$, on est amené à écrire

$$(21) \quad E = \int_0 \left(\frac{1}{2m} \operatorname{grad}^2 \varphi + V + Q \right) a^2 d\tau.$$

Or on trouve facilement, en tenant compte de l'équation (20),

$$(22) \quad -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \Psi = \frac{1}{2m} (\operatorname{grad} \varphi)^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a}.$$

En portant (22) dans (17) et en comparant avec (21), on voit que :

1° L'expression usuelle (17) de \bar{E} coïncide avec l'expression (21) donnée par la théorie de la double solution-onde pilote ;

2° Dans l'expression (21) de \bar{E} le terme $-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta$ de l'expression usuelle (17) ne correspond pas à l'énergie cinétique T définie par la formule du guidage, mais à la somme de cette énergie cinétique et du potentiel quantique. Si ce potentiel ne figure pas explicitement dans la formule (17), c'est parce qu'il est contenu dans le terme $\frac{1}{2m} P^2$ que la théorie usuelle considère comme correspondant à l'énergie cinétique, mais qu'ici nous interprétons différemment.

Ce théorème est important pour la comparaison exacte de la théorie usuelle avec l'interprétation causale et la formule du guidage.

b. Théorème du Viriel. — En Mécanique statistique classique, on démontre un théorème connu sous le nom de « théorème du Viriel », théorème qui joue notamment un rôle important en théorie cinétique des gaz. Je rappelle d'abord la démonstration classique de ce théorème.

Le mouvement du corpuscule de quantité de mouvement égale à \vec{p} dans un champ de force dérivant du potentiel V est

$$(23) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} V}$$

On en déduit, \vec{r} étant le rayon vecteur qui définit la position du corpuscule,

$$(24) \quad \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 2T - \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V.$$

On voit alors facilement que, *pour un mouvement périodique*, le premier membre de l'équation (24) doit être nul en moyenne dans le temps et l'on obtient pour un tel mouvement

$$(25) \quad 2\bar{T} - \overrightarrow{\vec{r} \cdot \text{grad}} V = 0.$$

La grandeur $-\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V$ est nommé le « Viriel des forces » et la formule (25) exprime le théorème classique du Viriel.

Ce théorème peut se transposer dans la Mécanique ondulatoire usuelle. Pour cela, nous introduisons les définitions suivantes :

$$(26) \quad \begin{cases} N = \frac{h}{2\pi i} \int_{\mathfrak{D}} \Psi^* (\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \Psi \, d\tau, \\ R = - \int_{\mathfrak{D}} (\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V) \Psi^* \Psi \, d\tau, \\ \bar{T} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \int \Psi^* \Delta \Psi \, d\tau. \end{cases}$$

Il est visible que R représente ici la valeur moyenne du Viriel. Partant de l'équation de Schrödinger et effectuant plusieurs intégrations par parties, l'on démontre alors que l'on a

$$(27) \quad \frac{dN}{dt} = 2T + R.$$

Si l'onde est stationnaire $\left(\Psi \sim e^{\frac{2\pi i}{h} Et} \right)$, le premier membre de (27) est nul et il reste

$$(28) \quad 2\bar{T} + R = 0,$$

ce qui est visiblement la transposition en Mécanique ondulatoire usuelle du théorème classique du Viriel.

Nous allons interpréter la formule (28) en nous plaçant au point de vue de l'interprétation causale.

En tenant compte du théorème α et en introduisant le potentiel quantique $Q = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\Delta a}{a}$ et sa valeur moyenne $\int_{\mathfrak{D}} Q a^2 \, d\tau$, nous récrivons la formule (28) sous la forme

$$(29) \quad 2\bar{T}' + 2\bar{Q} + R = 0,$$

où T' est ici l'énergie cinétique « véritable » $\frac{1}{2m}(\text{grad } \varphi)^2$ correspondant à la formule du guidage. Or, dans la théorie de la double solution-onde pilote, le théorème du Viriel doit évidemment s'écrire sous la forme

$$(30) \quad 2\bar{T}' + R + R' = 0,$$

où

$$(31) \quad R' = - \int_D (\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} Q) a^2 d\tau$$

est la valeur moyenne du Viriel de la force quantique qu'il faut évidemment ici ajouter à la valeur moyenne du Viriel de la force classique R .

Pour démontrer (31), il suffit de montrer que

$$(32) \quad R' = 2 \int_D Q a^2 d\tau = 2\bar{Q},$$

soit

$$(33) \quad 2 \int_D a \Delta a d\tau = - \int_D \left(\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\Delta a}{a} \right) a^2 d\tau.$$

Or, on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} (34) \quad - \int_D \left(\vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\Delta a}{a} \right) a^2 d\tau &= \int_D \frac{\Delta a}{a} (3a^2 + \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a^2) d\tau \\ &= \int_D (3a \Delta a + 2\Delta a \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a) d\tau \\ &= 2 \int_D a \Delta a d\tau, \end{aligned}$$

car on voit aisément par une suite d'intégration par parties que

$$(36) \quad 2 \int_D \Delta a \vec{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} a d\tau = - \int_D a \Delta a d\tau.$$

Le théorème du Viriel sous la forme (30) se trouve donc démontré.

6. Quelques mots sur la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration. — L'on sait que dans ces beaux Mémoires de 1926, M. Schrödinger avait été amené, pour construire la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules de façon qu'elle admette la théorie classique d'Hamilton-Jacobi comme approximation de l'Optique géométrique, à associer au mouvement d'un système la propagation d'une onde dans l'espace de configuration défini par l'ensemble des $3N$ coordonnées des N corpuscules constituant le système. Il a écrit

l'équation de propagation dans l'espace de configuration sous la forme

$$(36) \quad \sum_k^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \Psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V \Psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

où m_k est la masse du $k^{\text{ième}}$ corpuscule de coordonnées x_k, y_k, z_k et où $\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}$. Le potentiel V correspond à la fois aux interactions qui peuvent s'exercer de l'extérieur sur le système s'il n'est pas isolé et aux interactions des corpuscules du système entre eux. Dans le cas où $N=1$, on retombe sur l'équation valable pour un seul corpuscule dans un champ extérieur donné.

En mettant ainsi sur le même pied la propagation de l'onde Ψ d'un système dans l'espace de configuration et celle de l'onde Ψ d'un corpuscule dans l'espace physique, on enlevait à l'onde Ψ tout caractère de réalité physique car la propagation d'une onde dans l'espace abstrait de configuration ne peut être que purement fictive. Même dans le cas d'un seul corpuscule, si l'on considère l'équation d'onde de ce corpuscule comme étant un cas particulier pour $N=1$ de l'équation (36), on obtient une équation de propagation dans l'espace de configuration du corpuscule défini par ses coordonnées x, y, z , et non une équation de propagation dans l'espace physique définie par les variables d'espace x, y, z . L'onde devient ainsi une grandeur purement abstraite.

Naturellement, à cette époque où je cherchais à conserver à l'onde de la Mécanique ondulatoire le caractère d'une réalité objective, je n'avais pu admettre ce point de vue. Pour moi, tout phénomène réel devait pouvoir être décrit dans le cadre de l'espace et du temps : il ne me paraissait pas admissible que l'on ne puisse traiter le problème de N corpuscules en interaction qu'en considérant une propagation d'ondes visiblement fictive dans un espace de configuration entièrement abstrait. A mes yeux il devait être possible de poser, et même de résoudre, ce problème en considérant la propagation dans l'espace physique de N ondes u à singularité s'influencant mutuellement. On devrait ensuite pouvoir démontrer que le résultat statistique de ces interactions est exactement fourni par la considération de l'onde Ψ de Schrödinger dans l'espace de configuration, onde Ψ qui n'étant qu'une représentation de probabilité peut avoir un caractère abstrait : elle ne serait en somme qu'une représentation statistique des corrélations établies entre les positions des singularités des ondes u sous l'influence de leurs interactions.

Conformément à ce programme, on doit chercher à se représenter un système de N corpuscules comme formé par N trains d'ondes u portant chacun une région singulière et évoluant dans l'espace physique au cours du temps, la propagation de chacun de ces trains d'ondes étant influencée par les actions qu'exercent sur elles les régions singulières des autres trains d'ondes. Déjà dans mon Mémoire de 1927, j'avais fait une première tentative pour justifier en me plaçant à ce point de vue le rôle de l'onde Ψ dans l'espace de configuration. Dans ces dernières années, j'ai repris des efforts en ce sens et je les ai exposés dans mon récent Ouvrage (¹). Certes on ne peut pas dire qu'une démonstration vraiment claire et rigoureuse ait vraiment été obtenue jusqu'ici, mais j'ai des raisons de penser qu'on parviendra à l'obtenir. Aussi dans le présent exposé, j'admettrai que, quand des traces d'ondes u correspondant à divers corpuscules ont interagi, par exemple, dans un dispositif de mesure, les corrélations statistiques établies entre les positions des corpuscules par la théorie de l'onde Ψ dans l'espace de configuration sont exactes. Cette hypothèse nous permettra d'obtenir les résultats que nous désirons sans avoir à traiter le problème du mouvement de chaque train d'ondes u pendant la période d'interaction.

Nous allons maintenant revenir au problème de la Mesure en l'envisageant désormais du point de vue de la théorie de la double solution et en le soumettant à une analyse plus détaillée qu'on ne l'a fait habituellement jusqu'ici.

(¹) Voir [3], chap. XII et aussi *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 529.

CHAPITRE VI.

POSITION DE L'INTERPRÉTATION CAUSALE EN FACE DU PROBLÈME DE LA MESURE EN MICROPHYSIQUE.

1. Rôle particulier joué par la position du corpuscule. — La théorie de la double solution rétablit une description des phénomènes dans le cadre de l'espace et du temps. Elle est donc amenée à donner à la mesure de la position du corpuscule un rôle particulier. Ceci semble d'ailleurs naturel si l'on remarque que toutes les observations sont nécessairement faites dans le cadre de l'espace physique.

Si l'on réfléchit à la façon dont peut s'opérer la détermination de la position d'un corpuscule, on est amené aux constatations suivantes. D'abord, comme le corpuscule n'est pas directement observable, sa présence ne peut être décelée que par un effet macroscopique local dont il provoque le déclenchement. Et il en est de même pour tout système microphysique. C'est ainsi qu'un photon arrivant dans la couche sensible d'une plaque photographique y produit un effet photoélectrique et le photoélectron émis déclenche par des effets d'ionisation une cascade de phénomènes chimiques qui se traduisent par une réduction locale de bromure d'argent et par un noircissement local de la couche sensible visible après développement photographique. De même, un corpuscule électrisé pénétrant dans une chambre de Wilson déclenchera, pour effet d'ionisation, une condensation de gouttelettes de vapeur donnant une trace dans la chambre et une série d'actions analogues consécutives provoquera l'apparition d'une file de gouttelettes de vapeur dessinant grossièrement la trajectoire du corpuscule.

En y réfléchissant, il apparaît que tout phénomène observable provoqué par des corpuscules de l'échelle atomique est décelable de cette manière seulement. Il y a toujours à l'origine de l'observation l'action

locale d'un corpuscule déclenchant finalement un phénomène macroscopiquement observable. C'est là un point essentiel qui n'a pas été suffisamment mis en lumière par l'analyse de M. von Neumann et par les commentaires qui en ont été faits. Par contre, dans cette analyse on fait jouer un rôle qui nous paraît exagéré à l'appareil de mesure et même à l'aiguille de l'appareil de mesure. En réalité, l'appareil de mesure et son aiguille ne peuvent jouer qu'un rôle secondaire pour mesurer le phénomène *macroscopique* déclenché par l'action locale du corpuscule : par exemple, un galvanomètre pourra servir à mesurer le courant de décharge provoqué par l'arrivée d'un corpuscule dans un compteur à pointe, mais c'est le déclenchement de la décharge qui est la chose essentielle et non sa mesure par le galvanomètre. Le rôle de l'instrument de mesure nous apparaît comme beaucoup moins important qu'on ne le dit souvent et il y a même des cas où l'on peut s'en passer complètement (par exemple dans l'observation visuelle directe d'une plaque photographique).

Dans l'interprétation usuelle, on considère très souvent que l'on mesure la position d'un corpuscule en le faisant passer à travers un trou percé dans un écran et ouvert pendant un temps très court : on aurait ainsi une détermination aussi exacte qu'on le voudrait de la position du corpuscule. Mais indépendamment du fait qu'on n'exécute jamais en pratique une pareille mesure de la position d'un corpuscule, on doit remarquer qu'il faudrait qu'il y ait ensuite un phénomène macroscopique observable déclenché par le corpuscule qui a traversé l'écran ; sans quoi, on n'observerait rien du tout. On pourrait faire l'expérience de la façon suivante : recevoir le train d'ondes contenant le corpuscule sur un écran percé d'une infinité de trous très voisins (tamis) et placer derrière cet écran une plaque photographique.

L'observation d'un noircissement local de la plaque photographique permettrait de dire que le corpuscule a passé par le trou situé en face de ce noircissement. La détermination de la position ainsi effectuée serait toujours imprécise, les dimensions de la tache noire sur la plaque photographique étant d'ordre de grandeur macroscopique (puisque cette tache est observable) et, par suite, beaucoup plus grandes que les dimensions du corpuscule. Elle aboutit néanmoins à préciser considérablement la position du corpuscule puisque les dimensions d'un trou du tamis sont beaucoup plus petites que les dimensions transversales du train d'ondes incident.

Nous parvenons à l'idée générale, trop souvent méconnue, que, si l'on ne peut déterminer d'une façon très précise la position d'un

corpuscule, cependant toute observation ou toute mesure relative à un corpuscule microphysique s'opère toujours en observant un phénomène macroscopique très localisé déclenché par l'action de ce corpuscule.

Contrairement à ce qu'affirme la théorie trop abstraite des représentations en Mécanique ondulatoire usuelle, la position d'un corpuscule joue donc un rôle tout à fait différent des autres grandeurs mesurables. Répétons que cela est bien naturel puisque toute observation s'opère dans le cadre de l'espace physique. Méconnaissant ce fait, la théorie des représentations tend à mettre exactement sur le même pied l'espace des

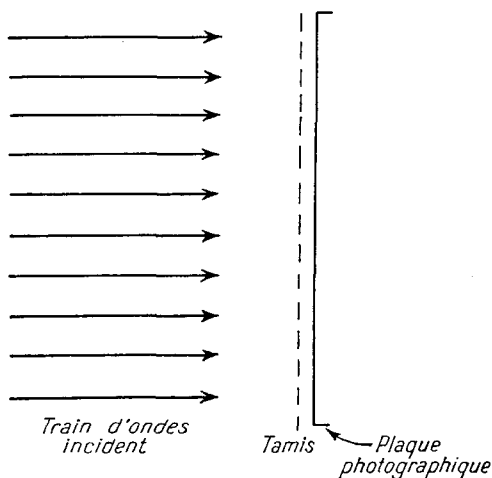


Fig. 1.

moments (p_x, p_y, p_z) et l'espace physique (x, y, z) , mais c'est là pousser trop loin l'abstraction : le physicien, son laboratoire et ses instruments sont dans l'espace physique et l'espace des moments n'existe que dans l'esprit des théoriciens.

Comme la théorie de la double solution revient à des idées plus concrètes et rétablit le rôle privilégié que joue incontestablement dans l'expérience l'espace physique, il n'est pas surprenant qu'elle doive nous conduire à attribuer un rôle particulier à la distribution de probabilité relative à la position (le $|\Psi|^2$ dans le cas de l'équation de Schrödinger). Elle va nous apprendre, en effet, que cette distribution de probabilité correspond à un collectif que l'on doit associer à l'état initial avant la mesure. Au contraire, la distribution de probabilité que le formalisme usuel attribue à une grandeur qui n'est pas simultanément mesurable avec la position n'est pas réalisée en général dans l'état

initial : elle correspond à un collectif associé à l'état qui existera après l'action sur le corpuscule d'un dispositif permettant la mesure de la grandeur envisagée.

2. Tout dispositif de mesure comporte une séparation des trains d'ondes dans l'espace. — Nous allons maintenant insister sur une autre circonstance qui, elle aussi, a été jusqu'ici méconnue dans la théorie de la Mesure.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'on veut mesurer une grandeur relative à un corpuscule sans faire intervenir un autre corpuscule. On devra alors employer un dispositif macroscopique dont l'action sur la propagation de l'onde à laquelle le corpuscule est incorporé aura finalement pour effet de séparer *dans l'espace* des trains d'ondes correspondant chacun à une valeur donnée de la grandeur à mesurer. Cette conclusion est la conséquence immédiate du fait mis en évidence dans le dernier paragraphe que toute observation d'un corpuscule consiste toujours dans sa localisation. Pour que la localisation d'un corpuscule après l'action du dispositif de mesure nous permette de dire quelle était à ce moment la valeur de la grandeur mesurée, il faut qu'il y ait une correspondance univoque entre la localisation du corpuscule et la valeur de la grandeur mesurée et c'est cela qui exige la séparation des trains d'ondes dans l'espace après la mesure.

Le dispositif que nous avons envisagé plus haut (*fig. 1*) pour la mesure de la position répond à cette condition puisqu'il a pour effet d'isoler des trains d'ondes de petites dimensions latérales, ce qui permet une mesure (un peu imprécise) des coordonnées du corpuscule dans le plan de l'écran grâce au noircissement très localisé déclenché dans la plaque photographique placée derrière le tamis.

Envisageons maintenant la mesure de la quantité de mouvement dont la connaissance nous fournit l'énergie. Pour mesurer la quantité de mouvement d'un photon (donc son énergie, sa fréquence et sa « couleur »), on enverra le faisceau incident sur un dispositif du genre prisme ou réseau qui séparera dans l'espace en les envoyant dans des directions différentes les trains d'ondes correspondant aux diverses fréquences. Quand le train d'ondes incident n'est pas monochromatique, le dispositif réalise une véritable décomposition spectrale en isolant dans l'espace les diverses composantes de Fourier de l'onde incidente : mais la même séparation serait obtenue si le dispositif recevait successivement des trains d'ondes monochromatiques ayant des fréquences différentes, car chacun d'eux serait envoyé dans la direction

qui correspond à sa fréquence. Comme à la sortie immédiate du dispositif, les trains d'ondes peuvent se superposer, la localisation du photon dans cette région par l'observation d'un phénomène macroscopique qu'il déclencherait ne permettrait pas de lui attribuer une fréquence bien définie. Aussi place-t-on ordinairement derrière le prisme ou le réseau une lentille qui, séparant les différents faisceaux monochromatiques, les fait converger sur des petites régions séparées de son plan focal où ils donnent chacun une image colorée de la source. Si un phénomène macroscopique observable (par exemple noircissement local d'une émulsion photographique) est déclenché par l'arrivée d'un photon dans l'une de ces régions, on pourra lui attribuer une fréquence déterminée. Le faisceau initial est ainsi divisé par l'action du dispositif réseau + lentille en une série de portions d'onde qui viennent frapper la plaque photographique en des régions spatialement disjointes et c'est cette séparation spatiale qui permet la mesure de la fréquence, et par suite de la quantité de mouvement, du photon. Le fait que nous venons de raisonner sur un photon n'a aucune importance particulière car nous savons aujourd'hui que tout corpuscule peut nous donner des phénomènes du type optique et nous pouvons construire pour les électrons, par exemple, des dispositifs analogues à un prisme ou à une lentille. Il n'y a donc, dans le problème que nous examinons, aucune différence essentielle entre le photon et les autres corpuscules.

Plus généralement, nous pouvons analyser ce genre de mesure de la façon suivante. Supposons que nous voulions mesurer une grandeur A relative au corpuscule. Le train d'ondes initial R_0 étant représenté par la fonction d'onde

$$(1) \quad \Psi = \sum_k c_k \varphi_k,$$

où φ_k est la fonction propre de A correspondant à la valeur propre α_k , nous envoyons ce train d'ondes sur un dispositif D (réseau + lentille dans le cas étudié plus haut) qui sépare les composantes $c_k \varphi_k$ de telle sorte qu'à la sortie du dispositif D , chacune d'elles occupe une région R_k spatialement séparées des régions occupées par les autres.

Si alors nous observons (à l'aide d'un enregistrement photographique ou autrement) un phénomène macroscopique déclenché par le corpuscule dans la région R_j , nous pourrions affirmer que la grandeur A de ce corpuscule avait après l'action du dispositif la valeur α_j et nous aurons ainsi effectué une mesure de A . Le formalisme de la Mécanique ondulatoire nous affirme alors que la valeur α_j a la probabilité $|c_j|^2$, c'est-

à-dire que nous recommençons un très grand nombre de fois la même expérience de mesure avec des trains d'ondes représentés par la même fonction d'onde (1), la proportion des cas où nous obtiendrions la valeur α_j serait donnée par $|c_j|^2$.

Dans l'interprétation usuelle où l'on ne veut rien ajouter au concept d'onde Ψ , il n'y a pas de localisation du corpuscule incident dans R_0 et il n'y en a pas davantage dans les régions R_1, R_2, \dots , après l'action du dispositif D . Ce serait seulement au moment où se produirait un phénomène observable dans R_j que *brusquement* le corpuscule se localiserait dans cette région. Il faudrait même dire dans la théorie de von Neumann-

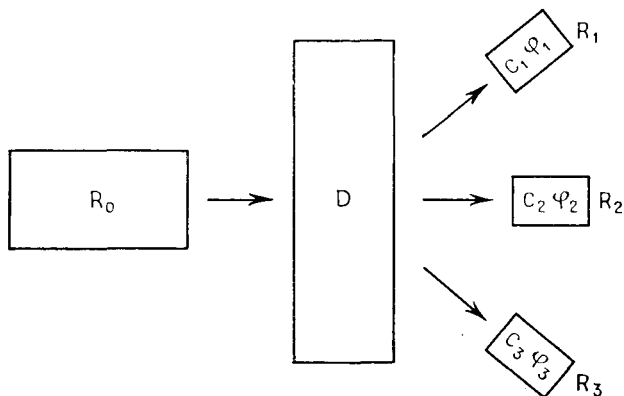


Fig. 2.

London-Bauer que c'est la prise de conscience par l'observateur du phénomène macroscopique qui localise le corpuscule dans R_j . Mais ceci paraît vraiment inacceptable ! Il semble évident que le phénomène macroscopique se produirait, même si l'observateur avait les yeux fermés, de sorte que la prise de conscience par l'observateur n'a rien à voir là-dedans.

Ce qui est également incompréhensible dans l'explication actuelle, c'est comment il se fait que le déclenchement d'un phénomène macroscopique observable dans R_j empêche *instantanément* le corpuscule de se manifester dans une autre des régions R_k . La chose est d'autant plus surprenante qu'au moment de la localisation du corpuscule les divers R_k peuvent se trouver très éloignés de R_j .

C'est en somme cette difficulté qu'Einstein avait signalée, sous une forme un peu différente, au Conseil Solvay de 1927 et que l'on n'a jamais pu nettement écarter. « Considérons, disait Einstein, un écran plan percé d'un trou sur lequel tombe normalement un train d'ondes Ψ .

« Derrière l'écran, si le trou est assez petit, l'onde prendra la forme d'une onde sphérique dont le trou serait le centre. Disposons alors derrière l'écran un film hémisphérique F. Si le corpuscule se manifeste en un point A de F, ceci s'interpréterait très facilement si le corpuscule avait suivi une trajectoire bien définie (telle que celle représentée en pointillée sur la figure 3) qui l'aurait amené en A. Mais si le corpuscule n'est pas localisé, s'il est répandu à l'état potentiel dans toute l'onde hémisphérique derrière l'écran, comment le fait qu'il se manifeste en A peut-il l'empêcher instantanément de se manifester en tout autre point B du film, point qui peut être à une grande distance de A ? »

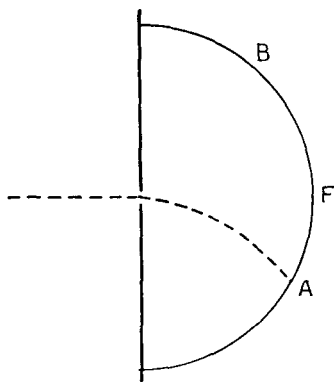


Fig. 3.

On voit bien que l'objection est la même que celle que nous avons exposée plus haut, car le dispositif d'Einstein est un dispositif de mesure de la position du corpuscule. On ramènerait d'ailleurs ce dispositif à celui que nous avons envisagé précédemment (*fig. 1*) en supposant que le film hémisphérique est placé immédiatement derrière un écran également hémisphérique percé d'une infinité de trous.

On pourrait objecter au raisonnement d'Einstein que le corpuscule ne manifeste pas sa présence en un point A, mais dans une petite région autour de A. Mais la surface de cette région étant très petite par rapport à celle de l'hémisphère F, l'objection d'Einstein garde toute sa valeur.

Revenons à la figure 2. On tombe dans des difficultés qui paraissent insurmontables si l'on ne veut pas admettre que le corpuscule est localisé, mais tout s'éclaire si l'on rétablit la localisation du corpuscule comme le fait la théorie de la double solution. En effet, alors le corpuscule doit avoir une position dans le train d'ondes initial. Cette position, nous ne pouvons d'ailleurs pas la connaître parce que, pour la mesurer,

nous serions obligés d'employer un dispositif qui perturberait entièrement le train d'ondes initial. Mais nous admettrons que cette position existe et que la probabilité pour que le corpuscule se trouve au point M_0 du train d'ondes à l'instant initial t_0 est donnée par $|\Psi(M_0, t_0)|^2$. Pour la justification de cette dernière hypothèse, on se reportera au paragraphe 4 du dernier chapitre. D'après le théorème du guidage, le corpuscule partant d'une position initiale M_0 à l'instant t_0 doit suivre la ligne de courant qui passe par M_0 . Le mouvement qui en résulte pour lui est en général très compliqué : il n'est rectiligne et uniforme qu'avant l'action du dispositif quand le train d'ondes est sensiblement monochromatique. Mais nous savons qu'après le passage au travers le dispositif qui sépare les trains d'ondes R_1, R_2, \dots , le mouvement du corpuscule l'amènera finalement dans l'un des trains d'ondes R_k , la probabilité pour que ce soit dans R_j étant évidemment

$$\int_R |\Psi|^2 d\tau = \int_{R_j} |c_j|^2 |\varphi_j|^2 d\tau = |c_j|^2,$$

puisque φ_j est normée ⁽¹⁾ et nulle en dehors de R_j . Si alors le corpuscule déclenche un phénomène macroscopique observable dans R_j , c'est parce qu'il est arrivé dans R_j et alors la grandeur A a la valeur α_j .

Évidemment il faut que l'observateur constate le déclenchement du phénomène macroscopique pour qu'il prenne conscience du fait que, le corpuscule étant dans R_j , A a la valeur α_j . Mais ce fait est indépendant de la prise de conscience par l'observateur et tout redevient clair.

3. Rétablissement du schéma usuel des statisticiens. — Nous allons montrer maintenant que les idées de la théorie de la double solution (que l'on peut ici employer sous la forme simple de l'onde pilote) conduisent immédiatement à remettre en ordre toute la question des distributions de probabilités.

Nous allons envisager le cas où la grandeur que l'on veut mesurer est la quantité de mouvement \vec{p} . Nous supposerons valable l'équation de Schrödinger et nous écrirons pour la densité de probabilité de la position \vec{r}

$$(2) \quad \rho(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2.$$

⁽¹⁾ Dans le développement (1), les φ_k sont en réalité des différentielles propres représentant des groupes d'ondes.

Nous poserons dans l'état initial ⁽¹⁾

$$(3) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h}\varphi} = \int c(\vec{p}) \Psi(\vec{p}, \vec{r}) d\vec{p} = \sum_k b(\vec{p}_k) \Psi_{\vec{p}_k}.$$

Dans l'état initial, le corpuscule, s'il est en un point \vec{r} , a pour quantité de mouvement d'après la formule du guidage

$$(4) \quad \vec{p} = m \vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi(\vec{r}).$$

Pour les deux variables aléatoires \vec{R} et \vec{P} , on a dans l'état initial, avant la mesure de \vec{P} , les densités de probabilité

$$(5) \quad \rho_{\vec{R}}(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2, \quad \rho_{\vec{P}}^{(\vec{R})}(\vec{p}, \vec{r}) = \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi),$$

la seconde formule signifiant que, si l'on connaissait la valeur de \vec{r} , donc de $\varphi(\vec{r})$, \vec{p} a la valeur donnée par la formule du guidage. On a encore

$$(6) \quad \rho(\vec{r}, \vec{p}) = |\Psi(\vec{r})|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi)$$

et l'on vérifie que

$$(7) \quad \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p} = |\Psi(\vec{r})|^2 = \rho_{\vec{R}}(\vec{r}) \quad (d\vec{p} = dp_x dp_y dp_z).$$

On a également

$$(8) \quad \rho_{\vec{P}}(\vec{p}) = \sum_i |\Psi(\vec{r}_i)|^2,$$

les \vec{r}_i correspondant aux positions du corpuscule pour lesquelles $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ a la valeur \vec{p} considérée et l'on vérifie que ($d\vec{r} = dx dy dz$)

$$(9) \quad \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} = \int |\Psi(\vec{r})|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) d\vec{r} = \sum_i |\Psi(\vec{r}_i)|^2 = \rho_{\vec{P}}(\vec{p}).$$

Pour compléter le schéma statistique du type classique relatif à l'état initial, il faut encore définir $\rho_{\vec{R}}^{(\vec{P})}(\vec{r}, \vec{p})$, ce que l'on fera en posant

$$(10) \quad \rho_{\vec{R}}^{(\vec{P})}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\rho(\vec{r}, \vec{p})}{\rho_{\vec{P}}(\vec{p})} = \frac{|\Psi(\vec{r})|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi)}{\int |\Psi(\vec{r})|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) d\vec{r}}.$$

(1) Pour que la mesure de \vec{p} puisse se faire par séparation de trains d'ondes dans l'espace, il faut que les \vec{p}_k formant une suite discontinue. Néanmoins on peut employer l'intégrale en la considérant comme portant sur des différentielles propres.

Finalement, en considérant toutes les positions \vec{r} possibles du corpuscule dans le train d'ondes initial et les valeurs correspondantes de \vec{p} données par la formule du guidage, on aura défini un collectif d'individus ayant des positions et des mouvements bien définis pour lequel on aura un schéma statistique du type classique correspondant au tableau suivant :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\vec{r}}(\vec{r}) = |\Psi(\vec{r})|^2, \quad \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) = \sum_i |\Psi(r_i)|^2, \\ \rho(\vec{r}, \vec{p}) = |\Psi(r)|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad } \varphi}), \\ \rho_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\vec{r}, \vec{p}) = \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad } \varphi}), \quad \rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{|\Psi(r)|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad } \varphi})}{\int |\Psi(r)|^2 \delta(\vec{p} + \overrightarrow{\text{grad } \varphi}) d\vec{r}}, \end{array} \right.$$

avec les relations également classiques

$$(I') \left\{ \begin{array}{l} \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} = \rho_{\vec{p}}(\vec{p}), \quad \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p} = \rho_{\vec{r}}(\vec{r}), \\ \rho_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\rho(\vec{p}, \vec{r})}{\rho_{\vec{r}}(\vec{r})}, \quad \rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\rho(\vec{r}, \vec{p})}{\rho_{\vec{p}}(\vec{p})}. \end{array} \right.$$

Mais nous devons insister sur un point important. Les distributions de probabilité que nous venons de définir sont, sauf $\rho_{\vec{r}}(\vec{r})$, des distributions « cachées » en ce sens que nous ne pouvons pas les déterminer expérimentalement. En effet, à part $\rho_{\vec{r}}(\vec{r}) = |\Psi(r)|^2$ que nous pourrions déterminer directement à l'aide du dispositif écran-tamis de la figure 1, nous ne pouvons déterminer les valeurs de \vec{p} sans faire une mesure de cette grandeur, mesure qui, comportant une séparation spatiale des composantes $\Psi_{\vec{p}_k}$ du développement (3), change complètement l'état ondulatoire en détruisant la superposition des $\Psi_{\vec{p}_k}$ et le collectif primitif qui lui était associé. Ainsi nous avons bien défini un collectif à l'aide du tableau (I), mais c'est un collectif *caché*.

Étudions maintenant la situation après une mesure de \vec{p} . Le dispositif de mesure a morcelé l'onde initiale en trains d'ondes partiels correspondant chacun à l'une des composantes $\Psi_{\vec{p}_k}$. Nous avons vu plus haut que nous aurons alors $\rho_{\vec{p}}(\vec{p}_k) = |c_k|^2$, ce qui s'écrit en notations continues

$$(II) \quad \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) = |c(\vec{p})|^2$$

et nous aurons aussi

$$(12) \quad \rho_{\vec{r}}(\vec{r}) = \int |c(\vec{p})|^2 |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2 d\vec{p}$$

et

$$(13) \quad \rho(\vec{r}, \vec{p}) = |c(\vec{p})|^2 |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2.$$

La fonction propre $\Psi(\vec{p}, \vec{r})$ étant normée ⁽¹⁾, on vérifie tout de suite que

$$(14) \quad \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p} = \rho_{\vec{r}}(\vec{r}), \quad \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} = \rho_{\vec{p}}(\vec{p}).$$

Comme probabilités liées, nous trouvons

$$(15) \quad \rho_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\vec{r}, \vec{p}) = |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2, \quad \rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})}(\vec{r}, \vec{p}) = \int_{R_p} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) d\vec{r}',$$

R_p étant la région où l'onde se réduit à sa composante \vec{p} .

La dernière formule (15) exprime que, pour \vec{p} connue, si le point \vec{r} est dans R_p , on a $\rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})} = 1$ et que, si \vec{r} n'est pas dans R_p , on a $\rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})} = 0$ et ceci n'est pas autre chose que l'expression mathématique du fait que si le corpuscule manifeste sa présence dans R_p (en y déclenchant un phénomène observable), on doit attribuer à la quantité de mouvement la valeur \vec{p} . C'est précisément ainsi que la séparation des trains d'ondes permet la mesure de la quantité de mouvement.

Bref, après la mesure, en considérant une infinité de corpuscules qui seraient répartis entre les trains R_p suivant les proportions $|c(\vec{p})|^2$, puis répartis à l'intérieur de chaque train d'ondes R_p suivant la densité $|\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2$, nous obtenons un collectif formé d'individus ayant des positions et des mouvements parfaitement déterminés, collectif qui correspond au schéma statistique suivant du type classique :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\vec{r}}(\vec{r}) = \int |c(\vec{p})|^2 |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2 d\vec{p}, \quad \rho_{\vec{p}}(\vec{p}) = |c(\vec{p})|^2, \\ \rho(\vec{r}, \vec{p}) = |c(\vec{p})|^2 |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2, \\ \rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})}(\vec{r}, \vec{p}) = |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2 \quad \rho_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\vec{r}, \vec{p}) = \int_{R_p} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) d\vec{r}', \end{array} \right.$$

(1) Voir note p. 89.

quantités entre lesquelles existent les relations classiques

$$(II') \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r} = \rho_{\vec{p}}(\vec{p}), \quad \int \rho(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{p} = \rho_{\vec{r}}(\vec{r}), \\ \rho_{\vec{p}}^{(\vec{r})}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\rho(\vec{r}, \vec{p})}{\rho_{\vec{r}}(\vec{r})}, \quad \rho_{\vec{r}}^{(\vec{p})}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\rho(\vec{r}, \vec{p})}{\rho_{\vec{p}}(\vec{p})}. \end{array} \right.$$

Les relations (II') se vérifient immédiatement, sauf l'avant-dernière qui s'écrit

$$(16) \quad |c(\vec{p})|^2 |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2 = \int |c(p')|^2 |\Psi(\vec{p}', \vec{r})|^2 dp' \int_{R_{\vec{p}}} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) d\vec{r}'.$$

Voici comment elle se démontre. Dans (16) la dernière intégrale est égale à 1 si le point \vec{r} est dans $R_{\vec{p}}$ et alors la quantité de mouvement est égale à \vec{p} : elle est nulle si \vec{r} n'est pas dans $R_{\vec{p}}$. Il en résulte que le second membre de (16) se réduit à $|c(\vec{p})|^2 |\Psi(\vec{p}, \vec{r})|^2$, \vec{p} ayant la valeur qui correspond à la position connue \vec{r} , de sorte que l'équation (16) est bien vérifiée.

Remarquons que, pour le collectif postérieur à la mesure, aucune des deux distributions de probabilité $\rho_{\vec{r}}(\vec{r})$ et $\rho_{\vec{p}}(\vec{p})$ n'est « cachée ». Ceci résulte de ce que, d'une part, la distribution $\rho_{\vec{r}}(\vec{r})$ relative à la position est, nous le savons, toujours vérifiable par une expérience statistique (par exemple à l'aide du dispositif écran-tamis) et que, d'autre part, la distribution $\rho_{\vec{p}}(\vec{p})$ résulte de l'action même du dispositif qui permet la mesure de \vec{p} . Par contre, la distribution de probabilité correspondant dans le collectif final à une grandeur qui n'est simultanément mesurable ni avec la position, ni avec la quantité de mouvement, aura une valeur parfaitement déterminée, mais restera « cachée », car la mesure de cette grandeur détruirait le collectif. On voit donc qu'en théorie de la double solution-onde pilote, à tout état correspond un collectif bien déterminé, mais qu'il existe toujours des grandeurs dont la répartition de probabilité est cachée parce que leur mesure détruirait le collectif⁽¹⁾.

(1) On doit remarquer que chaque région $R_{\vec{p}}$ est occupée par un « groupe d'ondes » représentable par une différentielle propre et correspondant non pas à une valeur tout à fait exacte de \vec{p} , mais à des valeurs extrêmement voisines de \vec{p} de telle sorte que les relations d'incertitude restent valables pour chaque groupe d'ondes $R_{\vec{p}}$.

Il va maintenant être très intéressant de comparer les répartitions de probabilité (I) et (II) qui correspondent respectivement au collectif réalisé avant la mesure de \vec{p} et au collectif réalisé après la mesure de \vec{p} .

Tout d'abord la comparaison de $\rho_{\vec{r}}(\vec{r})$ dans (I) et dans (II) nous montre que nous retrouvons sous la forme habituelle l'interférence des probabilités.

D'autre part, les répartitions $\rho_{\vec{r}}(\vec{r}) = |\Psi|^2$ dans (I) et $\rho_{\vec{r}}(\vec{p}) = |c_p|^2$ dans (II) sont aussi celles que considère le formalisme probabiliste usuel. Mais ici on voit nettement qu'elles se rapportent à des collectifs différents réalisés l'un *avant* la mesure, l'autre *après* la mesure. C'est la raison pour laquelle ces distributions de probabilité ne peuvent pas vérifier le schéma habituel des statisticiens qui suppose l'existence d'un collectif unique.

On voit maintenant très nettement le défaut qui vicie la démonstration du célèbre théorème de M. von Neumann. Son raisonnement montre bien qu'il est impossible, même en introduisant des variables cachées, de constituer un collectif correspondant à la fois aux distributions de probabilité $|\Psi|^2$ et $|c(\vec{p})|^2$ habituellement envisagées pour les grandeurs canoniquement conjuguées « position » et « quantité de mouvement ». Mais il ne prouve aucunement qu'en introduisant des variables cachées, on ne puisse pas constituer des collectifs (à distributions de probabilités partiellement cachées) qui soient du type habituel et qui correspondent respectivement à l'état initial avant la mesure et à l'état final après la mesure. Les probabilités habituellement considérées figurent dans ces collectifs, mais pas dans le *même* collectif. Nous venons de construire en détail dans le cas de la mesure de \vec{p} les collectifs en question et nous apercevons bien maintenant que le théorème de M. von Neumann n'avait pas la portée qu'on lui attribuait.

4. Interprétation des relations d'incertitude. — Dans l'interprétation usuelle, le fait que les distributions de probabilité pour une coordonnée x et pour le moment conjugué p_x correspondent à des « dispersions », $\sigma(x)$ et $\sigma(p_x)$, telles que

$$(17) \quad \sigma(x) \sigma(p_x) \geq \frac{h}{4\pi},$$

ce qui permet d'écrire la relation qualitative

$$(18) \quad \partial_x \partial_{p_x} \equiv h,$$

où δx et δp_x sont les incertitudes sur les valeurs de x et de p_x devrait être interprété en disant que les incertitudes sur les valeurs de x et de p_x ne peuvent jamais être toutes deux nulles à la fois. Mais de cette affirmation prudente on a en général passé à une affirmation beaucoup plus hardie. On a admis que les quantités telles que δx et δp_x ne représenteraient pas de simples *incertitudes* expérimentales sur la valeur de ces grandeurs résultant des conditions mêmes de la mesure en Microphysique, mais qu'elles correspondraient à de véritables *indéterminations* affectant toujours une partie des grandeurs relatives à un corpuscule. Dans cette manière de voir qui paraît implicitement admise par la plupart des auteurs, on est alors obligé de considérer le corpuscule comme réparti statistiquement entre des états divers, ce qui fournit une image du corpuscule bien peu intelligible.

Au contraire, avec la théorie de la double solution où les répartitions de probabilité $\rho_X(x)$ et $\rho_{P_x}(p_x)$ se rapportent à des états différents, l'interprétation des relations d'incertitude n'est plus la même. Dans chaque état, le corpuscule a une position dans l'onde qui est bien déterminée et une quantité de mouvement également bien déterminée en fonction de la position par la formule du guidage. Toutes les grandeurs relatives au corpuscule qui s'expriment toutes à l'aide des coordonnées du corpuscule et des moments de Lagrange correspondants ont donc aussi des valeurs bien déterminées à chaque instant. Mais ces valeurs ne peuvent pas toutes être connues simultanément. En effet, à l'exception de la position et des grandeurs qui sont mesurables en même temps que la position, l'action du dispositif nécessaire pour mesurer une grandeur A aura pour effet d'envoyer ce corpuscule d'une manière parfaitement déterminée dans l'un ou l'autre des trains d'ondes qui finalement correspondent à une valeur donnée de A . De la sorte, il y a *a priori* une incertitude sur le résultat de la mesure de A qui provient de l'incertitude sur la position (cachée) du corpuscule dans le train d'ondes initial, incertitude correspondant à la répartition de probabilité $|\Psi|^2$. La dispersion $\sigma(p_x)$ des valeurs *finales* possibles de p_x après la mesure est reliée à la dispersion des valeurs *initiales* possibles de la position par la relation (17). Et l'on pourra en ce sens dire que la position et la quantité de mouvement d'un corpuscule sont toujours affectées d'incertitude δx et δp_x telles que la relation (18) soit vérifiée.

Mais à notre point de vue, ce sont là seulement des incertitudes sur les résultats possibles de deux mesures incompatibles (mesure de la position et mesure de la quantité de mouvement) exigeant des dispositifs de mesure différents : ce ne sont pas du tout des indéterminations

réelles de la position et de la quantité de mouvement d'un corpuscule à chaque instant. Ces indéterminations proviennent (du moins pour les grandeurs autres que la position) de l'action du dispositif de mesure sur le phénomène ondulatoire auquel le corpuscule est incorporé (onde ν et non pas onde Ψ , mais les deux sont proportionnelles). Comme la liaison entre le corpuscule et son onde fait essentiellement intervenir la constante de Planck (dont la véritable signification physique reste encore mystérieuse), on peut rester d'accord avec M. Bohr pour dire que les incertitudes de Heisenberg sont, par l'intermédiaire de la réaction de la propagation de l'onde sur le mouvement du corpuscule, une conséquence inévitable de l'existence du quantum d'Action, mais, répétons-le, il n'en résulte aucunement, d'une façon nécessaire, une véritable indétermination de la position et de la quantité de mouvement du corpuscule.

Dans la théorie de la double solution, les incertitudes de Heisenberg gardent toute leur valeur, mais elles doivent être interprétées avec plus de prudence qu'on ne le fait d'ordinaire.

Des considérations analogues sont d'ailleurs applicables à la notion de complémentarité. Dans la théorie de la double solution, on peut, si on le désire, la conserver, mais à condition d'en bien limiter la portée. Elle signifierait seulement qu'une même opération de mesure ne peut nous fournir à la fois la valeur des grandeurs qui décrivent l'aspect ondulatoire (telles que les composantes de la quantité de mouvement) et celle des grandeurs qui décrivent l'aspect corpusculaire (telles que les coordonnées du corpuscule). Mais on ne pourrait aucunement en conclure que ces grandeurs, non simultanément mesurables, n'ont pas à chaque instant une valeur parfaitement déterminée. Ainsi délimitée, la notion de complémentarité ne soulèverait pas de difficultés essentielles. Elle n'aurait plus la signification assez peu intelligible qu'on lui attribue en général et suivant laquelle ce que nous nommons « corpuscule » serait une entité protéiforme susceptible de prendre tour à tour un aspect ondulatoire et un aspect granulaire par suite de processus qui exclurait toute représentation rationnelle.

CHAPITRE VII.

MESURE DES GRANDEURS PAR L'INTERACTION DE DEUX CORPUSCULES.

1. Inconvénient de la mesure envisagée précédemment avec un seul corpuscule. — Nous avons envisagé plus haut la mesure d'une grandeur A qui s'effectuerait en envoyant le train d'ondes porteur du corpuscule sur un dispositif susceptible de morceler le train d'ondes initial en trains d'ondes spatialement séparés correspondant chacun à une valeur déterminée de la grandeur A , c'est-à-dire opérant matériellement la décomposition spectrale relative à A .

Mais ce procédé de mesure a un inconvénient. Quand le corpuscule aura déclenché un phénomène macroscopique observable dans la région R_j (ce qui est indispensable pour qu'il y ait mesure), l'observateur pourra attribuer à la grandeur A la valeur α_j . Mais il est probable que, quand l'observateur aura ainsi obtenu la valeur de A , celle-ci ne sera plus exacte : en effet, le déclenchement du phénomène macroscopique observable aura en général réagi sur le mouvement du corpuscule et la grandeur A n'aura plus ensuite la même valeur α_j qu'elle avait avant ce déclenchement.

Il est donc préférable de procéder autrement et, pour effectuer la mesure, de se servir d'une interaction entre le corpuscule « étudié » et un autre corpuscule que nous nommerons le corpuscule « indicateur ». Tandis que le processus de mesure étudié au chapitre précédent peut être appelé « mesure de première espèce », celui que nous allons étudier pourra être nommé « mesure de seconde espèce ». Désignons par **1** le corpuscule étudié et par **2** le corpuscule indicateur. Au début, les deux corpuscules qui ne sont pas encore entrés en interaction sont attachés à des trains d'ondes occupant des régions séparées de l'espace

$R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ et sont représentés par des fonctions d'onde $\Psi_0^{(1)}(\vec{r}_1, t)$ et $\Psi_0^{(2)}(\vec{r}_2, t)$. La fonction d'onde du système dans l'espace de configuration est alors

$$(1) \quad \Psi_0(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \Psi_0^{(1)}(\vec{r}_1, t) \Psi_0^{(2)}(\vec{r}_2, t).$$

D'accord avec M. von Neumann, nous admettons que, pour qu'un processus puisse servir à mesurer une grandeur A relative au corpuscule étudié, il faut que l'onde Ψ finale soit de la forme

$$(2) \quad \Psi = \sum_k c_k \varphi_k(\vec{r}_1) \chi_k(\vec{r}_2),$$

où les φ_k sont les fonctions propres de la grandeur A du corpuscule étudié correspondant aux valeurs propres α_k et les χ_k les fonctions propres du corpuscule indicateur relatives à une grandeur B de ce corpuscule de valeurs propres β_k . Ainsi, après l'action du dispositif de mesure, les valeurs de A et de B se trouveront « corrélées », la valeur α_k de A correspondant à la valeur β_k de B.

Mais cela ne suffit pas. Il faut encore qu'après la fin de l'interaction de mesure, les fonctions $\chi_k(\vec{r}_2)$ correspondent à des portions d'ondes spatialement séparées et occupant par conséquent des régions de l'espace $R_k^{(2)}$ disjointes. Alors, si le corpuscule indicateur déclenche un phénomène macroscopique observable dans la région $R_j^{(2)}$, nous pourrions affirmer que sa grandeur B a la valeur β_j et, *par suite*, que la grandeur A du corpuscule étudié a la valeur α_j corrélée à β_j . La probabilité pour que nous trouvions ainsi $A = \alpha_j$ est d'ailleurs égale à $|c_j|^2$.

On voit l'avantage de cette mesure de seconde espèce sur la mesure de première espèce. Le déclenchement du phénomène macroscopique observable par le phénomène indicateur peut troubler le mouvement de ce corpuscule et faire qu'ensuite sa grandeur B n'ait plus la valeur β_j . Mais, comme après la fin de l'interaction les deux corpuscules sont entièrement indépendants et séparés dans l'espace, le déclenchement du phénomène observable dans $R_j^{(2)}$ ne peut avoir aucune influence sur le corpuscule étudié et l'on pourra affirmer avec certitude, après avoir constaté le phénomène observable, que la grandeur A du corpuscule étudié a la valeur α_j .

Ici d'ailleurs, comme pour la mesure de première espèce, il n'est pas nécessaire d'introduire dans notre analyse les coordonnées de « l'appareil de mesure » dont le rôle ne peut être que de nous permettre d'observer avec précision le phénomène macroscopique observable.

Remarquons que pour faire une mesure de A , il n'est pas nécessaire que les fonctions $\varphi_k(\vec{r}_1)$ correspondent dans l'état final à des régions spatialement séparées $R_k^{(1)}$ de l'espace. Ce qui est indispensable, c'est que les régions $R_k^{(2)}$ soient disjointes. Mais, pour plus de clarté, nous allons d'abord supposer que les régions $R_k^{(1)}$ sont séparées, nous réservant de revenir plus tard sur le cas où cette hypothèse ne serait pas réalisée. Nous aurons alors le schéma suivant :

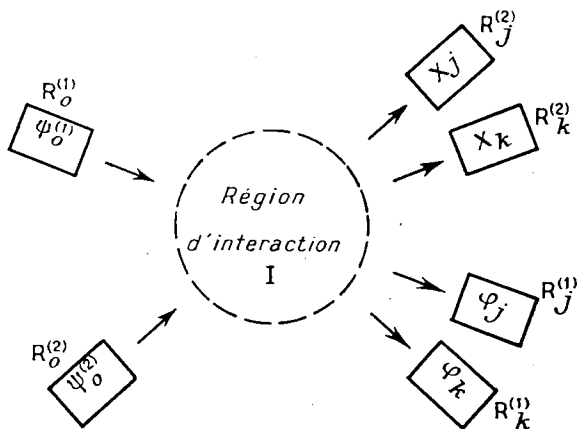


Fig. 4.

Avant l'interaction, les deux trains d'ondes $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ sont séparés et indépendants. Puis ils se rapprochent l'un de l'autre et entrent en interaction dans la région I. Après l'interaction, la fonction d'onde dans l'espace de configuration a, par hypothèse, la forme (2), les diverses fonctions φ_k correspondant dans l'espace physique à des trains d'ondes $R_k^{(1)}$ spatialement séparés et les diverses fonctions χ_k correspondant de même à des trains d'ondes $R_k^{(2)}$ spatialement séparés dans l'espace physique. Alors les corrélations statistiques établies par l'interaction entre les présences des deux corpuscules dans les différentes régions R de l'espace physique et traduites par la forme (2) de la fonction d'onde nous apprennent que, si un phénomène macroscopique observable est déclenché dans la région $R_J^{(2)}$ par le corpuscule indicateur, alors le corpuscule étudié se trouve nécessairement dans $R_J^{(1)}$ avec $A = x_J$.

Précisons par un exemple ce processus de mesure pour montrer qu'il correspond bien à des conditions expérimentales souvent réalisées. Supposons que nous ayons initialement deux corpuscules dont les énergies et les quantités de mouvement ont des valeurs connues. Les deux trains d'ondes $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ viennent en interaction (choc) au voisinage

d'un point O que nous prenons comme origine des coordonnées. Après l'interaction, les trains d'ondes corrélés $R_j^{(1)}$ et $R_j^{(2)}$ s'éloignent du point O dans des directions définies par des angles φ_1 et φ_2 par rapport à un axe Ox contenu dans le plan de symétrie du phénomène.

Tout le phénomène se produisant dans le plan de symétrie xOy , on sait que la corrélation $R_j^{(1)}$ et $R_j^{(2)}$ est exprimée par les trois relations de conservation pour l'énergie et pour les deux composantes x et y de la quantité de mouvement. Nous avons donc dans l'état final trois relations entre les angles φ_1 et φ_2 et les longueurs p_1 et p_2 des quantités de

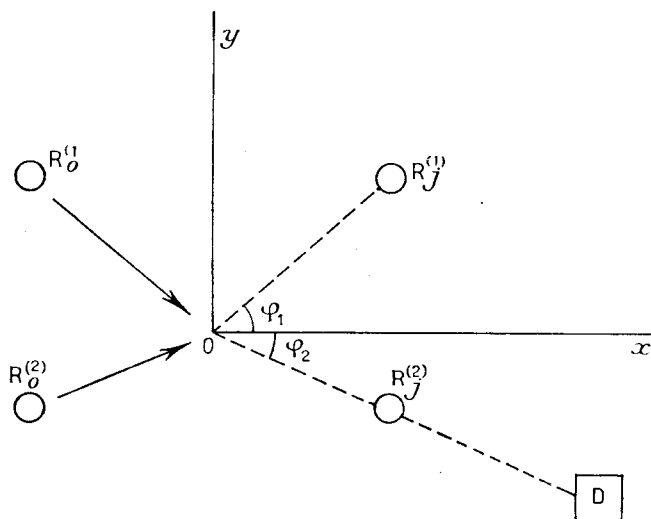


Fig. 5.

mouvement. Si le corpuscule 2 parvient ensuite dans un dispositif D (par exemple compteur à pointe) où il produit un phénomène macroscopique observable, on pourra déterminer l'angle φ_2 et, en éliminant p_2 entre les trois équations de conservation, on obtiendra p_1 et φ_1 , c'est-à-dire que l'on aura mesuré en grandeur et en direction la quantité de mouvement finale du premier corpuscule. Et cette mesure n'exercera évidemment aucune action sur le corpuscule étudié 1 puisque ce corpuscule peut se trouver très éloigné du dispositif D au moment où se produit dans celui-ci le phénomène macroscopique observable.

2. Interprétation de la mesure de seconde espèce par la théorie usuelle. — Comment devons-nous interpréter la mesure de seconde

espèce avec la Mécanique ondulatoire actuelle où le corpuscule n'est pas localisé dans l'onde Ψ ?

L'interprétation conforme à la théorie de la mesure de von Neumann-London-Bauer consiste à dire : c'est la prise de conscience par l'observateur du phénomène macroscopique déclenché dans $R_j^{(2)}$ qui va localiser dans $R_j^{(1)}$ le corpuscule 1 jusqu'alors réparti statistiquement entre tous les trains d'ondes $R_k^{(1)}$. Une telle interprétation semble inadmissible : quelque chose qui se passe dans la conscience d'un observateur ne peut pas provoquer à distance un effet physique.

Supposons qu'il y ait deux observateurs près de la région $R_j^{(2)}$, l'un ayant les yeux ouverts et prenant ainsi conscience du phénomène macroscopique observable, l'autre les yeux fermés n'en prenant pas conscience. Est-ce la prise de conscience du premier observateur qui va provoquer la localisation du corpuscule 1 dans $R_j^{(1)}$ ou est-ce la non-prise de conscience du second observateur qui va empêcher cette localisation? La question reste sans réponse parce qu'elle est absurde. Mais une chose paraît certaine. L'observateur aux yeux ouverts, après avoir constaté le phénomène macroscopique déclenché par le corpuscule 2, remplacera la fonction d'ondes $\Psi = \sum_k c_k \varphi_k(\vec{r}_1) \chi_k(\vec{r}_2)$ par la nouvelle

fonction d'ondes $\Psi = \varphi_k(\vec{r}_1) \chi_k(\vec{r}_2)$ et cette « réduction du paquet de probabilité » lui permettra de faire ensuite des prévisions statistiques exactes. Donc ce qui compte, ce ne sont pas les connaissances de l'observateur, c'est le fait physique constitué par le déclenchement du phénomène observable.

Une interprétation qui pourrait paraître plus raisonnable consisterait donc à dire : c'est le phénomène macroscopique observable provoqué dans $R_j^{(2)}$ par le corpuscule 2 qui localise brusquement le corpuscule étudié 1 dans la région corrélée $R_j^{(1)}$. En réalité, cette interprétation n'est pas plus admissible que la précédente. Le phénomène observable qui se manifeste dans $R_j^{(2)}$, ne peut aucunement localiser le corpuscule 1 dans $R_j^{(1)}$, et cela d'autant plus que les régions $R_j^{(1)}$ et $R_j^{(2)}$ peuvent être au moment où ce phénomène se produit extrêmement éloignées l'une de l'autre. Une telle localisation produite brusquement à n'importe quelle distance par le phénomène observé dans $R_j^{(2)}$ est inconcevable. Exposant cette objection, M. Schrödinger a écrit : « Ce serait de la magie ! » et effectivement ce serait de la magie.

Au terme de cette analyse, il apparaît donc clairement que, dans une théorie où les corpuscules ne sont pas localisés dans leurs ondes, aucune interprétation raisonnable des corrélations représentées par l'onde Ψ de

configuration et permettant la mesure ne semble pouvoir être donnée. Nous allons voir que la théorie de la double solution, en rétablissant la position du corpuscule dans l'onde, fournit pour la mesure de seconde espèce une interprétation claire et intelligible.

3. Interprétation par la théorie de la double solution. — Revenons à la figure 4. En théorie de la double solution, nous devons supposer que les régions $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ sont respectivement occupées initialement par l'onde u de chacun des deux corpuscules, chacun des deux trains d'ondes ayant sa région singulière. Puis, arrivés en I, les deux trains d'ondes commencent à interagir, c'est-à-dire que la propagation de chacun d'eux va dépendre de l'action exercée sur lui par l'autre. Comme je l'ai indiqué à la fin du chapitre V, j'admettrai (en espérant que cette hypothèse pourra être rigoureusement justifiée en théorie de la double solution) que l'onde Ψ de Schrödinger dans l'espace de configuration des deux corpuscules permet de représenter exactement les corrélations des positions possibles des corpuscules au cours et à la fin de l'interaction. Ce serait là la raison pour laquelle l'onde Ψ de l'espace de configuration, bien que visiblement fictive et ne représentant aucunement l'évolution réelle du phénomène dans l'espace physique, donnerait une vue statistique exacte des résultats *possibles* de l'interaction.

Nous sommes donc amenés à penser qu'après la fin de l'interaction, l'onde u du corpuscule 1 se trouvera morcelée en une série de trains d'ondes $R_0^{(1)}, \dots, R_k^{(1)}, \dots$ spatialement séparés et que, de même, l'onde u du corpuscule 2 sera morcelée en une série de trains d'ondes $R_1^{(2)}, \dots, R_k^{(2)}, \dots$ également disjoints. De plus, les corrélations statistiques représentées par la forme finale (2) de l'onde Ψ étant supposées exactes, si la région singulière constituant le corpuscule 2 est finalement parvenue dans $R_j^{(2)}$, celle qui constitue le corpuscule 1 sera venue en $R_j^{(1)}$ et la probabilité de cette éventualité sera donnée par $|c_j|^2$.

En d'autres termes, dans la théorie de la double solution, les deux corpuscules-régions singulières auront, suivant leurs positions initiales dans les trains d'ondes $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$, des trajectoires entièrement déterminées, trajectoires qui les amèneront nécessairement dans l'état final à occuper deux positions bien déterminées dans deux trains d'ondes « corrélés » $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$. Ainsi, suivant un vœu souvent émis par Einstein, la description de l'interaction par l'onde Ψ de l'espace de configuration restera une théorie statistique exacte, mais ne sera pas une description complète, celle-ci étant donnée par la théorie qui rétablit la localisation des corpuscules et le déterminisme de leurs mouvements.

Ici, l'interprétation de la mesure de seconde espèce va devenir tout à fait claire et pourra s'exprimer en quelques mots. Si un phénomène macroscopique observable est déclenché par le corpuscule 2 dans la région $R_j^{(2)}$, c'est tout simplement parce que ce corpuscule se trouve effectivement dans cette région et alors le corpuscule étudié 1 se trouve nécessairement dans la région corrélée $R_j^{(1)}$, ce qui nous permet d'attribuer avec sécurité à la grandeur A la valeur α_j . Il n'y a plus ici aucune inadmissible action instantanée à distance du phénomène observé. Nous sommes soulagés : il n'y a plus de magie !

Quant à la prise de conscience du phénomène observable par l'observateur qui lui permet d'attribuer à A la valeur α_j , elle n'est plus que la prise de conscience d'une réalité objective extérieure et elle reprend ainsi le sens tout à fait raisonnable qu'elle avait en Physique classique.

Nous voulons insister un peu sur la façon dont se présente ici la question des rapports entre onde u et onde Ψ . Dans les régions $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$, l'onde u de chaque corpuscule a, en dehors de la très petite région singulière, la forme $u = u_0 + v$, où $v \gg u_0$ est une onde régulière. L'onde v a une amplitude parfaitement définie puisqu'elle est une réalité objective, mais le physicien a le droit de définir une fonction d'onde *fictive* Ψ en posant $\Psi = Cv$ et en choisissant la constante C de façon que Ψ soit normée. On définira ainsi dans $R_0^{(1)}$ et $R_0^{(2)}$ les fonctions Ψ individuelles des deux corpuscules pour l'état initial, puis on formera la fonction d'onde de l'espace de configuration en faisant le produit des deux fonctions d'onde individuelles.

Dans l'état final, après la fin de l'interaction, l'onde u du corpuscule 1 se trouvera morcelée dans l'espace physique en trains d'ondes $u_1^{(1)}, \dots, u_k^{(2)}, \dots$ occupant des régions $R_1^{(1)}, \dots, R_k^{(2)}, \dots$ spatialement disjointes tandis que l'onde u du corpuscule 2 se trouvera de même morcelée en trains d'ondes $u_1^{(2)}, \dots, u_k^{(2)}, \dots$ occupant des régions disjointes $R_1^{(2)}, \dots, R_k^{(2)}, \dots$ de l'espace physique. Mais le corpuscule 1 se trouvera seulement dans l'une des régions $R_k^{(1)}$: dans cette région seulement existera la partie u_0 de u et dans les autres régions $R^{(1)}$, u se réduira à v . Une circonstance analogue se trouvera réalisée par le second corpuscule. Mais la fonction d'onde (2) devant représenter exactement les corrélations statistiques dans l'état final, les deux corpuscules se trouveront certainement dans deux trains d'ondes corrélés. Quand l'observateur aura constaté le déclenchement d'un phénomène macroscopique observable dans $R_j^{(2)}$ par le corpuscule indicateur, il saura que le corpuscule étudié est dans $R_j^{(1)}$ et alors il devra construire une nouvelle fonction d'onde individuelle pour le corpuscule 1 en posant $\Psi = Cv_j^{(1)}$,

$\psi_j^{(1)}$ étant la fonction ψ pour le corpuscule 1 dans $R_j^{(1)}$ et C étant choisie de façon que Ψ soit normée dans $R_j^{(1)}$. C'est là la rupture des corrélations statistiques dont a parlé M. von Neumann et il y a aussi réduction du paquet de probabilité puisque l'onde Ψ du corpuscule 1, au lieu d'être répartie entre toutes les régions $R_k^{(1)}$, se trouve brusquement réduite à ne plus occuper que $R_j^{(1)}$.

Ici la réduction du paquet de probabilité prend une signification très claire. Elle signifie simplement que l'observateur, ayant acquis une information sur la réalité physique, modifie en conséquence la fonction Ψ qui lui sert à représenter la probabilité des phénomènes observables. Mais naturellement l'information acquise par l'observateur ne peut aucunement modifier la réalité physique elle-même décrite par l'onde u . La distribution de l'objectif et du subjectif se trouve ainsi rétablie d'une façon tout à fait claire et satisfaisante.

Remarquons que, si la fonction « subjective » Ψ peut fournir des prévisions statistiques exactes, c'est parce que l'utilisateur doit la construire proportionnelle à l'onde u (ou plutôt à sa partie ψ extérieure à la région singulière en faisant abstraction de cette région singulière) *dans la région où il sait que se trouve le corpuscule*. Un observateur aux yeux ouverts, qui aura constaté le déclenchement du phénomène macroscopique observable dans la région $R_j^{(2)}$, emploiera pour le corpuscule étudié la fonction $\Psi = C\psi_j^{(1)}$ et pourra faire avec elle des prévisions statistiques exactes; l'observateur aux yeux fermés, qui n'a rien observé, utilisera pour le corpuscule 1 une fonction Ψ qui restera dans chaque région $R_k^{(1)}$ proportionnelle à $\psi_k^{(1)}$ et il fera avec elle des prévisions statistiques inexactes parce qu'il suppose que le corpuscule 1 peut se trouver dans des régions $R_k^{(1)}$ autres que $R_j^{(1)}$, ce qui n'est pas vrai.

On voit ainsi que, si l'onde subjective Ψ peut rendre des services, c'est parce qu'elle est construite par l'utilisateur en fonction de ses connaissances sur une certaine réalité physique extérieure. Il est d'ailleurs évident qu'une fonction d'onde subjective pourrait être construite arbitrairement et qu'il serait alors incompréhensible qu'elle conduise à des prévisions exactes. En d'autres termes une interprétation purement subjective de l'onde Ψ est impossible : il faut qu'il y ait derrière elle une réalité objective. Or l'onde Ψ , qui subit la réduction du paquet de probabilité, ne peut pas être elle-même une réalité objective, mais elle peut être le reflet des connaissances de l'utilisateur sur la réalité objective.

Ajoutons que dans le cas de la mesure par interaction de deux corpuscules comme nous l'avons fait dans le cas de la mesure de première espèce avec un seul corpuscule traversant un dispositif, on peut cons-

truire des collectifs correspondant à l'état initial et à l'état final et représentant les conceptions de localisation et de mouvement des corpuscules dans la théorie de la double solution : comme au chapitre précédent, on retrouverait les distributions de probabilité usuellement envisagées, mais elles appartiendraient à des collectifs différents avec les conséquences que cela entraîne. On retrouverait aussi l'interférence des probabilités et l'interprétation des relations de Heisenberg comme représentant non pas une indétermination de la position et du mouvement des corpuscules, mais des incertitudes introduites par l'intervention de la nature ondulatoire des corpuscules dans tout processus de mesure.

Nous signalerons encore une question difficile, mais importante qui se pose quand on applique les conceptions de la double solution au problème que nous venons d'étudier. Quand l'observateur a constaté le phénomène qui se produit dans $R_j^{(2)}$, il sait que le corpuscule ou région singulière de l'onde $u^{(1)}$ se trouve dans $R_j^{(1)}$ et il reconstruit son onde $\Psi^{(1)}$ en conséquence pour faire des prévisions statistiques ultérieures. Mais les fragments de l'onde $u^{(1)}$ qui sont venues dans les régions $R_k^{(1)}$ autres que $R_j^{(1)}$ doivent subsister puisque, réalités objectives, elles ne peuvent dépendre des informations de l'observateur : elles constituent alors des morceaux de l'onde $u^{(1)}$ du corpuscule étudié *qui ne contiennent pas de région singulière*. Que deviennent par la suite ces fragments d'onde u sans région singulière ? Et comment évolue d'autre part le fragment d'onde $u^{(1)}$ qui est parvenu dans $R_j^{(1)}$ et qui porte la région singulière, fragment d'onde dont la partie extérieure $\phi^{(1)}$ a été affaiblie, par rapport à ce qu'elle était dans l'état initial, par le morcellement de l'onde $u^{(1)}$? Ces questions appartiennent à un type de questions difficiles auxquelles la théorie de la double solution devra s'efforcer de répondre. Mais il est probable que, si elle réussit à y répondre, ce sera en faisant intervenir des phénomènes essentiellement non linéaires, et en particulier des états transitoires, dont les théories linéaires actuelles ne peuvent nous donner aucune représentation ⁽¹⁾. Mais je ne veux pas insister ici sur un problème encore à peine abordable aujourd'hui.

Notons enfin que l'analyse que nous venons de faire des processus de mesure par interaction de deux corpuscules pourrait, me semble-t-il, être transposée sans difficultés pour l'étude de deux systèmes de corpuscules. Les complications que l'on pourrait rencontrer seraient uni-

(1) J'ai effleuré ces questions dans les derniers chapitres de mon récent Ouvrage [3]. Voir aussi le très intéressant livre récent de M. Jean-Louis Destouches [7].

quement des complications d'écriture, les idées générales restant les mêmes.

4. **Cas d'un processus de mesure par interaction de deux corpuscules où les régions singulières $R_k^{(1)}$ ne seraient pas spatialement disjointes.**— Nous avons déjà remarqué que, la fonction Ψ de l'espace de configuration après la fin de l'interaction entre les deux corpuscules étant supposée avoir la forme (2), il suffit que les trains d'ondes $\chi_k(\vec{r})$ du corpuscule indicateur soient spatialement séparés pour que le déclenchement d'un phénomène macroscopique observable dans $R_j^{(2)}$ nous permette d'attribuer à la grandeur A la valeur z_j sans que les $R_k^{(1)}$ soient spatialement séparés.

Il est facile d'en donner un exemple concret. Soit un atome d'hydrogène avec son électron périphérique qui joue le rôle de corpuscule étudié. L'onde de cet électron occupe la région de l'atome que nous représenterons par une région sphérique $R^{(1)}$. Un autre corpuscule jouant le rôle de corpuscule indicateur vient passer au voisinage de l'atome et pendant ce passage interagit avec l'électron atomique. Le train d'ondes de ce corpuscule indicateur est initialement contenu dans une région de l'espace $R_0^{(1)}$. A la fin de l'interaction, la fonction d'onde Ψ de l'espace de configuration des deux corpuscules aura pris, par hypothèse la forme (2) et les χ_k correspondront maintenant à des régions $R_k^{(2)}$ spatialement disjointes tandis que les φ_k correspondront toujours à la même région $R^{(1)}$.

Dans son état initial, l'électron atomique avait une fonction d'onde de la forme $\Psi_0^{(1)} = \sum_k c_k^0 \varphi_k(\vec{r})$, les φ_k étant les fonctions propres d'une certaine grandeur A qui sera par exemple l'énergie. Quand on aura constaté un phénomène macroscopique observable déclenché par le corpuscule indicateur dans $R_j^{(2)}$, on pourra attribuer à A la valeur z_j et prendre $\Psi^{(1)}$ dans cet état final égal à φ_j .

On retrouve ici les mêmes considérations que les cas précédemment étudiés : il ne peut aucunement être question de dire, comme le fait l'interprétation actuelle, que c'est la prise de conscience du phénomène observable par l'observateur ou le déclenchement de phénomène observable qui fait passer brusquement l'atome de son état initial à son état final ; ce serait toujours de la magie. La prise de conscience de l'observateur n'a rien à faire dans cette affaire et, $R_j^{(2)}$ pouvant être très éloigné de $R^{(1)}$, une influence instantanée du phénomène déclenché dans $R_j^{(2)}$ sur ce qui se passe dans $R^{(1)}$ est inconcevable.

On peut illustrer ceci par un exemple frappant qui, dans l'état actuel de nos formalismes, n'est pas décrit de la même façon que le précédent, mais qui physiquement lui est tout à fait analogue : celui de l'émission d'un photon par un atome (atome d'hydrogène par exemple). La grandeur A étant l'énergie de l'électron atomique, les $\alpha_k = E_k$ et les φ_k étant les valeurs propres et les fonctions propres correspondantes, nous supposons que l'atome est initialement dans l'état quantifié d'énergie E_k et que, par suite, sa fonction d'onde est $\Psi_0^{(1)} = \varphi_k$. S'il passe par une transition quantique de cet état initial à l'état quantifié d'énergie E_l , il y a émission d'un photon de fréquence $\nu = \frac{E_k - E_l}{h}$. Recueillons à distance le photon émis dans un dispositif réseau + lentille qui permet, nous

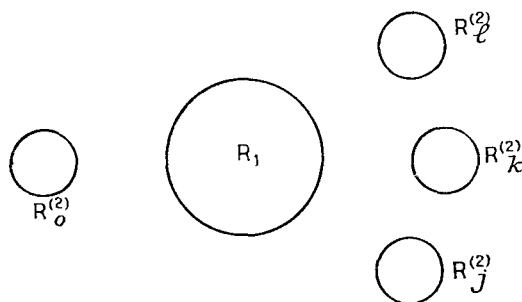


Fig. 6.

l'avons vu, de lui attribuer une fréquence bien définie en lui faisant produire un effet observable, par exemple le noircissement en un point d'une plaque photographique. De l'observation de ce phénomène, l'observateur pourra déduire que l'atome a passé de l'état initial $\Psi_0^{(1)} = \varphi_k$ à l'état final $\Psi^{(1)} = \varphi_j$. Or rien n'empêche de supposer que l'atome est dans l'étoile Sirius et que l'observateur est à Paris. Est-il admissible que la prise de conscience par un observateur parisien d'un noircissement local sur une plaque photographique change l'état d'un atome sur Sirius ? Est-il même admissible que le déclenchement physique de ce noircissement produise cet effet ? Évidemment non et l'argument, toujours le même, est ici très frappant.

Revenons maintenant à la figure 6 et demandons-nous comment on peut dans ce cas interpréter la mesure de A avec les idées de la double solution. Cela va nous amener à une conception nouvelle. Puisque la fonction Ψ , quand elle est bien construite, doit toujours être proportionnelle à ψ , on doit avoir dans l'état initial de l'atome $\psi_0^{(1)} \sim \sum_k c_k^0 \varphi_k$ et

dans l'état final, quand le corpuscule indicateur est parvenu dans la région $R_j^{(0)}$ on doit avoir $\nu^{(1)} \sim \varphi_j$. Donc, suivant les conceptions de la double solution, l'électron atomique doit dans l'état initial avoir un mouvement conforme à la formule du guidage, mouvement très compliqué qui le maintient en phase avec l'onde $\nu_0^{(1)}$ formée par la superposition des φ_k . Mais après la fin de l'interaction il doit avoir un mouvement qui le maintient en phase avec la seule composante φ_j puisqu'alors $\nu^{(1)} = \varphi_j$. On peut donc dire que, pendant l'interaction, le mouvement de l'électron atomique l'a progressivement « aiguillé » de façon à le « décrocher » de la superposition initiale des φ_k pour finalement « l'accrocher » sur la seule composante φ_j . Et c'est précisément parce que finalement l'électron atomique se trouve accroché à $\nu^{(1)} = \varphi_j$, tandis que *corrélativement* le corpuscule indicateur se trouve dans $R_j^{(2)}$, qu'il y a possibilité de mesure de la grandeur A dont la valeur propre α_j correspond à φ_j .

Ici donc, le corpuscule étudié peut, par suite de l'interaction, se trouver finalement accroché à une seule des composantes primitives de son onde ν tout en restant localisé dans la même région $R^{(1)}$ qu'au début, mais il est essentiel pour la mesure de A que les régions $R_k^{(2)}$ relatives au corpuscule indicateur soient spatialement séparées de façon que le déclenchement d'un phénomène macroscopique observable permette de dire quelle est l'onde $\nu^{(1)} \sim \varphi_j$ sur laquelle le corpuscule étudié reste finalement accroché. Naturellement il n'en était pas ainsi dans le cas d'une mesure de première espèce où l'on effectue la mesure en faisant passer le corpuscule incorporé à son onde dans un dispositif, tel que réseau + lentille, qui isole les φ_k en trains d'ondes spatialement disjoints. Dans ce cas le corpuscule est en quelque sorte à la fois corpuscule étudié et corpuscule indicateur et c'est la raison pour laquelle la séparation des trains d'ondes φ_k du corpuscule est alors nécessaire. Mais elle ne l'est plus pour une mesure de seconde espèce.

5. L'idée d'aiguillage. Examen d'une remarque d'Einstein. — En restant toujours dans le cas envisagé au dernier paragraphe et en gardant le point de vue de l'interprétation causale, nous pouvons préciser ce qui précède de la façon suivante. A partir de la position initiale des deux régions singulières dans $R^{(1)}$ et dans $R_0^{(2)}$, l'interaction évolue d'une manière entièrement déterminée de telle sorte que le corpuscule étudié soit progressivement au cours de l'interaction aiguillé par le mouvement que lui impose la loi du guidage vers l'état final où il se trouve implanté sur l'onde $\nu = \varphi_j$ tandis que le corpuscule indicateur est progressivement aiguillé de même vers l'état final où il est implanté sur l'onde $\nu = \chi_j$.

localisée dans $R_j^{(2)}$. La même interprétation serait valable, *mutatis mutandis*, dans le cas précédemment étudié où les régions $R_k^{(1)}$ sont disjointes. On arrive ainsi à l'idée générale que, pour chaque corpuscule, les lignes de courant sont animées d'une sorte de frémissement résultant de l'interaction et que le corpuscule, obligé par la loi du guidage de suivre constamment l'une de ces lignes de courant frétilantes, est ainsi progressivement aiguillé vers l'état final qu'il possède à la fin de l'interaction.

À la lumière de ces idées, il est intéressant d'examiner un point du formalisme actuel de la Mécanique ondulatoire qui avait beaucoup frappé Einstein et qui lui paraissait, semble-t-il, particulièrement difficile à interpréter par une théorie causale.

Considérons un corpuscule dont l'état initial correspond à la fonction $\Psi = c_j \varphi_j$, avec $|c_j| = 1$, φ_j étant l'une des fonctions propres d'une grandeur A . Si A est l'énergie, nous pourrions représenter l'état initial par un train d'ondes R_0 correspondant à l'énergie $E_j = \alpha_j$ (mathématiquement par une différentielle propre du spectre continu de l'énergie correspondant à la fréquence centrale $\nu_j = \frac{E_j}{h}$). Si le corpuscule est soumis pendant une durée limitée à un très faible champ perturbateur, son onde Ψ sera devenue $\Psi = \sum_k c_k \varphi_k$ après la fin de la perturbation et,

comme celle-ci est très faible, on aura pour $|c_j|$ une valeur finale très légèrement inférieure à 1 et pour les $|c_k|$, avec $k \neq j$ des valeurs extrêmement petites. Si ensuite le corpuscule passe dans un dispositif D qui amène les φ_k dans des régions spectralement disjointes R_k (tel que le dispositif réseau-lentille dans le cas où A est l'énergie), le corpuscule aura une probabilité voisine de 1 de se manifester dans la région R_j et des probabilités non nulles mais très voisines de zéro, de se manifester dans les régions R_k , avec $k \neq j$. Comme les α_k peuvent avoir des valeurs très différentes, on voit que finalement la très légère perturbation aura fait apparaître de très petites probabilités pour que l'état du corpuscule subisse de grands changements. Einstein considérerait que l'on obtient ainsi une description statistique certainement exacte de ce qui se passe, mais qu'il serait sans doute très difficile d'y substituer une description causale des phénomènes individuels, description qu'il considérerait cependant comme nécessaire pour éviter d'inacceptables paradoxes.

Reprenons ce problème du point de vue de la théorie de la double solution. Considérons un train d'ondes R_0 porteur d'un corpuscule.

Dans ce train d'ondes le corpuscule occupe une certaine position : il est implanté sur une onde $\varphi \sim \varphi_j$ qui est une réalité objective remplissant la région R_0 . Nous supposons que le train d'ondes est un groupe d'ondes presque monochromatique d'énergie E_j dont les lignes de courant sont des droites parallèles. Le train d'ondes se dirige vers un dispositif D permettant la mesure de l'énergie par séparation des trains d'ondes correspondant à des valeurs différentes de l'énergie. Si entre sa position initiale R_0 et son arrivée sur D le train d'ondes ne traverse aucun champ perturbateur, le corpuscule suivant une des lignes de courant atteindra la région D d'un mouvement rectiligne et uniforme, puis l'action du dispositif D en lui imposant un mouvement plus compliqué l'amènera dans le train d'ondes qui correspond à la sortie du dispositif à l'énergie E_j . Mais si le train d'ondes, avant d'atteindre D, traverse une région où règne un petit champ perturbateur, son onde φ deviendra proportionnelle à $\sum_k c_k \varphi_k$, avec $c_j = 1 - \varepsilon$ et tous les autres c_k très petites. Les

lignes de courant correspondant à la formule du guidage seront, dans le train d'ondes ainsi modifié, animées d'une sorte de très petit frémissement par rapport à la forme rectiligne qu'elles auraient conservée en l'absence de perturbation. Il en résultera que, suivant sa position dans le train d'ondes, le corpuscule sera envoyé après la traversée du dispositif D soit vers le train d'ondes R_j (ce sera le cas de beaucoup le plus probable), soit vers l'un des trains d'ondes R_k correspondant aux énergies $E_k \neq E_j$, mais ce sera là un cas très rare. Nous sommes sûrs qu'il en sera ainsi car nous savons que s'il y avait dans R_0 une infinité de corpuscules répartis avec la densité $|\varphi_j|^2$, le mouvement le long des lignes de courant imposé à ces corpuscules par la formule du guidage en amènerait finalement une proportion égale à $|c_k|^2$ dans la région R_k . Comme dans la région R_k le corpuscule a une énergie égale à E_k , on peut dire : l'aiguillage imposé au corpuscule par la nécessité où il est de toujours suivre une ligne de courant lui donne, quand on ignore sa position initiale dans R_0 , une probabilité presque égale à 1 d'avoir conservé la valeur initiale E_j de son énergie à la fin du processus de mesure, mais lui donne aussi de très petites probabilités de posséder finalement une énergie E_k très différent de E_j . On trouve une image que représente clairement la circonstance qui avait frappé Einstein dans le formalisme usuel de la Mécanique ondulatoire.

Néanmoins, si l'on voulait étudier à fond l'idée d'aiguillage esquissée ci-dessus, on aurait à étudier la question de la conservation de l'énergie dans la théorie de la double solution ainsi que des problèmes analogues

à ceux auxquels nous avons fait allusion à la fin du paragraphe 3. Nous n'entreprendrons pas ici cette étude qui d'ailleurs serait prématurée.

6. Conclusion. Cas purs et mélanges. — L'étude de la Mesure que nous venons de faire dans les chapitres VI et VII nous a montré qu'il fallait envisager la mesure en Microphysique sous un aspect concret, ce qui est d'ailleurs évident, et ne pas s'en tenir au formalisme trop abstrait dont on se contente habituellement. Il est essentiel de tenir compte du fait que tous les renseignements que nous obtenons sur la réalité microphysique sont dus à l'observation de phénomènes macroscopiques déclenchés par l'action *locale* d'un corpuscule. Il est également essentiel de remarquer que l'onde à laquelle un corpuscule est incorporé ne s'étend toujours qu'à une région limitée de l'espace : il n'existe que des trains d'ondes limités, l'onde plane monochromatique illimitée dans l'espace et dans le temps ainsi d'ailleurs que les ondes stationnaires s'étendant jusqu'à l'infini sont des abstractions. C'est ce caractère limité des trains d'ondes qui seul permet, ainsi que M. Schrödinger l'a très justement remarqué, de parler du commencement et de la fin d'une interaction ; c'est lui qui, en permettant de construire des dispositifs ayant pour effet de séparer dans l'espace des trains d'ondes correspondant chacun à une valeur bien définie d'une grandeur A , permet d'effectuer des mesures à l'échelle microphysique. Il apparaît alors que cette conception concrète de la Mesure est compatible avec une localisation permanente et un mouvement bien déterminé des corpuscules et les arguments de MM. Einstein et Schrödinger, apparaissant dans toute leur force, montrent clairement qu'il faut admettre une localisation du corpuscule dans l'onde si l'on veut éviter certaines conséquences vraiment inadmissibles de l'interprétation actuelle.

Avec notre manière de voir, la distinction entre les cas purs et les mélanges, très justement introduite par M. von Neumann, prend une signification concrète qui n'apparaît pas dans le formalisme exact, mais trop abstrait, exposé dans les Chapitres II et III.

Il y a « cas pur » quand l'onde v (partie extérieure de l'onde u) d'un corpuscule étant formée par une superposition de composantes *qui interfèrent*, le corpuscule suit l'une des lignes de courant qui résultent de cette superposition. Au contraire, il y a « mélange » quand, à la fin d'une interaction, les diverses composantes de l'onde v initiale cessent d'interférer soit par suite d'une séparation spatiale de trains d'ondes, soit par suite d'un phénomène d'aiguillage au sens donné à ce mot dans les derniers paragraphes ; alors le corpuscule se trouve accroché à l'une

seulement de ces composantes et, tant qu'on ignore laquelle, cette ignorance est représentée par un mélange.

C'est en se plaçant à ce point de vue qui, distinguant soigneusement l'onde u objective et l'onde Ψ subjective et prévisionnelle, rétablit une distinction claire entre l'objectif et le subjectif, que le formalisme de la théorie de M. von Neumann nous paraît devoir être repris et interprété.

C'est d'ailleurs à une conclusion analogue que nous allons parvenir dans le dernier chapitre en ce qui concerne la Thermodynamique de von Neumann.

CHAPITRE VIII.

COUP D'OEIL SUR LA THERMODYNAMIQUE DE M. VON NEUMANN.

1. Introduction du formalisme de M. von Neumann en Thermodynamique. — Rappelons d'abord quelques points de Thermodynamique statistique classique. Boltzmann a établi entre l'entropie d'un système physique et la probabilité de l'état de ce système la célèbre relation

$$(1) \quad S = k \log P,$$

où k , constante de Boltzmann, a pour valeur, avec les unités C.G.S. et l'échelle des températures absolues, $1,37 \cdot 10^{-16}$. La relation (1) se trouve confirmée par l'immense ensemble de vérifications tirées de ses conséquences.

Si nous considérons un ensemble de N systèmes répartis en un certain nombre d'états au sens classique macroscopique, du mot de telle sorte qu'il y ait n_i états dans l'état i avec $\left(\sum_i n_i = N\right)$, on trouve aisément que la probabilité de cette répartition est

$$(2) \quad P = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots}.$$

Comme N et les n_i sont supposés grands, la formule de Stirling permet de poser très approximativement $N! = N^N e^{-N}$ et $n_i! = n_i^{n_i} e^{-n_i}$ et l'on obtient aisément

$$(3) \quad \log P = \log N! - \sum_i \log n_i! \simeq N \log N - \sum_i n_i \log n_i.$$

Posons $p_i = \frac{n_i}{N}$, p_i étant le poids statistique de l'état i dans la répar-

tition. Comme $\sum_i p_i = 1$, nous aurons

$$(4) \quad \log P = -N \sum_i p_i \log p_i + N \log N - N \sum_i p_i \log N = -N \sum_i p_i \log p_i.$$

Par suite, d'après la formule (1),

$$(5) \quad S = -kN \sum_i p_i \log p_i,$$

formule classique en Thermodynamique statistique.

Si nous voulons maintenant construire une Thermodynamique quantique, il nous faut modifier la définition de l'entropie en remplaçant la conception classique des états d'un système par sa fonction d'onde.

Reprenons les algorithmes du chapitre II. Lorsque les différents états des N systèmes que nous considérons sont définis par des fonctions d'onde $\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots$ formant un système orthonormal complet de fonctions de base (ce sont par exemple les fonctions propres d'une grandeur mesurable), on ramènera la matrice statistique P de von Neumann à sa forme diagonale en prenant les φ_i comme fonctions de base, c'est-à-dire qu'on aura alors

$$(6) \quad P_{kl} = p_k \delta_{kl} \quad \left(\sum_k p_k = 1 \right).$$

De plus la matrice $\log P$ dont les éléments sont $(\log P)_{kl} = \delta_{kl} \log p_k$ a aussi la forme diagonale. Il est alors naturel de transposer la formule de Boltzmann en définissant l'entropie à partir de la matrice statistique P en posant

$$(7) \quad S = -kN \operatorname{Tr}(P \log P),$$

car cette expression, qui a une valeur indépendante du système de fonctions de base choisi en raison de l'invariance de la trace, s'exprime dans le système de base où les matrices P et $\log P$ sont diagonales par

$$(8) \quad S = -kN \sum_k p_k \log p_k$$

de sorte que nous retombons sur l'ancienne formule (5).

Nous allons chercher à déterminer le maximum de l'entropie quand on suppose donnés le nombre N des systèmes et la valeur E de leur énergie totale.

Rappelons d'abord le calcul de ce maximum en Thermodynamique statistique classique. On peut écrire $\partial \log P = 0$ avec les conditions $\partial N = 0$ et $\partial E = 0$, ce qui conduit à introduire des multiplicateurs de Lagrange α et β et à écrire

$$(9) \quad \partial (\log P - \alpha N - \beta E) = 0,$$

soit, d'après (4),

$$(10) \quad -N \sum_i \delta p_i [\log p_i + 1 + \alpha + \beta E_i] = 0$$

pour toute variations des p_i telles que $\sum_i p_i$ reste égal à 1

(car $\partial E = \sum_i E_i \partial n_i = N \sum_i E_i \delta p_i$). On en déduit

$$(11) \quad p_i = e^{-\alpha - \beta E_i}.$$

C'est la loi classique de Boltzmann-Gibbs qui, compte tenu de la condition $\sum_i p_i = 1$, peut aussi s'écrire

$$(12) \quad p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_k e^{-\beta E_k}}.$$

Si l'on compare cette expression avec la théorie des gaz parfaits, on peut voir que $\beta = \frac{1}{kT}$, où T est la température absolue de l'ensemble des N systèmes supposée bien définie, par exemple par contact avec un thermostat.

On trouve alors aisément pour l'entropie de la distribution la plus probable (qui est presque toujours réalisée)

$$(13) \quad S = -kN \sum_i p_i \log p_i = kN \left[\log \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}} + \frac{1}{kT} \frac{\sum_i E_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} \right].$$

Posons $Z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{kT}}$: c'est la « somme d'états » de Planck. Nous avons

$$(14) \quad \begin{cases} S = kN \left[\log Z - \beta \frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \right], \\ E = -N \frac{\partial \log Z}{\partial \beta}, \\ F = E - TS = -kNT \log Z \end{cases}$$

comme expressions de l'entropie, de l'énergie et de l'énergie libre.

En Thermodynamique quantique de von Neumann, le calcul est tout à fait parallèle au précédent. On doit exprimer que l'entropie (7) est maximum sous les conditions

$$(15) \quad \text{Tr } P = 1, \quad E = N\bar{E} = N \text{Tr}(PH) = \text{const.},$$

où H est la matrice hamiltonienne de l'un quelconque des N systèmes. On doit donc écrire

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \sum_k P_{kk} \log P_{kk} = 0, \quad \text{avec} \quad \delta \sum_k P_{kk} = 0; \\ \delta \sum_{kl} P_{kl} H_{lk} = 0, \end{array} \right.$$

d'où en introduisant les multiplicateurs de Lagrange α et β ,

$$(17) \quad \delta \sum_k P_{kk} \log P_{kk} + \alpha \delta \sum_k P_{kk} + \beta \delta \sum_{kl} P_{kl} H_{lk} = 0,$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$(18) \quad \sum_k \delta P_{kk} [\log P_{kk} + 1 + \alpha + \beta H_{kk}] + \beta \sum_{k \neq l} \delta P_{kl} H_{lk} = 0,$$

relation qui doit être vérifiée pour toute valeur des δP_{kl} . Il faut donc que les systèmes soient dans des états propres de l'énergie ($H_{kl} = 0$ pour $k \neq l$) et de plus que

$$(19) \quad P_{kk} = e^{-\alpha - \beta H_{kk}},$$

avec, puisque $\sum_k P_{kk} = 1$, $e^{-\alpha} \sum_k e^{-\beta H_{kk}} = 1$. D'où en posant $Z(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta H}$

$$(20) \quad P = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}} = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}.$$

On démontre comme dans la théorie classique que $\beta = \frac{1}{kT}$ et l'on trouve pour l'état le plus probable (en tenant compte de $\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} \text{Tr } H e^{-\beta H}$)

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{k(N)}{Z(\beta)} \text{Tr}[e^{-\beta H}(\beta H + \log Z)] = kN \left[\log Z + \frac{\text{Tr } \beta H e^{-\beta H}}{Z} \right] \\ \quad = kN \left[\log Z - \beta \frac{\partial \log Z}{\partial \beta} \right], \\ E = N \text{Tr}(PH) = -N \frac{\partial \log Z}{\partial \beta}, \\ F = E - TS = -kN T \log Z. \end{array} \right.$$

On retrouve donc les formules (14) de la Thermodynamique statistique classique, mais avec une définition différente de Z . La formule (20) nous apprend d'ailleurs que le poids statistique de l'état quantifié Ψ_k d'énergie $E_k = H_{kk}$ dans le mélange est $\frac{e^{-\beta E_k}}{\sum_k e^{-\beta E_k}}$, ce qui

nous ramène bien à la loi canonique de Boltzmann-Gibbs.

2. Évolutions réversibles et irréversibles. — Les considérations précédentes ont conduit M. von Neumann à distinguer à l'échelle microphysique deux genres d'évolutions : les évolutions réversibles et les évolutions irréversibles résultant de la mesure.

L'évolution réversible d'un système ou d'un ensemble de systèmes est représentée par l'évolution entièrement déterminée, de la fonction d'onde du système ou de toutes les fonctions d'onde des systèmes de l'ensemble. Si l'on a affaire à un cas pur et si $\Psi(0)$ est la forme initiale de la fonction d'onde, celle-ci évoluera suivant l'équation

$$(22) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi,$$

où H est l'opérateur hamiltonien du système qui, si le système est isolé, est indépendant du temps. On a donc

$$(23) \quad \Psi(t) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} t H} \Psi(0),$$

avec $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} t H} = \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi i}{\hbar} t H \right)^n$. Alors le cas pur initial reste un cas pur.

L'opérateur $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} t H}$ a pour adjoint $e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} t H}$ comme on le vérifie aisément de sorte que son inverse coïncide avec son adjoint : c'est donc un opérateur unitaire conservant les traces des matrices, l'entropie S d'un ensemble de N systèmes dans l'état Ψ égale à $-kN \text{Tr}(P \log P)$ reste donc invariable au cours de l'évolution : le processus est réversible.

Considérons maintenant non plus un cas pur, mais un mélange de cas purs. Chacune des fonctions $\Psi^{(k)}(t)$ des cas purs évolue suivant l'équation d'onde (22) où H est l'opérateur hamiltonien de chacun des systèmes identiques considérés. Chacune de ces évolutions entièrement déterminées est donc représentée par

$$(24) \quad \Psi^{(k)}(t) = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} t H} \Psi^{(k)}(0),$$

c'est-à-dire par une transformation unitaire des $\Psi^{(k)}(0)$. L'évolution de la matrice statistique sera donc donnée par

$$(25) \quad P(t) = \sum_k P_k P_k(t)$$

ou, si $\Psi^{(k)}(t) = \sum_l c_l^{(k)}(t) \varphi_l$, par

$$(26) \quad (P(t))_{lm} = \sum_k P_k c_l^{(k)}(t) c_m^{(k)*}(t).$$

La trace de P , égale à $\sum_k P_k \sum_l |c_l^{(k)}(t)|^2$ est conservée par la transformation unitaire (25) des $\Psi^{(k)}$ qui conserve la norme de $\Psi^{(k)}$, c'est-à-dire $\sum_l |c_l^{(k)}(t)|^2$. Donc, ici encore, comme pour un cas pur, l'entropie S du mélange reste invariable.

Les transformations irréversibles correspondraient, d'après M. von Neumann, à des processus non soumis au déterminisme qui se produiraient au moment des interactions de mesure. L'interaction du système ou du corpuscule étudié 1 avec un appareil de mesure 2 (ou dans notre présentation avec un corpuscule indicateur 2) correspondrait à une évolution déterminée et réversible du système global 1 + 2 jusqu'à ce que la constatation macroscopique de l'état individuel du système 2 par l'observateur vienne interrompre cette évolution par un processus qui, dans l'interprétation actuelle, n'est ni réversible, ni même causal.

L'état initial du système 1 étant un cas pur, tous les p_i sont nuls sauf un seul qui est égal à 1 : l'entropie S du système est alors nulle et elle le reste tant que le système est isolé et évolue réversiblement. Si l'interaction suivie de mesure avec le système 2 transforme ensuite l'état du système 1 en un mélange, tous les p_i deviennent inférieurs à 1 et l'entropie du système 1 devient visiblement positive.

Le processus de mesure est donc irréversible et s'accompagne d'une augmentation de l'entropie. La chaîne de l'évolution réversible est rompue et l'on ne peut plus remonter par aucun moyen de l'état qui suit la mesure à celui qui l'a précédé,

M. von Neumann a aussi montré, par un raisonnement assez long, que, si l'état initial est déjà un mélange, toute mesure qui modifie effectivement ce mélange a pour effet d'augmenter l'entropie.

La conclusion de M. von Neumann est que toute mesure augmente l'entropie et a, par suite, un caractère irréversible. Cette irréversibilité

est visiblement liée à l'effacement déjà signalé des différences de phase par la mesure et à l'impossibilité, qui en résulte, de remonter de l'état existant après la mesure à l'état qui existait avant la mesure.

3. Comment la théorie de la double solution devra interpréter l'irréversibilité résultant du processus de mesure. — L'augmentation de l'entropie provoquée par un processus de mesure étant liée à une irréversibilité, quelle est l'origine de cette irréversibilité qui, dans une théorie causale, ne doit pas résulter d'un indéterminisme? Il semble que, dans le cadre des idées que nous avons exposées, cette irréversibilité doive être interprétée de la façon suivante. Après la mesure, ou bien l'onde u initiale s'est fragmentée en portions spatialement séparées R_k , le corpuscule se trouvant finalement dans l'un de ces trains d'ondes; ou bien le corpuscule se décrochant de l'onde u initiale s'est finalement accroché, par un processus du type « aiguillage », sur l'une de ces composantes φ_j . Dans un cas comme dans l'autre, il n'y a plus après la mesure d'interférences entre les composantes φ_k de v et les différences de phase entre ces composantes n'interviennent plus. Si l'on admet ce point de vue, il apparaît clairement que l'augmentation de l'entropie de von Neumann lors de la mesure n'est aucunement liée à une prise de conscience du résultat de la mesure par l'observateur, mais au fait *objectif* que le corpuscule, par suite de l'action du dispositif de mesure, se trouve finalement être accroché à l'une seule des composantes φ_k dont la superposition constituait le cas pur initial.

Nos idées sur les relations de l'onde u et de l'onde Ψ nous permettent de préciser davantage. Pour représenter l'état des probabilités après la mesure, le physicien sera amené à construire des fonctions Ψ_k correspondant à « l'accrochage » du corpuscule sur chacune des composantes φ_k de l'onde initiale. Si le résultat de la mesure n'est pas connu, il devra pour représenter l'état des probabilités envisager un « mélange » de l'ensemble des Ψ_k avec des poids statistique $p_k = |c_k|^2$ égaux aux carrés des modules des coefficients des φ_k dans l'onde primitive. Mais dès que l'observation d'un phénomène macroscopique observable lui aura permis de connaître le résultat du processus de mesure, il ne devra plus conserver que l'un des Ψ_k qui constituera à nouveau un cas pur. Alors les relations de phase entre les φ_k auront disparu et l'on ne pourra plus remonter du Ψ final au Ψ initial. C'est pourquoi, dans la théorie de von Neumann qui fait intervenir exclusivement la fonction d'onde subjective Ψ , l'augmentation de l'entropie

par la mesure correspond à une perte de nos « informations » sur les différences de phase quand nous passons du cas pur initial au mélange qui représente l'état des probabilités après la mesure quand on n'en connaît pas le résultat. Cette conception est en accord avec l'idée, bien connue en Cybernétique, d'après laquelle l'information correspond à une entropie changée de signe (neg-entropie) de sorte qu'une diminution de l'information a pour contre partie une augmentation de l'entropie (Shannon, Léon Brillouin, etc.).

Malgré le grand intérêt des rapprochements qui ont pu être faits entre l'information et l'entropie (changée de signe), il semble certain que l'entropie d'un système physique correspond à une situation objective et ne peut être définie uniquement à partir des informations (qui peuvent être plus ou moins exactes) des observateurs. L'augmentation d'entropie provoquée par la mesure doit, à notre avis, être rattachée non pas au fait que l'observateur prend conscience du résultat de la mesure, mais à un processus *objectif* qui provoque la cessation des interférences entre les composantes de l'onde ν initiale. Dans la théorie de la double solution où l'évolution de l'onde u est entièrement déterminée, les phases des composantes φ_k de ν gardent une valeur bien définie même après la fin du processus de mesure, mais comme le corpuscule n'est plus alors accroché qu'à l'une des composantes φ_j et que toute observation nous fournissant des connaissances sur les phénomènes microphysiques implique l'action localisée d'un corpuscule, il n'y a plus après la mesure aucune possibilité de connaître les phases des composantes autres que φ_j .

Il serait très intéressant d'analyser en détail l'interprétation par la théorie de la double solution de l'augmentation d'entropie provoquée par la mesure. Une telle analyse permettrait probablement de mieux comprendre le sens véritable de la Thermodynamique de von Neumann.

APPENDICE

ÉTUDE DU PASSAGE DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE À LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE SUR UN EXEMPLE PARTICULIER.

Nous allons, dans cet Appendice, étudier un cas expérimental précis pour bien montrer comment s'introduit, dans l'interprétation actuelle le passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire.

Nous envisagerons un « canon à électrons » dont le fond est formé par une plaque P incandescente émettant des électrons devant laquelle est placée une grille G portée à un potentiel électrostatique très supérieur à celui de la plaque.

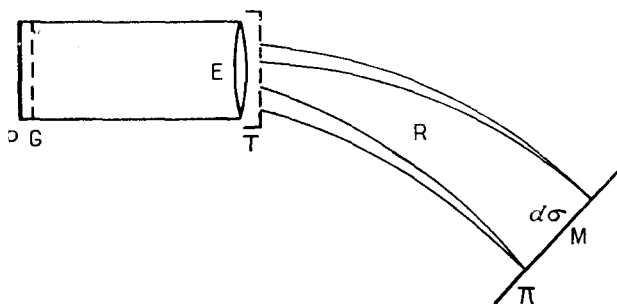


Fig. 7.

Par l'embouchure E du canon à électrons sort donc un flux d'électrons ayant sensiblement tous la même énergie W et formant un faisceau parallèle. Ce faisceau sera en Mécanique ondulatoire associé à un train d'ondes ayant une section égale à celle de l'embouchure E et sensiblement assimilable à un morceau d'onde plane monochromatique de fréquence $\nu = \frac{W}{h}$ et de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$.

Dans la région R les électrons passent dans un champ électrostatique créé par des moyens humains et qui, par suite, varie très peu à l'échelle de la longueur d'onde (qui est au plus de l'ordre de 10^{-8} cm). Nous savons qu'il en résulte que l'onde associée à l'un des électrons se propage suivant les lois de l'Optique géométrique, ce qui permet de définir des rayons-trajectoires à la façon classique. Ayant traversé ce champ statique, les électrons arrivent sur une plaque photographique II où leurs arrivées s'inscrivent par des actions locales successives.

Nous allons ainsi supposer que nous disposons d'un « tamis » T que nous pouvons éventuellement placer sur l'embouchure E du canon à électrons. Ce tamis est percé de trous égaux, extrêmement rapprochés et régulièrement distribués à sa surface, le diamètre des trous étant si petit qu'ils nous apparaissent comme presque ponctuels et cependant assez grand pour être très supérieur à la longueur d'onde λ .

Nous allons analyser la production du phénomène observé sur la plaque photographique, dans le cas où il n'y a pas de tamis et dans le cas où le tamis est placé sur l'embouchure en adoptant successivement le point de vue de la Mécanique classique, celui de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la double solution et enfin celui de l'interprétation usuelle de la Mécanique ondulatoire. Cette étude sera très instructive.

1. Point de vue de la Mécanique classique. — *a. Le tamis n'est pas en place.* — Par tous les points de l'embouchure du canon à électrons passe une trajectoire possible qui est normale au plan de cette embouchure. Dans la région R, le champ statique courbe les trajectoires, ce qui a pour effet d'augmenter leur densité dans certaines régions et de les raréfier dans d'autres régions. Il en résulte que le nombre relatif des trajectoires traversant des aires égales $d\sigma$ du plan II varie d'un point à un autre de ce plan, d'où des variations de l'impression photographique sur la plaque. Dans la théorie d'Hamilton-Jacobi, les trajectoires sont les rayons de la propagation d'une onde fictive à l'approximation de l'Optique géométrique et il en résulte que la densité des trajectoires qui viennent percer une aire $d\sigma$ du plan II entourant un point M doit varier proportionnellement au carré de l'amplitude $\alpha(M)$ de l'onde d'Hamilton-Jacobi au point M, si toutefois on admet l'hypothèse très naturelle que toutes les trajectoires sortant de l'embouchure du canon à électrons sont également probables. L'expérience montre bien, en effet, que les variations de l'impression photographique sont proportionnelles à $\alpha^2(M)$ aux différents points M de la plaque.

b. Le tamis est en place. — Certaines trajectoires électroniques vont être arrêtées par les parties pleines du tamis, d'autres passeront par les trous du tamis. Comme ces trous sont très rapprochés et uniformément répartis à la surface du tamis, nous aurons un ensemble très dense de pinceaux de trajectoires électroniques qui s'échapperont des trous du tamis. Chacun de ces pinceaux peut être considéré comme un pinceau de rayons de l'onde d'Hamilton-Jacobi : il en résulte encore que la densité des trajectoires qui viennent percer le plan II de la plaque est, en moyenne, proportionnelle à $a^2(M)$ et, par suite, qu'il en est de même de l'impression photographique. Il n'y a donc aucune différence essentielle entre le cas *a* et le cas *b* quant à l'interprétation de la répartition des impacts d'électrons sur la plaque photographique II.

2. Point de vue de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution. — *a. Le tamis n'est pas en place.* — Dans la théorie de la double solution, l'électron est un accident très localisé dans la structure d'une onde u objective à laquelle l'onde Ψ doit être supposée, en dehors de cet accident, partout proportionnelle. Chaque électron qui s'échappe du canon est donc incorporé à un train d'onde v dont les dimensions transversales sont macroscopiques, puisqu'elles sont égales aux dimensions de l'embouchure. Mais l'électron a une position et une trajectoire bien déterminée au sein de l'onde et, comme la trajectoire est définie par la formule du guidage et que la phase commune des ondes v et Ψ est égale à la fonction S de Jacobi, l'on voit (puisque $\vec{c} = -\frac{1}{m} \vec{\text{grad}} S$) que les trajectoires possibles de l'électron coïncident encore avec les rayons de l'onde d'Hamilton-Jacobi. Ainsi bien qu'ici l'électron ne soit plus conçu comme un point matériel isolé, mais comme un accident local incorporé à une onde, les trajectoires des électrons sont les mêmes qu'en Mécanique classique et l'interprétation des variations de l'impression photographique à la surface de la plaque II reste la même qu'en 1, *a*.

b. Le tamis est en place. — Ici, quand un électron sort du canon, nous devons dire qu'un petit train d'ondes v portant l'électron sort par un des trous du tamis. Comme ces trous ont des dimensions très petites à notre échelle, mais très grandes par rapport à la longueur d'onde, nous pouvons considérer le train d'ondes sortant d'un des trous comme coïncidant avec un petit morceau de l'onde d'Hamilton-Jacobi. Et comme sur la surface du tamis les trous sont très nombreux et régulièrement distribués, la formule du guidage nous montrera encore que les trajec-

toires des électrons coïncident, comme en 1, *b*, avec un ensemble très dense de pinceaux de rayons de l'onde d'Hamilton-Jacobi. L'interprétation de la répartition des impressions photographiques sur la plaque Π sera donc encore exactement la même ici qu'en 1, *b*.

3. Point de vue de l'interprétation usuelle de la Mécanique ondulatoire. — *a. Le tamis est en place.* — Contrairement à ce que nous avons fait aux paragraphes 1 et 2, nous allons commencer par le cas où le tamis est en place : c'est, en effet, en étudiant ce cas que nous allons faire le raccord entre la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire suivant une méthode fréquemment indiquée dans les exposés usuels.

Si le tamis ne comportait qu'un seul trou, l'onde Ψ d'un électron une fois sortie du canon se réduirait à un petit train d'ondes dont les dimensions transversales seraient négligeables à notre échelle, mais cependant grandes par rapport à la longueur d'onde : ce petit train d'ondes glisserait le long d'un des rayons-trajectoires de la théorie d'Hamilton-Jacobi. L'interprétation usuelle nous dit alors que l'électron n'est pas localisé dans le train d'ondes, qu'il est réparti statistiquement dans toute son étendue. Mais comme le train d'ondes est sensiblement ponctuel à notre échelle, tout se passe *pratiquement* comme si l'électron était un point matériel décrivant l'une des trajectoires prévues par la Mécanique classique. C'est ainsi que dans ce cas où la propagation de l'onde est conforme à l'Optique géométrique et où la trajectoire est approximativement définie à notre échelle par le trou percé dans le tamis qui recouvre l'embouchure du canon, nous pouvons faire le raccord entre la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire. Mais ce raccord dissimule une grande différence de principe puisque, dans l'interprétation usuelle de la Mécanique ondulatoire, le corpuscule n'est plus rigoureusement localisé dans le train d'ondes : il n'y a plus de trajectoire rigoureusement définie, mais seulement un pinceau très fin de rayons-trajectoires d'Hamilton-Jacobi constituant une sorte de petit tube très délié où le corpuscule est présent *sans y être localisé* et qui, à notre échelle nous apparaît comme une ligne sans épaisseur. C'est une sorte de « pseudo-trajectoire ».

Passons maintenant au cas où le tamis est percé d'un très grand nombre de trous très petits et régulièrement distribués à sa surface. Quand l'électron est sorti du canon, son onde Ψ est constituée par un très grand nombre de petits trains d'ondes séparés qui définissent un faisceau très dense de pseudo-trajectoires. Il est aisé de se rendre compte

que la répartition sur la plaque photographique des intersections des pseudo-trajectoires avec le plan Π est toujours donnée par la fonction $\alpha^2(M)$. D'après l'interprétation usuelle, l'électron ne décrit aucune de ces pseudo-trajectoires : il est réparti statistiquement, avec une égale probabilité sur tout l'ensemble de ces pseudo-trajectoires. C'est là une conception un peu étrange : ce qu'il l'est plus encore, c'est qu'au moment où se produit l'impression photographique locale, l'électron choisit en quelque sorte *une* de ces pseudo-trajectoires pour s'y localiser au point où elle perce le plan Π . Malgré l'étrangeté de cette conception, elle permet cependant encore de comprendre l'origine de la répartition en $\alpha^2(M)$ des impressions photographiques sur la plaque : cette répartition provient, en effet, de la répartition des intersections des pseudo-trajectoires avec le plan Π .

b. Le tamis n'est pas en place. — C'est le cas le plus intéressant. Quand l'électron s'échappe du canon, il est alors associé à un train d'ondes Ψ dont la section transversale a des dimensions macroscopiques, celles de l'embouchure. L'interprétation usuelle de la Mécanique ondulatoire nous dit que l'électron est répandu statistiquement dans tout le volume de dimensions *macroscopiques* occupé par le train d'ondes : il n'est donc plus question de définir des trajectoires, ni même des pseudo-trajectoires. De nouveau, nous sommes amenés à dire qu'au moment où l'électron produit en un point de Π une impression photographique locale, il choisit brusquement la très petite région où il se localise, conclusion qui, comme Einstein l'avait souligné autrefois, est en contradiction avec la validité des notions habituelles d'espace et de temps, même à l'échelle macroscopique. De plus, pour être en accord avec l'expérience, nous sommes toujours obligés d'admettre que la répartition des localisations photographiques sur la plaque Π est donnée par la fonction $\alpha^2(M)$, mais ici cette affirmation ne peut aucunement se justifier par la considération de l'intersection des trajectoires ou des pseudo-trajectoires avec la plaque photographique puisqu'il n'y a plus ni trajectoires, ni pseudo-trajectoires : elle devient donc un postulat purement arbitraire.

Conclusion. — De cette analyse détaillée du dispositif expérimental étudié, on peut tirer les conclusions suivantes, Peut-être ne prouve-t-elle pas d'une façon rigoureuse la fausseté de l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire, mais elle montre sans aucun doute pour le moins que la loi de répartition des localisations corpusculaires en $\alpha^2 = |\Psi|^2$ a

dans l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la double solution comme en Mécanique classique une origine parfaitement intelligible tandis qu'elle prend l'aspect d'un postulat entièrement arbitraire dans l'interprétation actuelle. Et, malgré tout, cela jette un certain doute sur la validité de cette interprétation actuelle.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. VON NEUMANN, *Les fondements mathématiques de la théorie des quanta*, trad. Proca, Alcan, Paris, 1946.
 - [2] F. LONDON et E. BAUER, *La théorie de l'observation en Mécanique quantique* (*Actualités scientifiques et industrielles* n° 775, Hermann, Paris, 1939).
 - [3] LOUIS DE BROGLIE, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire : la théorie de la double solution*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
 - [4] J.-P. VIGIER, *Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
 - [5] A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. VI, *Partielle differentialgleichungen der Physik*, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, p. 183 et suiv.
 - [6] TH. VOGEL, *Physique mathématique classique*, Collection Armand Colin, Paris, 1956, p. 97 et suiv.
 - [7] J. L. DESTOUCHES, *La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
-

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PREFACE.....	V

CHAPITRE I.

Rappel des généralités sur la Mécanique ondulatoire et sur la Mesure.

1. Quelques principes connus de la Mécanique ondulatoire.....	1
2. Réduction du paquet de probabilité.....	6
3. Effacement des phases par la mesure. Interférences des probabilités.....	7
4. Divergence entre le schéma statistique de la Mécanique ondulatoire et le schéma usuel des statisticiens.....	10

CHAPITRE II.

La théorie de la Mesure d'après M. von Neumann.

1. Cas purs et mélanges.....	15
2. La matrice statistique de J. von Neumann.....	18
3. La matrice statistique pour un mélange de cas purs.....	21
4. Irréductibilité des cas purs.....	23
5. Les lois statistiques de la Mécanique ondulatoire seraient impossibles à interpréter par l'introduction de variables cachées.....	25
6. Critique de la conclusion précédente.....	29

CHAPITRE III.

La théorie de la Mesure d'après M. von Neumann (suite).

1. Généralités sur la Mesure.....	31
2. Statistique de deux systèmes en interaction d'après M. von Neumann.....	33
3. La mesure d'une grandeur dans le formalisme de M. von Neumann.....	36
4. Conséquences peu admissibles de la théorie de la Mesure dans l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire.....	38

CHAPITRE IV.

Interprétation causale de la Mécanique ondulatoire (théorie de la double solution).

1. Idées de base de la théorie de la double solution.....	43
2. Autre manière d'exprimer la formule du guidage et généralisations.....	48
3. Démonstration de la formule de guidage.....	50
4. Introduction de la non-linéarité et forme de la fonction d'onde u	54
5. Illustration par un exemple des hypothèses faites sur u	56
6. La relation entre u et Ψ	59

CHAPITRE V.

Quelques compléments sur la théorie de la double solution et sur le guidage.

	Pages.
1. Existence des solutions singulières dans le problème extérieur.....	63
2. La formule de Rayleigh-Sommerfeld.....	64
3. Construction de la fonction u à l'aide de la formule de Rayleigh-Sommerfeld dans le cas des états stationnaires.....	67
4. Interprétation de la signification statistique du $ \Psi ^2$ dans les états stationnaires.....	70
5. Deux théorèmes de la théorie de la double solution-onde pilote.....	74
6. Quelques mots sur la Mécanique ondulatoire des systèmes dans l'espace de configuration.....	77

CHAPITRE VI.

Position de l'interprétation causale en face du problème de la Mesure en Microphysique.

1. Rôle particulier joué par la position du corpuscule.....	81
2. Tout dispositif de mesure comporte une séparation des trains d'ondes dans l'espace.....	84
3. Rétablissement du schéma usuel des statisticiens.....	88
4. Interprétation des relations d'incertitude.....	93

CHAPITRE VII.

Mesure des grandeurs par l'interaction de deux corpuscules.

1. Inconvénients de la mesure envisagée précédemment avec un seul corpuscule...	97
2. Interprétation de la mesure de seconde espèce par la théorie usuelle.....	100
3. Interprétation par la théorie de la double solution.....	102
4. Cas d'un processus de mesure par interaction de deux corpuscules où les régions singulières $R_k^{(1)}$ ne seraient pas spatialement disjointes.....	106
5. Idée d'aguillage. Examen d'une remarque d'Einstein.....	108
6. Conclusions. Cas purs et mélanges.....	111

CHAPITRE VIII.

Coup d'œil sur la Thermodynamique de M. von Neumann.

1. Introduction du formalisme de M. von Neumann en Thermodynamique.....	113
2. Évolutions réversibles et irréversibles.....	117
3. Comment la théorie de la double solution devra interpréter l'irréversibilité résultant des processus de mesure.....	119

APPENDICE. — Étude du passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire sur un exemple particulier.....	121
--	-----

BIBLIOGRAPHIE.....	127
--------------------	-----

TABLE DES MATIÈRES.....	129
-------------------------	-----



IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS - PARIS

150616

Dépôt légal, Imprimeur, 1957, n° 1203
Dépôt légal, Éditeur, 1957, n° 733

ACHEVÉ D'IMPRIMER LE 12 JUILLET 1957