

La Thermodynamique  
de la particule isolée

(ou Thermodynamique cachée des particules)

**Ouvrages de la Collection**  
In-8° (16 × 25)

- I. BROGLIE (Louis de). — **La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?** avec une contribution de Jean-Pierre VIGIER, 1953.
- II. FÉVRIER (P.). — **L'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire.** 1955.
- III. YIFTAH (S.). — **Constantes fondamentales des théories physiques.** 1956.
- IV. TONNELAT (M.-A.). — **La théorie du champ unifié d'Einstein.** 1955.
- V. VIGIER (J.-P.). — **Structure des micro-objets dans l'interprétation causale de la théorie des quanta.** 1956.
- VI. DESTOUCHES (J.-L.). — **La quantification en Théorie fonctionnelle des Corpuscules.** 1956.
- VII. BROGLIE (Louis de). — **La théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire.** 1957.
- VIII. COSTA DE BEAUREGARD (O.). — **Théorie synthétique de la Relativité restreinte et des Quanta.** 1957.
- IX. DESTOUCHES (J.-L.). — **Corpuscules et champs en Théorie fonctionnelle.** 1958.
- X. HALBWACHS (F.). — **Théorie relativiste des fluides à spin.** 1960.
- XI. AESCHLIMANN (F.). — **Recherches sur la notion de système physique.** 1960.
- XII. DESTOUCHES (J.-L.). — **Leçons sur le champ fondamental.** 1961.
- XIII. **La méthode axiomatique dans les Mécaniques classiques et nouvelles.** Actes du 4<sup>e</sup> Colloque international de Logique et Philosophie des Sciences, Institut H.-Poincaré, Paris, septembre 1959 (organisé par A. CHATELET assisté de J.-L. DESTOUCHES).
- XIV. **Théorie physique et recherche prévisionnelle.** Actes du 1<sup>er</sup> Colloque international organisé par le Centre de Recherches prévisionnelles de l'École centrale des Arts et Manufactures, Paris, 29 et 30 mai 1962.
- XV. **Prévisions, Calcul et Réalités.** Actes du 2<sup>e</sup> Colloque international organisé par le Centre de Recherches prévisionnelles de l'École des Arts et Manufactures de Paris, mai 1963 (*sous presse*).
- XVI. SAUER (C.). — **Planification générale et intégration économique.**

*En préparation :*

- Emile Borel, Philosophe et homme d'action.** Pages choisies présentées par Maurice FRÉCHET.
- PICARD (C.). — Théorie des questionnaires.**

LES GRANDS PROBLÈMES DES SCIENCES  
ouvrages réunis par Mme P. Février

---

N° 17

La Thermodynamique  
de la particule isolée  
(ou Thermodynamique cachée des particules)

par Louis de BROGLIE  
de l'Académie française,  
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences

gv

PHYSIQUE FONDAMENTALE  
Prix : 45L  
LIBRAIRIE BROD - 01

1964  
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR  
PARIS

© GAUTHIER-VILLARS, 1964

*Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction  
par tous procédés, y compris la photographie et le microfilm,  
réservés pour tous pays.*

## PRÉFACE

*Cet Ouvrage est, pour l'essentiel, la rédaction du dernier cours que j'ai fait à l'Institut Henri-Poincaré dans l'hiver 1961-1962 avant de prendre ma retraite.*

*Depuis environ douze ans, j'ai repris une tentative d'interprétation de la Mécanique ondulatoire que, sous les noms de théorie de l'onde-pilote, puis de théorie de la double solution, j'avais proposée sans succès en 1926-1927 peu de temps après ma thèse de Doctorat. Des réflexions prolongées sur ce sujet me conduisent maintenant à affirmer que l'interprétation actuellement admise de la Mécanique quantique n'apporte pas véritablement d'explication raisonnable de certains faits expérimentaux essentiels et incontestables (<sup>1</sup>) et que, par suite, elle doit être revisée en rétablissant la constante localisation du corpuscule dans l'espace au cours du temps, en rendant à l'onde qui l'accompagne le caractère d'une réalité physique et en postulant l'existence entre l'onde et le corpuscule d'une liaison appropriée.*

*J'avais d'abord repris mon ancienne tentative de réinterprétation sous la forme que je lui avais donnée autrefois en y introduisant cependant un certain nombre de compléments importants. Mais de plus en plus dans ces toutes dernières années, j'ai été amené à penser que la forme hydrodynamique de cette réinterprétation, tout en étant une base de départ nécessaire, devait être complétée par des considérations d'ordre statistique. Or, en 1946-1948, avant d'avoir repris mes recherches sur la réinterprétation de la Mécanique ondulatoire, j'avais étudié les anciennes théories de Helmholtz et de Boltzmann qui tendaient à établir une correspondance entre des grandeurs mécaniques et des grandeurs thermodynamiques et j'avais cru y voir l'amorce d'une thermodynamique de la particule isolée. Tout récemment, à la suite de la publication d'un travail de M. Terletsky,*

(<sup>1</sup>) Voir, par exemple, bibliographie [2], [3] et [4].

*j'ai eu l'idée d'essayer d'utiliser l'hypothèse du milieu subquantique de MM. Bohm et Vigier, en le concevant comme une sorte de thermostat caché, pour construire cette Thermodynamique de la particule isolée. L'objet du présent livre est d'exposer cette tentative.*

*Les cinq premiers chapitres de l'Ouvrage rappellent des résultats qui sont bien connus, mais j'y ai insisté sur certains points, soit parce qu'ils ont été parfois mal interprétés, soit parce qu'ils sont très importants pour ce qui suit. Les chapitres essentiels sont les quatre derniers (chap. VI, VII, VIII et IX) où sont introduites progressivement, dans le cadre de l'image hydrodynamique qu'offre la théorie de la double solution sous sa forme primitive, les conceptions de perturbations aléatoires et de thermodynamique statistique qui conduisent à la Thermodynamique de la particule isolée et à une théorie des fluctuations du mouvement de la particule dans son onde.*

*Je crois qu'on parvient ainsi à une forme tout à fait remarquable et prometteuse de la réinterprétation de la Mécanique ondulatoire que je crois nécessaire. Je ne puis que souhaiter bien vivement qu'un plus grand nombre de jeunes chercheurs veuillent bien s'intéresser à cette tentative, car c'est dans cette voie que me semblent devoir s'accomplir les plus grands progrès futurs de la Physique quantique.*

## CHAPITRE PREMIER

# RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE

**1. Le principe d'action stationnaire de Hamilton.** — On sait que toute la Dynamique classique, du moins quand les forces dérivent d'un potentiel (nous laissons de côté le cas de l'existence d'un potentiel-vecteur sur lequel nous reviendrons), peut être ramenée à un principe général d'action stationnaire. Pour énoncer ce principe, on introduit une fonction des coordonnées des  $N$  points matériels du système considéré, des composantes de leurs vitesses et éventuellement du temps : la fonction de Lagrange  $\mathcal{L}(x_1, \dots, z_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{z}_n, t)$ , le point indiquant une dérivation par rapport au temps. Qu'il y ait ou non des liaisons à condition qu'elles soient holonomes, on peut exprimer les coordonnées à l'aide de  $n$  paramètres  $q_k$ ; s'il n'y a pas de liaison  $n = 3N$ , s'il y a des liaisons  $n < 3N$ . Mais, de toute façon, la fonction de Lagrange est de la forme  $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ .

En Mécanique classique non relativiste, on précise la forme de la fonction de Lagrange, en posant :

$$(1) \quad \mathcal{L} = T - U,$$

où  $T$  est l'énergie cinétique globale et  $U$  l'énergie potentielle globale du système, toutes deux exprimées à l'aide des variables  $q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t$ .

On peut alors ramener toute la Dynamique au principe suivant : *Si le système part d'une certaine configuration définie par les valeurs  $q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$  des  $q$  à l'instant  $t_0$  pour parvenir à une autre configuration  $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}$  à l'instant  $t_1$ , les équations du mouvement sont telles que l'intégrale  $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$  soit stationnaire pour une variation infiniment petite du mouvement entre l'état initial et l'état final.* C'est le principe d'action stationnaire de Hamilton.

On peut préciser cet énoncé en introduisant la notion d'espace de configuration. Chaque configuration du système est définie par l'ensemble des valeurs des  $n$  coordonnées  $q_1, \dots, q_n$  et peut par suite être représentée par un point dans un espace à  $n$  dimensions dont chaque point est repéré par les  $n$  coordonnées  $q_1, \dots, q_n$ . L'état instantané du système se trouvant ainsi représenté par un point de l'espace de configuration, ce point figuratif part d'un point A à l'instant  $t_0$  pour aboutir à un point B à l'instant  $t_1$ , après avoir décrit une certaine trajectoire dans l'espace de configuration. La trajectoire du point figuratif est donc définie par  $n$  fonctions du temps  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  qui définissent entièrement le mouvement du système. Sur la courbe C, la fonction  $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$  a une valeur bien déterminée en chaque point et l'intégrale curviligne  $A = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$  a un sens bien défini. Cette intégrale, qui a les dimensions physiques d'une énergie multipliée par un temps (ou d'une quantité de mouvement multipliée par une longueur)  $ML^2T^{-1}$ , est nommée l'intégrale d'Action ou, plus précisément, l'intégrale d'Action hamiltonienne.

Si l'on fait varier infiniment peu la forme de la courbe C en maintenant fixes ses extrémités ainsi que les instants  $t_0$  et  $t_1$ , on aura :

$$(2) \quad \delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

et comme :

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i,$$

il vient par intégration par parties :

$$(3) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i^n \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i dt,$$

puisque les  $\delta q_i$  sont nuls aux deux extrémités de la courbe C. Si l'intégrale  $\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt$  est stationnaire, le second membre de l'équation (3) doit être nul, quels que soient les  $\delta q_i$ . On obtient alors :

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ce sont les célèbres « équations de Lagrange » sous la forme valable quand les forces dérivent d'un potentiel et que les liaisons sont holonomes. On voit donc que ces équations sont des conséquences du principe d'action stationnaire de Hamilton et celui-ci nous apparaît donc comme la clef de voûte de la Dynamique analytique classique.

**2. Moments de Lagrange. Théorèmes de conservation.** — Les variables de configuration  $q_i$  sont souvent nommées les « coordonnées » de Lagrange. Les  $\dot{q}_i$  sont les « vitesses généralisées » correspondantes qui définissent le mouvement du système. Si les points matériels de ce système ne sont pas soumis à des liaisons et si l'on utilise des coordonnées cartésiennes rectangulaires, les  $q_i$  et les  $\dot{q}_i$  sont les coordonnées et les composantes de vitesse au sens usuel.

Au lieu d'employer les  $\dot{q}_i$ , on peut employer des grandeurs  $p_i$  dites « moments de Lagrange » définies par les relations :

$$(5) \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les équations (5) permettent d'exprimer les  $\dot{q}_i$  à l'aide des  $p_i$ . La variable  $p_i$  est dite « canoniquement conjuguée » de la variable  $q_i$ . S'il n'y a pas de liaisons et si l'on emploie des coordonnées rectangulaires, on peut poser :

$$(6) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) - U(x_1, \dots, z_N, t),$$

d'où :

$$(7) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} = p_{x_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} = m_k \dot{x}_k.$$

La grandeur  $p_{x_k}$  canoniquement conjuguée de  $x_k$  est donc alors égale à la composante  $x$  de la quantité de mouvement du  $k^{\text{ième}}$  point matériel.

Dans le cas général, les équations de Lagrange peuvent s'écrire :

$$(8) \quad \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Si donc  $\mathcal{L}$  est indépendant de  $q_k$ , la grandeur  $p_k$  restera constante au cours du mouvement. En particulier, dans le cas de l'absence

de liaison et de l'emploi des coordonnées rectangulaires, si  $U(x_1, \dots, x_n, t)$  ne dépend pas d'une des variables, mettons de  $x_k$ , on a  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0$  et, par suite,  $p_{x_k} = \text{Cte}$ . On en conclut que, si la composante suivant l'un des axes rectangulaires de la force est nulle, la composante de la quantité de mouvement du point matériel suivant cet axe est constante. C'est le théorème de la conservation de la quantité de mouvement.

Considérons maintenant dans le cas général la grandeur  $E$  définie par :

$$(9) \quad E = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}.$$

Nous l'appellerons l'*énergie* du système. Comme nous supposons que  $U$  ne dépend pas des vitesses et qu'on voit aisément que  $T$  est une fonction quadratique homogène des vitesses  $\dot{q}_i$  si les liaisons ne dépendent pas du temps, le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes nous permet d'écrire :

$$(10) \quad 2T = \sum_1^n \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_1^n \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_1^n \dot{q}_i p_i,$$

d'où :

$$(11) \quad E = \sum_1^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = 2T - (T - U) = T + U;$$

$E$  est donc bien l'énergie totale somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. On trouve d'ailleurs :

$$(12) \quad \frac{dE}{dt} = \sum_1^n (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) - \sum_1^n \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

D'après les équations de Lagrange, le premier terme du second membre compense le troisième et, d'après la définition des  $p_i$ , le second terme compense le quatrième. Il reste :

$$(13) \quad \frac{dE}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Si les forces extérieures sont constantes ou nulles (système conservatif ou isolé),  $U$  ne dépend pas de  $t$  et  $E = \text{Cte}$ . C'est le théorème de la conservation de l'énergie.

3. **Le principe de moindre action de Maupertuis.** — La définition (9) de E nous permet d'écrire :

$$(14) \quad dA = \mathfrak{L} dt = \sum_1^n p_i dq_i - Edt.$$

Imaginons alors un espace de configuration-temps en adjoignant à l'espace de configuration une dimension de temps. Soit P le point de cet espace qui représente la configuration initiale et l'instant initial  $t_0$ , Q le point qui représente la configuration finale et l'instant final  $t_1$ . L'intégrale d'action hamiltonienne s'écrira :

$$(15) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} dt = \int_P^Q \left( \sum_i p_i dq_i - Edt \right).$$

C'est une intégrale curviligne prise dans l'espace de configuration-temps le long de la ligne qui représente le mouvement du système entre  $t_0$  et  $t_1$ . Le principe d'Hamilton s'écrit alors :

$$(16) \quad \delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} dt = \delta \int_P^Q \left( \sum_1^n p_i dq_i - Edt \right) = 0,$$

les points P et Q étant maintenus fixes dans la variation.

De l'énoncé précédent du principe d'action stationnaire, on peut déduire, *dans le cas particulier des champs constants au cours du temps*, un autre principe analogue : le principe de moindre action de Maupertuis.

Dans le cas des champs constants, l'énergie du système est une constante, une intégrale première. Si A et B sont les points limites des trajectoires dans l'espace de configuration correspondant aux temps  $t_0$  et  $t_1$ , il est aisément de voir qu'on ne peut pas faire varier cette trajectoire en maintenant fixes A, B,  $t_0$  et  $t_1$  si l'énergie totale reste constante pendant la variation. On le voit aisément sur le cas simple d'un point matériel libre : la trajectoire est alors une droite et, si l'on fait varier la forme de la trajectoire en maintenant fixes ses extrémités A et B, on allonge forcément sa longueur d'après la définition même de la ligne droite et la vitesse et, par suite, l'énergie ne peuvent rester constantes si  $t_0$  et  $t_1$  restent fixes. C'est là la raison pour laquelle on ne peut pas déduire directement le principe de Maupertuis, où l'on opère une variation à énergie

constante, du principe de Hamilton où l'on opère une variation à  $t_0$  et  $t_1$  constants. Pour faire cette déduction, il faut passer par l'intermédiaire d'une formule qui est souvent appelée « le principe de l'action variée ».

Pour trouver la formule en question, partons de l'expression (15) de l'action hamiltonienne, mais supposons qu'on fasse varier les points limites P et Q, ce qui revient à faire varier non seulement les points limites A et B de l'espace de configuration, mais aussi les instants limites  $t_0$  et  $t_1$ . On obtient alors la formule cherchée :

$$(17) \quad \delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt + \left[ \sum_k^n p_k \delta q_k - E \delta t \right]_0^1.$$

L'intégrale du dernier membre représente la variation de l'intégrale d'action hamiltonienne due à la variation du mouvement quand A, B,  $t_0$  et  $t_1$  restent fixes : elle est nulle d'après le principe de Hamilton. Le crochet représente la variation de l'action due à la variation des points P et Q de l'espace de configuration-temps et l'on a :

$$(18) \quad \delta A = \left[ \sum_k^n p_k \delta q_k - E \delta t \right]_0^1.$$

Revenons maintenant à l'espace de configuration proprement dit. On peut y définir l'intégrale :

$$(19) \quad \mathcal{A} = \int_A^B \sum_k^n p_k dq_k.$$

C'est l'intégrale d'action de Maupertuis. Elle est prise dans l'espace de configuration depuis le point A qui représente la configuration initiale jusqu'au point B qui représente la configuration finale.

Dans le cas des systèmes conservatifs ou isolés (actions extérieures constantes ou nulles), l'énergie totale E du système est constante et l'intégrale (19) est indépendante du temps. Nous avons :

$$(20) \quad \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \int_P^Q \left( \sum_k^n p_k dq_k - E dt \right) = \mathcal{A} - \int_{t_0}^{t_1} E dt,$$

donc :

$$(21) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = \delta \mathcal{A} - \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt - \left| E \delta t \right|_{t_0}^{t_1},$$

d'où, en remplaçant le premier membre par la valeur donnée par (18),

$$(22) \quad \delta\mathcal{A} = \left| \sum_1^n p_k \delta q_k \right|_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \delta E dt.$$

Supposons maintenant qu'on maintienne fixes dans la variation les points A et B de l'espace de configuration ainsi que la valeur E de l'énergie. Il vient alors :

$$(23) \quad \delta\mathcal{A} = 0.$$

C'est là le principe de moindre action de Maupertuis où la variation doit s'effectuer en maintenant fixes les configurations extrêmes et la valeur de l'énergie, mais pas les époques extrêmes  $t_0$  et  $t_1$ .

Dans le cas particulier où les  $q_i$  sont les  $3N$  coordonnées cartésiennes des  $N$  points matériels d'un système non soumis à des liaisons, on a :

$$(24) \quad \mathcal{A} = \int_A^B \sum_1^{3N} p_k dq_k = \int_A^B \sum_1^N m_k (v_{x_k} dx_k + v_{y_k} dy_k + v_{z_k} dz_k)$$

et, pour un seul point matériel :

$$(25) \quad \mathcal{A} = \int_A^B m (v_x dx + v_y dy + v_z dz) = \int_A^B m \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

l'intégrale étant alors prise de A en B le long de la trajectoire dans l'espace physique à trois dimensions.

**4. Équations de Hamilton.** — Nous pouvons prendre comme variables définissant le mouvement d'un système  $n$  variables  $q_i$  de Lagrange et les moments  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  correspondants qui forment un système de variables « canoniques ». Nous pouvons alors exprimer les vitesses généralisées  $\dot{q}_i$  en fonction des  $q_i$ , des  $p_i$  et éventuellement du temps par des relations de la forme :

$$(26) \quad \dot{q}_i = f_i(q, p, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

L'énergie E sera exprimée en fonction des mêmes variables par « fonction hamiltonienne »  $H(q, p, t)$  telle que :

$$(27) \quad E = \sum_1^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = H(q, p, t),$$

les  $\dot{q}_i$  ayant été au second membre exprimées en fonction des  $q$ , des  $p$  et de  $t$ . On aura donc :

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_1^n p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_1^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_k} = \dot{q}_k, \\ \frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_1^n p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \sum_1^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = - \dot{p}_k, \end{cases}$$

d'après la définition des  $p_i$  et les équations de Lagrange. On a ainsi obtenu le célèbre système des équations de Hamilton :

$$(29) \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

et l'on en tire aisément :

$$(30) \quad \frac{dH}{dt} = \sum_1^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t},$$

d'où, si  $U$  et, par suite,  $H$  ne dépendent pas explicitement du temps,  $H = \text{Cte}$ , ce qui est le théorème de la conservation de l'énergie.

**5. Mécanique classique et Mécanique relativiste.** — Nous venons de rappeler quelques points de la Mécanique analytique classique. L'introduction par Einstein du principe de Relativité l'a conduit en 1905 à modifier les formules de la Mécanique classique. Nous ne rappellerons pas ici les principes bien connus de la théorie de la Relativité restreinte. Nous nous bornerons à résumer dans le chapitre suivant les principes de la Dynamique relativiste du point matériel en insistant particulièrement sur le principe de l'inertie de l'énergie qui jouera un rôle très important dans tout ce qui suivra.

## CHAPITRE II

# LA DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ

**1. Formules générales.** — La Mécanique newtonienne admet le groupe de transformation de Galilée avec le temps absolu, c'est-à-dire que ses équations gardent leur forme quand on fait une transformation de Galilée, mais elle n'admet pas le groupe de transformation de Lorentz qui, lui, conserve les équations de l'électromagnétisme et, en particulier, celle de la propagation de la lumière dans le vide. Mais, comme les formules de transformation des deux groupes ne diffèrent que par des termes de l'ordre de  $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ , la divergence est très faible pour les mouvements que considère la Mécanique rationnelle classique, y compris les mouvements des astres. La transformation de Lorentz se trouvant confirmée par l'identité des phénomènes d'interférences dans tous les systèmes de référence galiléens, comme les phénomènes d'interférences peuvent être observés avec infiniment plus de précision que les phénomènes mécaniques, il est naturel de supposer que le principe de Relativité s'applique à tous les phénomènes naturels et que les équations de la Mécanique classique ne sont pas rigoureusement exactes, qu'elles doivent être modifiées de façon à devenir invariantes pour la transformation de Lorentz.

La condition essentielle que doit alors remplir *a priori* la Dynamique relativiste du point matériel est évidemment de se confondre avec la Dynamique classique chaque fois que  $\beta^2$  sera négligeable devant l'unité, car il faut nécessairement retrouver l'ancienne Dynamique comme première approximation dans le cas des vitesses faibles par rapport à la vitesse  $c$  de la lumière dans le vide (approximation dite « newtonienne »). On est ainsi amené à mettre à la base de la Dynamique relativiste un principe d'action stationnaire qui se réduira au principe usuel de Hamilton quand on pourra négliger  $\beta^2$  devant l'unité. Pour cela, on doit adopter une fonction  $\mathcal{L}$

des coordonnées et des vitesses du point matériel telle que les équations de la Dynamique relativiste dérivent toutes de l'équation :

$$(1) \quad \delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = 0,$$

la variation étant opérée en maintenant fixes les positions initiale et finale du point matériel et les valeurs des instants  $t_0$  et  $t_1$  comme dans le principe classique de Hamilton. Le calcul habituel qui permet de passer du principe de Hamilton aux équations de Lagrange s'applique encore ici et donne :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \dots$$

ou, en posant :

$$(3) \quad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad \dots,$$

$$(4) \quad \frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \dots$$

Or, en Mécanique classique, on posait :

$$(5) \quad \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t),$$

mais ici nous devons choisir différemment la fonction  $\mathcal{L}$ .

D'ordinaire, en théorie de la Relativité, on représente chaque « événement » défini par l'ensemble de ses quatre coordonnées  $x, y, z, t$  par un point dans l'espace-temps à quatre dimensions. Le mouvement d'un point matériel est alors représenté par une suite continue de points-événements formant ce qu'on nomme la « ligne d'univers » du point matériel dans l'espace-temps. Quand on passe d'un système galiléen de référence à un autre, les coordonnées de chaque point de cette ligne d'univers varient puisqu'il faut faire sur ces coordonnées une transformation de Lorentz. Il existe cependant une quantité invariante attachée à chaque élément de la ligne d'univers. Soit, en effet, dans un système galiléen  $dx, dy, dz, dt$  les variations des coordonnées correspondant à un petit élément de la ligne d'univers ; considérons la quantité :

$$(6) \quad ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2},$$

$dl$  étant l'élément de la trajectoire décrit par le point matériel dans le temps  $dt$ . Une des propriétés essentielles de la transformation de Lorentz est que la grandeur (6) est un invariant de cette transformation.

Comme  $v = \beta c = \frac{dl}{dt}$  est la vitesse du point matériel, on peut écrire :

$$(7) \quad ds = c dt \sqrt{1 - \beta^2} = c d\tau,$$

où  $d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$  est l'élément de temps propre du point matériel correspondant à l'élément  $ds$  de sa ligne d'univers,  $d\tau$  est l'intervalle de temps indiqué par une horloge entraînée par le mouvement du point matériel pendant que celui-ci se déplace de  $dl$  pendant le temps  $dt$ . La formule (7) exprime le « ralentissement des horloges ».

En Dynamique relativiste, on considère la présence du point matériel aux instants  $t_0$  et  $t_1$  aux points  $x_0 y_0 z_0$  et  $x_1 y_1 z_1$  de l'espace comme définissant deux points-événements de l'espace-temps  $P(x_0 y_0 z_0 t_0)$  et  $Q(x_1 y_1 z_1 t_1)$  et l'on cherche un principe d'action stationnaire de la forme (1), l'intégrale étant prise le long de la ligne d'univers de  $P$  en  $Q$  et la variation n'affectant pas les points  $P$  et  $Q$ .

On obtient une forme satisfaisante de la fonction de Lagrange  $\mathfrak{L}$  en posant :

$$(8) \quad \mathfrak{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

pour un point matériel libre,  $m_0$  étant une constante dite la « masse propre » qui caractérise le point matériel envisagé. Cette forme permet d'écrire :

$$(9) \quad A = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} dt = -m_0 c^2 \int_P^Q \sqrt{1 - \beta^2} dt = - \int_P^Q m_0 c ds$$

et l'invariance de l'intégrale d'action  $A$  devient évidente, ce qui est satisfaisant. De plus, si  $\beta^2$  est petit devant l'unité, on aura :

$$(10) \quad \mathfrak{L} = -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

et, comme le terme constant n'a pas d'importance puisqu'il ne donne rien lors de la variation, nous retombons sur l'expression

classique  $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2} m v^2$  de la fonction de Lagrange pour un point matériel libre comme cela devait être.

Si le point matériel est soumis à un champ dérivant d'un potentiel  $U$ , nous nous contenterons pour l'instant, par analogie avec la Mécanique classique, d'ajouter dans  $\mathcal{L}$  le terme  $-U$  au terme « cinétique »  $-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$  et nous écrirons le principe d'action stationnaire sous la forme :

$$(11) \quad \delta A = \delta \int_{p_0}^q (-m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - U) dt = 0,$$

ce qui, par le raisonnement classique, donne les équations de Lagrange :

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Il est aisément de calculer les moments de Lagrange  $p_x, p_y, p_z$  : on trouve :

$$(13) \quad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \dots$$

Si l'on définit alors le vecteur « Impulsion » ou quantité de mouvement par :

$$(14) \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

on aura :

$$(15) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla} U.$$

On peut d'ailleurs écrire  $\vec{p} = m \vec{v}$  en posant  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  ;  $m$  est appelée la « masse en mouvement » du point matériel : elle augmente avec la vitesse du point. Pour un observateur lié au point matériel,  $\beta = 0$  et  $m = m_0$  : la masse  $m$  se réduit à la masse propre  $m_0$  ou « masse au repos ». Pour  $v$  tendant vers  $c$ ,  $m$  tend vers l'infini : la masse en mouvement augmente indéfiniment quand la vitesse approche de  $c$ . La vitesse  $c$  est donc la vitesse limite de tous les mouvements corpusculaires.

**2. Énergie et Impulsion d'univers.** — Les équations générales obtenues ci-dessus nous permettent, comme en Dynamique classique, de démontrer que la quantité :

$$(16) \quad W = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \mathcal{L}$$

a pour dérivée totale par rapport au temps :

$$(17) \quad \frac{dW}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

et qu'elle reste donc constante si le champ extérieur est constant au cours du mouvement et ceci nous amène encore à considérer  $W$  comme l'énergie du point matériel.

En Mécanique classique où  $\mathcal{L} = T - U$ , nous avions trouvé  $E = T + U$ . Ici, comme nous posons  $\mathcal{L} = -m_0c^2\sqrt{1 - \beta^2} - U$  et que nous avons  $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , nous trouvons :

$$(18) \quad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + U.$$

L'énergie totale du point matériel est donc la somme de l'énergie potentielle  $U$  et du terme  $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  que nous devons maintenant interpréter. Pour  $\beta = 0$ , c'est-à-dire pour un observateur lié au mobile, ce terme se réduit à  $m_0c^2$  et représente l'énergie interne propre du mobile. Pour un observateur qui voit passer le mobile avec la vitesse  $\beta c$ , la partie cinétique de l'énergie  $W$  est  $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - mc^2$  qui représente l'énergie interne propre du mobile.

Généralisant ce résultat, Einstein est parvenu à l'énoncé suivant : *A toute masse  $m$  est toujours associée une énergie égale au produit de cette masse par le carré  $c^2$  de la vitesse de la lumière dans le vide.* Nous étudierons plus loin d'une façon plus approfondie ce principe de l'inertie de l'énergie.

On peut appeler « énergie cinétique » l'augmentation de l'énergie due au mouvement quand le mobile passe du repos à la vitesse  $\beta c$ . On pose alors :

$$(19) \quad T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0c^2 = m_0c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Si  $\beta \ll c$ , on voit que  $T$  se réduit à  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  comme cela doit être. Finalement, on peut poser :

$$(20) \quad W = m_0 c^2 + T + U = m_0 c^2 + E$$

en appelant  $E$  l'énergie  $T + U$ , somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Ainsi l'énergie totale  $W$  de la Mécanique relativiste s'obtient en ajoutant à  $E$  l'énergie interne  $m_0 c^2$  qui est caractéristique de la théorie de la Relativité. Tandis que  $E$  peut être positif ou négatif,  $W$  est toujours positif.

En chaque point de la ligne d'univers d'un point matériel, on peut définir un quadrivecteur « Vitesse d'univers » de composantes :

$$(21) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\beta^2}}, & u_2 = \frac{dy}{ds} = \frac{v_y}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \\ u_3 = \frac{dz}{ds} = \frac{v_z}{c\sqrt{1-\beta^2}}; & u_4 = \frac{d(ct)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases}$$

En multipliant ce quadrivecteur par l'invariant  $m_0 c$ , on en déduit le quadrivecteur « Impulsion d'univers »  $\vec{I} = m_0 c \vec{u}$  de composantes :

$$(22) \quad \begin{cases} I_1 = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, & I_2 = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ I_3 = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, & I_4 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{W}{c}. \end{cases}$$

On voit que les trois composantes d'espace de l'Impulsion d'univers sont les composantes de la quantité de mouvement tandis que la composante de temps est égale à l'énergie divisée par  $c$  (abstraction faite de l'énergie potentielle). Le quadrivecteur  $\vec{I}$  rassemble donc en un seul être géométrique la quantité de mouvement et l'énergie.

La partie cinétique de l'action hamiltonienne :

$$\int -m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt = - \int m_0 c ds$$

qui est un invariant, est donc la circulation du quadrivecteur  $\vec{I}$  le long de la ligne d'univers. Il est facile de vérifier qu'en vertu de l'équation (16), on peut l'écrire sous la forme :

$$- \int (W dt - p_x dx - p_y dy - p_z dz).$$

Ceci permet de la considérer, au signe près, comme l'intégrale du produit scalaire dans l'espace-temps du quadrivecteur impulsion d'univers par le quadrivecteur  $\vec{ds}$  de composantes  $dx, dy, dz, cdt$  et donc d'écrire pour le corpuscule libre :

$$(23) \quad A = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathfrak{L} dt = - \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} (\vec{I} \cdot \vec{ds}).$$

**3. Dynamique relativiste de l'électron dans un champ électromagnétique.** — Nous avons pris comme fonction de Lagrange relativiste :

$$\mathfrak{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - U,$$

mais le terme  $U$  n'est pas satisfaisant parce que l'action doit être un invariant et que  $U$  n'est pas invariant. Nous allons examiner de plus près la question en nous plaçant dans le cas d'une charge ponctuelle se déplaçant dans un champ électromagnétique (dynamique relativiste de l'électron).

Nous obtiendrons une forme relativiste satisfaisante de  $\mathfrak{L}$  en partant de la remarque suivante : l'étude relativiste des grandeurs électromagnétiques montre que le potentiel scalaire  $V$  et le potentiel vecteur  $\vec{A}$  se transforment, lors d'une transformation de Lorentz, comme les variables  $x, y, z, t$ , c'est-à-dire qu'ils forment les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps dont  $A_x, A_y, A_z$  sont les composantes d'espace et  $V$  la composante de temps. Il en résulte qu'on obtient une intégrale d'action  $A = \int \mathfrak{L} dt$  qui est invariante si l'on pose :

$$(24) \quad \mathfrak{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - \epsilon V + \frac{\epsilon}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v}),$$

où  $\epsilon$  est la charge électrique de la particule. En effet, si l'on désigne par  $\vec{\mathfrak{F}}$  le quadrivecteur d'espace-temps « Potentiel d'univers » de composantes  $A_x, A_y, A_z, V$ , on vérifie aisément que l'expression de l'action s'écrit sous la forme visiblement invariante :

$$(25) \quad A = - \int m_0 c ds - \frac{\epsilon}{c} \int (\vec{\mathfrak{F}} \cdot \vec{ds}),$$

où  $\vec{\mathfrak{F}} \cdot \vec{ds}$  est le produit scalaire d'espace-temps des deux quadrivecteurs  $\vec{\mathfrak{F}}$  et  $\vec{ds}$  formé suivant la règle :

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) = A_4 B_4 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3.$$

Les équations de Lagrange s'écrivent toujours :

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \dots$$

et, en posant  $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ , ..., elles prennent encore la forme :

$$(27) \quad \frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad \dots$$

On trouve aisément :

$$(28) \quad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\epsilon}{c} \mathbf{A}_x, \quad \dots$$

ou vectoriellement :

$$(29) \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\epsilon}{c} \vec{\mathbf{A}}.$$

Le vecteur  $\vec{p}$ , dont les composantes sont les moments de Lagrange, est donc la somme de la quantité de mouvement  $\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  et d'une sorte de « quantité de mouvement potentielle »  $\frac{\epsilon}{c} \vec{\mathbf{A}}$ .

Si l'on écrit explicitement les équations de Lagrange (27) en tenant compte des expressions du champ électrique  $\vec{h}$  et du champ magnétique  $\vec{H}$  en fonction des potentiels  $V$  et  $\vec{\mathbf{A}}$ , on obtient trois équations vectorielles de la forme :

$$(30) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) = \vec{f},$$

avec :

$$(31) \quad \vec{f} = \epsilon \left[ \vec{h} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{H} \right]$$

et l'on reconnaît dans le vecteur  $\vec{f}$  la force de Lorentz qui agit sur la charge  $\epsilon$  animée de la vitesse  $\vec{v}$ . Ainsi la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la force de Lorentz, ce qui permet de retrouver la dynamique bien connue de l'électron. On remarquera d'ailleurs que l'équation (30) n'est pas équivalente à la relation  $m \vec{v} = \vec{f}$  de Newton à cause de la variation de la masse  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  avec la vitesse.

Si l'on calcule l'énergie  $W$  par la formule (16), on trouve :

$$(32) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \epsilon V,$$

ce qui est satisfaisant.

Remarquons enfin que les grandeurs  $p_x, p_y, p_z$  et  $\frac{W}{c}$  formant les quatre composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps l'Impulsion d'univers I, défini par :

$$(33) \quad \vec{I} = m_0 c \vec{u} + \frac{\epsilon}{c} \vec{J},$$

on aura toujours :

$$\int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \mathbf{L} dt = - \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} (\vec{I} d\vec{s}).$$

**4. Les équations de Hamilton.** — Comme  $V$  dépend en général de  $x, y, z, t$ , l'énergie  $W$  est fonction de  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  et  $t$ . Mais, puisque  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  peuvent s'exprimer en fonction de  $x, y, z, p_x, p_y, p_z, t$ , on peut écrire :

$$(34) \quad W = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t).$$

En éliminant  $v_x, v_y, v_z$  entre les équations (29) et (32), on trouve après quelques calculs :

$$(35) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_{xyz} \left( p_x - \frac{\epsilon}{c} A_x \right)^2} + \epsilon V.$$

Le même raisonnement qui, en Mécanique classique, nous avait conduit des équations de Lagrange à celles de Hamilton, nous donne encore ici :

$$(36) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dots \quad \frac{dp_x}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dots$$

Les trois dernières équations sont les équations du mouvement ; les trois premières sont faciles à vérifier.

**5. Étude sommaire du principe de l'inertie de l'énergie.** — En étudiant la Dynamique relativiste du point matériel, nous avons rencontré le principe de l'inertie de l'énergie suivant lequel il existe entre l'énergie et la masse la relation générale  $W = mc^2$ . Mais cette relation n'était démontrée que pour un point matériel. Dès le début de ses travaux sur la Relativité, Einstein a été amené

à généraliser cet énoncé à un ensemble de points matériels, puis à un corps quelconque.

Considérons d'abord un ensemble de points matériels sans interactions et repérons cet ensemble dans un système de référence galiléen (numéroté 0) tel que :

$$(37) \quad \sum \frac{\vec{m}_0 \vec{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = 0,$$

la somme étant étendue à tous les points matériels. Nous dirons que, dans ce système où l'impulsion totale est nulle, l'ensemble des points matériels est globalement en repos. Ce système de référence est analogue à ce qu'est en Mécanique classique un système de référence lié au centre de gravité des particules : nous le nommerons le système de référence « propre » de l'ensemble. Dans ce système propre, nous avons pour expression de l'énergie :

$$(38) \quad W_0 = \sum \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

puisque les particules sont sans interactions.

Passons maintenant à un autre système de référence (numéroté 1) qui est animé par rapport au système 0 de la vitesse  $v = \beta c$ . L'énergie globale des particules dans ce système sera :

$$(39) \quad W_1 = \sum \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}.$$

Or, en prenant pour axe des  $z$  la direction du mouvement relatif des deux systèmes de référence 0 et 1, on aura les formules habituelles d'addition des vitesses :

$$(40) \quad v_{1x} = \frac{v_{0x} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v v_{0z}}{c^2}}, \quad v_{1y} = \frac{v_{0y} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v v_{0z}}{c^2}}, \quad v_{1z} = \frac{v_{0z} + v}{1 + \frac{v v_{0z}}{c^2}},$$

d'où l'on tire :

$$(41) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \frac{1 + \frac{v v_{0z}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \frac{1 + \frac{\beta}{c} v_{0z}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

On en déduit :

$$(42) \quad W_1 = \sum \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sum \frac{m_0 v_{0z}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Le dernier terme est nul en vertu de la définition (37) du système propre et il reste :

$$(43) \quad W_1 = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Si l'ensemble des particules se réduisait à une seule particule de masse propre  $M_0$ , on aurait :

$$(44) \quad W_1 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

On peut donc dire que le système en mouvement d'ensemble avec la vitesse  $\beta c$  se comporte comme une unité ayant une masse propre :

$$(45) \quad M_0 = \frac{W_0}{c^2},$$

formule qui exprime ici l'inertie de l'énergie.

De plus, dans le système de référence 1, la quantité de mouvement global  $\vec{g}$  des particules a pour composante  $x$  :

$$(46) \quad g_{1x} = \sum \frac{m_0 v_{1x}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \sum \frac{m_0 v_{0x}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = 0$$

et, de même,  $g_{1y} = 0$ . Pour  $g_{1z}$ , on aura :

$$(47) \quad g_{1z} = \sum \frac{m_0 v_{1z}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \left( \sum \frac{m_0 v_{0z}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} + \sum \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Le premier terme étant nul d'après la définition du système propre, on a :

$$(48) \quad g_{1z} = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \sum \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{W_0}{c^2} = \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

et cette formule montre encore l'inertie de l'énergie.

On peut remarquer que le principe de l'inertie de l'énergie détermine entièrement la valeur de la constante de l'énergie laissée arbitraire par la Mécanique classique : on ne pourrait pas, en effet, introduire une constante additive dans l'expression de l'énergie sans troubler complètement la variance.

#### 6. Extensions diverses du principe de l'inertie de l'énergie.

— Les raisonnements que nous venons de développer nous montrent que le principe de l'inertie de l'énergie est valable pour un ensemble de particules sans interaction (absence d'énergie potentielle). Elles prouvent, en particulier que, si l'on apporte de la chaleur à un gaz supposé parfait, sa masse se trouve augmentée. Nous allons maintenant montrer qu'un rayonnement d'énergie  $W$  doit aussi posséder une masse égale à  $\frac{W}{c^2}$  et que, par suite, un corps qui rayonne perd de la masse et qu'un corps qui absorbe un rayonnement acquiert un supplément de masse.

Donnons-en une démonstration due à Einstein lui-même. On sait qu'en théorie électromagnétique, on démontre qu'un rayonnement d'énergie  $W$  possède une quantité de mouvement égale à  $\frac{W}{c}$ . Donc, quand un corps émet un rayonnement d'énergie globale  $W$ , il prend un mouvement de recul avec la quantité de mouvement  $\frac{W}{c}$ . Considérons avec Einstein un cylindre creux tel que celui de la figure 1.

Imaginons que le fond de gauche du cylindre émette parallèlement à l'axe un petit train d'ondes de rayonnement total  $W$ .

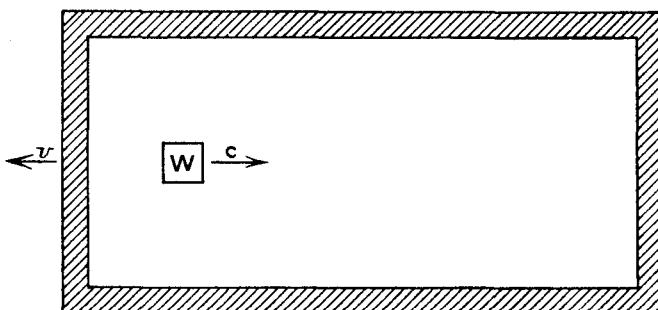


FIG. 1.

Par suite de cette émission, le cylindre va reculer vers la gauche avec une quantité de mouvement  $\frac{W}{c}$ . Si  $M$  est la masse du cylindre, sa vitesse de recul  $v$  étant petite devant  $c$ , sa quantité de mouvement sera  $Mv$  et l'on aura  $Mv = \frac{W}{c}$ . Lorsque le train d'ondes sera arrivé sur le fond de droite du cylindre que nous supposerons absorbant, il sera absorbé et, le cylindre acquérant alors la quantité de mouvement  $\frac{W}{c}$  vers la droite, son mouvement s'arrêtera. Mais, entre l'émission et l'absorption du train d'ondes, le théorème du centre de gravité ne serait pas vérifié si le rayonnement n'avait pas de masse. Soit  $x$  le déplacement global du cylindre vers la gauche pendant le temps  $t = \frac{x}{v} = \frac{Mcx}{W}$ . Pendant ce temps, le petit train d'ondes se sera déplacé vers la droite de  $X = ct = \frac{Mc^2x}{W}$ . Pour que le théorème du centre de gravité soit satisfait, il faut que le petit train d'ondes ait une masse  $\mu$  telle que :

$$(49) \quad Mx - \mu X = Mx - \mu \frac{Mc^2x}{W} = 0,$$

d'où :

$$(50) \quad \mu = \frac{W}{c^2}.$$

C'est bien l'expression du principe de l'inertie de l'énergie et l'on pourrait d'ailleurs facilement reprendre cette démonstration en se servant de la notion de photon.

Une autre généralisation du principe étudié consistera à l'étendre à des corps ayant à la fois une énergie cinétique et une énergie potentielle et à montrer qu'on a encore  $W = M_0c^2$ . Nous allons examiner comment les choses se passent en étudiant deux cas particuliers simples.

Considérons d'abord un corps macroscopique de masse  $M_1$  qui vient heurter avec une vitesse  $\beta_1c$  un autre corps de masse  $M_2$  primitivement au repos. Supposons qu'à la suite du choc, les deux corps restent collés et soient finalement animés de la vitesse commune  $\beta_2c$  dans la même direction que  $\beta_1c$ . Si nous écrivions

la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie sous la forme :

$$(51) \quad \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} + M_2 c^2 = \frac{(M_1 + M_2) c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}; \quad \frac{M_1 \beta_1 c}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = \frac{(M_1 + M_2) \beta_2 c}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}$$

qui paraîtrait naturelle, nous nous heurterions à une impossibilité, les deux équations à une seule inconnue  $\beta_2$  étant incompatibles. Mais le choc étant inélastique dégage de la chaleur et, le corps unique formé par l'accolement des deux corps primitifs étant le siège d'un échauffement, sa masse  $M'$  est supérieure à  $M_1 + M_2$  de sorte qu'il faut écrire au lieu des équations (51) :

$$(52) \quad \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} + M_2 c^2 = \frac{M' c^2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}; \quad \frac{M_1 \beta_1 c}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = \frac{M' \beta_2 c}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}$$

et ces deux équations à deux inconnues  $\beta_2$  et  $M'$  sont solubles. La première peut s'écrire :

$$(53) \quad \frac{M_1 c^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} + M_2 c^2 = M' c^2 + M' c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - 1 \right]$$

et ceci nous montre que l'énergie initiale totale des deux corps se retrouve finalement sous la forme de l'énergie  $M' c^2$  des deux corps une fois collés et de l'énergie cinétique de leur ensemble. On peut encore écrire :

$$(54) \quad M_1 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} - 1 \right) = [M' - (M_1 + M_2)] c^2 + M' c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}} - 1 \right)$$

ce qui montre que l'énergie cinétique initiale du corps 1 a servi, d'une part à communiquer à l'ensemble des deux corps la quantité de chaleur :

$$(55) \quad Q = [M' - (M_1 + M_2)] c^2$$

qui a porté l'énergie interne de l'ensemble de la valeur  $(M_1 + M_2) c^2$  à la valeur  $M' c^2$  et, d'autre part, à fournir l'énergie cinétique du corps unique final. Tout ceci est très clair.

Comme autre exemple simple, considérons un corps qui absorbe du rayonnement. Ce peut être un corps macroscopique absorbant un train d'ondes ou un système de l'échelle atomique absorbant

un photon. Soit  $M_0$  la masse propre initiale du corps supposé d'abord au repos,  $W$  l'énergie du rayonnement (ou du photon) absorbé,  $\beta c$  la vitesse de recul pris par le corps après absorption.

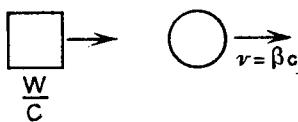


FIG. 2.

De nouveau, ici, si l'on écrivait :

$$(56) \quad M_0 c^2 + W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \frac{M_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W}{c},$$

on se heurterait à une impossibilité. Il faut donc écrire :

$$(57) \quad M_0 c^2 + W = \frac{M'_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \frac{M'_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W}{c}$$

en admettant que l'absorption du rayonnement fait augmenter la masse propre du corps.

La première équation (57) peut s'écrire :

$$(58) \quad W = (M'_0 - M_0)c^2 + M'_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right].$$

Elle montre ainsi que l'énergie apportée au corps par le rayonnement sert : 1<sup>o</sup> à augmenter l'énergie interne du corps de la quantité  $(M'_0 - M_0)c^2$  (chaleur dans le cas d'un corps macroscopique, augmentation de l'énergie interne dans le cas d'une unité microphysique) ; 2<sup>o</sup> à donner au corps, dont la masse a ainsi augmenté, son énergie finale.

Le problème inverse de l'émission d'un rayonnement (ou d'un photon) par un corps macroscopique ou microphysique se traite de même et aboutit à des conclusions analogues.

Ainsi le principe de l'inertie de l'énergie paraît bien avoir une portée tout à fait générale. On sait que l'exactitude de ce principe est entièrement confirmée par le rôle essentiel qu'il joue en Physique nucléaire pour établir les bilans d'énergie dans les réactions nucléaires.

**7. Remarque importante.** — Une des idées fondamentales qui résultent des considérations que nous venons d'exposer est la suivante : *Si un corps reçoit de l'énergie qui ne se transforme pas en énergie cinétique, sa masse augmente et s'il perd de l'énergie qui ne provient pas de son énergie cinétique, sa masse diminue.* En d'autres termes, et c'est là le point essentiel, une variation de la masse propre d'un corps correspond à de l'énergie, reçue ou perdue, qui siège à l'intérieur du corps sous forme d'énergie cachée et qui, parce qu'elle ne se manifeste pas à l'extérieur, peut être considérée comme de la chaleur interne. Nous retrouverons cette idée développée d'une façon plus précise quand nous étudierons la Thermodynamique relativiste et c'est en l'appliquant aux particules que nous parviendrons ensuite à esquisser une Thermodynamique de la particule isolée.

---

### *CHAPITRE III*

## **NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE**

**1. Introduction.** — Nous avons vu l'importance essentielle de la grandeur Action en Mécanique classique et relativiste. Cette importance a été encore soulignée par le développement de la théorie des quanta qui, dès ses débuts, a été amenée, pour quantifier les mouvements périodiques d'un corpuscule à l'échelle atomique, à écrire que l'intégrale de l'action maupertuisienne  $\int \vec{p} \cdot d\vec{l}$  pour toute une période du mouvement doit être égale à un multiple entier de la constante de Planck.

La théorie de la Relativité rattache l'importance de l'action hamiltonienne au fait que cette grandeur est invariante. C'est l'invariant fondamental de la Mécanique comme l'entropie est, nous le verrons, l'invariant fondamental de la Thermodynamique. Cette remarque nous prépare à découvrir de curieuses analogies entre l'Action et l'Entropie.

Mais, avant de préciser ces analyses, il nous faut maintenant, après avoir rappelé les principes de la Mécanique, étudier aussi certains aspects de la Thermodynamique. Dans ce qui suit, je supposerai connue la Thermodynamique classique « des principes » et je m'attacherai seulement à souligner les grandes lignes de l'interprétation statistique de la Thermodynamique.

**2. Bases de l'interprétation statistique de la Thermodynamique.** — La Mécanique statistique, développée d'abord par Clausius et Maxwell, puis plus complètement par Boltzmann et par Gibbs, a permis d'étudier les propriétés statistiques moyennes des systèmes très complexes définis par un nombre extrêmement grand de paramètres. Son grand succès a été d'être parvenue à interpréter les lois de la Thermodynamique de telle façon que

ces lois apparaissent comme dérivant du fait que la Thermodynamique envisage toujours les propriétés globales moyennes de systèmes très complexes dont la description détaillée ne saurait s'effectuer qu'à l'aide d'un nombre énorme de paramètres. Par exemple, la Thermodynamique traite des propriétés globales des gaz et, aux yeux de la Physique atomique, un gaz est formé par un nombre immense de molécules ou d'atomes, l'état de chacun de ces éléments étant décrit à l'aide de plusieurs paramètres : les lois thermodynamiques des gaz sont alors considérées par la Mécanique statistique comme le résultat global observable des mouvements incoordonnés des molécules.

Précisons un peu les conceptions qui sont à la base des théories de Boltzmann et de Gibbs. En Mécanique statistique classique, on admet que les éléments en nombre immense dont sont formés les corps matériels obéissent aux lois de la Mécanique classique de sorte que, si à un moment donné on connaissait exactement la position et la vitesse de tous ces éléments, on pourrait en principe calculer rigoureusement toute leur histoire ultérieure. Mais, en pratique, on ne peut pas observer l'évolution de toutes les molécules et l'on n'observe que des effets statistiques moyens dont la Mécanique statistique se propose de déterminer les lois. Ainsi, dans cette théorie classique, on admet, du moins en principe, l'existence d'un déterminisme sous-jacent, le caractère « probabiliste » des effets obtenus provenant uniquement de l'impossibilité d'observer autre chose que des effets globaux. L'introduction de la Dynamique relativiste à la place de celle de Newton ne change rien d'essentiel à ce qui précède, puisque cette Dynamique garde les conceptions fondamentales de la Dynamique classique.

**3. Extension-en-phase et théorème de Liouville.** — Pour développer la Mécanique statistique classique, nous envisagerons un système très complexe dont la configuration est définie par des coordonnées  $q_1, q_2, \dots, q_N$  dont le nombre sera en général considéré comme très grand.

Nous supposerons que notre système obéit aux lois de la Mécanique classique exprimées sous la forme des équations de Hamilton. Si l'énergie du système est donnée par la fonction  $H(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N, t)$ , on peut écrire les équations canoniques :

$$(1) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$N$  étant le nombre des coordonnées  $q_i$  (nombre des degrés de liberté). Dans le cas où le système est isolé ou soumis à des actions extérieures indépendantes du temps,  $H$  est constant.

L'état du système étant entièrement défini par la connaissance des  $q_i$  et des  $p_i$ , on peut représenter cet état par un point dans un espace à  $2N$  dimensions formé à l'aide des  $q_i$  et des  $p_i$ . Cet espace a reçu de Gibbs le nom « d'extension-en-phase ». Au cours du temps, le point figuratif du système décrit une trajectoire dans l'extension-en-phase.

Envisageons de très petites variations  $dq_1, \dots, dq_N ; dp_1, \dots, dp_N$  des coordonnées et des moments à partir de valeurs données. A ces variations, correspond dans l'extension-en-phase un petit élément de volume  $d\tau$ . Cet élément de volume possède deux propriétés qui lui confèrent une très grande importance. La première de ces propriétés est la suivante : *Si l'on opère un changement de variables canoniques faisant passer des variables  $q_1, \dots, q_N ; p_1, \dots, p_N$  pour lesquelles les équations (1) de Hamilton sont vérifiées à de nouvelles variables  $Q_1, \dots, Q_N ; P_1, \dots, P_N$  pour lesquelles les équations de Hamilton sont encore vérifiées (changement de variables canoniques), la valeur de l'élément  $d\tau$  reste la même.* Je ne donne pas ici la démonstration de ce théorème qui résulte de la façon dont sont définies les variables conjuguées  $p_i$  et  $q_i$  : il montre que l'élément de volume  $d\tau$  possède une signification intrinsèque, indépendante du choix des variables canoniques servant à définir le système.

Plus importante pour ce qui suit est la seconde propriété de l'élément  $d\tau$  exprimée par le « théorème de Liouville ». Pour énoncer ce théorème, nous allons considérer non plus un seul exemplaire de notre système, mais un très grand nombre d'exemplaires différents de ce même système. A un instant  $t$  chacun de ces exemplaires sera représenté dans l'extension-en-phase par un certain point et, à l'intérieur de l'élément  $d\tau$  qui nous intéresse, il y aura un certain nombre de points représentatifs. Fixons notre attention sur les points représentatifs qui se trouvent ainsi à l'intant  $t$  dans l'élément  $d\tau$ . Au cours du temps, ces points vont se déplacer et, à un instant ultérieur  $t'$ , on retrouvera par continuité ces mêmes points représentatifs dans un autre élément  $d\tau'$  de l'extension-en-phase, élément qui contiendra tous ces points représentatifs et ceux-là seulement. Le théorème de Liouville nous dit alors que  $d\tau'$  est égal à  $d\tau$ . Naturellement,  $d\tau'$  peut avoir une forme très

différente de  $d\tau$ , être par exemple un long ruban replié sur lui-même, alors que  $d\tau$  était un petit cube, mais les *volumes* des deux éléments sont les mêmes.

On peut démontrer le théorème de Liouville en comparant le mouvement des points représentatifs dans l'extension-en-phase au mouvement des molécules d'un fluide dans un espace à  $2N$  dimensions. Le théorème exprime, en effet, à ce point de vue qu'un nombre donné de molécules du fluide occupe toujours le même volume dans l'espace à  $2N$  dimensions c'est-à-dire que le fluide se comporte comme un fluide incompressible. Or la condition d'incompressibilité d'un fluide, c'est que la divergence de sa vitesse soit nulle en tout point. Ici la vitesse du fluide dans l'espace à  $2N$  dimensions a  $2N$  composantes qui sont  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N; \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N$  et la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$(2) \quad \sum_1^N \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0.$$

Or, cette équation est visiblement satisfaite en vertu des équations (1) de Hamilton. Le théorème de Liouville en résulte.

Le théorème de Liouville montre qu'une répartition uniforme des points représentatifs des exemplaires du système considéré dans l'extension-en-phase se maintient indéfiniment. Il est facile de comprendre que cela incite à prendre l'élément d'extension-en-phase  $d\tau$  comme mesure de la probabilité pour que le système se trouve à un instant donné  $t$  représenté par un point représentatif situé dans  $d\tau$ . Néanmoins, cette hypothèse appelle quelques remarques.

Une première remarque, c'est qu'il arrive souvent que l'évolution d'un système mécanique admette des intégrales premières, c'est-à-dire qu'au cours de cette évolution certaines fonctions des  $q$  et des  $p$  restent constantes. Ainsi dans le cas usuel d'un système isolé, l'énergie  $H(q, p)$  reste constante. Quand il y a des intégrales premières, le point représentatif est assujetti à se mouvoir sur certaines multiplicités à moins de  $2N$  dimensions de l'extension-en-phase (par exemple sur une multiplicité à  $2N - 1$  dimensions s'il y a une seule intégrale première). Ainsi, pour un système isolé, le point représentatif devra se déplacer sur l'hypersurface  $H = E = \text{Cte}$  ou, plus exactement, comme

l'énergie n'est jamais connue qu'avec une incertitude  $dE$ , il est toujours contenu dans une couche très mince comprise entre les surfaces  $H = E$  et  $H = E + dE$  : ce sont seulement les éléments de volume de cette couche qu'il est naturel de considérer comme mesures de probabilités.

Une autre remarque essentielle est que le théorème de Liouville ne permet pas à lui seul de démontrer rigoureusement qu'on peut prendre l'élément  $d\tau$  de l'extension-en-phase comme mesure de la probabilité de la présence du point représentatif dans cet élément, bien qu'assurément cette hypothèse soit suggérée par le théorème. Pour obtenir une justification satisfaisante, il faut adjoindre un postulat qui est connu sous le nom « d'hypothèse ergodique ». En voici l'énoncé : *Soit un système admettant l'énergie comme seule intégrale première uniforme et ayant un état initial d'énergie comprise entre  $E$  et  $E + dE$  : le point représentatif du système se déplace dans l'extension-en-phase en restant dans la couche comprise entre les hypersurfaces  $H = E$  et  $H = E + dE$ . Nous « admettons » alors qu'au bout d'un temps suffisamment long, le point représentatif aura « balayé uniformément » toute la couche en question.* On peut énoncer ce postulat sous une forme un peu moins stricte nommée « hypothèse quasi ergodique » qui se contente d'affirmer qu'au cours de son déplacement, le point représentatif passe aussi près qu'on veut de tout point de la couche en question. Si l'une ou l'autre de ces deux hypothèses est exacte, la probabilité de la présence du point représentatif dans un élément d'extension-en-phase est proportionnelle à la fraction d'un temps très long  $T$  que le système passe dans cet élément : on peut donc alors confondre les moyennes prises dans l'extension-en-phase avec les moyennes prises dans le temps.

Malheureusement, les hypothèses ergodiques ou quasi ergodiques ne sont certainement pas toujours exactes : il existe des cas simples, comme celui des mouvements périodiques, où elles sont en défaut. On peut cependant admettre que ces cas exceptionnels ont une probabilité évanouissante. Néanmoins les hypothèses ergodiques ou quasi ergodiques sont très difficiles à justifier rigoureusement dans la théorie classique et il semble bien que des difficultés analogues subsistent dans les théories quantiques. Boltzmann a introduit une hypothèse du « chaos moléculaire » qui invoque le caractère aléatoire des perturbations subies par le mouvement des molécules par suite de leurs chocs continuels. Cette hypothèse sur laquelle

nous reviendrons joue un rôle analogue aux hypothèses ergodiques. Nous aurons à revenir sur toute cette question.

Sans nous arrêter aux difficultés qui viennent d'être signalées, nous admettrons qu'on peut adopter comme mesure de la probabilité relative des états d'un système représentés par l'élément  $d\tau$  de son extension-en-phase la grandeur même de cet élément.

**4. Entropie et probabilité. Relation de Boltzmann.** — La grandeur la plus caractéristique et la plus mystérieuse quant à sa signification physique introduite par le développement de la Thermodynamique classique était certainement l'entropie, cette grandeur qui a toujours une tendance à augmenter dans toutes les transformations physiques spontanées. Le grand succès de la Thermodynamique statistique a été de parvenir à interpréter l'entropie comme une grandeur mesurant le degré de probabilité de l'état du corps considéré. Il est d'ailleurs aisé de déterminer la nature de la relation fonctionnelle entre l'entropie d'un corps et la probabilité de son état. En effet, si l'on considère deux systèmes sans interactions mutuelles dont les entropies sont  $S_1$  et  $S_2$ , la Thermodynamique nous apprend que l'entropie du système global formé par l'ensemble des deux systèmes est  $S_1 + S_2$ ; d'autre part, si  $P_1$  est la probabilité de l'état du premier système et  $P_2$  celle de l'état du second système, la probabilité de l'état global du système 1 + 2 est égal à  $P_1 P_2$  d'après le théorème des probabilités composées. Si donc la relation entre l'entropie et la probabilité est de la forme  $S = f(P)$ , on devra avoir :

$$(3) \quad f(P_1) + f(P_2) = f(P_1 P_2).$$

En différentiant (3) par rapport à  $P_1$ , on a :

$$f'(P_1) = P_2 f'(P_1 P_2),$$

puis en différentiant par rapport à  $P_2$ , on a :

$$f'(P_1 P_2) + P_1 P_2 f''(P_1 P_2) = 0,$$

relation de la forme :

$$f'(x) + x f''(x) = 0,$$

d'où l'on tire par double intégration  $f(x) = C \log x + D$ . La relation fonctionnelle entre l'entropie et la probabilité est donc :

$$(4) \quad S = k \log P + \text{Cte}$$

qu'on peut écrire en normalisant convenablement la probabilité :

(5)

$$S = k \log P.$$

C'est la fameuse formule de Boltzmann et, comme nous le verrons, pour établir l'accord avec la Thermodynamique classique, il faut adopter pour la constante  $k$ , appelée « constante de Boltzmann », la valeur numérique :

$$k = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K} = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}.$$

Comment doit-on dans la formule de Boltzmann évaluer la probabilité  $P$  ? La définition la plus naturelle consisterait à dire que  $P$  est égale au nombre des complexions élémentaires qui réalisent l'état considéré du corps divisé par le nombre total de toutes les complexions possibles. Mais ce dernier nombre est difficile à évaluer et son intervention n'ajouterait qu'une constante dans l'expression de l'entropie. On a donc convenu de prendre pour  $P$  le nombre des complexions qui réalisent l'état considéré sans diviser par le nombre total des complexions possibles, ce qui revient à fixer d'une certaine manière, qui s'est montrée adéquate, la constante arbitraire de l'entropie.

Comme valeur de  $P$ , on prendra donc, en accord avec le théorème de Liouville une valeur proportionnelle au volume d'extension-en-phase correspondant à l'état du système. Ici encore, on peut hésiter entre diverses possibilités. Considérons un système dans un état d'énergie  $E$ . L'hypersurface  $E = \text{Cte}$  est fermée et limite dans l'extension-en-phase un certain volume  $\Phi(E)$ . On peut prendre  $\Phi(E)$  comme probabilité de l'état  $E$ . Une seconde définition qui peut paraître plus naturelle consiste à regarder l'énergie comme n'étant définie qu'à  $dE$  près et à remarquer que le point représentatif du système se déplace alors dans une couche comprise entre les hypersurfaces  $E$  et  $E + dE$  dont le volume est évidemment  $\frac{\partial \Phi}{\partial E} dE$ , ce qui conduit à poser  $P = \frac{\partial \Phi}{\partial E}$ . Enfin, une troisième définition possible part du fait que, pour une énergie totale donnée, la répartition des énergies individuelles entre les divers constituants du système peut varier et que l'une de ces répartitions est la plus probable, correspondant à un plus grand domaine de l'extension-en-phase que les autres : on peut alors définir  $P$  en ne tenant compte

que des complexions d'énergie totale  $E$  qui correspondent à cette répartition la plus probable.

Les trois définitions de  $P$  (et, par suite, de  $S$ ) que nous venons de rappeler ne sont pas équivalentes et, dans le cas des systèmes à un petit nombre de degrés de liberté (<sup>1</sup>), elles peuvent donner des résultats très différents. Or, il se trouve, et c'est là une circonstance remarquable que, pour les systèmes à un très grand nombre de degrés de liberté usuellement envisagés par la thermodynamique, les trois définitions sont pratiquement équivalentes pour l'application de la formule de Boltzmann, ce qui dispense en ce cas de justifier un choix plutôt qu'un autre. Nous n'insisterons pas sur la démonstration de cette « insensibilité de la formule de Boltzmann » qu'on trouvera dans beaucoup d'ouvrages classiques.

**5. Température et équilibre thermique.** — En Thermodynamique classique, on définit la variation de l'entropie par la formule :

$$(6) \quad dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dE + d\mathcal{E}}{T},$$

où  $T$  est la température absolue,  $dQ$  la quantité de chaleur reçue par le corps,  $dE$  la variation de son énergie interne,  $d\mathcal{E}$  le travail qu'il fournit à l'extérieur. Si le corps ne fournit pas de travail, on a  $dS = \frac{dE}{T}$ . Les formules précédentes ne sont valables que si la transformation est « réversible ».

Comme l'entropie dépend généralement non seulement de l'énergie  $E$ , mais aussi d'autres paramètres (tels que le volume  $V$  occupé par le corps), on conclut de la relation précédente qu'on peut définir la température absolue d'un corps par la formule :

$$(7) \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}.$$

Si deux corps 1 et 2 sont en contact et peuvent échanger de la chaleur (mais pas de travail mécanique macroscopique), les températures des deux corps tendent à s'égaliser et, quand l'équilibre thermique est atteint, on a :

$$(8) \quad \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_1 = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_2.$$

(<sup>1</sup>) Mais, en ce cas, il est douteux qu'on puisse vraiment parler de l'entropie du corps.

Considérons cette question de l'équilibre thermique du point de vue de la Mécanique statistique. Le système global  $1 + 2$  étant supposé isolé, son énergie totale est constante, mais elle peut se répartir d'une façon variable entre les deux systèmes  $1$  et  $2$ . La probabilité de l'état global  $1 + 2$  où le corps  $1$  a l'énergie  $E_1$  et le corps  $2$  l'énergie  $E_2$  est :

$$(9) \quad P = P_1(E_1) \cdot P_2(E_2) = P_1(E_1) \cdot P_2(E - E_1).$$

L'état le plus probable du système global  $1 + 2$  correspond au maximum de  $P$  défini par la relation :

$$\frac{\partial \log P}{\partial E_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \log P_1}{\partial E_1} + \frac{\partial \log P_2}{\partial E_1} = 0.$$

Comme  $dE_2 = -dE_1$ , on a donc :

$$(10) \quad \frac{\partial \log P_1}{\partial E_1} = \frac{\partial \log P_2}{\partial E_2}.$$

En multipliant par  $k$  et en introduisant la relation de Boltzmann, il vient :

$$(11) \quad \frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}$$

et cette équation traduit l'égalité des températures des deux corps au moment de l'équilibre. On peut donc dire que la température d'un corps est reliée à la probabilité  $P_m$  de son état le plus probable par la relation :

$$(12) \quad \frac{1}{kT} = \frac{\partial \log P_m}{\partial E},$$

ce qui correspond à la troisième définition de l'entropie par la formule de Boltzmann qui a été discutée plus haut.

On peut remarquer que la Mécanique statistique, allant plus loin que la Thermodynamique classique, peut définir l'entropie d'un état quelconque par la relation  $S = k \log P$ , *même si cet état n'est pas un état d'équilibre de probabilité maximale*. Cette définition générale de l'entropie coïncide avec celle de l'entropie thermodynamique pour les états de probabilité maximale : elle fournit alors la valeur de l'entropie thermodynamique classique qui peut, pour les systèmes à un nombre énorme de paramètres envisagés par la Thermodynamique classique, être exprimée à l'aide de l'une quelconque des trois définitions de  $P$  précédemment signalées.

Mais la formule de Boltzmann permet aussi d'étudier les fluctuations de l'état d'un corps autour de son état le plus probable. Nous aurons à revenir ultérieurement sur la théorie des fluctuations ainsi obtenue.

**6. La répartition canonique de Boltzmann-Gibbs.** — Considérons à nouveau un système formé par la réunion de deux corps 1 et 2 : nous les supposerons très faiblement couplés et ne pouvant échanger entre eux que de la chaleur. Le corps 1 pourra avoir un nombre quelconque (petit ou grand) de degrés de liberté, mais nous supposerons essentiellement que le corps 2 est un « thermostat », c'est-à-dire un énorme réservoir de chaleur (énergie moléculaire incoordonnée) de telle façon que le corps 1 n'ait qu'une chance tout à fait négligeable de lui prendre une fraction appréciable de son énergie. En d'autres termes, si  $E_2^{(m)}$  est l'énergie du thermostat quand il est dans l'état d'équilibre de probabilité maximale avec le corps 1, on peut admettre que, pour tous les états pratiquement réalisables, la différence  $E_2 - E_2^{(m)}$  est toujours extrêmement petite devant  $E_2^{(m)}$ . La probabilité de l'état du corps 2 étant  $P_2$ , on peut toujours écrire :

$$(13) \quad \log P_2 = \log P_2^{(m)} + \frac{\partial \log P_2^{(m)}}{\partial E} (E_2 - E_2^{(m)}) + \dots$$

Les hypothèses faites sur la nature du thermostat nous permettent alors de négliger les termes non écrits qui sont d'ordre supérieur en  $E_2 - E_2^{(m)}$  et, en appelant  $T$  la température absolue du thermostat, on aura :

$$(14) \quad \log P_2 = \log P_2^{(m)} + \frac{1}{kT} (E_2 - E_2^{(m)}),$$

d'où :

$$(15) \quad P_2 = P_2^{(m)} e^{\frac{E_2 - E_2^{(m)}}{kT}}.$$

Mais, si  $E_1^{(m)}$  désigne l'énergie du corps 1 quand il est dans son état d'équilibre le plus probable avec le thermostat, on a :

$$E_2 - E_2^{(m)} = E_1^{(m)} - E_1$$

par la conservation de l'énergie. Comme nous avons supposé faible l'interaction du corps 1 avec le thermostat, la probabilité

de l'état où le thermostat a l'énergie  $E_2$  et le corps  $1$  l'énergie  $E_1$  est :

$$(16) \quad P = P_1(E_1) \cdot P_2(E_2) = P_1(E_1) \cdot P_2^{(m)} e^{\frac{E_1^{(m)} - E_1}{kT}}.$$

La formule précédente peut encore s'écrire sous la forme :

$$(17) \quad P = P(E_1) e^{\frac{F - E_1}{kT}},$$

où  $P(E_1)$  est le nombre total des configurations du corps  $1$  ayant l'énergie  $E_1$  quand on ne lui impose aucune liaison avec le thermostat (probabilité *a priori*).

Nous avons ainsi obtenu la « loi de distribution canonique » de Gibbs qui apparaît comme valable dans un système en contact thermique avec un thermostat qui fixe la température  $T$ .

La constante  $F$  figurant cette loi de distribution canonique se calculera en écrivant :

$$(18) \quad \sum_i P(E_i) e^{\frac{F - E_i}{kT}} = 1,$$

la sommation étant étendue à tous les états possibles du corps formant par hypothèse une suite discontinue (si la suite étant continue, on remplacerait la sommation  $\sum_i$  par une intégrale sur  $E$ ).

De l'équation précédente, on tire :

$$(19) \quad e^{-\frac{F}{kT}} = \sum_i P(E_i) e^{-\frac{E_i}{kT}} = Z,$$

d'où :

$$(20) \quad F = -kT \log Z.$$

La somme (ou intégrale)  $Z$  définie par le second membre de (19) a été nommée par Planck « la somme d'états ». Elle joue un rôle essentiel dans les calculs de la Thermodynamique statistique.

Remarquons que le corps  $1$  peut être constitué par une seule molécule : il en résulte que, pour une seule molécule, la notion de température a un sens quand cette molécule se trouve en contact énergétique avec un thermostat à température  $T$  qui lui impose sa température.

**7. Remarques importantes au sujet de la loi de distribution canonique.** — Dans le chapitre IV de son fameux Ouvrage *Elementary principles of statistical Mechanics*, Willard Gibbs a écrit la loi de distribution canonique sous la forme :

$$(21) \quad P = e^{\frac{\psi - E}{\theta}},$$

ce qui revient à poser, dans la formule (17),  $kT = \theta$  et  $P(E_1)e^{\frac{F}{\theta}} = e^{\frac{\psi}{\theta}}$ . Il a ensuite introduit ce qu'il nomme « l'exposant de probabilité »  $\eta$  en posant :

$$(22) \quad \eta = \log P, \quad P = e^\eta,$$

puis il a montré que  $\eta$  a, à une constante additive près, les propriétés de l'entropie thermodynamique du corps 1 *changée de signe* <sup>(1)</sup>. On peut alors écrire :

$$(23) \quad \eta = -\frac{S_1}{k} + \text{Cte}; \quad P = e^\eta = \text{Cte } e^{-\frac{S_1}{k}}.$$

Or le signe — dans l'exposant de la dernière formule pourrait surprendre, car il pourrait paraître en opposition avec la formule de Boltzmann (car on aurait tendance à écrire  $P = \text{Cte } e^{+\frac{S_1}{k}}$ ). Ceci a donné lieu à quelques confusions qui ont parfois été commises dans des ouvrages très sérieux. C'est ce changement de signe qui explique d'apparentes anomalies dont je parlerai plus loin.

Le changement de signe que nous venons de constater est cependant facile à expliquer, car la formule  $P(E) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ , dont nous sommes partis nous donne  $P = \text{Cte } e^{\frac{S_1}{k}}$ , d'après la formule de Boltzmann appliquée au thermostat. Mais le corps 1 et le thermostat formant par hypothèse un système isolé de toute action extérieure où les échanges d'énergie entre les deux constituants sont des processus supposés réversibles, il doit y avoir conservation de l'entropie totale, ce qui donne :

$$S_1 + S_2 = S_1^{(m)} + S_2^{(m)} = \text{Cte}$$

et, par suite,  $P = \text{Cte } e^{-\frac{S_1}{k}}$ , ce qui est bien en accord avec la formule (23) de Gibbs.

<sup>(1)</sup> On suppose que le corps 1 a un nombre de degrés de liberté assez grand pour qu'on puisse lui attribuer une entropie.

La remarque qui précède jouera un rôle important dans les considérations que nous développerons ultérieurement sur l'analogie entre l'Action et l'Entropie. Nous allons y ajouter d'autres remarques.

Pour le système formé du corps 1 et du thermostat en contact énergétique faible, nous avons trouvé  $P = P_1 \times P_2$ , avec :

$$(24) \quad P_2 \simeq P_2^{(m)} e^{\frac{E_1^{(m)} - E_1}{kT}},$$

$P_2$  devant être égal à  $e^{\frac{S_1}{k}}$ , d'après la formule de Boltzmann. La formule (24) ne donne qu'une valeur approchée parce que, pour l'obtenir, nous avons négligé les termes d'ordres supérieurs en  $E_2 - E_2^{(m)}$ . Nous pouvons poser :

$$(25) \quad P_2 \simeq e^{\frac{F - E_1}{kT}}; \quad P \simeq P_1 e^{\frac{F - E_1}{kT}}$$

et nous retrouvons la loi de distribution canonique.

Si le corps 1 est complexe et possède un grand nombre de degrés de liberté, on a par la définition de la somme d'états Z :

$$(26) \quad Z = \sum_i P_i(E_i) e^{-\frac{E_i}{kT}} = e^{-\frac{F}{kT}},$$

d'où, puisque la probabilité de l'état le plus probable de 1 est *en ce cas* infiniment plus grande que celle de tous les autres états possibles :

$$(27) \quad P_1^{(m)} e^{-\frac{E_1^{(m)}}{kT}} \simeq e^{-\frac{F}{kT}}.$$

Et l'on en tire, puisque alors on peut introduire sans difficultés la notion d'entropie du corps 1, la relation  $P_1^{(m)} = e^{-\frac{S_1^{(m)}}{k}}$  d'après la formule de Boltzmann de sorte que la formule (27) nous donne :

$$(28) \quad F \simeq E_1^{(m)} - TS_1^{(m)}.$$

Donc, pour un corps ayant un très grand nombre de degrés de liberté maintenu à la température T, F est l'énergie libre de la Thermodynamique classique. Mais, si l'on porte la valeur  $F = E_1 - TS_1$  dans la deuxième formule (25), on trouve  $P \sim e^{-\frac{S_1}{k}}$ , ce qui semble

en contradiction avec la formule de Boltzmann. C'est la difficulté que nous avions déjà rencontrée plus haut et que nous avons levée en remarquant  $S_1 + S_2 = \text{Cte}$  de sorte qu'on retrouve pour  $P_2$  la formule de Boltzmann  $P_2 \sim e^{\frac{S_2}{k}}$ , ce qui est satisfaisant.

La proportionnalité de l'exposant de l'exponentielle dans la loi canonique à  $S_2$  et à  $-S_1$  est valable, quel que soit le corps 1. Mais, dans le cas où le corps 1 possède un grand nombre de degrés de liberté, nous avons :

$$(29) \quad P \simeq P_1 e^{\frac{S_1}{k}} = e^{\frac{S_1 + S_2}{k}} = e^{\frac{S_1^{(m)} + S_2^{(m)}}{k}} = e^{\frac{S_m}{k}}$$

puisque alors  $P_1$  est égal à  $e^{\frac{S_1}{k}}$  d'après la formule de Boltzmann.  $S_m$  étant ici l'entropie de l'état de probabilité maximale du système 1 + 2, nous avons :

$$(30) \quad P \simeq P^{(m)}.$$

Ceci veut dire que, pour le système 1 + 2, l'état de probabilité maximale est pratiquement le seul réalisé, ce qui est satisfaisant étant donné l'hypothèse que le corps 1 est très complexe.

**8. Applications de la loi de distribution canonique.** — Considérons d'abord le cas où le corps 1 est un corps très complexe défini par un très grand nombre de paramètres (par exemple, l'ensemble des molécules d'un gaz). Nous avons montré ci-dessus qu'en ce cas  $F$  est égal à  $E - TS$  et coïncide avec le potentiel thermodynamique ou énergie libre du corps. Mais envisageons ensuite le cas opposé où le corps 1 est défini par un petit nombre de paramètres. La loi de distribution canonique est toujours valable, mais  $F$  ne représente plus l'énergie libre.

Considérons, par exemple, une molécule d'un gaz : elle est définie par un petit nombre de paramètres ; mais, comme on peut la considérer comme se trouvant en contact énergétique avec un thermostat formé par l'ensemble de toutes les autres molécules du gaz supposé en équilibre thermique, on peut lui appliquer la loi de distribution canonique. Or la probabilité *a priori* pour que les coordonnées et les moments de cette molécule aient des valeurs comprises dans les intervalles  $x \rightarrow x + dx, \dots, p_z \rightarrow p_z + dp_z$  est, d'après le théorème de Liouville, égale à l'élément :

$$d\tau = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

de l'extension-en-phase de la molécule. D'après la loi de distribution canonique, la probabilité pour que la molécule considérée comme en contact avec le reste du gaz formant thermostat à température  $T$  ait son point représentatif dans l'élément  $d\tau$  de son extension-en-phase est  $C e^{-\frac{E}{kT}} d\tau$ . Il en résulte que le nombre des molécules du gaz ayant leurs coordonnées comprises entre  $x$  et  $x + dx$ , ..., et leurs moments de Lagrange compris entre  $p_x \rightarrow p_x + dp_x$ , ..., est :

$$(31) \quad dn = C e^{-\frac{E}{kT}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = C m^3 e^{-\frac{E}{kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z,$$

avec :

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

La constante  $C$  se détermine en écrivant que  $\int dn = N$ ,  $N$  étant le nombre total des molécules du gaz. La formule (31) constitue la célèbre loi de distribution des vitesses entre les molécules d'un gaz due à Maxwell.

Comme on peut dans l'extension-en-moment réunir les éléments  $dp_x dp_y dp_z$  qui forment une couche sphérique entre les sphères :

$$\frac{p^2}{2m} = E \quad \text{et} \quad \frac{(p + dp)^2}{2m} = E + dE,$$

couche dont le volume est égal à :

$$4\pi p^2 dp = 2\pi(2m)^{3/2} \sqrt{E} dE,$$

on trouve pour le nombre des molécules d'un gaz dont l'énergie est comprise entre  $E$  et  $E + dE$  par unité de volume :

$$(32) \quad dn_v = C e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE.$$

Si le gaz se trouve placé dans un champ de force qui agit sur les molécules, il faut tenir compte de l'énergie potentielle dans l'expression de  $E$ . Par exemple, si le gaz est placé dans le champ de la pesanteur, on aura :

$$E = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

( $z$  étant l'altitude de la molécule) et, si l'on intègre sur  $dp_x dp_y dp_z$ , l'expression de  $dn$ , on trouvera que la densité du gaz varie avec l'altitude  $z$  comme  $e^{-\frac{mgz}{kT}}$ . C'est la fameuse « loi barométrique »

de Laplace qui est applicable aux molécules d'un gaz et également aux grains d'une émulsion en suspension dans un liquide. C'est en l'appliquant dans ce dernier cas que Jean Perrin a pu, dans ses célèbres expériences, il y a un demi-siècle, déterminer la valeur du nombre d'Avogadro ( $N = 6,06 \cdot 10^{23}$ ).

Pour montrer à nouveau l'importance d'une remarque faite au paragraphe précédent, considérons la  $i^{\text{ème}}$  molécule d'un gaz. En contact avec l'ensemble du gaz formant thermostat à la température  $T$ , elle a une probabilité  $P = C e^{-\frac{E}{kT}} d\tau$  d'avoir son point représentatif dans l'élément  $d\tau$  de son extension-en-phase. S'il était permis de lui attribuer une entropie  $S_i$ , celle-ci serait donnée d'après la formule (23) par  $S_i = -k \log P$ . Même si l'introduction de l'entropie  $S_i$  d'une molécule semble discutable, on admettra sans doute plus aisément que l'entropie thermodynamique de l'ensemble des molécules du gaz est donnée par la valeur moyenne de  $S_i$ , c'est-à-dire que :

$$(33) \quad S = \bar{S}_i = -k \sum_i P \log P.$$

Comme ici  $P$  est une fonction continue des variables canoniques  $x, \dots, p_z$ , on peut écrire :

$$(34) \quad S = -k \int f \log f d\tau.$$

C'est une formule classique depuis Boltzmann en théorie cinétique des gaz. Mais si, entraînés par la relation de Boltzmann, nous avions posé  $S_i = k \log P$ , nous aurions trouvé  $S = k \int f \log f d\tau$  avec une faute de signe.

A l'aide des formules précédentes, nous pourrions trouver facilement l'expression de toutes les grandeurs qui caractérisent les gaz parfaits. Nous nous contenterons de noter qu'on pourra ainsi retrouver la loi de Mariotte-Gay-Lussac sous la forme :

$$(35) \quad pV = NkT,$$

où  $N$  est le nombre des molécules d'un gaz qui occupe le volume  $V$  à la température  $T$  sous la pression  $p$ . En appliquant cette formule à la molécule-gramme du gaz parfait pour laquelle le nombre  $N$  des molécules est égal au nombre d'Avogadro  $N$ , on peut écrire en posant  $R = kN$ ,

$$(36) \quad pV = RT,$$

où  $R$  est la « constante des gaz » rapportée à la molécule-gramme dont la valeur expérimentale bien connue est  $R = 8,3 \cdot 10^7$  ergs/ $^{\circ}\text{K}$ . On en tire :

$$(37) \quad k = \frac{R}{N} = \frac{8,3 \cdot 10^7}{6,06 \cdot 10^{23}} = 1,37 \cdot 10^{-16}$$

et c'est bien la valeur de la constante de Boltzmann que nous avions annoncée précédemment.

**9. Théorème de l'équipartition de l'énergie.** — Dans l'expression de l'énergie d'une molécule ponctuelle, les moments de Lagrange figurent en Mécanique classique par leurs carrés. Si un point matériel est rappelé vers une position d'équilibre prise comme origine des coordonnées par une force proportionnelle à l'elongation, les coordonnées et les moments figurent par leurs carrés dans l'expression de l'énergie :

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{K}{2} (x^2 + y^2 + z^2).$$

D'une façon générale, on dit qu'une variable canonique est un « momentoïde » si elle figure par son carré dans l'expression de l'énergie. L'exemple le plus simple de momentoïde est un moment de Lagrange pour une particule libre et de là vient le nom de momentoïde.

Le théorème de l'équipartition de l'énergie peut alors s'énoncer en disant : *Si l'une des variables canoniques d'un système est un momentoïde, quand le système est en équilibre thermique à la température  $T$ , le terme correspondant dans l'expression de l'énergie a pour valeur moyenne  $\frac{1}{2} kT$ . Ainsi l'énergie se partage en moyenne également entre tous les momentoïdes et, si toutes les variables sont des momentoïdes, elle se partage également en moyenne entre tous les degrés de liberté.* D'où le nom du théorème.

Supposons par exemple que la variable  $q_k$  soit un momentoïde et démontrons le théorème pour cette variable. L'énergie du système est de la forme :

$$E = \alpha q_k^2 + f(q_1 \dots q_{k-1}, q_{k+1} \dots p_1 \dots p_N).$$

La valeur moyenne du terme  $q_k^2$  dans l'équilibre thermique à la température T sera :

$$(38) \quad \overline{\alpha q_k^2} = \frac{C \int_{2N} \dots \int \alpha q_k^2 e^{-\frac{\alpha q_k^2}{kT}} e^{-\frac{f}{kT}} dq_1 \dots dp_N}{C \int_{2N} \dots \int e^{-\frac{\alpha q_k^2}{kT}} e^{-\frac{f}{kT}} dq_1 \dots dp_N}.$$

En divisant en haut et en bas par le facteur :

$$C \int_{2N-1} \dots \int e^{-\frac{f}{kT}} dq_1 \dots dq_{k-1}, dq_k \dots dp_N$$

et en posant  $u = \sqrt{\frac{\alpha}{kT}} q_k$ , on trouve :

$$(39) \quad \overline{\alpha q_k^2} = kT \frac{\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du}{\int_0^\infty e^{-u^2} du} = \frac{1}{2} kT.$$

C. Q. F. D.

Naturellement, la même démonstration s'applique à un momentoïde du type  $p_k$ .

En Mécanique statistique classique, il arrive souvent que toutes les variables canoniques soient des momentoïdes et il y a alors équpartition de l'énergie entre tous les degrés de liberté. Le théorème de l'équpartition de l'énergie a donné en Mécanique statistique classique un grand nombre de résultats exacts, mais il a conduit aussi à des échecs très significatifs qui ont rendu nécessaire l'introduction des quanta en Physique. Nous n'insisterons pas ici sur ces points bien connus.

**10. La Mécanique statistique relativiste.** — La Mécanique relativiste peut, nous l'avons vu, se développer à partir d'un principe d'action stationnaire et elle aboutit à des équations canoniques de Hamilton du type habituel :

$$(40) \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Elle permet donc d'introduire l'extension-en-phase et de démontrer le théorème de Liouville qui est une conséquence des équations

de Hamilton. On peut aussi introduire la relation de Boltzmann entre l'entropie et la probabilité et choisir l'une ou l'autre des trois définitions envisagées précédemment pour le nombre  $P$  des complexions correspondant à un état d'énergie donnée.

Rien ne sera changé non plus dans la définition de la température, ni dans la distribution canonique qui donne la probabilité des états d'un système en contact avec un thermostat, ni dans l'identification de la grandeur  $F$  avec l'énergie libre, quand ce système a un grand nombre de degrés de liberté.

Toutes les conclusions précédemment obtenues restent donc valables tant qu'on ne fait pas intervenir l'expression explicite de la fonction de Lagrange  $\mathcal{L}$ , des moments  $p_k$  qui s'en déduisent et de la fonction hamiltonienne donnant l'énergie en fonction des  $q_k$  et des  $p_k$ . Mais dans les applications où l'on a à faire intervenir l'expression des moments  $p_k$  ou la fonction hamiltonienne, il en est différemment. Nous en donnerons un exemple en reprenant le cas de la loi de Maxwell.

En considérant une molécule d'un gaz comme en contact avec un thermostat formé par le reste du gaz, la loi de distribution canonique nous a conduit pour le nombre des molécules dont le point figuratif est dans l'élément  $d\tau$  de l'extension-en-phase de la molécule l'expression :

$$dn = C e^{-\frac{E}{kT}} d\tau.$$

Cette formule reste valable, mais comme ici nous n'avons plus :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

nous ne pouvons plus en tirer la formule de distribution en énergie (32).

Ici, en effet, nous avons pour l'énergie et la quantité de mouvement les relations :

$$(41) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad W^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

Nous pourrons donc remplacer, dans l'expression de  $dn$ ,  $E$  par  $W$ , puisque  $W = E + m_0 c^2$  et que remplacer  $E$  par  $W$  revient seulement à modifier la constante  $C$ . De plus, à une variation  $dW$  de  $W$  correspond une variation  $dp$  de  $p$  telle que :

$$W dW = p c^2 dp.$$

Une couche sphérique de l'extension-en-moment a donc pour volume :

$$4\pi \frac{W}{c^2} \sqrt{\frac{W^2}{c^2} - m_0^2 c^2} dW.$$

Par suite, le nombre des molécules par unité de volume dont l'énergie totale  $W$  est comprise entre  $W$  et  $W + dW$  sera :

$$(42) \quad dn_w = C e^{-\frac{W}{kT}} W \sqrt{\frac{W^2}{c^2} - m_0^2 c^2} dW.$$

Si toutes les molécules (sauf quelques-unes en très petit nombre) ont une vitesse très inférieure à  $c$  (ce qui est usuellement le cas pour tous les gaz matériels), on peut retrouver la formule (32) de la façon suivante. Posons :

$$W = E + m_0 c^2 \quad \text{et} \quad \frac{E}{m_0 c^2} = \eta,$$

nous aurons  $W = m_0 c^2 (1 + \eta)$  et nous pourrons écrire :

$$(43) \quad dn_w = Cte e^{-\frac{E}{kT}} (1 + \eta) \sqrt{(2 + \eta)\eta} d\eta,$$

forme de (42) qui montre qu'à l'approximation newtonienne où l'on a  $\eta \ll 1$ , on retrouve bien la formule (32).

**11. Application à un gaz de photons.** — Considérons le cas opposé à celui de l'approximation newtonienne où presque toutes les molécules d'un gaz auraient une vitesse très voisine de  $c$ . C'est ce qui arriverait à toute température si la masse propre des molécules tendait vers zéro. Ce cas peut être comparé à celui du rayonnement noir, car le rayonnement noir peut être considéré comme un gaz de photons, les photons ayant une masse propre nulle ou peut-être seulement extraordinairement petite. Comme alors pour presque toutes les molécules on aura  $W \gg m_0 c^2$ , on trouve d'après (42) :

$$(44) \quad dn_w = C e^{-\frac{W}{kT}} W^2 dW.$$

Pour les photons, on posera  $W = h\nu$  et l'on trouvera pour la densité de l'énergie d'un gaz de photons correspondant à l'intervalle de fréquence  $\nu \rightarrow \nu + d\nu$  :

$$(45) \quad \rho_\nu d\nu = h\nu dn_\nu = Cte e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^3 d\nu.$$

Or cette forme de densité spectrale est celle que Wien avait jadis proposée et qui, en fait, est seulement valable pour les grandes valeurs du quotient  $\frac{v}{T}$ . La loi spectrale de Wien est donc la forme que prend la loi de Maxwell pour un gaz de molécules dont la masse propre est évanouissante comme je l'avais signalé dans un article du *Journal de Physique* en 1922.

Mais, en fait, la densité spectrale du rayonnement noir est donnée par la loi de Planck :

$$(45 \text{ bis}) \quad \rho(v)dv = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{v^3}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1} dv.$$

C'est l'introduction des quanta et les transformations qu'il faut faire subir à la Mécanique statistique pour en tenir compte qui expliquent la différence entre la loi réelle de Planck et la loi de Wien. Nous n'insisterons pas sur cette question bien connue.

Il est curieux de noter ce qui se passe pour la distribution des vitesses dans le cas des molécules de masse propre évanouissante.

Comme  $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , pour qu'une telle molécule ait une énergie appréciable, il faut que sa vitesse soit extrêmement voisine de  $c$ . Donc, quand la vitesse croît de  $0$  à  $c - \varepsilon$ ,  $W$  reste sensiblement nulle ; puis,  $v$  croissant de  $c - \varepsilon$  à  $c$ ,  $W$  croît d'une valeur extrêmement petite à l'infini. Ainsi la loi de distribution des énergies (44) conserve une forme en cloche analogue à celle de la loi classique de Maxwell tandis que la loi de distribution des vitesses est représentée par une courbe en aiguille au voisinage immédiat de  $v = c$ . C'est ce qu'illustre la figure 3.

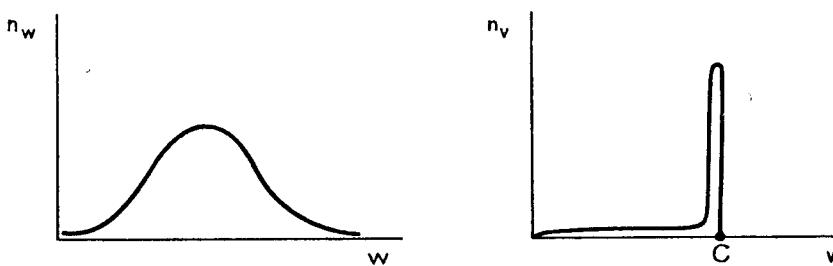


FIG. 3.

Lorsque  $m_0$  tend vers zéro, toute la courbe de distribution des vitesses vient en quelque sorte s'écraser contre la droite verticale  $v = c$ .

**12. Valeur moyenne de  $p_k q_k$  en Mécanique statistique relativiste.**

— En Mécanique statistique relativiste, on ne peut plus démontrer l'équipartition de l'énergie cinétique entre les degrés de liberté comme en Mécanique classique parce qu'ici l'énergie cinétique d'un point matériel :

$$E_c = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2$$

n'est plus une forme quadratique des  $p_k$ . Mais nous allons montrer qu'en Mécanique statistique relativiste, on a :

$$(46) \quad \overline{p_k \dot{q}_k} = kT.$$

En effet, on peut écrire :

$$(47) \quad \overline{p_k \dot{q}_k} = \frac{\int_{2N} \dots \int p_k \dot{q}_k e^{-\frac{W}{kT}} dq_1 \dots dp_N}{\int_{2N} \dots \int e^{-\frac{W}{kT}} dq_1 \dots dp_N} = \frac{\int_{2N} \dots \int p_k \frac{\partial W}{\partial p_k} e^{-\frac{W}{kT}} dq_1 \dots dp_N}{\int_{2N} \dots \int e^{-\frac{W}{kT}} dq_1 \dots dp_N}$$

d'après les équations de Hamilton et, comme  $W$  tend toujours vers l'infini en même temps que  $p_k$ , une intégration par parties fournit aisément la formule (46).

Cette formule, valable d'une façon générale en Mécanique statistique relativiste, donne à l'approximation newtonienne où  $2E_c = \sum_k p_k \dot{q}_k$  la formule (1) :

$$(48) \quad \overline{E}_c = N \frac{1}{2} kT,$$

ce qui nous ramène à l'expression classique de l'équipartition de l'énergie, mais en Dynamique relativiste :

$$2E_c \neq \sum_k p_k \dot{q}_k.$$

(1) Pour éviter toute confusion avec la température, nous désignons ici l'énergie cinétique par  $E_c$ .

On doit remarquer que la formule (46) n'est valable que dans le système propre du corps considéré de sorte qu'il est préférable de l'écrire sous la forme :

$$(49) \quad \overline{p_k^0 q_k^0} = kT_0,$$

les indices 0 rappelant que les quantités sont évaluées dans le système propre.

Pour une molécule, on peut toujours, même en théorie relativiste, écrire :

$$(50) \quad \overline{\frac{1}{2} \sum_1^3 p_{0k} q_{0k}} = \frac{3}{2} kT_0$$

et, comme :

$$p_{0k} = \frac{m_0 \dot{q}_{0k}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{avec} \quad v^2 = \sum_1^3 \dot{q}_{0k}^2,$$

il vient :

$$(51) \quad \overline{\frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{3}{2} kT_0.$$

En Dynamique relativiste, la grandeur sous le signe de moyenne dans (51), que nous nommerons la « pseudo-énergie cinétique », n'est pas égale à l'énergie cinétique : elle ne se confond avec elle qu'à l'approximation newtonienne et alors la formule (51) nous redonne l'expression classique de l'équipartition de l'énergie. Nous verrons que la pseudo-énergie cinétique joue un rôle important en Thermodynamique relativiste.

## CHAPITRE IV

### NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE

**1. Invariance relativiste de l'Entropie.** — L'Action hamiltonienne est l'invariant fondamental de la Mécanique : nous allons maintenant voir que l'Entropie est l'invariant fondamental de la Thermodynamique. Pour apercevoir le caractère invariant de l'entropie, il suffit de se rappeler que, selon Boltzmann, l'entropie d'un état macroscopique est proportionnelle au logarithme du nombre de complexions qui réalisent cet état : l'entropie s'exprime donc par un *nombre* dont l'invariance paraît évidente. Pour confirmer cette intuition, nous remarquerons que, d'une part, la définition de l'entropie par la formule de Boltzmann fait intervenir un nombre *entier* de complexions et que, d'autre part, la transformation de l'entropie lors d'un changement de système de référence galiléen doit s'exprimer par une fonction *continue* de la vitesse relative des systèmes de référence : il en résulte nécessairement que cette fonction continue est constante et égale à l'unité (puisque l'entropie est égale à 1 quand les systèmes de référence coïncident) et il en découle que l'entropie est un invariant.

On peut aussi raisonner autrement. Considérons un corps qui, dans un système de référence 1, passe d'un état de repos dans un état de mouvement de vitesse  $v$  en étant accéléré adiabatiquement et à pression constante par un corps immobile dans le système considéré. L'ensemble des deux corps évoluant adiabatiquement, son entropie est constante et, comme le corps qui produit l'accélération garde une entropie constante, il en est de même du corps accéléré. Donc  $S_1 = S_2$ , les indices 1 et 2 se rapportant à l'état initial et à l'état final du corps accéléré. Soit maintenant un système primé lié au corps accéléré une fois mis en mouvement uniforme. L'état 2 rapporté à ce système est identique à l'état 1

rapporté au système primitif. On a donc  $S'_1 = S_1$  et, par suite,  $S'_2 = S_2$ , formule qui exprime l'invariance de l'entropie.

**2. Variance relativiste de la température.** — La déduction de la variance relativiste de la température exige des raisonnements assez délicats. Nous donnerons celui qui nous paraît le plus instructif.

Considérons un corps C qui, envisagé dans un système de référence galiléen  $R_0$  qui lui est lié, se trouve dans un état d'équilibre thermodynamique à la température absolue  $T_0$  et possède un volume invariable  $V_0$ . Ce pourra être, par exemple, un gaz enfermé dans une enceinte rigide de volume  $V_0$  à la température  $T_0$ . Soit  $M_0$  la masse propre totale du corps C.

Plaçons-nous maintenant dans un système de référence galiléen R où le corps C possède une vitesse  $v = \beta c$  de translation uniforme et supposons que, dans ce système de référence, une source de chaleur fournit à C la quantité de chaleur Q. Nous allons montrer, point essentiel, que, pour que le corps C puisse conserver la vitesse  $\beta c$ , il faut lui fournir, en même temps que la quantité de chaleur Q, un certain travail A.

En effet, le corps conservant par hypothèse la vitesse  $\beta c$ , son énergie qui était  $\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  ne peut augmenter, par suite de la réception d'une quantité de chaleur Q et d'un travail A, que si la masse propre varie et passe de sa valeur initiale  $M_0$  à une valeur finale  $M_0 + \Delta M_0$ . En d'autres termes, la chaleur et le travail absorbés par le corps C en mouvement auront accru son énergie interne, ce qui d'après le principe de l'inertie de l'énergie doit faire croître sa masse propre.

Le principe de la conservation de l'énergie nous permet d'écrire :

$$(1) \quad \frac{\Delta M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = Q + A.$$

Si F désigne la force qu'on a dû exercer sur le corps C pour lui communiquer dans le système de référence R le travail A, la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps doit à chaque instant être égale à F, ce qui donne :

$$(2) \quad \frac{(M_0 + \Delta M_0)v}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \int F dt = \frac{1}{v} \int F v dt = \frac{A}{v},$$

puisque  $v$  est constant par hypothèse et que  $A = \int Fv dt$ . On a donc :

$$(3) \quad \frac{\Delta M_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} v^2 = A$$

et l'on voit que le travail fourni au corps dans le processus envisagé est égal à l'augmentation de la pseudo-force vive  $\frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  (double de la pseudo-énergie cinétique). Finalement, en comparant (3) et (1), nous obtenons :

$$(4) \quad A = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} Q,$$

d'où :

$$(5) \quad Q = \Delta M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = - \Delta \mathcal{L},$$

$\Delta \mathcal{L}$  étant la variation de la fonction de Lagrange du corps dans le processus envisagé due à la variation de la masse propre. Donc, ainsi que nous l'avions annoncé, pour que le corps puisse conserver dans le système de référence  $R$ , la vitesse constante  $v = \beta c$  quand il reçoit la quantité de chaleur  $Q$ , il faut que cet apport de chaleur soit complété par un apport de travail  $A$  donné par (4). De cette relation, nous tirons d'ailleurs aisément :

$$(6) \quad \Delta M_0 = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{c^2} (A + Q) = \frac{Q}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

On voit que toutes ces considérations dérivent finalement du principe de l'inertie de l'énergie qui permet d'envisager des variations de la masse propre d'un corps résultant de la variation de son énergie interne.

Revenons maintenant au système de référence  $R_0$ . Puisque le corps y garde une forme invariable, aucun travail n'est effectué dans ce système pendant le processus envisagé. Vue dans ce système, l'opération effectuée doit donc consister uniquement dans l'apport au corps  $C$  d'une quantité de chaleur  $Q_0$  telle que :

$$(7) \quad \frac{Q_0}{c^2} = \Delta M_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{Q}{c^2}.$$

Lors du passage de  $R_0$  à  $R$ , la quantité de chaleur va se transformer suivant la loi :

$$(8) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

et, comme l'entropie  $S = \int \frac{dQ}{T}$  est invariante, il en résulte que la température absolue du corps doit se transformer suivant la loi :

$$(9) \quad T = T_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

C'est la formule fondamentale donnant la transformation de la température quand on passe de  $R_0$  à  $R$ .

Remarquons encore que l'importante formule (5) peut s'obtenir de la façon suivante. Nous partons de la définition de l'énergie  $W = \sum_i^3 p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$  appliquée au corps C dans son mouvement de translation. Puisque les  $\dot{q}_i$  sont constants, nous avons :

$$(10) \quad dW = \sum_i^3 \dot{q}_i dp_i - d\mathcal{L}.$$

Or :

$$(11) \quad \sum_i^3 \dot{q}_i dp_i = \sum_i^3 \dot{p}_i dq_i = dA,$$

car  $\dot{p}_i = f_i$ , d'où  $dW = dA - d\mathcal{L}$  et, en intégrant sur tout le processus envisagé :

$$(12) \quad \Delta W = A - \Delta \mathcal{L}.$$

Comme  $\Delta W = A + Q$ , d'après la conservation de l'énergie, on a :

$$(13) \quad Q = - \Delta \mathcal{L}.$$

On en tire :

$$(14) \quad \Delta S = \frac{Q}{T} = - \frac{\Delta \mathcal{L}}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{T} = - \frac{\partial S}{\partial \mathcal{L}}.$$

**3. Extension au cas où le volume du corps C varie.** — Nous allons reprendre le raisonnement précédent en supposant que le volume du corps C varie. Nous nous appuierons sur le fait que, dans la théorie relativiste de l'Élasticité, la pression dans un corps isotrope est un invariant de sorte que nous pourrons poser  $p = p_0$ .

Plaçons-nous dans le système de référence R. La vitesse du corps C restant constante, on lui fournira une quantité de chaleur Q et un travail A pendant que son volume varie de  $\Delta V$ . Le corps C

est supposé isotrope et sa pression interne égale à  $p$ . La conservation de l'énergie nous permet d'écrire :

$$(15) \quad \Delta W = \frac{\Delta M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = Q + A - p \Delta V$$

et, comme on a toujours la relation (3) qui se démontre comme précédemment, on trouve aisément :

$$(16) \quad A = \frac{Q - p \Delta V}{1 - \beta^2} \beta^2.$$

On déduit de (15) et de (16) :

$$(17) \quad \Delta M_0 = \frac{Q - p \Delta V}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

D'autre part, dans le système de référence  $R_0$ , où  $A = 0$ , on a :

$$(18) \quad \frac{\Delta W_0}{c^2} = \Delta M_0 = \frac{Q_0 - p_0 \Delta V_0}{c^2}$$

et la comparaison avec (17) donne :

$$(19) \quad Q - p \Delta V = (Q_0 - p_0 \Delta V_0) \sqrt{1 - \beta^2}.$$

De plus, en portant (16) dans (15), il vient :

$$(20) \quad \Delta W = \frac{Q - p \Delta V}{1 - \beta^2} = \frac{T \Delta S - p \Delta V}{1 - \beta^2},$$

tandis que, dans le système  $R_0$  :

$$(21) \quad \Delta W_0 = T_0 \Delta S_0 - p_0 \Delta V_0.$$

Nous trouvons donc :

$$(22) \quad \left( \frac{\partial W}{\partial S} \right)_V = \frac{T}{1 - \beta^2}; \quad \left( \frac{\partial W_0}{\partial S_0} \right)_{V_0} = T_0$$

et comme  $dS = dS_0$  et  $dW = \frac{dW_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ , on retombe sur la formule (9) pour la transformation de la température.

**4. Le quadrivecteur « Inverse de la température ».** — Divers auteurs, notamment Tolman et Eckart, von Dantzig et Bergmann, ont proposé de donner une variance tensorielle à la température

en considérant l'inverse de la température comme la composante de temps d'un quadrivecteur dont les composantes d'espace seraient nulles dans le système propre du corps. On aurait bien alors :

$$(23) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 \sqrt{1 - \beta^2}}$$

en accord avec la formule (9).

On pourrait, par exemple, définir un quadrivecteur  $\vec{\theta}$  d'espace-temps par :

$$(24) \quad \theta^i = \frac{U^i}{T_0},$$

où  $U^i$  est la « vitesse d'univers » du système propre du corps C car alors on aurait bien  $\theta^4 = \frac{1}{T}$ .

A mon avis, malgré l'élégance de cette représentation, son exactitude reste assez douteuse, car on ne voit guère quel est le sens physique des composantes d'espace du quadrivecteur  $\vec{\theta}$ . On pourrait faire la même représentation pour le volume d'un corps qui, d'après la contraction de Lorentz, se transforme suivant la formule :

$$V = V_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

comme la température. On poserait :

$$\xi^i = \frac{U^i}{V_0}, \quad \text{d'où} \quad \xi^4 = \frac{1}{V}.$$

Mais le sens physique des composantes  $\xi^1$ ,  $\xi^2$  et  $\xi^3$  n'apparaîtrait pas et il est douteux qu'une telle représentation de la contraction de Lorentz ait un sens. Ceci peut conduire à se méfier de la représentation (24) et à se contenter de la loi de transformation (9).

**5. Précision et extension de la formule  $Q = - \Delta \mathcal{L}$ .** — Nous avions démontré la formule (13) en supposant que la vitesse du corps C reste constante. Nous allons nous affranchir de cette hypothèse et montrer qu'on peut toujours écrire comme expression de la quantité de chaleur fournie à un corps dont la masse propre varie :

$$(25) \quad \delta Q = - \delta_{M_0} \mathcal{L},$$

où  $\delta_{M_0} \mathcal{L}$  représente la variation subie par la fonction de Lagrange du corps quand sa masse propre varie, *toutes les autres variables*

dont dépend  $\mathfrak{L}$  restant constantes. Cette extension de la formule (13) jouera un rôle important dans la suite de notre exposé.

Prenons d'abord le cas du mouvement d'un corps en l'absence de champ extérieur pour lequel nous pouvons poser  $\mathfrak{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$  et reprenons la démonstration du paragraphe 2, mais sans supposer la vitesse constante. On a :

$$(26) \quad \delta W = \delta \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\delta M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{M_0 c^2 \beta \delta \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et :

$$(27) \quad \begin{aligned} Fv \delta t = \delta A &= \delta \frac{M_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot v \\ &= \frac{\delta M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{M_0 v \delta v}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{M_0 v^2 \beta \delta \beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

On en tire :

$$(28) \quad \begin{aligned} \delta W - \delta A &= \frac{\delta M_0 (c^2 - v^2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{M_0 v \delta v}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{M_0 \beta \delta \beta (c^2 - v^2)}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \delta M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

On a donc bien, même quand la vitesse varie :

$$(29) \quad \delta Q = \delta W - \delta A = \delta M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = -\delta_{M_0} \mathfrak{L}.$$

Nous passerons maintenant au cas plus général encore d'un corps (une particule, par exemple) qui possède une charge électrique  $\epsilon$  et qui se déplace dans un champ électromagnétique défini par les potentiels  $V$  et  $\vec{A}$ . Nous avons alors :

$$(30) \quad W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \epsilon V.$$

Introduisons la grandeur :

$$(31) \quad \mathcal{F} = \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\epsilon}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} = \left( \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{\epsilon}{c} \vec{A} \right) \vec{v} = \vec{p} \cdot \vec{v}.$$

Cette grandeur qui se réduit à la pseudo-force vive pour  $\vec{A} = 0$ , en est la généralisation naturelle pour  $\vec{A} \neq 0$ . Enfin, nous avons ici :

$$(32) \quad \mathfrak{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - \epsilon V + \frac{\epsilon}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}.$$

Nous voyons donc que :

$$(33) \quad W = \mathcal{F} - \mathcal{L}$$

et nous en déduisons, les termes en  $\vec{A}$  se compensant, que :

$$(34) \quad \delta W = \delta \mathcal{F} - \delta \mathcal{L} = \delta \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + M_0 c^2 \delta \sqrt{1 - \beta^2} + \epsilon \delta V + \delta M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

On vérifie aisément qu'il est équivalent d'écrire :

$$(35) \quad \delta W = M_0 c^2 \delta \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \epsilon \delta V + \frac{\delta M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \delta M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Au second membre de (35), les deux premiers termes représentent le travail que recevrait le corps si sa masse propre restait constante tandis que le troisième terme représente le travail reçu correspondant à l'augmentation de sa masse propre. Au total, les trois premiers termes en question représentent donc l'ensemble du travail reçu par le corps dans un intervalle de temps  $\delta t$ . Comme nous devons avoir toujours :

$$\delta W = \delta A + \delta Q,$$

il faut que le dernier terme du second membre de (35) soit égal à  $\delta Q$ , ce qui nous redonne bien la formule (25).

*CHAPITRE V*

**ANALOGIES**

**ENTRE GRANDEURS MÉCANIQUES**

**ET GRANDEURS THERMODYNAMIQUES**

**(Théories de Helmholtz et formule de Boltzmann**

**pour les systèmes périodiques).**

**1. Généralités.** — Dans ce qui précède, nous avons résumé l'interprétation bien connue des grandeurs thermodynamiques, à l'aide de la Mécanique statistique, interprétation où interviennent à la fois les lois de la Mécanique et les conceptions du Calcul des probabilités. Le succès de cette interprétation, dû surtout aux magnifiques travaux de Boltzmann et de Gibbs, a fait quelque peu oublier d'autres tentatives faites vers la même époque par Helmholtz et par Boltzmann lui-même, tentatives où l'on essayait de retrouver certaines conceptions et certaines lois de la Thermodynamique à l'aide seulement de considérations mécaniques sans faire aucunement intervenir l'idée de probabilité. Comme le premier principe de la Thermodynamique, dès qu'on admet que la chaleur est une énergie d'agitation moléculaire, se ramène immédiatement au théorème mécanique de la conservation de l'énergie, c'est essentiellement l'interprétation du second principe de la Thermodynamique et de la notion d'entropie qui lui est liée qui a fait l'objet des théories de Helmholtz et de Boltzmann sur ce sujet.

Ces tentatives d'explications mécaniques, mais non statistiques, du second principe de la Thermodynamique sont restées incomplètes et n'ont conduit qu'à des résultats très fragmentaires ne s'appliquant qu'à des modèles particuliers. Le succès de l'interprétation statistique de la Thermodynamique a eu pour résultat de les faire délaisser et, mis à part les travaux d'Ehrenfest sur l'invariance

adiabatique, il ne semble pas qu'elles aient fait l'objet de recherches nouvelles depuis une soixantaine d'années. Elles sont cependant très intéressantes et il se peut qu'il y ait quelque chose de très profond caché derrière les analogies qu'elles révèlent.

**2. La théorie de Helmholtz.** — Helmholtz était parti de considérations très générales sur un système mécanique défini par des variables  $q_i$  de Lagrange. Il supposait ce système soumis à des forces internes dérivant d'un potentiel  $U$  et à des forces externes dont le travail sur la coordonnée  $q_i$  était désigné par  $\mathcal{A}_i dq_i$ . On désignera toujours ici par  $T$  la température absolue et par  $E_{\text{cin}}$  l'énergie cinétique.

Les équations de Lagrange pour le système s'écrivent :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \mathcal{A}_i$$

et Helmholtz, qui écrivait bien avant la naissance de la théorie de la Relativité, utilisait la définition classique de la fonction de Lagrange :

$$(2) \quad \mathcal{L} = E_{\text{cin}} - U,$$

$E_{\text{cin}}$  étant fonction des  $q_i$  et des  $\dot{q}_i$  et étant quadratique homogène en les  $\dot{q}_i$ .

Helmholtz introduisait ensuite l'hypothèse fondamentale que les paramètres  $q_i$  se divisent en deux catégories, les uns  $q_a$  variant très lentement et les autres  $q_b$  très rapidement. Cette hypothèse lui était certainement suggérée par la conception moléculaire de la matière, les  $q_b$  étant par exemple les coordonnées des molécules d'un gaz et les  $q_a$  étant les paramètres infinitésimement plus lentement variables qui déterminent la configuration extérieure du système.

De plus, Helmholtz admettait encore que l'énergie potentielle  $U$  ne dépend que des  $q_a$  et que les coordonnées  $q_b$  n'entraient que par leurs dérivées  $\dot{q}_b$  dans l'expression de  $E_{\text{cin}}$  et donc de  $\mathcal{L}$ . Ceci permet d'écrire pour tout  $q_b$  :

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_b} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b} \right) = \dot{p}_b = \mathcal{A}_b.$$

Par définition, le travail élémentaire sur la coordonnée  $q_b$  sera :

$$(4) \quad dQ_b = \mathcal{A}_b dq_b = \dot{p}_b \dot{q}_b dt = \dot{q}_b dp_b.$$

Quant aux paramètres  $q_a$ , comme ils sont par hypothèse à variation lente, leur contribution aux termes en  $\frac{d}{dt}$  pourra être négligée et l'on aura :

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_a} \right) = 0; \quad - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} = \mathcal{A}_a.$$

Helmholtz considérait alors, pour commencer, des systèmes qu'il nommait « monocycliques » pour lesquels il y a seulement un seul paramètre à variation rapide  $q_b$  et il démontrait le curieux résultat suivant : *Pour un système monocyclique, pour lequel on peut poser  $Q_b = Q$ , le quotient  $\frac{dQ}{E_{\text{cin}}}$  est une différentielle exacte.*

Soit, en effet,  $q$  l'unique paramètre à variation rapide du système. Nous avons  $Q = q dp$  et, par suite :

$$(6) \quad \frac{dQ}{dpq} = \frac{2dp}{p} = 2d(\log p).$$

Or, en Mécanique classique, on a :

$$(7) \quad 2E_{\text{cin}} = \sum_i \frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

parce que  $E_{\text{cin}}$  est une fonction quadratique homogène des  $\dot{q}_i$ . Or, seule la coordonnée  $q$  est à variation rapide de sorte que :

$$(8) \quad 2E_{\text{cin}} \simeq \frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{q}} \dot{q} = p \dot{q}$$

et, par suite :

$$(9) \quad \frac{dQ}{E_{\text{cin}}} = 2d(\log p) = \text{diff. exacte.}$$

C'est le théorème de Helmholtz.

Mais  $dQ$ , qui est le travail reçu par le paramètre à variation rapide, est analogue à l'énergie fournie à une molécule d'un gaz et peut donc être assimilé à une quantité de chaleur élémentaire. En définissant la température absolue  $T$  comme proportionnelle à l'énergie cinétique, on pourra poser :

$$(10) \quad \frac{dQ}{T} = dS$$

et cette relation rejoint la définition de l'entropie par la Thermodynamique. Du reste, la théorie de Helmholtz reste vraie en théorie relativiste puisque alors c'est  $\frac{1}{2} p \dot{q}$  qu'il faut considérer comme proportionnel à la température de sorte que la relation (6) conduit encore à la formule (10).

Mais le cas des systèmes monocycliques est trop particulier et il y a lieu de considérer le cas des systèmes polycycliques comportant plusieurs variables  $q_b$  à variation rapide. Que le système soit monocyclique ou polycyclique, on doit d'ailleurs distinguer avec Helmholtz les « systèmes complets » et les « systèmes incomplets », ces derniers étant ceux pour lesquels le travail  $\mathcal{A}_a dq_a$  correspondant à la variation de l'un au moins des paramètres à variation lente  $q_a$  est nul. Soit  $q_c$  les paramètres à variation lente qui jouissent de cette propriété. On a pour tout  $q_c$  :

$$(11) \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_c} = 0.$$

Comme, par hypothèse,  $\mathfrak{L}$  ne dépend pas des  $q_b$  et que les  $\dot{q}_a$  sont négligeables, les relations (11) lient les  $q_a$ , les  $\dot{q}_b$  et les  $q_c$ . Puisqu'elles sont en même nombre que les  $q_c$ , elles fournissent l'expression de ceux-ci en fonction des  $q_a$  et des  $\dot{q}_b$ . On peut donc éliminer les  $q_c$  et définir la situation du système en fonction des  $q_a$  et des  $\dot{q}_b$ .

Soit alors  $\mathfrak{L}'$  l'expression de  $\mathfrak{L}$  quand on l'exprime à l'aide des  $q_a$  et des  $\dot{q}_b$  seulement. On a, d'après (11) :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_a} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_a} + \sum_c \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_c} \frac{\partial q_c}{\partial q_a} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_a}; \\ \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_b} + \sum_c \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_c} \frac{\partial q_c}{\partial \dot{q}_b} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_b}. \end{array} \right.$$

Il vient donc pour les paramètres à variation lente  $q_a$  :

$$(13) \quad - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial q_a} = \mathcal{A}_a$$

et pour les  $q_b$  :

$$(14) \quad \mathcal{A}_b = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \dot{q}_b} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_b} \right) = \dot{p}_b$$

et l'on retrouve après élimination des  $q_c$  :

$$(15) \quad dQ_b = \dot{q}_b dp_b.$$

Toutes les équations gardent la même forme pour les systèmes incomplets que pour les systèmes complets. En particulier, on a toujours pour les systèmes monocycliques, même incomplets, que  $\frac{dQ}{E_{\text{cin}}}$  est une différentielle exacte.

Néanmoins, Helmholtz a insisté sur le fait que les systèmes incomplets diffèrent sur un point important des systèmes complets. L'énergie cinétique est, à l'approximation newtonienne, une fonction quadratique homogène des  $\dot{q}_i$  dont les coefficients peuvent dépendre des  $q_i$ , mais, quand on remplace les  $q_c$  en fonction des  $q_a$  et des  $\dot{q}_b$ , l'énergie cinétique peut cesser d'être quadratique en les  $\dot{q}_b$  et peut même être de degré impair en les  $\dot{q}_b$ , donc de degré impair par rapport au temps, circonstance importante car la réversibilité par rapport au temps disparaît alors. Ce cas se présente, par exemple, pour un volant muni d'un régulateur à boules : l'énergie du volant n'est pas proportionnelle au carré de sa vitesse angulaire parce que son moment d'inertie varie avec cette vitesse. Helmholtz a cherché à tirer de ce fait une interprétation de l'irréversibilité thermodynamique, mais Henri Poincaré, qui a exposé autrefois la théorie de Helmholtz dans le dernier chapitre de son traité de Thermodynamique, a donné un raisonnement pour démontrer qu'on ne parvient pas réellement ainsi à expliquer l'existence de l'irréversibilité.

Pour Helmholtz, les  $q_b$  correspondent aux mouvements moléculaires, les  $q_a$  aux mouvements macroscopiques visibles. Quand les  $q$  varient, l'énergie du système varie de :

$$dE = \sum_a \mathcal{A}_a dq_a + \sum_b \mathcal{A}_b dq_b.$$

Or le premier terme est le travail fourni au système correspondant aux mouvements visibles tandis que :

$$\sum_b \mathcal{A}_b dq_b = \sum_b dQ_b = dQ$$

est l'énergie totale fournie au mouvement des molécules, donc la chaleur reçue par le système. On a donc :

$$(16) \quad dQ = dE + d\mathcal{C},$$

$d\mathcal{C}$  étant le travail *fourni* par le système à l'extérieur et ceci est l'expression du premier principe de la Thermodynamique traduisant l'équivalence de la chaleur et du travail. De plus, comme nous avons trouvé que  $\frac{dQ}{E_{\text{cin}}}$  est une différentielle exacte pour les systèmes monocycliques, nous avons, du moins en ce cas, retrouvé les deux principes fondamentaux de la Thermodynamique valables pour les transformations réversibles.

Il est évident que les résultats de Helmholtz, tout en étant intéressants, sont bien restreints puisqu'ils ne s'appliquent qu'aux systèmes monocycliques. De plus, nous avons admis avec Helmholtz, que l'énergie potentielle ne dépend pas des paramètres  $q_b$  à variation rapide : cette hypothèse est exacte pour les gaz parfaits dont les molécules sont sans actions mutuelles, mais elle ne l'est déjà plus pour les gaz réels et, à plus forte raison, pour les liquides et les solides. Nous verrons plus loin que Boltzmann, s'inspirant de la théorie de Helmholtz l'a généralisée pour les systèmes polycycliques dont l'énergie potentielle dépend des paramètres  $q_b$  à variation rapide, mais il a été obligé de supposer que ces systèmes sont périodiques et d'introduire des moyennes prises par rapport au temps pendant une période du mouvement. Notons pour terminer, que dans la théorie de Helmholtz, la notion de probabilité n'intervient nulle part.

**3. Le schéma canonique de la Thermodynamique d'après Helmholtz.** — Indépendamment des considérations intéressantes, mais insuffisantes, que nous venons de rappeler, Helmholtz a proposé un curieux « schéma canonique » de la Thermodynamique.

Partons de la relation classique :

$$(17) \quad dE = dQ - p dV = T dS - p dV = T dS + \sum_i \mathcal{A}_i dq_i$$

et introduisons avec Helmholtz une variable  $\varepsilon$  telle que, par définition, la température soit la « vitesse »  $\dot{\varepsilon}$  correspondant à cette variable. Nous posons donc :

$$(18) \quad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = T.$$

Si  $\varepsilon$  désigne la force généralisée correspondant à  $\epsilon$ , on aura :

$$(19) \quad dE = \varepsilon d\epsilon - p dV = \dot{\varepsilon\epsilon} dt - p dV,$$

d'où, par identification avec  $dS = \frac{dE + p dV}{T}$  :

$$(20) \quad \dot{\varepsilon\epsilon} dt = T dS$$

et, compte tenu de (18),

$$(21) \quad \varepsilon = \dot{S}.$$

Nous supposerons que  $\varepsilon$  est une variable du type dit « cyclique », c'est-à-dire telle que  $\mathcal{L}$  ne dépende pas de  $\epsilon$  ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} = 0$ ).

Envisageons alors un processus réversible extrêmement lent pour lequel  $\dot{V} \simeq 0$  ; nous aurons  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} = 0$  et les équations de Lagrange pour les variables  $\varepsilon$  et  $V$  sont :

$$(22) \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} = -p, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} \right) = \varepsilon,$$

ce qui nous donne :

$$(23) \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} = p_\varepsilon = \int \varepsilon dt = \int \dot{S} dt = S,$$

d'où :

$$(24) \quad p_\varepsilon = S.$$

L'énergie sera alors donnée, d'après sa définition générale, par :

$$(25) \quad E = \dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} + \dot{V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} - \mathcal{L} = TS - \mathcal{L}$$

et l'on en tire :

$$(26) \quad \mathcal{L} = TS - E = -F,$$

$F = E - TS$  étant l'énergie libre.

La correspondance (26) entre la fonction de Lagrange et l'énergie libre changée de signe est très intéressante : elle a joué un grand rôle dans les anciens travaux de Planck sur le rayonnement noir et dans divers travaux sur l'Électrostatique et l'Électromagnétisme.

Pour  $T = \text{Cte}$ , on aura :

$$(27) \quad d\mathcal{C} = p dV = -d(E - TS) = -dF$$

et nous retrouvons ainsi une propriété bien connue de l'énergie libre.

Le schéma canonique de la Thermodynamique de Helmholtz part essentiellement de l'introduction d'une variable  $\epsilon$  dont la température est la dérivée par rapport au temps, mais la signification de la variable  $\epsilon$  reste mystérieuse. Dans la Thermodynamique de la particule isolée, nous retrouverons la relation (18) en donnant un sens précis à la variable  $\epsilon$ .

#### 4. La théorie de Boltzmann pour les systèmes périodiques.

**Formule préliminaire.** — Plus précise que les théories précédentes est la théorie de Boltzmann établissant une analogie entre grandeurs mécaniques et grandeurs thermodynamiques dans le cas des systèmes périodiques. Pour développer cette théorie, il est nécessaire d'examiner d'abord ce que devient le principe d'action stationnaire quand on l'applique à certains systèmes périodiques.

Nous supposerons d'abord que le système envisagé est défini par  $N$  coordonnées  $q_i$  de Lagrange. Comme Helmholtz dans la théorie analysée précédemment, nous admettrons que les  $q_i$  se divisent en deux catégories. Les uns, ce sont les  $q_b$  de Helmholtz, sont à variations rapides et correspondent aux mouvements moléculaires : soient  $q_1, \dots, q_r$  ces coordonnées. Les autres  $q_i$  sont du type  $q_a$  de Helmholtz et varient lentement ; ils correspondent aux liaisons auxquelles le système est soumis : nous les nommerons  $q_{r+1}, \dots, q_N$ .

Nous désignerons par  $U^*$  l'énergie potentielle correspondant aux liaisons. La fonction de Lagrange sera :

$$(28) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 - U - U^*,$$

$U$  étant l'énergie potentielle correspondant aux mouvements moléculaires et  $\mathcal{L}_1$  étant le terme cinétique qui, à l'approximation newtonienne, est pris égal à l'énergie cinétique des molécules puisque l'énergie cinétique correspondant aux coordonnées du type  $q_a$  est négligeable, du moins dans les processus assez lents.

Soit  $\mathcal{A}$  l'intégrale d'action maupertuisienne correspondant au

mouvement des molécules, c'est-à-dire aux paramètres du type  $q_b$ . On a :

$$(29) \quad \mathcal{A} = \int \sum_{k=1}^r p_k dq_k.$$

L'intégrale d'action maupertuisienne totale, compte tenu des variations des liaisons, c'est-à-dire de la variation des  $q_a$ , est :

$$(30) \quad \mathcal{A}^* = \mathcal{A} + \int \sum_{k=r+1}^N p_k dq_k.$$

La théorie de l'action maupertuisienne exposée au chapitre premier fournit la formule :

$$(31) \quad \delta\mathcal{A}^* = \int \delta E^* dt + \left| \sum_{k=1}^N p_k \delta q_k \right|_0^1,$$

où  $E^*$  est l'énergie totale du système, somme de l'énergie  $E$  des mouvements moléculaires et de l'énergie potentielle  $U^*$  (on a donc  $E^* = \text{énergie cinétique des molécules} + U + U^* = E + U^*$ ).

Or la formule de l'action variée, où l'on fait varier les limites des  $q$ , nous donne :

$$(32) \quad \delta\mathcal{A}^* = \delta\mathcal{A} + \delta \int \sum_{k=r+1}^N p_k dq_k = \delta\mathcal{A} + \int \delta \sum_{k=r+1}^N p_k dq_k + \left| \sum_{k=r+1}^N p_k \delta q_k \right|_0^1.$$

Portons cette valeur de  $\delta\mathcal{A}^*$  dans l'équation précédente en tenant compte de la relation :

$$\delta E^* = \delta E + \delta U^*,$$

il vient :

$$(33) \quad \delta\mathcal{A} = \int \left[ \delta E + \delta U^* - \delta \sum_{k=r+1}^N p_k \dot{q}_k \right] dt + \left| \sum_{k=1}^r p_k \delta q_k \right|_0^1,$$

Or il existe des cas importants où les termes en  $p_k \delta q_k$  disparaissent. C'est ce qui a lieu, par exemple, quand dans le mouvement varié les valeurs des coordonnées  $q_{r+1}, \dots, q_N$  du type  $q_a$  restent constantes et quand, de plus, le mouvement actuel et le mouvement varié sont tous deux périodiques. La première hypothèse entraîne

que les  $\dot{q}_a$  sont nuls à la fois dans le mouvement naturel et dans le mouvement varié de sorte que :

$$\delta \sum_{k=1}^r p_k \dot{q}_k = 0;$$

la seconde hypothèse entraîne que  $\sum_1^r p_k dq_k$  a la même valeur aux deux extrémités de la trajectoire non variée puisque ces deux extrémités coïncident comme l'illustre la figure 4.

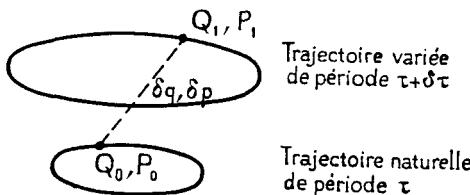


FIG. 4.

Il reste alors :

$$(34) \quad \delta \mathcal{A} = \int_0^\tau (\delta E + \delta U^*) dt,$$

avec :

$$(35) \quad \mathcal{A} = \oint \sum_{k=1}^r p_k dq_k,$$

$\tau$  étant la période du mouvement naturel. C'est la formule dont nous avions besoin.

### 5. La formule de Boltzmann pour les systèmes périodiques.

— En 1897, Boltzmann reprenant des travaux antérieurs de Clausius et Szily (1872) a utilisé la formule (34) pour obtenir une très intéressante formule qui a été employée plus tard par Ehrenfest dans sa théorie des invariants adiabatiques.

Pour démontrer cette formule de Boltzmann (qu'il ne faut pas confondre avec la relation  $S = k \log P$ ), nous allons reprendre des hypothèses faites plus haut : système défini par  $r$  coordonnées « moléculaires » à variation rapide du type  $q_b$  de Helmholtz et  $N - r$  coordonnées de liaison à variation lente du type  $q_a$  de

Helmholtz ; variation effectuée avec valeur constante des  $q_a$  ; périodicité du mouvement naturel et du mouvement varié.

Considérons d'une façon générale une trajectoire AB correspondant à un état du système et une trajectoire CD correspondant à un état voisin (fig. 5).

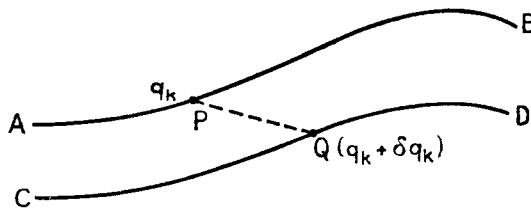


FIG. 5.

Pour passer de P en Q, il faut agir sur toutes les molécules en leur donnant de l'énergie, c'est-à-dire en fournissant de la chaleur. Cette chaleur sert à augmenter l'énergie interne et à accomplir un travail extérieur  $\delta \mathcal{C} = \delta U^*$ . Donc :

$$(36) \quad \delta Q = \delta E + \delta U^*.$$

Supposons maintenant qu'on passe très lentement par une transformation réversible de P en Q et remarquons que sur les trajectoires AB et CD, les coordonnées  $q_1, \dots, q_n$  ont des valeurs différentes, mais constantes et voisines, de sorte que la première hypothèse admise au paragraphe précédent se trouve bien vérifiée. Soit AB la courbe qui représente le passage lent d'une trajectoire à l'autre en un temps  $t_1 - t_0$ .

On a approximativement :

$$\Delta q_k = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \delta q_k$$

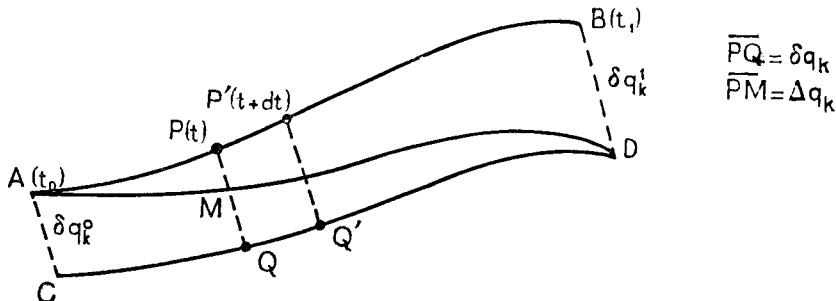


FIG. 6.

et, en un temps  $dt$ ,  $\Delta q_k$  varie de :

$$d\Delta q_k = \frac{dt}{t_1 - t_0} \delta q_k.$$

Pendant le même temps  $dt$ , la chaleur fournie au système est :

$$d\delta Q = \frac{dt}{t_1 - t_0} \delta Q$$

et le travail accompli est :

$$d\delta U^* = \frac{dt}{t_1 - t_0} \delta U^*.$$

Ainsi pour la transformation totale AMD, on a :

$$(37) \quad \Delta Q = \int_{t_0}^{t_1} d\delta Q = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta Q dt = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (\delta E + \delta U^*) dt.$$

Introduisons maintenant l'hypothèse que le système est périodique de période  $\tau$  et choisissons l'intervalle de temps égal à  $\tau$ . En comparant avec la formule (34) obtenue plus haut, il vient :

$$(38) \quad \delta Q = \frac{\delta \mathcal{E}}{\tau} = \frac{1}{\tau} \delta \oint \sum_k p_k dq_k = v \delta \mathcal{E}, \quad \text{avec} \quad v = \frac{1}{\tau}.$$

Cette formule est générale, c'est-à-dire valable aussi bien en Mécanique relativiste qu'en Mécanique classique. Si nous nous bornons à l'approximation newtonienne, nous avons  $2E_{\text{cin}} = \sum_k p_k \dot{q}_k$  et, par suite :

$$(39) \quad \delta Q = \frac{1}{\tau} \delta \int_0^\tau \sum_k p_k dq_k = \frac{2}{\tau} \delta (\bar{E}_{\text{cin}} \tau),$$

$\bar{E}_{\text{cin}}$  étant la valeur moyenne de l'énergie cinétique pour un cycle du mouvement <sup>(1)</sup>.

Nous avons ainsi obtenu cette curieuse formule de Boltzmann qui a eu, dans le cadre de l'ancienne théorie des quanta vers 1920-1925, d'assez nombreuses applications. C'est en partant de cette

<sup>(1)</sup> M. Francis Fer m'a communiqué récemment une nouvelle démonstration de la formule (39) de Boltzmann qui paraît plus rigoureuse que celle donnée ci-dessus. Voir bibliographie, [12].

formule qu'Ehrenfest a développé sa belle théorie des invariants adiabatiques qui a pu ensuite être transposée en Mécanique ondulatoire. M. Léon Brillouin a consacré naguère de très beaux exposés à la théorie des invariants adiabatiques et a donné de nombreux exemples d'application à des phénomènes divers de la formule (39) de Boltzmann : il en a notamment tiré une déduction très simple de la formule que Wien avait démontrée par des raisonnements de thermodynamique pour la répartition spectrale du rayonnement noir <sup>(1)</sup>.

(1) *Voir*, en particulier, bibliographie, [1], chapitre VII et note annexe 2.

---

## CHAPITRE VI

### ORIGINE

# DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET SON INTERPRÉTATION PAR LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION

**1. Fréquence cyclique et fréquence ondulatoire.** — L'auteur est arrivé naguère aux premières idées de la Mécanique ondulatoire en réfléchissant à la différence des transformations relativistes de la fréquence d'une horloge et de la fréquence d'une onde. Cette question présentant pour nous un grand intérêt et étant généralement passée sous silence dans les traités de Mécanique quantique, nous allons nous y arrêter un peu.

Nous savons que les formules de transformation pour l'énergie et pour la température quand on passe du système propre d'un corps à un autre système galiléen animé de la vitesse  $\beta c$  par rapport au premier sont :

$$(1) \quad W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad T = T_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Nous voyons que, tandis que l'énergie est plus petite dans le système propre que dans l'autre système, l'inverse se produit pour la température. La différence entre les deux genres de transformations est la même que celle qui existe pour la fréquence d'une onde et la fréquence d'une horloge (fréquence ondulatoire et fréquence cyclique).

Considérons dans un référentiel  $R_0$  un processus périodique variant sinusoïdalement au cours du temps. Il sera représenté par une variable de repérage ayant pour expression :

$$(2) \quad q_0 = a_0 \sin 2\pi v_0 t_0$$

avec un choix convenable de l'origine du temps  $t_0$ . Le processus en question pourra être, par exemple, le mouvement d'une horloge

fixe dans  $R_0$  et alors la variable  $q_0$  pourra être la projection de l'extrémité de l'aiguille de l'horloge sur un des diamètres de son cadran.

La théorie de la Relativité nous apprend que, pour un observateur galiléen qui voit l'horloge se déplacer avec la vitesse  $\beta c$ , le mouvement cyclique de cette horloge paraît ralenti dans le rapport  $\sqrt{1 - \beta^2}$  de sorte que la variable de repérage aura une expression de la forme :

$$(3) \quad q = a_0 \sin 2\pi v_c t,$$

où  $v_c$  est la « fréquence cyclique » de l'horloge pour cet observateur. D'après la formule relativiste du ralentissement des horloges, on a :

$$(4) \quad v_c = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Imaginons maintenant qu'en tout point du référentiel  $R_0$  soit placée une horloge immobile de fréquence  $v_0$ . Ainsi se trouvera définie en chaque point de  $R_0$  un phénomène périodique de fréquence  $v_0$  et l'*ensemble* des variables  $q_0$  correspondantes, supposées toutes en phase, définira dans  $R_0$  une onde stationnaire dont l'expression sera :

$$(5) \quad \Psi_0 = a_0 \sin 2\pi v_0 t_0$$

en tout point de  $R_0$ .

Passons à un autre système de référence galiléen  $R$  animé par rapport à  $R_0$  de la vitesse  $\beta c$  et prenons pour axe des  $z$  dans  $R$  la direction de la vitesse relative de  $R$  par rapport à  $R_0$ . La transformation de Lorentz montre que dans le système de référence  $R$ , l'onde stationnaire définie par l'*ensemble* des  $\Psi_0$  prend la forme d'une onde progressive d'expression :

$$(6) \quad \Psi = a_0 \sin 2\pi v_0 \frac{t - \frac{\beta}{c} z}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a_0 \sin 2\pi \left( \nu t - \frac{z}{\lambda} \right),$$

avec :

$$(7) \quad \nu = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad V = \frac{c}{\beta}, \quad \lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{c\sqrt{1 - \beta^2}}{v_0 \beta}.$$

L'expression de  $\Psi$  donne la répartition des phases des horloges telle qu'elle est observée par l'observateur  $R$  : cette répartition est

celle d'une onde en propagation le long de Oz avec la fréquence  $\nu$  et la vitesse de phase  $V$ .

La formule :

$$(8) \quad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

montre comment se transforme la « fréquence ondulatoire » quand on passe du système galiléen  $R_0$  où l'onde est stationnaire au système  $R$  où elle est progressive. Cette formule fondamentale est bien connue et joue un grand rôle dans beaucoup de problèmes importants de la théorie de la Relativité, par exemple dans la théorie de l'effet Doppler.

Maintenant la comparaison des formules (1), (4) et (8) fait apparaître que l'énergie et la fréquence ondulatoire d'une part, la température et la fréquence cyclique d'autre part, se transforment de même. Le premier de ces deux faits nous permet de supposer que la relation entre l'énergie du corpuscule et la fréquence de l'onde que la Mécanique ondulatoire lui associe par la relation  $W = h\nu$  est valable dans tous les systèmes galiléens si toutefois elle est réalisée dans le système propre  $R_0$  sous la forme :

$$(9) \quad W_0 = h\nu_0 = m_0c^2$$

qui fait correspondre à la masse propre  $m_0$  la fréquence propre  $\nu_0$ . C'est là le point de départ de la Mécanique ondulatoire.

On pourrait au premier abord être surpris de voir que la quantité de chaleur et la température qui se transforment comme une fréquence cyclique suivant les formules :

$$Q = Q_0\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{et} \quad T = T_0\sqrt{1 - \beta^2}$$

ne se transforment pas comme l'énergie. On sait, en effet, que la chaleur est une forme de l'énergie (énergie des mouvements moléculaires incoordonnés) et, de plus, la Thermodynamique statistique nous a habitués à considérer la température d'un corps comme proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ses molécules. Mais, si l'on se reporte au raisonnement qui nous a permis au chapitre IV d'établir la variance relativiste de la température, on voit que l'énergie globale fournie à un corps se répartit en chaleur et travail et que la répartition est imposée par le fait, inconnu des théories antérieures à celle de la Relativité, qu'un apport

d'énergie est susceptible de faire varier la masse propre du corps. C'est la liaison ainsi établie, comme conséquence du principe de l'inertie de l'énergie, entre l'énergie interne du corps et la quantité de chaleur qu'il reçoit qui permet d'expliquer pourquoi la formule de transformation n'est pas la même pour l'énergie et la quantité de chaleur. De plus, en ce qui concerne la proportionnalité de la température à l'énergie cinétique moyenne des molécules, on doit remarquer qu'elle n'est valable que dans le système propre du corps et que, même dans ce système, elle n'est valable qu'à l'approximation newtonienne : ceci résulte des formules données au paragraphe 12 du chapitre III. Rien n'impose donc à la température d'avoir la même formule de transformation relativiste que l'énergie.

**2. La Mécanique ondulatoire à l'approximation de l'Optique géométrique.** — Le point de départ de la Mécanique ondulatoire a été d'associer au mouvement rectiligne et uniforme d'un corpuscule libre la propagation d'une onde plane monochromatique qu'on peut représenter par la fonction complexe :

$$(10) \quad \psi = a e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \left( Wt - \frac{z}{\lambda} \right)},$$

l'axe des  $z$  étant pris dans la direction de propagation qui est la direction du mouvement du corpuscule. Si, dans le système propre du corpuscule, on définit la fréquence  $\nu_0$  de l'onde stationnaire associée au corpuscule par la formule (9), les formules de transformation données au paragraphe précédent permettent d'écrire :

$$(11) \quad \psi = a e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (Wt - pz)},$$

avec :

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$W$  et  $p$  étant reliés à  $v$  et à  $\lambda$  par les formules :

$$(12) \quad W = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}.$$

On voit que, si l'on pose :

$$(13) \quad \psi = a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}, \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

$a$  et  $\varphi$  réels, la phase  $\varphi$  coïncide avec l'action hamiltonienne  $A$  changée de signe qui est égale à  $Wt - pz$ .

Si le corpuscule est soumis à un champ de force, sa trajectoire est en général courbe, mais on peut toujours écrire son onde associée sous la forme :

$$(14) \quad \psi(x, y, z, t) = a(x, y, z, t) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi(x, y, z, t)}.$$

Dans le cas particulier où le champ est permanent et où la propagation de l'onde peut être décrite par l'approximation de l'Optique géométrique, on a :

$$(15) \quad \psi = a(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar} A(x, y, z, t)} = a(x, y, z) e^{\frac{i}{\hbar} (Wt - \int \vec{p} \cdot d\vec{s})},$$

$d\vec{s}$  étant l'élément de trajectoire du corpuscule et l'on a encore  $\varphi = -A$ . On trouve encore  $p = \frac{\hbar}{\lambda}$ , mais ici  $p$  et  $\lambda$  sont des fonctions de  $x, y, z$ . On voit alors que le principe de moindre action de Maupertuis, qui s'exprime par :

$$\delta \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{s} = 0,$$

coïncide avec le principe de Fermat appliqué au rayon de l'onde qui s'exprime par :

$$\delta \int_A^B \frac{ds}{\lambda} = 0.$$

Il en résulte que les rayons de l'onde coïncident avec les trajectoires possibles du corpuscule et l'on peut conserver l'idée fondamentale de la localisation du corpuscule dans l'espace en admettant qu'il se déplace en suivant *l'un* des rayons de l'onde. L'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule sont alors définies par les formules :

$$(16) \quad W = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi,$$

ce qui montre l'identité de la phase  $\varphi$  et de la fonction  $S$  de Jacobi. De plus, on démontre alors aisément que, si l'on suppose également probables toutes les positions initiales possibles du corpuscule avant l'entrée dans le champ de force, la probabilité de trouver le corpuscule dans l'élément  $d\tau = dx dy dz$  de l'espace physique est égale à :

$$a^2(x, y, z) d\tau = |\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau.$$

Malheureusement, cette image si claire de l'association de l'onde et du corpuscule ne subsiste plus en dehors de l'approximation

de l'Optique géométrique. On peut bien toujours trouver pour l'onde une expression de la forme (14), mais  $\varphi$  n'est plus reliée simplement à l'action hamiltonienne définie par la Mécanique ponctuelle (classique ou relativiste). On ne peut plus définir des rayons au sens de l'Optique géométrique et la notion de rayon semble perdue. Ces circonstances ont conduit la plupart des théoriciens à admettre que le corpuscule n'a pas à chaque instant une position bien déterminée, qu'il est répandu à «l'état potentiel» dans toute l'étendue de l'onde tandis que l'onde elle-même n'est plus qu'une représentation abstraite de probabilités. On ne conserve de l'image obtenue à l'approximation de l'Optique géométrique que le postulat suivant : *La probabilité pour que le corpuscule manifeste sa présence à l'instant  $t$  dans l'élément de volume  $d\tau$  est donnée par  $|\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau$* , mais ce postulat devient alors tout à fait arbitraire.

**3. La conception de l'onde pilote.** — A l'époque où, en 1927-1928, se développait cette interprétation très abstraite, j'ai cherché à en trouver une autre qui s'accordât mieux avec les conceptions assez concrètes qui m'avaient guidé dans mes premiers travaux.

Je partais des trois postulats suivants :

1<sup>o</sup> Le corpuscule doit être à chaque instant localisé dans l'espace et décrire une trajectoire continue au cours du temps ;

2<sup>o</sup> L'onde de la Mécanique ondulatoire doit être une réalité physique et se propager dans l'espace au cours du temps ;

3<sup>o</sup> Pour interpréter les phénomènes de l'optique de la lumière et de l'optique des électrons, il est nécessaire de supposer que le corpuscule est intimement lié à son onde de sorte que le mouvement du corpuscule soit, en quelque sorte, guidé par la propagation de l'onde (1).

Guidé en partie par une représentation hydrodynamique de la propagation de l'onde  $\Psi$  qui venait d'être développée par Madelung et que j'avais reprise, je supposais que le corpuscule, toujours localisé dans son onde, suivait l'une des lignes de courant de l'image hydrodynamique en question. Ceci me conduisait immédiatement à une interprétation de l'onde qui n'était pas tout à fait sans analogie avec l'Optique géométrique.

(1) Dans un remarquable article paru en 1953, M. Renninger a montré que, dans le cas des photons, il existe des raisons expérimentales absolument convaincantes d'admettre ces trois postulats (bibliographie, [2]). Voir aussi [4], troisième référence.

tement à supposer que le corpuscule, s'il occupe à l'instant  $t$  la position  $x, y, z$ , y possède une énergie  $W$  et une quantité de mouvement  $\vec{p}$  données par les formules (16) :

$$W = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi,$$

*même en dehors de l'approximation de l'Optique géométrique.*

Comme la Dynamique relativiste établit entre  $W$  et  $\vec{p}$  la relation :

$$\vec{p} = \frac{W\vec{v}}{c^2}, \quad \text{d'où} \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{W}.$$

pour le corpuscule libre, on en tire en ce cas :

$$(17) \quad \vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}.$$

Cette formule fondamentale, que j'ai nommée « la formule du guidage », impose en quelque sorte un mouvement déterminé au corpuscule dans son onde. A l'approximation newtonienne où  $W \simeq m_0 c^2$ , elle prend la forme simple :

$$(18) \quad \vec{v} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

et elle apparaît comme une extrapolation de la formule de Jacobi :

$$\vec{v} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} S$$

valable à l'approximation de l'Optique géométrique qui rejoint la Dynamique classique.

De ces formules, j'apercevais une bien intéressante interprétation. Nous avons été précédemment conduits à assimiler l'ensemble des valeurs locales d'une onde en propagation à l'ensemble de petites horloges entraînées par le mouvement de l'onde. Si, au sein de l'onde, le corpuscule est constamment localisé, nous sommes amenés à nous le représenter comme une plus grosse horloge se déplaçant au milieu de petites horloges. L'idée vient alors d'admettre que cette grosse horloge doit se déplacer de telle façon que son indication reste constamment égale à celle des petites horloges qui l'entourent immédiatement. En d'autres termes, le corpuscule doit se déplacer de telle façon que son oscillation interne reste constamment *en phase* avec l'onde progressive à laquelle il est incorporé.

Il est facile de vérifier qu'on retrouve ainsi la formule du guidage. En effet, si le corpuscule se déplace de  $d\vec{s}$  dans l'espace physique pendant le temps  $dt$ , la persistance de l'accord de phase entre la vibration interne et l'onde environnante exige évidemment que :

$$(19) \quad \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \frac{d\vec{s}}{dt} \right) dt = v_c dt.$$

Comme on a :

$$(20) \quad \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = v, \quad v = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad v_c = v_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

il vient :

$$(21) \quad 1 + \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot \vec{v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{v_c}{v} = 1 - \beta^2$$

et cette équation est précisément vérifiée si l'on attribue à  $\vec{v}$  la valeur (17), c'est-à-dire si l'on admet la formule du guidage.

Les formules précédentes ont été écrites en supposant le corpuscule non soumis à un champ extérieur. Dans le cas plus général d'un corpuscule soumis à un champ, on obtiendra une théorie relativiste en supposant qu'on a affaire à un corpuscule de charge électrique  $\epsilon$  soumis à un champ électromagnétique dérivant d'un potentiel scalaire  $V$  et d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  et en adoptant l'équation d'ondes de Klein-Gordon dont on déduit que :

$$(22) \quad \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon V \right)^2 - \left( \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{\epsilon}{c} \vec{A} \right)^2 = m_0^2 c^2.$$

On trouve comme formule du guidage :

$$(23) \quad \vec{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{\epsilon}{c} \vec{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon V}$$

qui naturellement pour  $\vec{A} = V = 0$  nous redonne la formule (17).

Il est facile de montrer que cette formule exprime bien encore que la vibration interne du corpuscule reste constamment en phase avec l'onde environnante. Il suffit de poser :

$$(24) \quad \begin{cases} h v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = m_0 c^2 + \epsilon V_0, \\ h v_c = h v_0 \sqrt{1 - \beta^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \epsilon \left( V - \frac{\vec{v} \cdot \vec{A}}{c} \right). \end{cases}$$

L'accord des phases exige toujours que la relation (19) soit vérifiée, ce qui donne ici :

$$(25) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon V \right) + \left( \vec{\text{grad}} \varphi + \epsilon \frac{\vec{A}}{c} \right) \vec{v} = m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

En remplaçant au second membre  $\sqrt{1 - \beta^2}$  par  $\frac{m_0 c^2}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \epsilon V}$ , on vérifie

aisément que la formule (25) est vérifiée si l'on adopte la loi du guidage (23), compte tenu de l'équation (22).

**4. Le potentiel quantique.** — L'interprétation de la Mécanique ondulatoire que nous venons d'esquisser a été présentée d'abord sous la forme de la théorie de l'onde pilote. On y considérait, en somme, l'onde homogène de la Mécanique ondulatoire comme ayant une existence physique réelle et l'on imposait (arbitrairement) au corpuscule considéré comme ayant toujours une position bien définie dans l'onde, l'obligation de suivre, en accord avec la formule du guidage, l'une des lignes de courant de la propagation de l'onde.

On pouvait alors voir que cela obligeait à admettre que le corpuscule est soumis, en dehors de l'action des potentiels du type classique qui traduisent la présence d'un champ de force extérieur, à l'action d'un potentiel d'un type nouveau, « le potentiel quantique ». La « force quantique » dérivant de ce potentiel traduirait l'existence d'une action que l'onde environnante exerce sur le corpuscule comme cela paraît nécessaire pour interpréter les phénomènes de diffraction et d'interférences dans une théorie qui admet la localisation du corpuscule dans l'espace.

Dans le cas de l'équation d'ondes non relativiste de Schrödinger, le potentiel quantique a pour expression :

$$(26) \quad Q = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}.$$

Dans le cas d'un corpuscule sans spin obéissant à l'équation relativiste de Klein-Gordon, on peut développer toute la dynamique du corpuscule sous forme lagrangienne et hamiltonienne comme je l'ai fait dans d'autres exposés (*voir* [3], chap. X). On est alors amené à attribuer au corpuscule une masse propre variable suivant sa position dans l'onde qui est donnée par la formule :

$$(27) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square a}{a}}$$

et, *dans le système propre*, c'est la grandeur  $M_0c^2$  dont le gradient changé de signe donne la force quantique. On peut alors définir le potentiel quantique en posant :

$$(27 \text{ bis}) \quad Q_0 = M_0c^2 - m_0c^2, \quad Q = Q_0\sqrt{1 - \beta^2}.$$

A l'approximation newtonienne où  $\beta \ll 1$  et où  $\square a \simeq -\Delta a$ , ce potentiel quantique se réduit bien à l'expression (26) comme on le vérifie aisément et l'on peut alors définir le potentiel quantique par :

$$Q = M_0c^2 - m_0c^2.$$

Je n'insisterai pas davantage ici sur cette « dynamique du guidage », ni sur la forme plus complexe qu'elle prend dans le cadre des équations de l'électron à spin de Dirac.

**5. La théorie de la double solution.** — Quand j'ai étudié en 1926-1927 cette interprétation de la Mécanique ondulatoire, il m'était apparu que la théorie véritable, dépassant le point de vue provisoire de l'onde pilote, devait établir un lien bien plus intime entre le corpuscule et l'onde. Développant cette idée sous le nom de « théorie de la double solution », j'affirmais que l'onde  $\Psi$  homogène, déjà usuelle à cette époque en Mécanique ondulatoire, ne fournissait qu'une représentation des probabilités et que la véritable onde physique du corpuscule devait être une onde  $u$  comportant une très haute concentration de l'amplitude qui serait le corpuscule au sens étroit du mot. En dehors de cette région, l'onde  $u$  se réduirait à une onde homogène coïncidant sensiblement (à une constante de normalisation près) avec l'onde  $\Psi$  homogène de la Mécanique ondulatoire usuelle. Le corpuscule serait incorporé à l'onde  $u$ , celle-ci constituant un champ à bosse (bunched field) du type qu'Einstein avait imaginé pour représenter le corpuscule comme un accident local du champ.

Après avoir pendant longtemps abandonné cette difficile tentative, je l'ai reprise depuis une douzaine d'années avec l'aide d'un très petit nombre de collaborateurs et d'assez grands progrès ont été accomplis dans cette voie. Comment l'onde  $\Psi$  usuelle, bien que subjective et pure représentation de probabilités, est cependant reliée à l'onde  $u$  de telle façon que le corpuscule semble décrire une des lignes définies par la formule du guidage à partir

de la propagation de l'onde  $\Psi$ , comment ce mouvement pourrait peut-être s'interpréter en supposant que l'équation de propagation véritable de l'onde  $u$  est non linéaire, cette non-linéarité ne se manifestant usuellement que dans la très petite région singulière de très haute concentration du champ, c'est ce que j'ai exposé ailleurs et je n'y reviens pas ici (<sup>1</sup>). Mais je voudrais cependant insister sur deux points particuliers.

Le premier de ces points est relatif à la démonstration de la formule du guidage. J'ai pu en donner deux démonstrations en partant des équations linéaires usuelles, mais en y adjoignant une hypothèse assez arbitraire de concordance de phase. On peut remplacer cette hypothèse par celle d'un raccordement entre les lignes de courant de l'onde extérieure avec les lignes de courant intérieures à la très petite région de hautes valeurs du champ : celle-ci, c'est-à-dire le corpuscule, se trouve ainsi emprisonnée dans un tube très délié de lignes de courant du champ extérieur et la formule du guidage en résulte immédiatement. La démonstration prend alors une forme très voisine de celle qu'avait donnée autrefois Georges Darmois pour montrer que, dans un champ de gravitation, le mouvement d'une particule est représenté par une géodésique de l'espace-temps. Comme Einstein l'avait montré dans le cas de la Gravitation, le succès de cette démonstration est certainement lié au caractère non linéaire des équations du champ (ici des équations de propagation de l'onde  $u$ ).

Un second point sur lequel je voudrais insister est le suivant. En théorie quantique usuelle, il existe des phénomènes tels que les transitions quantiques de Bohr qu'on déclare échapper entièrement à toute description en termes d'espace et de temps et cela paraît vrai dans le cadre des équations linéaires qu'on utilise. Mais si l'on admet qu'il peut s'introduire de la non-linéarité dans les équations d'ondes, la question change d'aspect : on peut, en effet, se demander si ces phénomènes déclarés impossibles à décrire ne correspondent pas en réalité à des états transitoires très rapides à caractère non linéaire. MM. Andrade e Silva, Fer, Leruste et Lochak ont entrepris dans cette direction de très intéressantes recherches en s'appuyant sur les propriétés des équations non linéaires et en particulier sur la théorie des cycles limites (<sup>2</sup>).

(<sup>1</sup>) Voir bibliographie, [4].

(<sup>2</sup>) Bibliographie, [5].

**6. Remarques au sujet de l'aspect hydrodynamique des conceptions précédentes.** — Nous sommes parvenus à une sorte d'image hydrodynamique de la propagation de l'onde  $a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}$  en Mécanique ondulatoire. On l'obtient en considérant un fluide qui aurait en chaque point et à chaque instant la densité  $\rho$  donnée, dans le cas de l'équation de Schrödinger par :

$$(28) \quad \rho = a^2(x, y, z, t) = |\Psi(x, y, z, t)|^2$$

et dont la vitesse locale  $\vec{v}$  serait définie à chaque instant par la formule du guidage précédemment étudiée. Il résulte alors de l'équation de propagation que ce fluide fictif se conserve de sorte que l'équation de continuité hydrodynamique :

$$(29) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

soit constamment satisfaite.

Sans qu'on puisse prendre au pied de la lettre une pareille image, on peut cependant se représenter le corpuscule comme une sorte de granule qui serait entraîné par l'écoulement fluide et décrirait l'une des lignes de courant comme ces grains de lycopode que les hydrauliciens sèment à la surface d'un liquide en écoulement pour que la trajectoire de chacun de ces grains matérialise la forme d'une ligne de courant.

Il est utile de faire ici une petite remarque au sujet de l'expression : le corpuscule suit une des lignes de courant de l'écoulement hydrodynamique correspondant à la propagation de son onde. La formule du guidage impose au corpuscule d'avoir sa vitesse tangente à la ligne de courant sur laquelle il se trouve à l'instant considéré. Si l'écoulement est permanent, c'est-à-dire ne varie pas au cours du temps, les lignes de courant ne se déforment pas et la trajectoire coïncide avec une des lignes de courant. Si, au contraire, l'écoulement n'a pas un caractère permanent, les lignes de courant se déforment au cours du temps et la trajectoire du corpuscule, bien que tangente à chaque instant à une ligne de courant, ne coïncide plus avec l'une des lignes de courant. Cette circonstance est si connue en Hydrodynamique qu'il est inutile d'y insister davantage.

Si l'on étudie le mouvement du corpuscule défini par la formule du guidage, on s'aperçoit que, par suite de l'action de la force

quantique et même quand les forces extérieures sont nulles, l'énergie et la quantité de mouvement du corpuscule ne restent pas constantes. Dans l'image hydrodynamique, la force quantique peut donc être considérée comme une pression que le fluide exercerait sur le corpuscule <sup>(1)</sup>.

Cependant, on peut démontrer qu'en moyenne, c'est-à-dire pour une infinité de corpuscules répartis dans l'espace avec la densité  $\rho$ , l'énergie et la quantité de mouvement se conservent. Nous nous bornerons à donner ici une démonstration simple en ce qui concerne l'énergie dans le cadre de la théorie non relativiste.

On peut exprimer la conservation de l'énergie globale  $W = \int w \rho d\tau$ , soit en écrivant :

$$(30) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int \rho w d\tau = \int \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} w + \rho \frac{\partial w}{\partial t} \right) d\tau = 0,$$

soit en remarquant que l'énergie moyenne d'une particule varie de  $\frac{Dw}{Dt} dt$  dans le temps  $dt$  et en écrivant que la valeur moyenne des variations de l'énergie pendant ce temps est nulle, ce qui conduit à écrire :

$$(31) \quad \int \rho \frac{Dw}{Dt} d\tau = \int \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} w \right) d\tau = 0.$$

En supposant  $\rho$  nulle à l'infini, ce qui physiquement est toujours réalisé parce que les trains d'onde sont toujours limités, on peut démontrer que les formules (30) et (31) sont équivalentes. En effet, en tenant compte de l'équation de continuité, l'équation (30) peut s'écrire :

$$(32) \quad \int \left( \rho \frac{\partial w}{\partial t} - w \text{ div } \vec{\rho v} \right) d\tau = 0$$

et,  $\rho$  étant nulle à l'infini, une intégration par partie montre que (32) est équivalente à (31).

Utilisant alors la formule (31), nous allons l'appliquer à la forme non relativiste de la théorie du guidage en posant :

$$(33) \quad \rho = a^2, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{v} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

(1) Cette analogie a été précisée par M. Jean-Louis Destouches dans les travaux qu'il a poursuivis dans ces dernières années. Voir notamment bibliographie, [6].

et nous tiendrons compte de l'équation (équation de Jacobi généralisée) qui se déduit de l'équation de Schrödinger :

$$(34) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \operatorname{grad}^2 \varphi + Q,$$

où  $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}$ . L'équation (31) nous donne alors :

$$(35) \quad \int a^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{m} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) d\tau = 0,$$

mais, en dérivant (34) par rapport au temps, on voit que la parenthèse de l'équation (35) est égale à  $\frac{\partial Q}{\partial t}$  de sorte qu'il vient :

$$(36) \quad \int a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Delta a}{a} \right) d\tau = \int \left( a \Delta \frac{\partial a}{\partial t} - \Delta a \frac{\partial a}{\partial t} \right) d\tau = 0.$$

Les fonctions  $a$  et  $\frac{\partial a}{\partial t}$  étant nulles à l'infini, une double intégration par parties montre que l'équation (36) est bien vérifiée et, par suite, que l'énergie moyenne reste bien constante.

J'ai donné ailleurs <sup>(1)</sup> une démonstration plus générale de la conservation en moyenne de l'énergie et de la quantité de mouvement d'un corpuscule dans le cadre de la théorie relativiste de Klein-Gordon.

Nous reviendrons sur la signification de la conservation en moyenne de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le chapitre suivant quand nous aurons introduit l'hypothèse du milieu subquantique de Bohm-Vigier.

<sup>(1)</sup> Voir bibliographie, [3], p. 270-273.

*CHAPITRE VII*

**INTRODUCTION**

**DE CONCEPTIONS THERMODYNAMIQUES  
EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE**

**1. Le milieu subquantique de Bohm-Vigier.** — Nous avons obtenu au chapitre précédent une image hydrodynamique de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution. Cette image correspond exactement aux idées que j'avais développées en 1926-1927 et que j'ai reprises depuis 1951. Mais dans ces dernières années, j'ai de plus en plus reconnu qu'elles ne constituaient qu'une première approximation et qu'elles devaient être complétées par l'introduction d'hypothèses nouvelles faisant intervenir la thermodynamique statistique.

Le premier pas dans cette voie a été fait en 1954 par MM. Bohm et Vigier <sup>(1)</sup> quand ils ont introduit l'hypothèse de l'existence d'un « milieu subquantique », milieu caché en quelque sorte plus profond que le niveau microphysique avec lequel toutes les particules du niveau microphysique seraient en contact permanent et pourraient constamment échanger de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Qu'est-ce qui a amené MM. Bohm et Vigier à adopter cette hypothèse ? En dehors de quelques considérations générales, c'est le désir de donner une justification satisfaisante du rôle de probabilité de présence du corpuscule en un point à un instant donné que la Mécanique ondulatoire attribue à la quantité  $|\Psi|^2$ .

Nous avons vu que la formule du guidage, en établissant l'obligation pour le corpuscule de suivre l'une des lignes de courant de l'écoulement hydrodynamique correspondant à la propagation de l'onde, avait conduit à admettre que, si toutes les probabilités des positions initiales du corpuscule dans l'onde sont considérées comme proportionnelles à  $|\Psi(x, y, z, t_0)|^2$ , la probabilité pour que le

<sup>(1)</sup> Bibliographie, [7].

corpuscule se trouve à l'instant  $t$  dans un élément  $d\tau$  de l'espace est, du moins à l'approximation non relativiste, égale à  $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ . Cette conclusion se déduisait de l'équation de continuité où  $\vec{v}$  est la vitesse définie par la formule du guidage. Mais, si l'on examine bien cette démonstration, on s'aperçoit qu'elle soulève une difficulté tout à fait analogue à celle qui se présente, nous l'avons vu, en Mécanique statistique quand, après avoir démontré le théorème de Liouville, on cherche à en déduire que la probabilité de la présence du point représentatif d'un système dans l'élément  $d\tau$  de l'extension-en-phase est proportionnelle à cet élément  $d\tau$  (<sup>1</sup>). Nous avons vu que, pour parvenir à justifier cette conclusion, il fallait ajouter au théorème de Liouville, soit une hypothèse ergodique, soit l'hypothèse à caractère plus physique du chaos moléculaire.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue. Si l'évolution mécanique d'un système se poursuit régulièrement sans aucune perturbation, il ne serait pas justifié, en général, d'admettre qu'un même tube de trajectoires non perturbées dans l'extension-en-phase remplisse toute cette extension. Mais on peut supposer que le mouvement du système soit soumis à de constantes perturbations aléatoires qu'on peut regarder, par exemple, comme traduisant la continue interaction du système avec un système extérieur (Si le système considéré se réduit à une molécule d'un gaz, il s'agira de la constante interaction de cette molécule avec l'ensemble des autres molécules du gaz.) Alors le point représentatif du système passera constamment d'un tube de trajectoires non perturbées dans un autre et, au bout d'un temps suffisamment long (qui peut être extrêmement court à notre échelle), on pourra considérer le point représentatif (et, par suite, l'élément  $d\tau$  qui le contient) comme ayant parcouru successivement tous les tronçons de trajectoires non perturbées et ayant ainsi balayé l'ensemble de l'extension-en-phase, ce qui justifiera le principe servant de base à la Mécanique statistique.

C'est une hypothèse analogue que MM. Bohm et Vigier ont introduite dans la nouvelle interprétation de la Mécanique ondula-

(<sup>1</sup>) La difficulté qui se présente ici est très clairement illustrée par le fait que, dans un atome d'hydrogène à l'état  $s$ , l'électron d'après la formule du guidage doit rester immobile en un point de l'atome de sorte que, sans l'hypothèse de Bohm-Vigier, on ne voit pas du tout comment peut se réaliser la probabilité de présence en  $|\Psi|^2$ .

toire pour justifier le rôle de probabilité de présence joué par la probabilité  $|\Psi|^2$ . Ici, c'est le produit  $\rho d\tau$  qui se conserve dans l'espace physique le long d'une ligne de courant en vertu de l'équation de continuité, c'est-à-dire, si l'on admet la formule du guidage, le long d'un tube de trajectoires non perturbées des particules. Pour qu'on puisse en déduire que  $\rho d\tau$  donne la probabilité de présence du corpuscule dans l'élément  $d\tau$ , il faudrait que le même tube de trajectoires s'enroule indéfiniment dans la portion de l'espace physique qui est accessible au corpuscule de manière à la remplir complètement. Or, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi en général (¹).

Dans le Mémoire cité plus haut, MM. Bohm et Vigier ont présenté une justification théorique de l'interprétation statistique du  $|\Psi|^2$  en admettant une hypothèse de continues perturbations aléatoires du mouvement des corpuscules analogue à celle que Boltzmann avait introduite dans le cadre de la Mécanique statistique classique. Si l'on admet que ces perturbations sont représentables par l'apparition momentanée dans l'équation des ondes de petits potentiels perturbateurs aléatoires, l'équation de continuité restera valable pendant les périodes de perturbation et la grandeur  $\rho d\tau$  se conservera le long d'un tube de trajectoires même dans les portions perturbées de ce tube. Alors un même élément  $d\tau$  passera constamment d'un tube de trajectoires non perturbées à un tube voisin avec conservation de  $\rho d\tau$ . On pourra donc considérer un élément  $d\tau$  du fluide dans la représentation hydrodynamique de la Mécanique ondulatoire comme parcourant successivement, en un temps extrêmement court à notre échelle tous les tronçons de tubes de courant non perturbés de façon à balayer uniformément avec conservation de  $\rho d\tau$  tout l'ensemble de la région de l'espace physique accessible au corpuscule et ceci permettra de considérer la quantité  $\rho = |\Psi|^2$  comme mesurant la probabilité de la présence locale du corpuscule.

Telle est la marche générale du raisonnement développé par MM. Bohm et Vigier dans leur Mémoire et ce raisonnement pourrait être repris à l'aide de la théorie des chaînes de Markov. Les auteurs ont considéré les continues perturbations aléatoires auxquelles le corpuscule serait soumis comme le résultat des réactions aléa-

(¹) Voir la note de la page précédente.

toires qu'exercerait sur lui un milieu profond et caché qu'ils ont appelé « le milieu subquantique ».

**2. Comparaison avec le mouvement d'un granule dans l'écoulement d'un fluide chaud.** — La conception du milieu subquantique, que beaucoup de faits constatés en Microphysique semblent confirmer et qui s'introduit sous une forme voilée dans certains résultats de la théorie quantique des champs (par exemple quand elle attribue au vide des propriétés physiques telles que « la polarisation du vide »), présente une grande importance pour le problème de l'établissement d'une relation entre les grandeurs mécaniques et les grandeurs thermodynamiques. Il serait, en effet, inconcevable que, dans la dynamique d'un corpuscule isolé, c'est-à-dire éloigné de tout autre système microphysique, s'introduisent des grandeurs ayant une signification thermodynamique, puisque celles-ci paraissent essentiellement liées aux variations aléatoires d'un système d'une grande complexité, ce qui ne peut être le cas d'un corpuscule isolé. Mais la question apparaît sous un tout autre jour si l'on admet qu'un corpuscule de l'échelle microphysique quand il nous apparaît comme isolé est cependant toujours en contact énergétique avec un milieu profond et caché possédant une structure complexe et aléatoire. Or l'introduction de l'hypothèse de l'existence du milieu subquantique conduit à l'idée que toute particule du niveau microphysique pourrait être considérée comme constamment en contact avec une sorte de thermostat caché et il deviendrait alors possible de lui attribuer une température ainsi qu'une entropie reliées à son mouvement. Tout un horizon nouveau s'ouvre alors devant nos yeux.

Ceci nous amène à reprendre, en la modifiant assez profondément, l'image hydrodynamique du mouvement du corpuscule que nous avions précédemment envisagée. Nous avions comparé le mouvement du corpuscule défini par la formule du guidage avec le mouvement d'un granule (d'un grain de lycopode) qui est entraîné le long d'une ligne de courant par l'écoulement d'un fluide. Mais, si le fluide est chaud, je veux dire s'il n'est pas au zéro absolu, le granule ne suivra régulièrement la ligne de courant que s'il est assez lourd pour résister aux chocs aléatoires des molécules du fluide. S'il est très léger, il sera comme toutes les molécules du fluide animé d'une agitation brownienne qui se superposera au mouvement régulier que lui impose l'écoulement général du fluide.

A une différence d'échelle près, le corpuscule serait donc comparable à un granule en suspension dans un fluide chaud qui serait animé d'un mouvement brownien dû à ses interactions avec les molécules invisibles du fluide, et auquel, pour cette raison, on pourrait appliquer des conceptions thermodynamiques. Si le fluide est immobile dans son ensemble, le mouvement brownien du granule le fait sautiller de-ci, de-là, sans mouvement continu. Si, au contraire, le fluide est animé d'un mouvement d'ensemble, le granule, qui sans le mouvement brownien serait entraîné régulièrement le long d'une ligne de courant du fluide, passera constamment par suite de l'agitation brownienne d'une ligne de courant à une autre. C'est d'ailleurs ce qui doit se produire pour les molécules elles-mêmes du fluide : chaque ligne de courant ne représente, en effet, la trajectoire d'une molécule qu'abstraction faite de l'agitation brownienne et l'ensemble des lignes de courant ne donne qu'une image statistique du mouvement global des molécules. On aperçoit maintenant de quelle manière l'introduction du milieu subquantique peut nous conduire à modifier l'image hydrodynamique que nous nous étions faite du mouvement d'un corpuscule microphysique.

**3. Première tentative pour établir une correspondance entre entropie et action, température et fréquence.** — Les idées que nous venons de développer conduisent naturellement à envisager l'établissement de relations entre les grandeurs dynamiques qui caractérisent le mouvement d'un corpuscule (conçu à la manière de la théorie de la double solution) et des grandeurs thermodynamiques telles qu'entropie et température. Quelques auteurs avaient eu autrefois des idées analogues. Eddington dans son célèbre livre *Espace, temps, gravitation* (p. 219 de l'édition française) avait esquissé, en termes d'ailleurs assez vagues, un rapprochement entre les deux invariants fondamentaux de la Relativité, l'Entropie et l'Action.

L'étude des théories anciennes de Helmholtz et de Boltzmann m'avait amené, il y a une quinzaine d'années, à rechercher l'établissement de correspondances entre l'entropie et l'action et entre la fréquence cyclique et la température. Je l'avais tenté dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 223, 1946, p. 248) et dans mon cours de l'année scolaire 1948-1949. J'en avais également parlé dans un article des *Cahiers de Physique* (n<sup>o</sup>s 31-32,

janvier 1948, p. 1). J'avais à cette époque envisagé deux manières différentes d'établir cette correspondance, mais je ne rappellerai ici que la seconde, car elle me paraît la plus intéressante et celle qui se raccorde le mieux avec celle que j'exposerai dans le chapitre VIII.

La formule de Boltzmann pour les systèmes périodiques que nous avons écrite au chapitre V sous la forme :

$$(1) \quad \delta Q = \frac{1}{\tau} \delta \mathcal{A} = v \delta \mathcal{A}$$

n'est valable que dans le système propre d'un corps qui est le siège d'un processus périodique de fréquence  $v$  et de période  $\tau$ . La grandeur  $\mathcal{A}$  représente alors l'intégrale cyclique d'action maupertuisienne prise sur une période entière du mouvement. Nous devons donc écrire d'une façon plus précise :

$$(2) \quad \delta Q_0 = v_0 \delta \mathcal{A}_0,$$

avec :

$$(3) \quad \mathcal{A}_0 = \int_0^\tau \sum_k p_k^0 d\dot{q}_k^0 dt,$$

où l'indice 0 indique que les quantités sont évaluées dans le système propre du corps.

Passons à un système de référence galiléen où le corps est animé de la vitesse  $\beta c$ . En multipliant la formule précédente par  $\sqrt{1 - \beta^2}$ , nous obtenons :

$$(4) \quad \delta Q = v_c \delta \mathcal{A}_0.$$

Comme  $dQ = T dS$ , on est amené à poser :

$$v_c = CT \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_0 = \frac{S}{C},$$

où  $C$  est une constante que, pour des raisons évidentes, il est naturel de prendre égale à  $\frac{k}{h}$ . On obtient ainsi les relations :

$$(5) \quad h v_c = k T, \quad \frac{\mathcal{A}_0}{h} = \frac{S}{k}$$

entre la fréquence cyclique et la température d'une part, entre l'intégrale cyclique d'action maupertuisienne et l'entropie d'autre

part. Comme  $v_c$  et  $T$  se transforment de la même façon quand on passe du système propre à l'autre système galiléen, la première relation (5) est de ce point de vue satisfaisante. Mais il n'en est pas de même de la seconde relation (5), car  $S$  est un invariant tandis que  $\mathcal{A}$  ne l'est pas.

On pourrait améliorer la seconde relation (5) en considérant comme système périodique un corpuscule conçu à la manière de la Mécanique ondulatoire comme le siège d'un processus périodique de fréquence  $v_0 = \frac{W_0}{h}$  et de période propre  $\tau_0 = \frac{h}{W_0}$ , avec  $W_0 = m_0 c^2$ .

On poserait alors, par définition :

$$(6) \quad \textcircled{A}_0 = \int_0^{\tau_0} \mathcal{L}_0 dt_0$$

et, en raison de l'invariance relativiste de l'action hamiltonienne, on aurait dans tout système galiléen :

$$(7) \quad \textcircled{A} = \int_0^{\tau} \mathcal{L} dt = \textcircled{A}_0,$$

ce qui conduit naturellement à remplacer la deuxième relation (5) par :

$$(8) \quad \frac{\textcircled{A}}{h} = \frac{S}{k}$$

et cela est plus satisfaisant.

Ce pas en avant, je ne l'avais pas fait il y a 15 ans. J'avais cependant entrevu la possibilité d'une Thermodynamique du corpuscule isolé puisque j'écrivais en 1948 dans mon article des *Cahiers de Physique* : « Il y a là l'amorce d'une Thermodynamique du point matériel qu'on pourrait chercher à développer dans le cadre de la Mécanique ondulatoire : il est assez difficile de dire où cette voie pourrait mener et nous nous contenterons d'en avoir indiqué le point de départ. » Ce qui m'empêchait d'aller plus loin à cette époque, c'est que je n'avais pas encore repris mes recherches sur la théorie de la double solution et que je ne pensais pas encore au milieu subquantique.

C'est seulement en 1961 en réfléchissant sur un travail récent de M. Terletsky que j'ai aperçu la possibilité d'introduire dans la théorie de la double solution les relations entre fréquence et température,

entre entropie et action dont j'avais soupçonné l'existence 15 ans plus tôt.

**4. Sur un Mémoire de M. Terletsky.** — M. le Professeur Terletsky au cours d'un séjour à Paris à l'Institut Henri-Poincaré a publié en 1960 deux très intéressants articles dans le *Journal de Physique* <sup>(1)</sup>. Dans le premier de ces Mémoires et dans la seconde partie du deuxième, il a envisagé l'hypothèse qu'il pourrait exister des particules de masse imaginaire animées de vitesses supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide, particules qui constituerait une sorte de thermostat caché analogue au milieu subquantique de Bohm-Vigier. Malgré l'intérêt des considérations que M. Terletsky a développées à ce sujet, je préfère ne pas introduire ici cette hypothèse de l'existence de particules à masse imaginaires et je me contenterai de dire quelques mots de la première partie de son second Mémoire.

M. Terletsky envisage un ensemble de champs  $\Psi_1(x, y, z, t) \dots \Psi_N(x, y, z, t)$  analogues aux ondes de la Mécanique ondulatoire et il définit l'action totale de ce champ par l'intégrale d'espace-temps d'une certaine fonction de Lagrange. Il suppose, de plus, que ce premier système de champs est en faible interaction énergétique avec un second système de champs qu'il considère comme définissant un thermostat et, par des calculs où interviennent des fonctionnelles, il en déduit une formule qu'il considère comme l'analogue de la loi de distribution canonique de Gibbs, mais qui me paraît plutôt devoir être assimilée à la définition boltzmannienne de l'entropie  $S = k \log P$ .

Dans tout ce début, M. Terletsky a défini l'action globale de ces  $N$  champs par intégrale d'espace-temps, mais ensuite il a montré d'une façon très intéressante comment l'hypothèse que les champs obéissent à des équations non linéaires permet de ramener cette définition à la définition usuelle de l'action hamiltonienne d'un corpuscule par une intégrale prise le long de sa ligne d'univers. Pour cela, il rappelle d'abord qu'une théorie des champs linéaires conduit toujours à ce qu'il nomme « la catastrophe ultraviolette », c'est-à-dire au fait que l'intégrale donnant l'énergie totale du champ est divergente du côté des très hautes fréquences. On sait que cette conséquence inadmissible est apparue en Physique dans la

(1) Bibliographie, [8].

théorie du rayonnement noir et que c'est afin de l'éviter que Planck a introduit pour la première fois en 1900 la notion de quantum d'Action. On élimine souvent aujourd'hui cette difficulté en introduisant une coupure arbitraire des intégrales du côté des hautes fréquences (cut-off) qui élimine les ondes de très hautes fréquences responsables de la divergence des intégrales : mais ce procédé n'est pas satisfaisant parce qu'il est entièrement arbitraire.

Or M. Terletsky remarque qu'il en est tout différemment pour les champs non linéaires car alors, s'il existe naturellement dans le cas des faibles amplitudes des solutions ayant très approximativement le caractère de solutions classiques en théorie linéaire, il peut aussi exister, les travaux de M. Terletsky et de ses élèves l'ont montré, des solutions présentant de très petites régions de haute concentration du champ qui sont stables et qui ont le caractère des « champs à bosse » d'Einstein. Il y a alors dans l'espace-temps des tubes d'univers extrêmement déliés où le champ prend de très hautes valeurs. Par suite, l'intégrale d'Action primitive-ment considérée par M. Terletsky se réduit très approximativement à une somme d'intégrales prises le long des tubes d'univers en question et l'on retrouve ainsi la notion classique d'action hamiltonienne liée au mouvement des corpuscules.

Il est presque inutile de souligner combien les idées de M. Terletsky sont ici en accord avec les conceptions de la théorie de la double solution. L'auteur ajoute d'ailleurs la remarque suivante qui pourrait être très utile dans l'étude de certains problèmes difficiles qui se présentent dans la nouvelle interprétation de la Mécanique ondulatoire : « En dehors des solutions à régions de haute concentration du champ, les autres solutions ont la forme de paquets d'ondes quasi linéaires qui s'étalent rapidement dans tout l'espace et dont l'amplitude tend par conséquent vers zéro. »

Étant ainsi revenu à la notion usuelle d'action hamiltonienne d'une particule, M. Terletsky a cherché à en tirer la loi de distribution canonique. Mais, comme il n'a pas introduit la notion de thermostat imposant aux champs une température bien définie, ses conclusions ne m'ont pas paru très claires et je pense qu'elles doivent recevoir une interprétation un peu différente de celle que leur auteur propose, interprétation qui nous ramènerait aux formules  $h\nu_c = kT$  et  $\frac{A}{h} = \frac{S}{k}$  qui ont été envisagées plus haut.

Dans l'ensemble, ce très curieux Mémoire de M. Terletsky m'a vivement intéressé et il a attiré mon attention sur la possibilité d'introduire dans la réinterprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution des grandeurs thermodynamiques, température et entropie, liées aux caractéristiques du corpuscule, fréquence cyclique et action hamiltonienne. C'est ce qui m'a amené à développer une « Thermodynamique de la particule isolée » que je vais maintenant exposer.

---

## CHAPITRE VIII

# LA THERMODYNAMIQUE DE LA PARTICULE ISOLÉE

(ou Thermodynamique cachée des particules)

**1. Formules fondamentales.** — Les réflexions que m'avait inspirées le travail de M. Terletsky et qui me ramenaient vers les anciennes idées que j'avais eues à ce sujet vers 1946-1948 m'ont conduit à tenter d'établir dans des Notes récentes <sup>(1)</sup> une « Thermodynamique de la particule isolée » qu'on pourrait aussi nommer « Thermodynamique cachée des particules », puisqu'elle résulterait de la continue interaction des particules avec un thermostat caché qu'il est naturel d'identifier avec le milieu subquantique de MM. Bohm et Vigier. J'avais commencé par introduire une entropie de la particule isolée, mais ensuite j'ai préféré raisonner en introduisant l'entropie du thermostat caché. La raison en est qu'il est scabreux de définir une entropie pour la particule parce que celle-ci est un système assez simple ne comportant qu'un petit nombre de degrés de liberté : au contraire, le thermostat caché étant certainement un système très complexe, il est légitime de parler de son entropie et l'emploi de cette entropie va nous permettre de suivre la voie autrefois tracée par Einstein dans sa théorie des fluctuations.

Pour développer notre nouvelle Thermodynamique, nous admettrons d'abord que nous pouvons appliquer à une particule isolée de l'échelle microphysique la formule :

$$(1) \quad \delta Q = - \delta_{M_0} \mathcal{L}$$

de la Thermodynamique relativiste en supposant variable la masse propre  $M_0$  de la particule.

<sup>(1)</sup> Bibliographie, [9].

De plus, nous admettrons aussi, en accord avec mes anciennes idées de 1946-1948, que la particule en contact énergétique permanent avec le thermostat caché peut être considérée comme ayant une température  $T$  définie par la formule :

$$(2) \quad kT = h\nu_c = h\nu_0\sqrt{1 - \beta^2} = m_0c^2\sqrt{1 - \beta^2}$$

qui a la covariance relativiste voulue et où  $m_0$  est la masse propre constante usuellement attribuée à la particule.

Nous allons définir l'entropie  $S$  du thermostat caché en contact énergétique avec la particule. Nous inspirant de la méthode employée jadis par Einstein dans ses célèbres travaux sur les fluctuations, nous écrirons cette entropie sous la forme :

$$(3) \quad S = S_0 + S(M_0),$$

où  $S_0$  est la partie de cette entropie qui est indépendante de la valeur fluctuante de la masse propre  $M_0$  de la particule tandis que  $S(M_0)$  est la très petite partie de cette entropie qui dépend de la valeur de  $M_0$ . Nous aurons alors :

$$(4) \quad \delta_{M_0}S = \delta S(M_0) = -\frac{\delta Q}{T} = -\frac{\delta_{M_0}\mathcal{L}}{T}.$$

Le signe  $-$  figurant devant  $\delta Q$  provient du fait que  $\delta Q$  est la chaleur cédée par le thermostat caché à la particule. Or, nous pouvons écrire la fonction de Lagrange de la particule sous la forme :

$$(5) \quad \mathcal{L} = -M_0c^2\sqrt{1 - \beta^2} + \dots,$$

où les termes non écrits ne dépendent pas de  $M_0$ . Nous obtenons donc par (2) et (5) :

$$(6) \quad \delta S(M_0) = -k\frac{\delta M_0}{m_0},$$

ce qui nous fournit finalement :

$$(7) \quad S = S_0 - k\frac{M_0}{m_0},$$

formule fondamentale où l'invariance du second membre est bien mise en évidence.

Nous avons ainsi obtenu les deux formules fondamentales de la

Thermodynamique de la particule isolée qui sont valables dans tous les systèmes de référence galiléens.

(8)

$$kT = h\nu_c,$$

$$S = S_0 - k \frac{M_0}{m_0}.$$

Nous pouvons remarquer que la formule (4) nous conduit à la relation  $\frac{1}{T} = \frac{\delta S}{\delta \mathcal{L}}$  au lieu de la relation  $\frac{1}{T} = -\frac{\delta S}{\delta \mathcal{L}}$  trouvée au chapitre IV. Mais nous ne devons pas nous en étonner parce qu'ici  $S$  se rapporte au thermostat et  $\mathcal{L}$  à la particule. S'il était légitime d'introduire une entropie  $S_1$  de la particule comme je le faisais dans ma Note d'août 1961, on aurait :

$$\delta S_1 = -\delta S \quad \text{et} \quad \frac{1}{T} = -\frac{\delta S_1}{\delta \mathcal{L}}.$$

**2. Analogies entre la Thermodynamique de la particule isolée et le schéma canonique de Helmholtz.** — Nous voulons comparer notre nouvelle Thermodynamique avec le schéma canonique de Helmholtz que nous avons exposé au paragraphe 3 du chapitre V.

Nous savons que la phase  $\varphi$  de l'onde associée à la particule étant égale à  $-A$ , on peut écrire :

$$(9) \quad \varphi = -A = h \int_0^t \nu_c dt,$$

d'où :

$$(10) \quad \dot{\varphi} = -\dot{A} = h\nu_c,$$

le point désignant la dérivation par rapport au temps. Si donc nous posons :

$$(11) \quad \epsilon = \frac{1}{k} \varphi = -\frac{1}{k} A;$$

la première formule (8) nous donne :

$$(12) \quad T = \frac{h\nu_c}{k} = \frac{\dot{\varphi}}{k} = \dot{\epsilon}.$$

Nous retrouvons ainsi la relation fondamentale admise par Helmholtz comme base de son schéma canonique suivant laquelle la température est la dérivée par rapport au temps d'une certaine grandeur  $\epsilon$ .

D'autre part, quand le thermostat caché cède à la particule une énergie  $dU$  qui lui communique un travail  $dA$  (avec les notations employées au chapitre IV), nous écrirons avec Helmholtz :

$$(13) \quad -d_{M_0}U = -\varepsilon d\varepsilon + dA$$

et la Thermodynamique relativiste nous donnera :

$$(14) \quad -d_{M_0}U = dQ + dA,$$

avec :

$$(15) \quad dQ = -Td_{M_0}S, \quad dA = d_{M_0}\mathcal{F},$$

où  $\mathcal{F} = \frac{M_0v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  est la pseudo-force vive de la particule. Précisons que, dans les formules (13) et (14),  $-d_{M_0}U$  représente la diminution de l'énergie interne du thermostat caché quand  $M_0$  augmente. De (13) et de (14), compte tenu de (12), on déduit la deuxième formule du schéma canonique de Helmholtz :

$$(16) \quad \varepsilon = \dot{S}.$$

Comme dans ce schéma, par hypothèse,  $\varepsilon$  est une variable cyclique telle que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} = 0$ , l'équation de Lagrange relative à la variable  $\varepsilon$  donne aussi la troisième formule de Helmholtz :

$$(17) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} = p_\varepsilon = S$$

qui peut se vérifier directement sur la formule (4), car elle donne, à une constante près :

$$\mathcal{L} = TS = \dot{\varepsilon}S.$$

En revanche, comme on n'a plus ici la relation :

$$U = \dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} - \mathcal{L} = TS - \mathcal{L}$$

dont la variance relativiste ne serait pas correcte, on ne peut plus assimiler l'énergie libre à la fonction de Lagrange. Mais comme  $T$  est constant, on peut écrire (14) sous la forme :

$$(18) \quad d_{M_0}(U - TS) = -d_{M_0}\mathcal{F},$$

ce qui nous conduit à assimiler la partie de l'énergie libre du thermostat caché qui dépend de  $M_0$  à la pseudo-force vive de la particule changée de signe.

**3. Le second principe de la Thermodynamique et le principe de moindre action de Hamilton.** — Dans l'application usuelle du principe de Hamilton en Mécanique analytique, on part d'un mouvement « naturel », c'est-à-dire d'un mouvement conforme aux lois de la Mécanique. On suppose qu'au cours de ce mouvement, la particule partant d'un point A de l'espace au temps  $t_0$  parvient en un point B au temps  $t_1$ , puis on *imagine* un mouvement « varié » qui est fictif et infiniment voisin du mouvement naturel en impo-

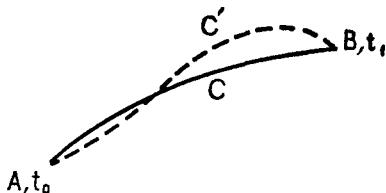


FIG. 7.

sant à ce mouvement varié que les points A et B et les instants  $t_0$  et  $t_1$  restent les mêmes que dans le mouvement naturel. En d'autres termes, on fait varier très légèrement la forme de la ligne d'univers qui dans l'espace-temps représente le mouvement naturel en maintenant fixes les extrémités de cette ligne d'univers.

Le principe de Hamilton nous dit alors que le mouvement naturel est caractérisé par l'équation :

$$(19) \quad \int_{t_0}^{t_1} [\delta \mathcal{L}]_{M_0} dt = 0,$$

où  $[\delta \mathcal{L}]_{M_0}$  est la variation de  $\mathcal{L}$  quand on maintient la masse propre  $M_0$  constante et égale à sa valeur normale  $m_0$ . De plus, comme le principe de Hamilton est un principe de *moindre action*, nous pouvons aussi écrire <sup>(1)</sup> :

$$(20) \quad \int_{t_0}^{t_1} [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt > 0.$$

<sup>(1)</sup> A condition qu'entre A et B, il n'y ait pas de foyer cinétique relatif au point A. Voir *C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 1430.

Nous allons maintenant introduire une idée nouvelle qui paraît intéressante. Si l'on admet, comme nous le faisons que la masse propre de la particule puisse subir des fluctuations, il devient possible de considérer les mouvements variés non plus comme des mouvements fictifs purement imaginés, mais comme des mouvements pouvant avoir lieu réellement sous l'action de certaines fluctuations momentanées de la masse propre pendant l'intervalle de temps  $t_0 \rightarrow t_1$ .

Cette hypothèse admise, le mouvement fluctué AC'B doit, en lui appliquant le principe de Hamilton, pouvoir être déterminé par l'équation :

$$(21) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta(\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathcal{L} + \delta^2\mathcal{L}) dt = 0.$$

Mais ici la masse propre n'étant plus supposée constante, nous devons écrire :

$$(22) \quad \delta\mathcal{L} = [\delta\mathcal{L}]_{M_0} + \delta_{M_0}\mathcal{L}, \quad \delta^2\mathcal{L} = [\delta^2\mathcal{L}]_{M_0} + \delta_{M_0}^2\mathcal{L}$$

en désignant par  $\delta_{M_0}^2\mathcal{L}$  l'ensemble des termes qui, dans  $\delta^2\mathcal{L}$ , dépendent de la variation de la masse propre. Nous supposerons, ce que nous justifierons plus loin, que dans (21) le terme en  $\delta_{M_0}^2\mathcal{L}$  est négligeable par rapport aux autres et il nous restera :

$$(23) \quad \int_{t_0}^{t_1} \{ [\delta\mathcal{L}]_{M_0} + \delta_{M_0}\mathcal{L} + [\delta^2\mathcal{L}]_{M_0} \} dt = 0.$$

La première intégrale étant nulle en vertu de (19), nous obtenons :

$$(24) \quad - \int_{t_0}^{t_1} \delta_{M_0}\mathcal{L} dt = - (t_1 - t_0) \overline{\delta_{M_0}\mathcal{L}} = \int_{t_0}^{t_1} [\delta^2\mathcal{L}]_{M_0} dt > 0,$$

$\overline{\delta_{M_0}\mathcal{L}}$  étant une moyenne temporelle prise entre  $t_0$  et  $t_1$ . Alors, comme  $t_1 - t_0$  est positif et que  $-\delta_{M_0}\mathcal{L}$  est la quantité de chaleur cédée par le thermostat caché à la particule, on voit qu'en moyenne temporelle cette quantité de chaleur, qui est constamment nulle sur la trajectoire naturelle, est positive sur la trajectoire fluctuée. Il en résulte que l'entropie  $S$  diminue en moyenne quand on passe du mouvement ACB au mouvement AC'B. L'entropie est donc maximale sur la trajectoire naturelle par rapport aux fluctuations soumises aux conditions de la variation hamiltonienne et l'on peut dire que le mouvement naturel est plus probable que les mouvements variés. On fait ainsi apparaître une très remarquable relation entre

le principe de moindre action et le second principe de la Thermodynamique <sup>(1)</sup>.

Il nous reste à montrer que nous avons eu raison de négliger dans (23) le terme en  $\delta_{M_0}^2 \mathcal{L}$ . Or on voit sur l'équation (24) que  $\delta_{M_0} \mathcal{L}$  est de l'ordre de  $[\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0}$ , c'est-à-dire du second ordre par rapport aux variations hamiltoniennes de sorte que  $\delta_{M_0}^2 \mathcal{L}$  est du troisième ordre et peut être négligé.

La Mécanique ondulatoire, dès ses débuts, avait pu établir une relation entre l'Action d'un corpuscule et la phase de son onde associée, ce qui lui avait permis d'identifier le principe de Maupertuis avec le principe de Fermat. Poursuivant le même genre d'identification, la théorie précédente rattache le principe de moindre action au second principe de la Thermodynamique et à l'augmentation de l'entropie.

**4. Remarques sur la relation  $h\nu_c = kT$ .** — Nous voulons maintenant faire quelques remarques sur la première des formules fondamentales (8) de notre nouvelle Thermodynamique.

Notons d'abord qu'elle soulève la difficulté suivante : Comme la fréquence  $\nu_c$  est caractéristique de la particule, la température  $T$  doit en dépendre aussi. Or il semblerait naturel d'attribuer au milieu subquantique une température  $T$  unique, indépendante de la nature des diverses sortes de particules qui sont en contact énergétique avec lui. On pourrait chercher à lever cette difficulté en imaginant que le thermostat caché soit formé par des ensembles de particules (c'est-à-dire probablement de champs à bosse), chaque ensemble contenant des particules « cachées » de même nature et ayant sa température propre. La particule considérée du niveau microphysique serait, peut-être par suite d'un phénomène du genre résonance, uniquement en interaction avec les particules cachées de même nature qu'elle et c'est pourquoi l'on pourrait avoir dans le système propre de la particule :

$$T_0 = \frac{h\nu_0}{k} = \frac{m_0 c^2}{k}.$$

Cette hypothèse peut assurément paraître assez artificielle, mais il est curieux de constater que j'avais déjà été amené à l'admettre quand, dans une recherche de nature tout à fait différente, j'avais

(1) En termes imagés, on peut dire que la trajectoire naturelle suit la ligne de talweg d'une vallée de néguentropie.

cherché à déduire l'équation des ondes avec terme de masse d'une équation d'ondes universelle sans terme de masse du type de celle envisagée par M. Heisenberg (¹).

Nous devons encore souligner un autre point délicat. Si l'on considère les températures  $T$  et  $T_0$  comme se rapportant à la particule elle-même, la relation :

$$T = T_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

qui résulte automatiquement de la première formule (8) est satisfaisante parce qu'elle correspond à la transformation relativiste de la température. Mais si l'on veut rapporter les températures au thermostat caché, la relation :

$$m_0 c^2 = k T_0$$

montre que, dans le système propre de toute particule de masse  $m_0$ , le thermostat caché doit posséder la même température  $T_0$ . Il en résulte que, dans tout système galiléen, on doit, du moins en ce qui concerne les particules de masse propre  $m_0$ , attribuer au thermostat caché la même température  $T_0$ . Cette propriété étrange montre que le milieu subquantique n'est pas assimilable à un thermostat macroscopique ordinaire dont le système propre définirait un système de référence privilégié, ce qui serait d'ailleurs contraire au principe de Relativité. Il semble qu'on devrait plutôt l'assimiler à un « éther de Dirac », dont les propriétés apparaîtraient identiques pour tous les observateurs galiléens (²), ou à un « éther de Terletsky » [8].

Les remarques qui précèdent montrent qu'il faudrait arriver à préciser la structure, certainement très particulière, du milieu subquantique de Bohm et Vigier de façon que l'existence de ce milieu ne soit pas en contradiction avec le principe de Relativité. La conception de M. Terletsky suivant laquelle on pourrait admettre que ce milieu serait formé par des particules de masse imaginaire se déplaçant avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière pourrait peut-être être utile pour résoudre ce problème, mais je pense qu'il serait prématuré d'aborder ici l'étude de cette difficile question (*voir* [18]).

Il nous paraît intéressant de noter que la formule  $m_0 c^2 = k T_0$

(¹) *Voir* bibliographie, [10], p. 99-103.

(²) Sur l'éther de Dirac, *voir* mon article du *Journal de Physique*, [4], p. 975.

conduit pour les particules matérielles à attribuer à la température  $T_0$  une valeur très élevée. En employant les unités C. G. S. et les degrés Kelvin, elle donne en effet  $T_0 \sim 10^{37} m_0$ . Pour l'électron, on trouve donc que  $T_0$  est de l'ordre de dix milliards de degrés absolus et pour les particules plus lourdes on trouverait des températures encore plus élevées. Ainsi toute particule matérielle se trouverait en constant contact énergétique avec une « chaudière cachée » qui serait le siège de températures extrêmement élevées et qui serait partout présente dans ce que nous appelons le « vide ». D'autres considérations ont déjà amené certains auteurs (Lanczos, Bohm) à une conclusion analogue.

**5. Les relations  $\bar{M}_0 = m_0$  et  $\bar{S}(M_0) = -k$ .** — Nous allons maintenant tirer de la seconde formule (8) définissant l'entropie  $S$  de très intéressantes conséquences.

Considérons d'abord une particule qui n'est soumise à aucun champ extérieur. D'après la formule de Boltzmann  $S = k \log P$ , la probabilité de l'état d'une particule dont la masse propre fluctuante à la valeur  $M_0$  est proportionnelle à  $e^{-\frac{S}{k}}$ , donc d'après la seconde formule (8) à  $e^{-\frac{M_0}{m_0}}$ . On en conclut que :

$$(25) \quad \bar{M}_0 = \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{M_0}{m_0}} M_0 dM_0}{\int_0^\infty e^{-\frac{M_0}{m_0}} dM_0} = m_0.$$

Ainsi la masse propre constante  $m_0$  usuellement attribuée à la particule nous apparaît comme étant la valeur moyenne de sa véritable masse propre instantanée qui est fluctuante.

Nous pouvons préciser cette idée de la façon suivante. Quand on fait abstraction des interactions entre la particule et le milieu subquantique, la théorie du guidage conduit à définir la masse propre variable de la particule dans son système propre par la formule :

$$M_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square a}{a}} = m_0 c^2 + Q_0,$$

où  $Q_0 = M_0 c^2 - m_0 c^2$  est le potentiel quantique précédemment défini dont on vérifie qu'à l'approximation newtonienne il a la

valeur connue  $-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta a}{a}$ . Le potentiel  $Q$  traduit l'interaction du corpuscule avec son onde : c'est donc une grandeur du niveau microphysique qui ne fait pas explicitement intervenir le milieu subquantique. Si l'on veut tenir compte des interactions du milieu subquantique avec la particule, il est naturel d'ajouter au dernier membre de l'équation précédente un potentiel quantique « fluctuant »  $Q_f$  pour représenter cette interaction. On écrira donc :

$$M_0 c^2 = m_0 c^2 + Q_0 + Q_f.$$

Comme M. Terletsky l'a suggéré par d'intéressantes considérations dans ses importants Mémoires, il y a des raisons de penser que les échanges énergétiques entre le milieu subquantique et les particules doivent se réduire à des fluctuations de moyenne nulle, ce qui conduit à poser  $\bar{Q}_f = 0$ . La dernière équation donne alors :

$$(25 \text{ bis}) \quad \bar{M}_0 c^2 = m_0 c^2 + \bar{Q}_0$$

et, si le potentiel quantique  $Q_0$  est nul, on retrouve la relation  $\bar{M}_0 = m_0$ . La masse propre usuelle  $m_0$  résulterait donc des échanges énergétiques continuels entre la particule et le thermostat caché.

Si nous introduisons la formule (25) dans l'évaluation de la valeur moyenne de l'entropie qui, d'après (8), est  $\bar{S} = S_0 - k \frac{\bar{M}_0}{m_0}$ , nous trouvons :

$$(26) \quad \bar{S} = S_0 - k \quad \text{ou} \quad \bar{S}(\bar{M}_0) = -k.$$

Les formules (26) peuvent d'ailleurs se retrouver par le raisonnement suivant. Plaçons-nous dans le système propre de la particule et supposons qu'initialement elle ait une masse propre  $M_0$  nulle de sorte qu'alors  $W_0$  et  $S(M_0)$  soient nuls. Si le thermostat caché fournit à la particule la quantité de chaleur  $dQ_0$ , sa masse propre augmentera de  $dM_0 = \frac{dQ_0}{c^2}$ . Quand le thermostat aura fourni la quantité de chaleur  $\delta Q_0$  telle que la masse propre  $M_0$  ait atteint sa valeur moyenne  $m_0$ , on aura :

$$(27) \quad \delta Q_0 = m_0 c^2 = k T_0.$$

L'entropie aura alors diminué de :

$$(28) \quad \delta S = - \frac{\delta Q_0}{c^2} = -k.$$

Le terme  $S(M_0)$  dans l'expression de  $S$  aura donc passé de la valeur 0 initiale à la valeur  $-k$  et nous retrouvons le résultat (26).

Ajoutons que, pendant les fluctuations de la masse propre,  $M_0$  peut varier de 0 à  $+\infty$ , c'est-à-dire que  $\delta M_0 = M_0 - m_0$  peut varier de  $-m_0$  à  $+\infty$ , les valeurs très grandes de  $\delta M_0$  étant naturellement extrêmement peu probables.

**6. Comparaison avec la méthode d'Einstein pour l'étude des fluctuations.** — Rappelons le principe général de la méthode employée autrefois par Einstein pour l'étude des fluctuations.

Considérons un système complexe dont l'état dépend, à côté d'un très grand nombre d'autres paramètres, d'un certain paramètre  $\epsilon$ . Pour trouver la probabilité d'une fluctuation de l'état du système complexe due à une variation du paramètre  $\epsilon$ , on peut suivant Einstein procéder de la manière suivante.

Soit  $S_m$  l'entropie maximale du système dans son état le plus probable et  $S(\epsilon)$  son entropie pour une certaine valeur du paramètre  $\epsilon$ . On peut écrire la relation de Boltzmann sous la forme :

$$(29) \quad S(\epsilon) = k \log \frac{P(\epsilon)}{P_0} + S_0,$$

où  $P_0$  et  $S_0$  sont deux constantes. Si nous posons  $S_0 = S_m$ , nous devons poser  $P_0 = P_m$ , car  $S = S_m$  doit correspondre à l'état de probabilité maximale  $P_m$ . Nous aurons donc :

$$(30) \quad P(\epsilon) = P_m e^{-\frac{S_m - S(\epsilon)}{k}}.$$

Naturellement, plus  $S(\epsilon)$  est petit et s'éloigne de  $S_m$ , plus la probabilité de l'état fluctué  $P(\epsilon)$  est petite. Il résulte de (30) que la valeur moyenne de  $S_m - S(\epsilon)$  est :

$$(31) \quad \overline{S_m - S(\epsilon)} = k.$$

Nous pouvons appliquer le formalisme précédent à la particule en contact avec le thermostat caché, système très complexe, en prenant pour paramètre  $\epsilon$  la masse propre variable  $M_0$  de la particule et en posant :

$$(32) \quad S(\epsilon) = S_0 - k \frac{M_0}{m_0},$$

$S$  sera maximale pour  $M_0 = 0$ , d'où  $S_m = S_0$  et nous retrouvons la proportionnalité de  $P(M_0)$  à  $e^{-\frac{M_0}{m_0}}$  et la formule  $\bar{S}(M_0) = -k$ .

En vue d'une comparaison qui sera faite au paragraphe suivant, nous rappellerons qu'à l'époque (vers 1910), où Jean Perrin venait de faire ses célèbres mesures de la constante d'Avogadro par l'étude de la répartition en hauteur de granules en suspension dans une émulsion sous l'action du champ de la pesanteur, Smoluchovsky avait fait la théorie du phénomène par la méthode d'Einstein. La probabilité pour qu'un granule de masse  $m$  ait une altitude  $z$  comptée à partir du fond du récipient contenant l'émulsion est donnée par la loi barométrique de Laplace sous la forme :

$$(33) \quad P(z) = \text{Cte } e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

En prenant  $S(0) = 0$ , l'entropie correspondante est :

$$(34) \quad S(z) = k \log P(z) = -\frac{mgz}{T}.$$

On trouve aisément :

$$(35) \quad \bar{z} = \frac{\int_0^\infty z P(z) dz}{\int_0^\infty P(z) dz} = \frac{kT}{mg},$$

d'où :

$$(36) \quad \bar{S} = -\frac{mg}{T} \frac{kT}{mg} = -k.$$

L'entropie du granule, normée comme on l'a fait, fluctue de sa valeur maximale égale à 0 quand le granule est au fond du récipient à l'altitude  $z = 0$  jusqu'à (théoriquement)  $S = -\infty$  pour  $z = \infty$ , avec comme valeur moyenne  $\bar{S} = -k$ .

**7. Vue d'ensemble sur les résultats obtenus jusqu'ici.** — Nous voudrions maintenant résumer en quelques mots l'image à laquelle la théorie de la double solution, maintenant complétée par l'hypothèse de l'existence du milieu subquantique jouant le rôle de thermostat caché, nous a finalement conduit.

Le corpuscule est conçu comme une inhomogénéité très localisée (petite région de très hautes valeurs du champ ondulatoire) au sein d'une onde dont l'équation de propagation contient la masse

propre du corpuscule. En l'absence de perturbations, la masse propre ayant la valeur constante  $m_0$ , le corpuscule décrirait régulièrement l'une des lignes de courant de la propagation d'ondes conformément à la formule du guidage. Mais l'onde et son corpuscule se propagent, si l'on peut dire, « à la surface » du milieu subquantique jouant le rôle de thermostat caché et, par suite des échanges énergétiques qui s'opèrent entre le thermostat caché et le corpuscule, la masse propre de celui-ci subit de continues fluctuations qui lui font parcourir toute une série de tronçons de lignes de courant de l'image hydrodynamique de l'onde en propagation. Le corpuscule est ainsi animé au sein de l'onde, dont il constitue une très petite région singulière, d'une sorte d'agitation brownienne et c'est là ce qui introduit la probabilité dans les prévisions de la Mécanique ondulatoire et de la Physique quantique.

L'image de la particule suivant bien sagement une ligne de courant conformément à la formule du guidage a exactement la même valeur que celle qu'on utilise en Hydrodynamique quand on considère une molécule du fluide comme suivant dans son mouvement une trajectoire constamment tangente à l'une des lignes de courant de l'écoulement hydrodynamique. Mais, dans un cas comme dans l'autre, il se superpose en réalité à ce mouvement théorique une agitation thermique désordonnée qui fait que l'unité, corpuscule ou molécule du fluide, saute constamment d'une ligne de courant sur une autre : finalement, c'est seulement l'ensemble des lignes de courant qui donne une image statistique du mouvement d'une infinité d'exemplaires de l'unité, mais ceci n'implique pas du tout que chaque unité n'ait pas à chaque instant une position et un mouvement bien définis.

Si nous revenons maintenant aux expériences de Jean Perrin, nous pouvons dire qu'un granule soumis dans une émulsion à la force de la pesanteur a comme trajectoire naturelle la trajectoire verticale qui l'amènerait sur le fond du récipient où il resterait immobile, mais l'agitation thermique des molécules cachées du fluide où il est en suspension le rejette constamment à droite, à gauche, vers le haut ou vers le bas de sorte qu'il a toujours une probabilité non nulle, donnée par la loi de Laplace, de se trouver à une hauteur  $z$  au-dessus du fond du récipient. De même, dans notre conception actuelle de la Mécanique ondulatoire, la particule a pour trajectoire naturelle celle qui lui est attribuée par la formule du guidage, mais elle se trouve constamment projetée de-ci, de-là,

par l'agitation provenant de son contact avec le milieu subquantique et c'est là ce qui lui donne finalement une probabilité non nulle, égale à  $|\psi|^2$ , de se trouver en n'importe quel point de l'onde.

Si ces idées se montraient être bien exactes, un remarquable pressentiment d'Einstein se trouverait alors réalisé. Lui, qui, en 1905, l'année même où il jetait les bases de la théorie de la Relativité et où il découvrait l'aspect corpusculaire de la lumière, avait aussi étudié avec profondeur la théorie du mouvement brownien, il semble avoir toujours pressenti que l'intervention des probabilités en Mécanique ondulatoire indiquait l'existence d'une sorte de continual mouvement brownien des particules microphysiques. Or qui dit mouvement brownien dit aussi fluctuations et thermodynamique (1).

(1) Je signale que, dans ma Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 30 juillet 1962, j'avais défini l'entropie  $S$  du thermostat caché à l'aide de l'intégrale d'action hamiltonienne de la particule prise sur une période interne  $\tau_c = \frac{h}{m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}$  de celle-ci, en posant :

$$(a) \quad \delta S = \frac{k}{h} \delta_{M_0} \int_0^{\tau_c} \mathcal{L} dt.$$

Dans le cas de particules matérielles (mais non pas dans celui des photons, même si l'on considère leur masse propre comme très légèrement différente de zéro), la période propre  $\tau_0 = \frac{h}{m_0 c^2}$  est extrêmement petite de sorte qu'il paraît légitime de considérer la masse  $M_0$  comme constante pendant cette très courte durée. La formule (a) est alors pratiquement équivalente à la définition (8) :

$$(b) \quad S = S_0 - k \frac{M_0}{m_0}$$

adoptée plus haut. Pour les particules matérielles, la formule (b) plus simple que (a) paraît donc équivalente à (a). Mais le cas des photons, qui soulève des difficultés particulières devra faire l'objet d'un examen spécial.

## CHAPITRE IX

# STABILITÉ DES ÉTATS, ENTROPIE ET ÉNERGIE LIBRE

**1. Les transitions quantiques et la « prérogative » des états monochromatiques.** — Depuis l'apparition en 1913 de la théorie de l'atome de Bohr, on a attribué aux transitions quantiques, qui font passer un système quantifié d'un état stationnaire à un autre, un caractère qu'on pourrait qualifier de mystique. On renonce, en effet, à s'en faire une image quelconque et Bohr n'a pas hésité à affirmer qu'elles « transcendaient » toute description en termes d'espace et de temps. C'est ce qui a amené Schrödinger à dire ironiquement que, dans la théorie quantique actuelle, on décrivait minutieusement les états stationnaires où il ne se passe rien, mais qu'on se refusait à décrire les transitions où il se passe quelque chose.

L'idée introduite par la théorie de la double solution que la Mécanique ondulatoire doit en dernière analyse reposer sur des équations non linéaires permet de penser que, si les transitions quantiques échappent à toute description dans la théorie actuelle, c'est qu'elles constituent des processus essentiellement non linéaires. Elles seraient des processus transitoires de très courte durée analogues à ceux qu'on a déjà rencontrés dans plusieurs théories non linéaires en Mécanique et en Physique quand il y a passage brusque d'un cycle limite à un autre. Cette idée très attrayante avait déjà été envisagée, il y a quelques années, par MM. Čap et Destouches et elle a été reprise récemment par MM. Fer, Lochak, Andrade e Silva et Leruste qui ont publié à ce sujet des travaux d'un grand intérêt (¹).

Or, quand MM. Lochak et Andrade e Silva ont eu connaissance de ma première Note d'août 1961 sur la Thermodynamique de la particule isolée, après m'avoir fait justement remarquer que mes

(¹) Voir bibliographie, [5] et [11].

formules déduites de la relation  $dS = \frac{dQ}{T}$  ne s'appliquaient qu'aux processus réversibles, ils m'ont suggéré que les états transitoires très brusques qu'ils avaient envisagés pourraient avoir un caractère irréversible et s'accompagner d'une brusque variation de l'entropie (ou de l'énergie libre) et que le passage d'un état stationnaire à un autre pourrait comporter le franchissement d'une vallée d'entropie (ou d'une montagne d'énergie libre).

J'ai été ainsi amené à réfléchir plus profondément à ces intéressantes questions. Pour faire comprendre l'orientation de ma pensée à ce sujet, je partirai de la remarque que, dans la théorie usuelle, on accorde une sorte de prérogative aux états qu'on peut qualifier de « monochromatiques ». Je dois préciser que j'entends par « états monochromatiques », d'une part, les états stationnaires des systèmes quantifiés qui sont représentés par une fonction propre de l'hamiltonien et sont associés à une onde stationnaire de fréquence déterminée, mais aussi d'autre part, dans le cas des particules en mouvement progressif, aux états associés à des groupes d'ondes assimilables dans presque toute leur extension à une onde plane monochromatique. La prérogative accordée à ces états consiste en ceci qu'on les regarde comme plus normalement réalisés que les états représentés par une superposition de fonctions propres ou d'ondes planes monochromatiques. Dès les débuts de la théorie de l'atome de Bohr, on a considéré l'atome comme devant nécessairement se trouver toujours dans un état stationnaire et quand, plus tard, on a traduit la théorie de Bohr dans le langage de la Mécanique ondulatoire, on a admis que les états représentés par une superposition de fonctions propres n'avaient qu'une existence très fugitive et que l'atome était toujours saisi par l'observation dans un état stationnaire représenté par l'une de ses fonctions propres. En théorie quantique des champs, la même préoccupation se manifeste par le fait que les « nombres d'occupation » sont en général rapportés aux ondes planes monochromatiques.

Dans un des articles très pénétrants qu'il avait consacrés à la critique des conceptions quantiques actuelles, Schrödinger s'était étonné avec raison de cette prérogative accordée aux états monochromatiques. Il pensait qu'elle était injustifiée parce qu'*a priori* un état de superposition a un caractère plus général qu'un état monochromatique (la fonction  $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$  est plus générale que

la fonction  $\Psi = \Psi_k$ ). Et cependant le succès de l'hypothèse que les états monochromatiques ont effectivement une prérogative ne permet guère de douter, contrairement à l'opinion de Schrödinger que cette prérogative ne soit justifiée. Comment expliquer cela ?

L'idée qui m'a paru pouvoir apporter l'explication cherchée, c'est que les états de superposition auraient une probabilité plus faible que les états monochromatiques, qu'ils seraient donc en quelque sorte instables et que des transitions quantiques, processus non linéaires très rapides, tendraient toujours à ramener particules ou systèmes à un état monochromatique plus stable. Il est évident que, du point de vue thermodynamique, la stabilité d'un état doit être rattachée à un maximum d'entropie ou à un minimum d'énergie libre. Pour voir plus clair dans cette affaire, nous allons étudier un certain nombre de cas particuliers. Et, pour commencer, nous allons d'abord examiner deux cas où l'on a affaire à un système isolé qui n'échange pas d'énergie avec le milieu extérieur et nous verrons sur ces exemples que, dans de pareils cas et conformément à la relation de Boltzmann  $S = k \log P$ , c'est le maximum de l'entropie qui correspond à l'état le plus probable.

**2. Cas d'une particule libre à l'approximation newtonienne.** — Je rappelle d'abord la définition du potentiel quantique. Dans le cas relativiste général, c'est la grandeur  $M_0 c^2$  donnée par :

$$(1) \quad M_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \frac{\square a}{a}}$$

qui, dans le système propre de la particule, joue le rôle de potentiel quantique dont le gradient changé de signe donne la force quantique. Comme le potentiel quantique  $Q$  doit se transformer comme une quantité de chaleur dans un changement de système de référence galiléen et qu'il n'est défini qu'à une constante près, nous pouvons poser :

$$(2) \quad Q_0 = M_0 c^2 - m_0 c^2, \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

A l'approximation newtonienne, nous retrouvons aisément l'expression :

$$(3) \quad Q = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}.$$

Considérons alors une particule qui se déplace librement sans être soumise à aucune force. Son onde associée peut être un groupe d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique et son mouvement est alors rectiligne et uniforme ou bien être formée par une superposition plus générale d'ondes planes monochromatiques, comme dans les phénomènes d'interférences ou de diffraction, et alors la formule du guidage lui assigne un mouvement compliqué. Je vais montrer que, dans ces conditions, un état de superposition a une entropie moyenne inférieure à celle d'un état monochromatique.

En effet, dans un état monochromatique, l'amplitude  $a$  de l'onde étant constante, le potentiel  $Q$  donné par (3) est nul tandis que dans un état de superposition la valeur moyenne de  $Q$  pour toutes les positions de la particule dans son onde sera :

$$(4) \quad \bar{Q} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int a^2 \frac{\Delta a}{a} d\tau = -\frac{\hbar^2}{2m} \int a \Delta a d\tau.$$

Comme  $a$  est toujours nul à l'infini, une intégration par parties donne :

$$(5) \quad \bar{Q} = \frac{\hbar^2}{2m} \int (\text{grad } a)^2 d\tau > 0,$$

c'est-à-dire d'après (2),  $\bar{M}_0 > m_0$ . Donc, dans un état de superposition, la valeur moyenne de la masse propre  $M_0$  est supérieure à sa valeur normale moyenne  $m_0$ . Il suffit alors de se rappeler que nous avons défini l'entropie  $S$  par la relation :

$$(6) \quad S = S_0 - k \frac{M_0}{m_0}$$

pour voir que l'entropie  $S_m$  d'un état monochromatique et la valeur moyenne  $S_s$  d'un état de superposition ont pour valeurs :

$$(7) \quad S_m = S_0 - k, \quad \bar{S}_s = S_0 - k \frac{\bar{M}_0}{m_0} < S_m,$$

ce qui montre bien que l'état monochromatique, ayant une entropie supérieure à celle de l'état de superposition, doit avoir une probabilité et une stabilité plus grandes <sup>(1)</sup>.

**3. Cas du choc de deux particules.** — Le cas que nous venons d'étudier était très simple parce que nous considérons une particule isolée. Nous allons maintenant envisager le cas plus compliqué

<sup>(1)</sup> Pour l'extension de ce raisonnement au cas de l'électron de Dirac, voir l'Appendice.

du choc de deux particules en nous en tenant toujours à l'approximation newtonienne. Le problème a été traité par la Mécanique ondulatoire dès 1927 par Max Born et c'est à ce moment qu'il a introduit le premier l'interprétation probabiliste de la nouvelle Mécanique.

Nous supposerons qu'à l'instant initial les deux particules sont suffisamment éloignées l'une de l'autre pour être pratiquement sans interaction et que chacune d'elles est alors portée par un train d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique. La fonction d'onde dans l'espace de configuration a alors une forme  $\Psi_i$  qui est égale au produit des fonctions d'onde individuelles des deux particules. Quand les particules se rapprochent, l'interaction commence et le calcul qu'on fait dans la théorie usuelle peut, à notre avis, s'interpréter de la façon suivante. Il y a d'abord une évolution linéaire et causale de l'onde  $\Psi$  de Schrödinger dans l'espace de configuration : cette fonction  $\Psi$  devient une superposition de composantes de Fourier de la forme  $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$  qui correspond à l'ensemble des propagations d'ondes individuelles corrélées  $v_1$  et  $v_2$  dans l'espace physique. On admet ensuite, dans le calcul classique développé par Born que tout se passe comme si, à la fin de la collision, il s'était produit brusquement un processus qui avait rompu les relations de phase entre les composantes de Fourier  $\Psi$ , et qui avait eu finalement pour résultat que chacune des particules se retrouve attachée à la fin de l'interaction à un train d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique, l'énergie et la quantité de mouvement globales du système se trouvant conservées. La forme  $\Psi_f$  finale de la fonction d'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration est donc devenue égale à l'une des fonctions  $\Psi_i$  produit des fonctions d'onde finales des deux particules. Au total, il y a eu passage de l'état initial  $\Psi_i$  à l'un des états finaux  $\Psi_f = \Psi_k$ , ce passage ayant *a priori* d'après les lois de probabilités de la Mécanique ondulatoire une probabilité  $|c_k|^2$  de se produire. Le passage s'est donc opéré en deux étapes : la première relativement lente, linéaire et causale est bien décrite par les équations usuelles de la Mécanique ondulatoire à l'aide de l'évolution de la fonction  $\Psi$ , la seconde très brève et, suivant nos conceptions, sans doute non linéaire qui comporte un échange brusque et important d'énergie et de quantité de mouvement entre les deux particules. La description de cette seconde étape

échappe complètement à la théorie linéaire usuelle et est simplement postulée par elle sans aucune tentative d'interprétation.

Nous voulons maintenant tenter de prouver que l'état initial et l'état final, qui sont tous deux représentables par des trains d'ondes assimilables à des ondes planes monochromatiques, ont une entropie supérieure à celle de l'état de superposition intermédiaire. La difficulté de le faire provient de ce que jusqu'à présent nous n'avions développé la thermodynamique cachée que pour une particule unique et isolée et qu'il nous faut maintenant généraliser les formules obtenues au cas d'un système de particules. Sous réserve d'une étude plus approfondie de la question, il nous paraît naturel de le faire en définissant, à l'approximation newtonienne, la température  $T$  d'un système de deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  et la masse propre totale du système par les formules :

$$(8) \quad kT = (m_1 + m_2)c^2$$

et :

$$(9) \quad M_0c^2 = (m_1 + m_2)c^2 + Q,$$

où  $Q$  est le potentiel quantique du système défini à partir de l'amplitude  $a$  de l'onde  $\Psi$  dans l'espace de configuration par :

$$(10) \quad Q = -\hbar^2 \sum_1^2 \frac{1}{m_i} \frac{\Delta_i a}{a}.$$

Or, nous avons pour l'énergie  $W$  et la fonction de Lagrange  $\mathcal{L}$  du système, compte tenu des termes de masse, les formules :

$$(11) \quad \begin{cases} W = (m_1 + m_2)c^2 + E_c + V + Q, \\ \mathcal{L} = - (m_1 + m_2)c^2 + E_c - V - Q, \end{cases}$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique totale des deux particules et  $V$  leur énergie potentielle d'interaction. Nous éliminerons  $E_c$  qui dépend du mouvement des deux particules défini par la formule du guidage en soustrayant  $W$  de  $\mathcal{L}$ , ce qui donne :

$$(12) \quad \mathcal{L} = -2(m_1 + m_2)c^2 - 2Q + W - 2V.$$

Comme  $W$ , énergie totale du système, est une constante et que  $V$  ne dépend pas de  $M_0$ , nous pouvons écrire :

$$(13) \quad \mathcal{L} = -2M_0c^2 + \dots,$$

les termes non écrits ne dépendant pas de  $M_0$ .

Or nous savons que  $\delta S = \frac{\delta_M \mathcal{L}}{T}$  et, en tenant compte des formules (8) et (9), nous trouvons aisément :

$$(14) \quad S = S_0 - \frac{2kM_0}{m_1 + m_2} = S_0 - 2k - \frac{2k}{(m_1 + m_2)c^2} Q.$$

Pour l'état « monochromatique » initial et pour l'état « monochromatique » final, nous avons,  $a$  étant constant,  $Q = 0$ , d'où :

$$(15) \quad S_m = S_0 - 2k.$$

Le terme  $-2k$  est satisfaisant puisque les deux particules sont alors indépendantes et apportent chacune à l'entropie une contribution égale à  $-k$ . Pour l'état de superposition, nous trouvons d'après (14) :

$$(16) \quad \bar{S}_s = S_0 - 2k - \frac{2k}{(m_1 + m_2)c^2} \bar{Q},$$

où  $\bar{Q}$  est la valeur moyenne de  $Q$  calculée dans l'espace de configuration où la probabilité de présence du point représentatif du système en chaque point est donnée par  $a^2$ . Compte tenu de l'expression (10) de  $Q$ , un calcul tout à fait analogue à celui que nous avions fait dans l'espace physique pour obtenir la formule (5) nous montre que  $\bar{Q} > 0$ . La comparaison des formules (15) et (16) nous montre alors immédiatement que :

$$(17) \quad \bar{S}_s < S_m.$$

Nous retrouvons donc notre conclusion précédente sur l'instabilité des états de superposition et nous voyons que le processus transitoire brusque qui correspond au passage de l'état  $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$  à l'état final  $\Psi_k$  s'accompagne d'une brusque augmentation de l'entropie conformément aux idées de MM. Lochak et Andrade e Silva. L'état initial et l'état final étant monochromatiques correspondent à la valeur  $S_0 - 2k$  de l'entropie et nous pouvons représenter par le diagramme de la figure 8.

Sur ce diagramme, la courbe AB en trait plein représente schématiquement la première étape de la collision correspondant à l'évolution causale et linéaire de la fonction  $\Psi$  usuellement calculée

tandis que la ligne ponctuée BC représente la transition brusque et sans doute non linéaire qui, après franchissement d'une vallée d'entropie, ramène le système de l'état de superposition B à l'état monochromatique final C avec augmentation de l'entropie.

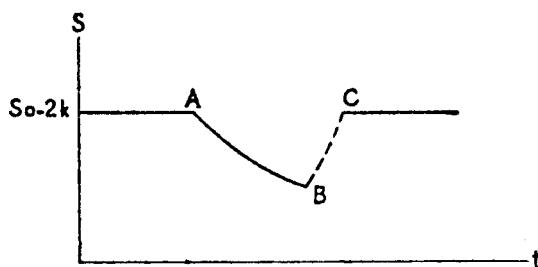


FIG. 8.

**4. Introduction de l'énergie libre en Thermodynamique cachée des particules.** — Nous venons d'étudier deux cas où une particule ou un système est isolé et n'échange aucune énergie avec le milieu extérieur, ne se trouvant en contact qu'avec le thermostat caché. Nous avons alors trouvé que la stabilité des états correspond à un maximum de l'entropie et il doit sans doute en être de même dans tous les cas de ce genre. Mais le cas des systèmes qui peuvent échanger de l'énergie avec le milieu extérieur doit être différent. Dans sa très intéressante Note d'avril 1963, M. Lochak a insisté sur le fait que, pour un système quantifié pouvant échanger de l'énergie avec le milieu extérieur, la stabilité des états quantiques doit correspondre à un minimum d'une fonction « énergie libre » de la forme  $F = U - TS$ . Les états quantifiés du système qui, sauf l'état de moindre énergie, sont seulement métastables correspondent à une série de petites cuvettes d'énergie libre sur le flanc d'une montagne d'énergie libre. Cette conception nous paraît exacte, mais il y a lieu de bien préciser la définition de cette énergie libre qui n'est pas tout à fait la même qu'en Thermodynamique usuelle.

Désignons par  $\mathcal{Q}$  la quantité de chaleur cédée à une particule par le thermostat caché et par  $Q$  le potentiel quantique de cette particule. Les formules de notre thermodynamique nous donnent dans le système propre de la particule :

$$(18) \quad S = S_0 - k \frac{M_0}{m_0} = S_0 - k - \frac{kQ}{m_0 c^2} = S_0 - k - \frac{Q}{T},$$

d'où :

$$(19) \quad \delta Q = - T \delta S = \delta Q.$$

Il est essentiel de noter que, malgré leur égalité, les grandeurs  $\delta Q$  et  $\delta Q$  ont des sens physiques très différents : en effet,  $\delta Q$  est la quantité de chaleur échangée entre le thermostat caché et la particule tandis que  $\delta Q$  est la variation de la masse propre de la particule qui en résulte. La chaleur  $Q$  ne peut circuler qu'entre le thermostat caché et la particule et ne peut pas intervenir directement dans la dynamique de la particule et dans ses échanges d'énergie avec l'extérieur, sans quoi le thermostat caché ne serait pas caché.

L'énergie de la particule peut s'écrire :

$$(20) \quad W = m_0 c^2 + E_c + V + Q,$$

où  $V$  est l'énergie potentielle classique et  $E_c$  l'énergie cinétique  $\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - M_0 c^2$  qui, à l'approximation newtonienne, se réduit à  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ ,  $v$  étant la vitesse définie par la formule du guidage. Soit

$\mathcal{W}$  le travail extérieur, c'est-à-dire l'énergie fournie par la particule au milieu extérieur. Si nous posons, par définition :

$$(21) \quad U = E_c + V,$$

la conservation de l'énergie nous impose d'écrire :

$$(22) \quad \delta \mathcal{W} = - \delta W = - \delta(U + Q)$$

et, si nous adoptons comme définition de l'énergie libre :

$$(23) \quad F = U - TS,$$

nous avons :

$$(24) \quad \delta \mathcal{W} = - \delta(U + Q) = - \delta(U - TS) = - \delta F.$$

Nous retrouvons donc la formule classique  $\delta \mathcal{W} = - \delta F$  : elle entraîne que l'état le plus stable correspond à la valeur minimale de  $F$ .

Mais nous devons remarquer que la définition (23) adoptée pour l'énergie libre n'est pas identique à celle qui est adoptée par la Thermodynamique usuelle. Dans celle-ci, en effet, on considère un corps qui contient une énergie mécanique et thermique *totale*  $U$

et qui peut échanger avec l'extérieur de la chaleur et du travail. On est alors amené à écrire :

$$(25) \quad \delta U = \delta Q - \delta \mathcal{C},$$

$\delta Q$  étant ici la chaleur *reçue* de l'extérieur par le corps et  $\delta \mathcal{C}$  le travail qu'il *fournit* à l'extérieur. En posant :

$$(26) \quad F = U - TS,$$

on obtient pour une transformation réversible :

$$(27) \quad \delta \mathcal{C} = - \delta(U - TS) = - \delta F.$$

Mais, dans le problème que nous étudions, les choses sont différentes. Nous avons une particule dont l'énergie est donnée par la formule (20). Cette particule est en contact avec le milieu extérieur, mais elle ne peut lui emprunter ou lui fournir que du travail, c'est-à-dire de l'énergie mécanique ordonnée : elle se trouve également en contact avec le thermostat caché auquel elle ne peut emprunter ou fournir que de la chaleur avec variation correspondante de sa masse propre. La conservation de l'énergie doit être valable pour les échanges d'énergie entre la particule et le milieu extérieur, abstraction faite de la présence du thermostat caché. La présence de celui-ci se manifestera seulement dans nos calculs par la nécessité de prendre des moyennes sur la position de la particule.

Ce sont ces circonstances qui nous ont amené à prendre pour  $U$  la définition (21) qui est différente de la définition de la Thermodynamique usuelle que nous venons de rappeler puisque notre grandeur  $U$  ne représente pas la totalité de l'énergie du système considéré. Et quand nous avons posé  $F = U - TS$ , nous avons obtenu une définition de l'énergie libre qui diffère de celle de la Thermodynamique classique d'abord parce que  $U$  n'a pas la même définition dans les deux théories et aussi parce que  $S$  n'est plus l'entropie du système considéré (la particule ne contenant pas de chaleur sous forme d'énergie calorifique désordonnée), mais est celle du thermostat caché qui, lui, est un réservoir de chaleur.

Bref, la raison essentielle de la différence qui existe entre les formules (24) et (27), dont l'aspect est identique, est qu'une particule n'est pas un corps macroscopique contenant de la chaleur sous forme d'agitation moléculaire interne.

5. **Exemples d'application des formules précédentes.** — Nous allons maintenant donner quelques applications de notre définition de l'énergie libre.

a) *Électron dans un atome d'hydrogène.* — Comme exemple d'application à un système quantifié, nous considérerons le cas simple d'un électron dans un atome d'hydrogène en nous bornant au cas des états complètement stationnaires où la vitesse de guidage  $v$  est nulle. On a alors :

$$V = -\frac{e^2}{r}.$$

Or j'ai pu démontrer dans mon livre sur la Théorie de la Mesure [4] (p. 76-77) que, dans la théorie de la double solution, le théorème du viriel prend la forme :

$$(28) \quad 2\overline{E_c + Q} - \overline{(\vec{r} \cdot \vec{\text{grad}} V)} = 0$$

qui donne ici, avec  $E_c = 0$  et  $-(\vec{r} \cdot \vec{\text{grad}} V) = V$ ,

$$(29) \quad \bar{V} + 2\bar{Q} = 0.$$

Les moyennes sont prises en  $|\Psi|^2$ , c'est-à-dire sur les perturbations Bohm-Vigier.

Comme dans les états quantifiés  $V + Q = \text{Cte}$  quelle que soit la position fluctuante de la particule dans son onde, nous avons :

$$(30) \quad \delta(V + Q) = \delta(\bar{V} + \bar{Q}) = \frac{1}{2} \delta\bar{V} = -\delta\bar{Q} = T\delta S.$$

On voit aisément que, pour les transitions avec émission d'énergie, on a  $\delta\bar{V} < 0$  et  $\delta\bar{Q} > 0$ . D'où, pour ces transitions :

$$(31) \quad \delta\mathcal{E} = -\delta(\bar{V} + \bar{Q}) = -\frac{1}{2} \delta\bar{V} = \delta\bar{Q}.$$

La diminution de l'énergie potentielle compense donc à la fois la production de travail extérieur et l'augmentation  $\delta Q$  de l'énergie de masse propre. On voit que la conservation de l'énergie oblige ici l'entropie  $S$  à diminuer. La stabilité des états sera donc déterminée par la diminution de l'énergie libre  $F$  telle que nous l'avons définie et non par l'augmentation de l'entropie  $S$ , ce qui est en accord avec les conceptions de M. Lochak.

Bien entendu, s'il y a apport d'énergie extérieure ( $\delta\mathcal{E} < 0$ ),  $V + Q$  augmente, l'augmentation de  $V$  provenant à la fois de l'apport d'énergie extérieure et de la diminution de l'énergie de masse  $Q$  accompagnée d'une augmentation de l'entropie  $S$ .

b) *Cas de l'oscillateur linéaire harmonique.* — Dans le cas des états stationnaires de l'oscillateur linéaire harmonique, la phase  $\varphi$  de l'onde ne peut dépendre que du temps et la vitesse de guidage  $\vec{v} = -\frac{1}{m} \vec{\text{grad}} \varphi$  est toujours nulle. Quant à l'énergie potentielle, elle a la forme  $V = \frac{1}{2} Kx^2$ . On a donc  $U = V = \frac{1}{2} Kx^2$ . Or le théorème du viriel (28) nous donne ici :

$$(32) \quad \bar{Q} = \bar{V}.$$

On peut donc écrire :

$$(33) \quad U + Q = V + Q = \bar{V} + \bar{Q} = 2\bar{V} = 2\bar{Q}$$

et :

$$(34) \quad \delta\mathcal{C} = -\delta(V + Q) = -\delta(U - TS) = -2\delta\bar{V} = -2\delta\bar{Q}.$$

Quand l'oscillateur émet de l'énergie vers l'extérieur, les deux potentiels  $V$  et  $Q$  diminuent en moyenne de la même quantité. Contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'atome d'hydrogène, la diminution de  $V$  s'accompagne d'une augmentation de  $S$ , mais il y a toujours diminution de  $F = U - TS$ .

c) *Cas d'une particule qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.* — Nous allons étudier le cas d'une particule placée en dehors de tout champ ( $V = 0$ ) qui n'échange aucune énergie avec l'extérieur. Ses variations d'énergie ne peuvent alors provenir que de variations de sa masse propre dues à des emprunts ou des cessions de chaleur au thermostat caché et ici, nous l'avons vu, nous devons nous attendre à voir les états stables correspondre aux maximums de l'entropie  $S$ .

Nous allons encore comparer deux états de même énergie de la particule, l'un, l'état  $m$ , où l'onde  $\Psi$  est assimilable à une onde monochromatique plane, l'autre, l'état  $s$ , où l'onde  $\Psi$  est une superposition d'ondes monochromatiques planes de même fréquence. Dans l'état  $m$ ,  $Q$  est nul et  $F_m$  se réduit à l'énergie cinétique. Dans l'état  $s$ ,  $Q$  n'est pas nul et l'on peut démontrer que  $\bar{Q}_s > 0$ . Comme l'énergie  $E_c + Q$  reste constante, nous avons dans les deux cas

$$F = E_c + Q = \bar{E}_c + \bar{Q} > 0.$$

Mais, comme, par hypothèse, le travail extérieur  $T$  est nul, nous avons pour la transition  $s \rightarrow m$  :

$$(35) \quad \delta_{sm}F = \delta_{sm}E_c + \delta_{sm}Q = 0,$$

d'où :

$$(36) \quad \delta_{sm}\bar{Q} = -T\delta_{sm}\bar{S} = -\bar{Q}_s < 0$$

et, par suite :

$$(37) \quad \delta_{sm}\bar{S} > 0, \quad \delta_{sm}\bar{E}_c > 0.$$

Ainsi, lors de la transition  $s \rightarrow m$ , il y a à la fois augmentation de l'entropie  $S$  et de l'énergie cinétique. Pour une particule qui n'échange aucune énergie avec l'extérieur, les « états monochromatiques »  $m$  sont plus probables que les états de superposition et correspondent à un maximum de l'entropie ainsi que nous l'avions déjà vu au paragraphe 3.

**6. Conclusions.** — Nous pouvons résumer ce qui précède en disant : « Dans le cas d'une particule ou d'un système de particules n'échangeant pas d'énergie avec l'extérieur, la stabilité d'un état correspond à un maximum de l'entropie ; dans le cas d'un système qui peut donner ou emprunter de l'énergie mécanique à l'extérieur (tel un atome quantifié qui peut émettre ou absorber un photon et aussi, échanger de l'énergie avec une particule extérieure dans une collision) la stabilité d'un état correspond à un minimum d'une fonction *énergie libre* convenablement définie. »

On pourrait encore envisager d'autres cas, par exemple celui d'un système quantifié en contact avec un thermostat macroscopique extérieur de température  $\theta$ . On sait que, dans ces conditions, l'état d'énergie quantifiée  $E_n$  a, d'après la loi de distribution canonique de Boltzmann-Gibbs, une probabilité d'être réalisée proportionnelle à  $e^{-\frac{E_n}{k\theta}}$ . Comme toute particule se trouve, suivant nos conceptions, en contact énergétique avec le thermostat caché, on est amené à concevoir deux Thermodynamiques qui entreraient simultanément en jeu : une Thermodynamique « externe » due aux échanges de chaleur du système avec le thermostat macroscopique et une Thermodynamique « interne » due aux échanges de chaleur avec le thermostat caché. M. Lochak dans la Note citée au paragraphe 4 a insisté sur ce point en faisant une intéressante remarque

à ce sujet, mais le problème demanderait évidemment à être examiné de plus près.

Nous voulons, en terminant, attirer l'attention sur le lien étroit qui existe entre, d'une part, notre Thermodynamique cachée des particules et les conclusions que nous en avons tirées et, d'autre part, les notions de potentiel quantique et de masse propre variable qui sont caractéristiques de la Dynamique du guidage et de la Théorie de la double solution. Il nous paraît probable que la Théorie de la double solution complétée par la Thermodynamique que nous avons esquissée dans ce volume soit appelée à jouer un rôle important dans les développements futurs de la Physique quantique.

---

## APPENDICE

### Sur l'instabilité des états de superposition dans le cas de l'électron de Dirac

A la page 200 de l'Ouvrage cité au numéro [3] de la bibliographie j'ai donné comme expression de la masse propre variable de l'électron de Dirac :

$$(1) \quad M_0 = \frac{m_0}{\Psi^+ \Psi^c} \sqrt{-j_\mu j^\mu},$$

où  $j_\mu$  est le quadrivecteur « courant-densité » de la théorie de Dirac. Or on a  $j_\mu = \rho_0 u_\mu$  avec  $u_\mu u^\mu = -c^2$ , ce qui permet d'écrire :

$$(2) \quad M_0 = \frac{m_0}{\Psi^+ \Psi^c} \rho_0.$$

Si l'on définit les deux invariants bien connus de la théorie de Dirac par :

$$(3) \quad \Omega_1 = \Psi^+ \Psi = \Psi^+ \gamma_4 \Psi; \quad \Omega_2 = \Psi^+ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \Psi,$$

une des relations classiques de Pauli-Kofink donne :

$$(4) \quad \rho_0^2 = -j_\mu j^\mu = \Omega_1^2 + \Omega_2^2.$$

On a donc d'après (2), (3), (4) :

$$(5) \quad M_0 = m_0 \sqrt{1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}.$$

Mais, en théorie de Dirac, l'invariant  $\Omega_2$  est nul pour une onde plane monochromatique tandis qu'il ne l'est pas pour une superposition. Comme l'entropie du thermostat cachée a été définie d'une façon générale par la formule  $S = S_0 - k \frac{M_0}{m_0}$ , on voit tout de suite que l'on a :

$$(6) \quad S_1 < S_m.$$

Ici encore, on arrive au résultat que l'état de superposition est moins stable que l'état monochromatique et l'on voit avec quelle simplicité cette conclusion se déduit de la formule (5).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] LÉON BRILLOUIN, *La théorie des quanta*, Presses universitaires de France, Recueil des Conférences Rapports, Presses universitaires de France, 1922.
  - [2] M. RENNINGER, *Zum Wellen-Korpuskel Dualismus* (Z. *Physik*, Bd 136, 1953, p. 251).
  - [3] LOUIS DE BROGLIE, *Une tentative d'interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1956.
  - [4] LOUIS DE BROGLIE, *La théorie de la Mesure en Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1957 ; *L'interprétation de la Mécanique ondulatoire* (J. *Phys. Rad.*, t. 20, 1959, p. 963) ; *Étude critique des bases de l'interprétation actuelle de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1963.
  - [5] J. L. ANDRADE E SILVA, F. FER, PH. LERUSTE et G. LOCHAK, *C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 2305, 2482 et 2662 ; *Cahiers de Physique*, t. 15, 1961, p. 209 et t. 16, 1962, p. 1.
  - [6] JEAN-LOUIS DESTOUCHES, *La quantification en théorie fonctionnelle des corpuscules*, Gauthier-Villars, Paris, 1956 ; *Corpuscules et champs en théorie fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1958.
  - [7] D. BOHM et J.-P. VIGIER, *Phys. Rev.*, t. 96, 1956, p. 208.
  - [8] J. P. TERLETSKY, *J. Phys. Rad.*, t. 21, 1960, p. 681 et 771 ; t. 23, 1962, p. 910.
  - [9] LOUIS DE BROGLIE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, p. 1078 ; t. 255, 1962, p. 807 et 1052 ; t. 257, 1963, p. 1430.
  - [10] LOUIS DE BROGLIE, *Introduction à la théorie des particules de M. J.-P. Vigier et de ses collaborateurs*, Gauthier-Villars, Paris, 1961.
  - [11] J. L. ANDRADE E SILVA et G. LOCHAK, *C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 4260.  
G. LOCHAK, *C. R. Acad. Sc.*, t. 254, 1962, p. 4436 ; t. 256, 1963, p. 3601.
  - [12] FR. FER, *J. Phys. Rad.*, t. 23, 1962, p. 973.
-

# TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRÉFACE . . . . .	v
<b>CHAPITRE PREMIER</b>	
<b>RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE</b>	
1. Le principe d'action stationnaire de Hamilton . . . . .	1
2. Moments de Lagrange. Théorèmes de conservation . . . . .	3
3. Le principe de moindre action de Maupertuis. . . . .	5
4. Équations de Hamilton . . . . .	7
5. Mécanique classique et Mécanique relativiste. . . . .	8
<b>CHAPITRE II</b>	
<b>LA DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ</b>	
1. Formules générales . . . . .	9
2. Énergie et Impulsion d'univers. . . . .	13
3. Dynamique relativiste de l'électron dans un champ électromagnétique. . . . .	15
4. Les équations de Hamilton . . . . .	17
5. Étude sommaire du principe de l'inertie de l'énergie. . . . .	17
6. Extensions diverses du principe de l'inertie de l'énergie. . . . .	20
7. Remarque importante . . . . .	21
<b>CHAPITRE III</b>	
<b>NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE</b>	
1. Introduction . . . . .	22
2. Bases de l'interprétation statistique de la Thermodynamique. . . . .	22
3. Extension-en-phase et théorème de Liouville . . . . .	23
4. Entropie et probabilité. Relation de Boltzmann . . . . .	30
5. Température et équilibre thermique . . . . .	32
6. Répartition canonique de Boltzmann-Gibbs . . . . .	34
7. Remarques importantes au sujet de la loi de distribution canonique. . . . .	36
8. Applications de la loi de distribution canonique . . . . .	38
9. Théorème de l'équipartition de l'énergie . . . . .	41
10. La Mécanique statistique relativiste . . . . .	42
11. Application à un gaz de photons . . . . .	44
12. Valeur moyenne de $p_k q_k$ en Mécanique statistique relativiste. . . . .	46

	Pages
<b>CHAPITRE IV</b>	
<b>NOTIONS DE THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE</b>	
1. Invariance relativiste de l'Entropie. . . . .	48
2. Variance relativiste de la température. . . . .	49
3. Extension au cas où le volume du corps C varie . . . . .	51
4. Le quadrivecteur « Inverse de la température » . . . . .	52
5. Précision et extension de la formule $Q = -\Delta E$ . . . . .	53
<b>CHAPITRE V</b>	
<b>ANALOGIES ENTRE GRANDEURS MÉCANIQUES ET GRANDEURS THERMODYNAMIQUES</b>	
1. Généralités. . . . .	56
2. La théorie de Helmholtz. . . . .	57
3. Le schéma canonique de la Thermodynamique, d'après Helmholtz. . . . .	61
4. La théorie de Boltzmann pour les systèmes périodiques. Formule préliminaire . . . . .	63
5. La formule de Boltzmann pour les systèmes périodiques . . . . .	65
<b>CHAPITRE VI</b>	
<b>ORIGINE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE ET SON INTERPRÉTATION PAR LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION</b>	
1. Fréquence cyclique et fréquence ondulatoire . . . . .	69
2. La Mécanique ondulatoire à l'approximation de l'Optique géométrique. . . . .	72
3. La conception de l'onde pilote . . . . .	74
4. Le potentiel quantique . . . . .	77
5. La théorie de la double solution. . . . .	78
6. Remarques au sujet de l'aspect hydrodynamique des conceptions précédentes. . . . .	80
<b>CHAPITRE VII</b>	
<b>INTRODUCTION DE CONCEPTIONS THERMODYNAMIQUES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE</b>	
1. Le milieu subquantique de Bohm-Vigier . . . . .	82
2. Comparaison avec le mouvement d'un granule dans l'écoulement d'un fluide chaud . . . . .	86
3. Première tentative pour établir une correspondance entre entropie et action, température et fréquence . . . . .	87
4. Sur un Mémoire de M. Terletsky . . . . .	90
<b>CHAPITRE VIII</b>	
<b>LA THERMODYNAMIQUE DE LA PARTICULE ISOLÉE (OU THERMODYNAMIQUE CACHÉE DES PARTICULES)</b>	
1. Formules fondamentales. . . . .	93
2. Analogies entre la Thermodynamique de la particule isolée et le schéma canonique de Helmholtz. . . . .	95

## TABLE DES MATIÈRES

125

	Pages
3. Le second principe de la Thermodynamique et le principe de moindre action de Hamilton . . . . .	97
4. Remarques sur la rotation $h_{rc} = kT$ . . . . .	99
5. Les relations $\bar{M}_0 = m_0$ et $\bar{S}(\bar{M}_0) = -k$ . . . . .	101
6. Comparaison avec la méthode d'Einstein pour l'étude des fluctuations. . . . .	103
7. Vue d'ensemble sur les résultats obtenus jusqu'ici . . . . .	104

## CHAPITRE IX

## STABILITÉ DES ÉTATS, ENTROPIE ET ÉNERGIE LIBRE

1. Les transitions quantiques et la « prérogative » des états monochromatiques . . . . .	107
2. Cas d'une particule libre à l'approximation newtonienne . . . . .	109
3. Cas du choc de deux particules. . . . .	110
4. Introduction de l'énergie libre en Thermodynamique cachée des particules . . . . .	114
5. Exemples d'application des formules précédentes. . . . .	117
6. Conclusions . . . . .	119
APPENDICE . . . . .	121
BIBLIOGRAPHIE. . . . .	122
TABLE DES MATIÈRES. . . . .	123

IMPRIMÉ EN FRANCE

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A., LAVAL, N° 4864. — 9-1964

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1261. 3<sup>e</sup> TRIMESTRE 1964.

N° de code 539-32