

**LA RÉINTERPRÉTATION  
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE**

**Tome 1**

**PRINCIPES GÉNÉRAUX**

**Louis de BROGLIE**  
**et J. L. ANDRADE e SILVA**

# **LA RÉINTERPRÉTATION DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE**

**Tome 1**  
**PRINCIPES GÉNÉRAUX**

**Par M. Louis de BROGLIE**

**NOTE :**

**COMMENTAIRE :**

**N° CLASSEMENT :**

**GAUTHIER-VILLARS Éditeur**  
**55, quai des Grands-Augustins, Paris-6<sup>e</sup>**  
**1971**

© Gauthier-Villars, 1971.

La Loi du 11 Mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'Article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

## AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est divisé en deux tomes. Le présent premier tome, rédigé par moi-même, comprend un exposé de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la Théorie de la double solution et par la Thermodynamique cachée des particules ainsi qu'un grand nombre d'applications de ces conceptions générales.

Le second tome, qui paraîtra ultérieurement, sera rédigé par M. Andrade e Silva et comprendra l'examen détaillé de questions qui n'ont pas été étudiées ou qui n'ont été qu'effleurées dans le présent volume.

Louis de BROGLIE.



## CHAPITRE I

# LES DÉBUTS DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

**1. Naissance de la Mécanique ondulatoire..** — Je crois nécessaire de rappeler quelles sont les idées qui m'ont guidé à l'époque où j'ai posé les premiers principes de la Mécanique ondulatoire en 1923-1924 [1]. Je le crois nécessaire parce que ces idées ne sont jamais rappelées dans les exposés actuels de la Mécanique quantique.

Dans ma première jeunesse, entre 1911 et 1919, j'avais étudié avec un grand enthousiasme tous les récents résultats de la Physique théorique de cette époque. Les travaux de Poincaré, de Lorentz, de Langevin, ... sur la théorie électromagnétique m'étaient familiers ainsi que ceux de Boltzmann et de Gibbs sur la Mécanique statistique. Mais mon attention avait été particulièrement retenue par les travaux de Planck, d'Einstein et de Bohr sur les quanta et je voyais dans la coexistence des ondes et des particules dans les rayonnements découverte par Einstein en 1905 dans sa théorie des quanta de lumière un fait fondamental dont il importait de préciser la véritable nature.

Ayant suivi les travaux que mon frère Maurice poursuivait sur les spectres de rayons X, je voyais toute l'importance dans ce domaine du double aspect des radiations électromagnétiques et, ayant étudié en Mécanique la théorie d'Hamilton-Jacobi, j'y voyais une sorte de préfiguration d'une théorie synthétique de l'union des ondes et des particules. Enfin, j'avais aussi beaucoup étudié la théorie de la Relativité et j'étais persuadé qu'elle devait être à la base de toutes les tentatives théoriques nouvelles.

Tel était mon état d'esprit quand en 1919, libéré des obligations militaires que m'avait imposées la guerre de 1914-1918, je me suis remis à faire des recherches personnelles. Ayant une conception très « réaliste » de la nature du monde physique et peu porté aux considérations purement abstraites, je voulais me représenter l'union des ondes et des particules d'une façon concrète, la particule étant un petit objet localisé incorporé dans la structure d'une onde en propagation. Naturellement j'avais commencé par étudier le cas de la lumière et des autres rayonnements électromagnétiques où je cherchais à me représenter la particule que l'on appelle aujourd'hui « photon » comme transportée par l'onde électromagnétique. Puis soudain me vint, en 1923, l'idée que la coexistence des ondes et des particules n'existait pas seulement dans le cas étudié par Einstein et qu'elle devait être généralisée pour toutes les particules. Appliquée à l'électron, elle me paraissait devoir expliquer les propriétés étranges des mouvements d'un électron dans un atome décou-

vertes par Bohr dans sa théorie des états stationnaires des atomes. Dans la théorie atomique de Bohr, on voit en effet apparaître des nombres entiers, ce qui est courant dans la théorie des ondes quand on étudie les phénomènes de résonance ou d'interférences.

Mais je dois insister tout particulièrement ici sur une idée qui m'a constamment guidé à cette époque et qui n'est jamais rappelée aujourd'hui. Comme je l'ai dit, j'étais convaincu qu'il fallait prendre constamment comme base des développements théoriques les idées de la théorie de la Relativité. Guidé par les beaux exposés de Paul Langevin au Collège de France, j'ai donc bien étudié les propriétés de la représentation relativiste d'une onde en propagation. D'autre part, m'inspirant d'une des idées fondamentales de la théorie des quanta, j'ai été amené à définir une fréquence propre interne  $\nu_0$  de la particule reliée à l'énergie de masse propre  $m_0 c^2$  par la relation  $h\nu_0 = m_0 c^2$ . Cela m'amenait donc à considérer la particule comme une petite horloge en mouvement. Je fus alors très frappé du fait que la formule de transformation d'une onde

lors d'une transformation de Lorentz est  $\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

alors que la formule de transformation de la fréquence d'une horloge, traduisant le célèbre « ralentissement » des horloges en mouvement, est  $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ . Intrigué par cette différence, je me suis demandé comment une particule assimilée à une petite horloge devait se déplacer dans son onde de façon à rester en quelque sorte incorporée à l'onde, c'est-à-dire de

façon que sa phase interne reste constamment égale à celle de l'onde. Appliquant cette image au cas simple, bien qu'un peu trop schématique, d'une onde plane monochromatique se propageant le long de l'axe des  $x$ , j'étais amené à écrire pour la variation  $d\varphi$  de la phase de cette onde

$$\begin{aligned} (1) \quad d\varphi &= 2\pi \left( \nu dt - \frac{dx}{\lambda} \right) = 2\pi \left( \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} dt - \frac{dx}{\lambda} \right) \\ &= \frac{2\pi}{h} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} dt - h \frac{dx}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

et pour la variation dans l'intervalle de temps  $dt$  de la phase interne de la particule se déplaçant le long de l'axe des  $x$  avec la vitesse  $\nu$

$$(2) \quad d\varphi_i = 2\pi \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} dt = \frac{2\pi}{h} m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt.$$

En écrivant que  $d\varphi = d\varphi_i$  avec  $dx = \nu dt$ , on obtient

$$(3) \quad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0 \nu^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{h\nu}{\lambda},$$

d'où pour la quantité de mouvement  $p$  de la particule

$$(4) \quad p = \frac{m_0 \nu}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{h}{\lambda}.$$

On a ainsi trouvé les deux relations fondamentales de la Mécanique ondulatoire  $W = h\nu$ ,  $p = \frac{h}{\lambda}$  en leur

associant l'image d'un corpuscule localisé qui se déplace dans l'onde le long d'un de ses rayons en restant constamment en phase avec elle. Telle était l'image concrète que j'avais dans l'esprit quand j'ai eu la première idée de la Mécanique ondulatoire. Peut-être ne l'ai-je pas assez explicitée dans ma Thèse, mais je puis affirmer que c'est elle qui me guidait.

Dans mes Notes de l'automne 1923 et dans ma Thèse de 1924, j'ai pu donner une première interprétation des conditions de quanta utilisées dans la théorie de l'atome de Bohr en admettant que la propagation de l'onde dans l'atome se fait à l'approximation de l'Optique géométrique, ce qui n'est pas exact, mais qui fournit cependant une première et très frappante interprétation de ces conditions de quanta.

Beaucoup d'autres considérations intéressantes se trouvaient esquissées dans ma thèse, notamment en ce qui concerne l'identité résultant de mes conceptions entre le principe de Fermat et le principe de moindre action de Maupertuis. J'y donnais aussi une première esquisse de ce qu'on nomme aujourd'hui la statistique de Bose-Einstein et j'introduisais, pour faire rentrer la théorie du photon dans le cadre de la Mécanique ondulatoire générale des particules, l'hypothèse que la masse propre du photon, bien que certainement extraordinairement petite, n'est pas rigoureusement nulle. C'est là une hypothèse que j'ai constamment introduite ensuite dans tous mes travaux sur la théorie quantique de la lumière.

**2. Les travaux de Schrödinger. La découverte de la diffraction des électrons.** — Je réfléchissais à la manière de préciser et de généraliser mes conceptions quand j'ai eu connaissance, au début de 1926, des beaux mémoires publiés par Erwin Schrödinger dans les *Annalen der Physik*. Schrödinger, s'inspirant des résultats de ma thèse et de la théorie d'Hamilton-Jacobi, écrivait sous une forme correcte, mais non relativiste (newtonienne), l'équation des ondes de la Mécanique ondulatoire qu'il désignait par le symbole  $\Psi$  qui a fait fortune. Reprenant d'une façon rigoureuse, c'est-à-dire sans supposer valable l'approximation de l'optique géométrique, le calcul de la propagation de l'onde dans l'atome de Bohr, il retrouvait en les rectifiant les résultats de ma thèse. Puis, grâce à une transposition vraiment remarquable, il montrait que la détermination des énergies quantifiées par sa méthode de calcul des valeurs propres de l'équation d'ondes donnait exactement les mêmes résultats numériques que la méthode beaucoup plus abstraite développée un an auparavant par Werner Heisenberg dans sa Mécanique des Matrices.

Enfin Schrödinger abordait le problème de la Mécanique ondulatoire des ensembles de particules en interaction en écrivant une équation d'ondes dans l'espace de configuration formée par les coordonnées de toutes les particules du système. Le caractère abstrait de cette méthode de calcul est évident car l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration ne peut pas être considérée comme une onde réelle se propageant dans l'espace physique.

Et cependant cette méthode abstraite se montrait rapidement très puissante et donnait bientôt des résultats très exacts et d'un très haut intérêt.

J'ai lu à cette époque les mémoires de Schrödinger avec la plus vive admiration en réfléchissant beaucoup sur leur contenu. Sur trois points cependant, je ne me sentais pas d'accord avec l'éminent physicien autrichien. D'abord l'équation d'ondes qu'il attribuait à l'onde  $\Psi$  n'était pas relativiste et j'étais trop convaincu de la liaison étroite existant entre la théorie de la Relativité et la Mécanique ondulatoire pour pouvoir me contenter d'une équation d'ondes non relativiste; mais cette difficulté fut vite levée car, dès juillet 1926, plusieurs auteurs, dont moi-même, ont trouvé une forme de l'équation d'ondes, connue aujourd'hui sous le nom d'équation de Klein-Gordon, dont l'équation de Schrödinger est la forme dégénérée à l'approximation newtonienne. Un autre point où mes vues ne s'accordaient pas avec celles de Schrödinger était que celui-ci, tout en conservant l'idée que l'onde  $\Psi$  dans l'espace physique est une onde réelle, semblait abandonner complètement l'idée de la localisation de la particule dans l'onde, ce qui ne concordait pas avec mes conceptions primitives. Enfin, tout en reconnaissant que la considération d'une onde  $\Psi$  dans l'espace de configuration constituait un formalisme très utile pour la prévision des propriétés d'un ensemble de particules en interaction, je considérais comme certain que le mouvement des diverses particules et la propagation de leurs ondes s'opéraient dans l'espace physique au cours du temps.

Tandis que je réfléchissais à la manière de développer mes propres conceptions en tenant compte de ce qu'il y avait d'indiscutable dans les résultats de Schrödinger, j'eus connaissance au printemps de 1927 de la sensationnelle découverte des phénomènes de diffraction des électrons faite aux États-Unis par Davisson et Germer. Bientôt répétées sous des formes diverses par G. P. Thomson en Angleterre, par Maurice Ponte en France, par d'autres encore dans divers pays, ces expériences ont permis de vérifier la formule que j'avais donnée pour relier la longueur d'onde de l'onde d'un électron à la valeur de sa quantité de mouvement et ont ainsi apporté aux idées de base de la Mécanique ondulatoire une complète confirmation. L'on a pu ensuite observer la diffraction d'autres particules telles que neutrons et protons, puis répéter avec des électrons toutes les expériences depuis longtemps classiques pour la lumière.

**3. La théorie de la double solution et le Conseil Solvay de 1927.** — Au printemps de 1927, les travaux de Schrödinger et la découverte de la diffraction des électrons paraissaient donc avoir apporté une confirmation complète des idées contenues dans ma thèse et cependant la plupart des théoriciens commençaient à s'orienter vers des conceptions tout à fait différentes de celles qui m'avaient dirigé. Schrödinger abandonnait l'idée de corpuscule localisé et ne maintenait que partiellement le caractère de réalité physique de l'onde. Allant plus loin, Max Born dans un important mémoire où il



traitait le problème des collisions dans la nouvelle Mécanique ne considérait plus l'onde  $\Psi$  que comme une représentation de probabilités et admettait qu'elle pouvait être arbitrairement « normée » : cela enlevait à l'onde  $\Psi$  le caractère essentiel d'une onde physique qui est d'avoir une amplitude bien déterminée.

Inquiet de voir ainsi disparaître entièrement l'image physique claire et concrète qui avait guidé mes premières recherches, j'ai fait alors un effort pour préciser mon point de vue et j'ai publié en mai 1927 un article dans le *Journal de Physique* sous le titre : *La Mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement* [2]. Dans cet article, intéressant à relire aujourd'hui, je commençais par définir très clairement le but que je poursuivais, puis j'introduisais, sous le nom de « théorie de la double solution », l'idée qu'il fallait distinguer *deux* solutions distinctes, mais intimement reliées de l'équation des ondes, l'une que j'appelais l'onde  $u$  étant une onde physique réelle et non normable comportant un accident local définissant la particule et représenté par une singularité, l'autre, l'onde  $\Psi$  de Schrödinger, normable et dépourvue de singularité, qui ne serait qu'une représentation de probabilités. Cela m'amenait à généraliser les formules que j'avais données dans ma thèse pour l'onde plane monochromatique au cas d'une solution quelconque de l'équation des ondes et à exprimer le mouvement de la particule dans son onde à l'aide d'une « formule du guidage » précisant la façon dont ce mouvement est guidé par la propagation de l'onde. J'étais ainsi

amené à envisager que le mouvement de la particule dans son onde s'effectue sous l'action d'une force dérivant d'un « potentiel quantique » proportionnel au carré de la constante de Planck, potentiel quantique qui dépend des dérivées secondes de l'amplitude de l'onde et qui est nul dans le cas de l'onde plane monochromatique. Je remarquais que le potentiel quantique peut s'exprimer par les variations de la masse propre de la particule, résultat dont j'ai mieux compris récemment toute l'importance, et qu'il apparaissait notamment dans ce que j'appelais les « états contraints » où la libre propagation de l'onde se trouve entravée par l'existence de conditions aux limites. J'esquissais aussi, d'ailleurs d'une façon très incomplète, la manière dont on pouvait chercher à justifier l'emploi par Schrödinger d'une onde statistique  $\Psi$  définie dans l'espace de configuration d'un ensemble de particules.

J'étais très satisfait des résultats que j'avais ainsi obtenus car ils me paraissaient ouvrir la voie qui devait conduire à la véritable interprétation de la Mécanique ondulatoire, compte tenu des résultats de Schrödinger et du succès de l'interprétation statistique de l'onde  $\Psi$ . Et aujourd'hui je crois à nouveau que j'avais raison. Je me rendais bien compte d'ailleurs que mon article ne constituait qu'une première esquisse destinée à subir bien des modifications et des améliorations, mais j'espérais qu'on m'aiderait dans cette tâche.

Au début de l'été 1927, je fus invité par Lorentz à prendre part au Conseil de Physique Solvay qui se

tint à Bruxelles en octobre 1927. J'y ai fait un exposé de ma théorie de la double solution, malheureusement sous la forme un peu trop simplifiée de « l'onde pilote ». Elle ne retint guère l'attention. Les physiciens habitués aux anciennes méthodes comme Planck, Lorentz, Langevin souhaitaient une interprétation de la Mécanique ondulatoire voisine des conceptions classiques, mais ne se prononçaient par sur sa nature. Schrödinger restait fidèle à une interprétation purement ondulatoire. Seul Einstein m'encourageait un peu dans la voie où je voulais m'engager [3]. Mais je trouvais en face de moi des adversaires redoutables. C'était Niels Bohr et Max Born, savants déjà illustres, c'était aussi le groupe de jeunes chercheurs qui formaient l'École de Copenhague parmi lesquels se trouvaient notamment Pauli, Heisenberg et Dirac, déjà auteurs de travaux remarquables. Ils interprétaient la dualité des apparences corpusculaires et ondulatoires par la théorie de la complémentarité récemment proposée par Bohr et, n'attribuant plus à l'onde  $\Psi$  arbitrairement normée de Schrödinger que le rôle d'une représentation de probabilité permettant de prévoir le résultat de certaines observations, ils en arrivaient à abandonner toute image claire de l'onde et de la particule. J'étais assez décontenancé. Je trouvais la complémentarité de Bohr assez obscure et je ne pouvais me résoudre à abandonner les images physiques qui m'avaient guidé depuis plusieurs années. Mais, développée par de nombreux chercheurs jeunes et ardents qui possédaient une grande habileté dans les calculs

mathématiques, l'interprétation probabiliste de la « Mécanique quantique » prit rapidement la forme de formalismes mathématiques élégants et rigoureux.

Revenu à Paris après le Conseil Solvay, je suis resté plusieurs mois hésitant entre la poursuite de mes idées primitives et le ralliement aux conceptions de l'École de Copenhague. Mais nommé à la fin de 1928 Professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Paris, poste que j'ai ensuite occupé pendant 34 ans, et ne pouvant enseigner une interprétation théorique qui n'avait pas encore pris une forme vraiment satisfaisante, je me décidais à exposer à mes élèves ce qui commençait à être enseigné partout ailleurs et je renonçais à progresser davantage dans la voie difficile où j'avais voulu m'engager. Cela m'a permis de faire pendant plus de vingt ans des exposés très étendus et des travaux approfondis sur l'ensemble de la Physique quantique comme on l'exposait alors. Je n'ai cependant jamais perdu entièrement de vue mes conceptions primitives et l'on en retrouve toujours des traces dans la façon dont j'introduisais les bases de la Mécanique ondulatoire en évitant de leur donner une forme trop abstraite et axiomatique.

**4. Retour à des idées primitives depuis 1951.** — A partir de 1951, un revirement complet s'est opéré dans mon esprit en ce qui concerne l'interprétation de la Mécanique ondulatoire et je suis revenu aux idées qui avaient orienté mes travaux à l'époque où j'avais

cherché à obtenir une image claire de la coexistence des ondes et des particules.

Ce revirement imprévu a eu certainement pour origine des études que j'ai poursuivies dans la période 1948-1952. J'avais d'abord fait des cours sur l'interprétation statistique de la Thermodynamique en insistant sur l'introduction dans cette théorie des conceptions relativistes. Je me suis alors aperçu qu'il existait une curieuse analogie entre la formule de transformation relativiste de la chaleur et la formule de transformation relativiste de la fréquence d'une horloge qui avait joué un si grand rôle dans mes réflexions au moment de ma Thèse de Doctorat. Et je fus aussi très frappé par l'analogie, déjà vaguement pressentie autrefois par Eddington, entre les deux invariants relativistes que sont l'action et l'entropie. J'étais ainsi ramené aux idées qui m'avaient guidé lors de la découverte de la Mécanique ondulatoire et l'on verra plus loin le rôle important qu'ont joué ces analogies thermodynamiques dans mes récents travaux.

Dans les années suivantes, j'ai consacré deux cours à exposer l'interprétation de la Mécanique quantique par l'École de Copenhague et les controverses qui avaient eu lieu à ce sujet, une quinzaine d'années auparavant, entre Niels Bohr d'une part, Einstein et Schrödinger d'autre part. Au fur et à mesure que j'avançais dans la rédaction de ces cours, je sentais mes idées se modifier. Ma confiance dans l'interprétation généralement adoptée était ébranlée et je me demandais si je ne devais pas reprendre mon ancienne

tentative d'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution. C'est alors que j'ai eu connaissance d'un article de M. David Bohm dans la *Physical Review* où il reprenait la plupart des idées contenues dans mon article du *Journal de Physique* de 1927. Je me décidai alors à reprendre le développement de mon ancienne tentative.

Ayant à cette époque beaucoup d'obligations universitaires ou autres et n'ayant pu trouver qu'un très petit nombre de jeunes chercheurs pour m'aider, j'ai d'abord progressé très lentement dans l'œuvre de critique et de réinterprétation dans laquelle je m'engageais. Mais depuis quelques années, il m'a été possible de donner à la théorie de la double solution une forme plus élaborée et de la compléter par une Thermodynamique cachée des particules qui m'apparaît aujourd'hui comme ouvrant de vastes perspectives nouvelles.

Après ce premier chapitre qui constitue une sorte d'introduction, je vais dans les chapitres suivants de cette première partie du livre exposer les principes généraux de ma théorie dans son état actuel. La seconde partie de l'ouvrage, rédigée par mon principal collaborateur, M. Andrade e Silva, sera consacrée à l'examen d'un certain nombre de problèmes particuliers qui ont une grande importance dans le cadre de la tentative que nous poursuivons.

## CHAPITRE II

# EXPOSÉ DE LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION <sup>(1)</sup>

1. **Hypothèses et équations de base.** — Dans la théorie de la double solution, nous admettrons qu'il existe une onde physique  $u$  qu'il faut bien distinguer de l'onde statistique  $\Psi$  fictive et arbitrairement normée. Pour exprimer la coexistence de l'onde et de la particule par une image claire, nous supposerons que l'onde  $u$  comporte une très petite région en général mobile de très forte concentration de l'énergie qui constitue la particule ainsi intimement incorporée à l'onde. Nous écrirons donc  $u = \nu + u_0$ , où  $u_0$  représente la très forte concentration d'énergie très localisée et où  $\nu$  représente tout le reste de l'onde. Nous supposerons que l'onde  $\nu$  a une très faible amplitude de sorte que l'on puisse considérer la totalité, ou du moins la presque totalité, de l'énergie comme étant localisée dans la très petite région occupée par  $u_0$ .

---

(1) On trouvera des développements plus complets sur certains points dans la bibliographie [4].

Pour l'instant, nous admettrons que nous avons affaire à une particule de spin nul, nous réservant de revenir plus loin sur le cas des particules de spin  $\frac{h}{4\pi}$  comme l'électron ou de spin  $\frac{h}{2\pi}$  comme le photon. Nous appliquerons donc à l'onde  $\nu$  l'équation non relativiste de Schrödinger ou l'équation relativiste de Klein-Gordon dont l'équation de Schrödinger est la dégénérescence à l'approximation newtonienne (pour  $c \rightarrow \infty$ ). On sait d'ailleurs que l'on obtient ainsi une représentation approximative des propriétés ondulatoires de l'électron.

En employant l'abréviation courante  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , nous écrirons d'abord l'équation de Schrödinger pour l'onde  $\nu$  sous la forme (où  $U$  est le potentiel qui s'exerce sur la particule)

$$(1) \quad \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im} \Delta \nu + \frac{i}{\hbar} U \nu.$$

L'équation complexe (1) implique que l'onde  $\nu$  est représentée par deux fonctions réelles liées l'une à l'autre par deux équations réelles. Nous sommes donc amenés à écrire

$$(2) \quad \nu = a e^{\bar{\hbar} \varphi},$$

avec  $a$  et  $\varphi$  réels.  $a$  est l'amplitude de l'onde  $\nu$  et  $\varphi$  sa phase. En substituant (2) dans (1), nous obtenons,



après quelques calculs simples, les deux équations

$$(J) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - U - \frac{1}{2m} (\text{grad } \varphi)^2 = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a};$$

$$(C) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \text{div}(\overrightarrow{a^2 \text{ grad } \varphi}) = 0.$$

Pour des raisons qui apparaîtront mieux plus loin, nous appellerons l'équation (J) « l'équation de Jacobi généralisée » et l'équation (C) « l'équation de continuité ».

Si, pour obtenir une forme relativiste de la théorie, nous appliquons à l'onde  $\psi$  non pas l'équation de Schrödinger, mais l'équation de Klein-Gordon, nous obtenons à la place de (1)

$$(3) \quad \square \psi - \frac{2i}{\hbar} \frac{\varepsilon V}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{2i}{\hbar} \sum_{xyz} \frac{\varepsilon}{c} A_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\hbar^2} \\ \times \left[ m_0^2 c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} (V^2 - \Lambda^2) \right] \psi = 0,$$

équation dans laquelle nous avons supposé que la particule porte une charge électrique  $\varepsilon$  et est soumise à l'action d'un champ électromagnétique extérieur dérivant d'un potentiel scalaire  $V(x, y, z, t)$  et d'un potentiel vecteur  $\vec{A}(x, y, z, t)$ . En introduisant dans (3) la forme (2) de  $\psi$ , nous obtenons après quelques calculs une équation de Jacobi généralisée  $J'$  et une

équation de continuité  $C'$  dont voici les expressions

$$(J') \quad \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2 = m_0^2 c^2 + \hbar^2 \frac{\square a}{a} = M_0^2 c^2;$$

$$(C') \quad \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial a}{\partial t} - \sum_{xyz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{a}{2} \square \varphi = 0,$$

où nous avons introduit au dernier membre de  $(J')$  ce que nous appellerons la masse propre variable  $M_0$  définie par

$$(4) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square a}{a}},$$

grandeur dont nous verrons plus tard la très grande importance.

Pour vérifier qu'à l'approximation newtonienne les équations (3),  $(J')$  et  $(C')$  se réduisent aux équations (1), (J) et (C) il suffit de poser  $\vec{A} = 0$ ,  $\varepsilon V = U$ ,  $\square a \simeq -\Delta a$  et de remplacer  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  par  $m_0 c^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Nous n'insisterons pas sur ce calcul.

**2. Formule du guidage et potentiel quantique.** — Nous allons maintenant étudier les équations (J) et  $(J')$  qui correspondent à l'équation non relativiste de Schrödinger et à l'équation relativiste de Klein-Gordon.

Occupons-nous d'abord de l'équation de Schrödinger et de la formule (J). Si dans (J) on néglige le terme du second membre où figure la constante  $h$  de Planck,

ce qui revient à faire abstraction des quanta, et si l'on pose  $\varphi = S$ , l'équation (J) devient

$$(5) \quad \frac{\partial S}{\partial t} - U = \frac{1}{2m} (\text{grad } S)^2.$$

Nous retrouvons ainsi pour la fonction  $S$  de Jacobi l'équation de Jacobi de la Mécanique classique. C'est donc uniquement le terme en  $\hbar^2$  qui fait que le mouvement de la particule diffère du mouvement classique. Quel est la signification de ce terme? Il peut s'interpréter en admettant qu'en dehors du potentiel classique  $U$  intervient un autre potentiel  $\mathfrak{Q}$ , le potentiel quantique donné par la formule

$$(6) \quad \mathfrak{Q} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a},$$

Par analogie avec les formules classiques  $\frac{\partial S}{\partial t} = E$  et  $\vec{p} = - \overrightarrow{\text{grad}} S$ , où  $E$  et  $\vec{p}$  sont l'énergie et la quantité de mouvement classiques, nous poserons ici

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E, \quad - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{p}$$

et comme en Mécanique non relativiste la quantité de mouvement  $\vec{p}$  s'exprime en fonction de la vitesse  $\vec{v}$  par la formule  $\vec{p} = m\vec{v}$ , nous obtenons

$$(8) \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = - \frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

C'est là ce que nous appellerons « la formule du guidage » qui nous donne la vitesse de la particule quand

elle occupe la position  $x, y, z$  à l'instant  $t$  en fonction de la variation locale de la phase à cet instant.

Il importe de préciser que  $a$  et  $\varphi$  sont l'amplitude et la phase de l'onde  $\nu$  telles qu'elles existeraient si la région  $u_0$  d'amplitude très élevée qui constitue la particule n'existait pas. Si l'on préfère, l'on peut dire que  $a$  et  $\varphi$  sont l'amplitude et la phase de l'onde  $\nu$  au voisinage de la région presque ponctuelle occupée par la partie  $u_0$  de l'onde  $u = u_0 + \nu$ . J'ai pu donner des justifications de la formule du guidage basée sur cette dernière idée (voir [4], a, p. 102 et 287). Nous reviendrons plus loin sur cette question.

La force quantique  $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{Q}$  qui s'exerce sur la particule courbe la trajectoire de cette particule. Cependant dans le cas important, mais schématique, de l'onde plane monochromatique,  $\mathfrak{Q}$  est constamment nul et il n'y a pas de force quantique : la particule décrit alors avec une vitesse constante une trajectoire rectiligne qui constitue l'un des rayons de l'onde plane monochromatique et l'on retrouve ainsi l'image que j'avais eue dans l'esprit à l'époque de ma thèse.

Mais quand la propagation de l'onde est soumise à des conditions aux limites, il peut y avoir apparition de phénomènes d'interférences ou de diffraction et, sous l'influence de la force quantique, le mouvement défini par la formule du guidage cesse d'être rectiligne et uniforme. Tout se passe comme si les obstacles qui entravent la propagation de l'onde exerçaient à distance sur la particule par l'intermédiaire du potentiel

quantique une action déviante. Les partisans de l'ancienne théorie de l'émission pensaient que la lumière est uniquement formée de corpuscules et, comme ils savaient que la lumière peut contourner le bord d'un écran, ils disaient que le bord d'un écran exerce une force sur les corpuscules de lumière qui passent à son voisinage. Sous une forme beaucoup plus élaborée, nous retrouvons ici une idée analogue.

Nous passerons maintenant à l'étude de l'équation relativiste de Klein-Gordon et de la formule (J'). Remarquons d'abord que si dans la formule (J') nous négligeons le terme  $\hbar^2$ , nous obtenons en posant  $\varphi = S$ ,

$$(9) \quad \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left( \frac{\partial S}{\partial x} + \varepsilon A_x \right)^2 = m_0^2 c^2.$$

Or cette équation est en Mécanique relativiste sans quanta l'équation de Jacobi pour une particule de masse propre  $m_0$  et de charge électrique  $\varepsilon$  soumise à un champ électromagnétique dérivant du potentiel scalaire  $V$  et du potentiel vecteur  $\vec{A}$ , comme nous devons nous y attendre.

Si nous conservons les termes en  $\hbar^2$  et si nous utilisons la masse propre variable  $M_0$  définie par (4), nous sommes naturellement amenés à poser

$$(10) \quad \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V, \quad \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -(\vec{\text{grad}} \varphi + \varepsilon \vec{A}),$$

avec  $\beta = \frac{v}{c}$ , ce qui conduit à la formule du guidage relativiste

$$(11) \quad \vec{v} = -c^2 \frac{\vec{\text{grad}} \varphi + \varepsilon \vec{A}}{\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V}.$$

A l'approximation newtonienne avec  $\vec{A} = 0$  et  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \simeq m_0 c^2$ , nous retrouvons bien la formule (8).

La force quantique va ici résulter des variations de la quantité  $M_0 c^2$  quand la particule se déplace dans son onde. Pour avoir toujours un potentiel quantique nul pour l'onde plane monochromatique, nous poserons

$$(12) \quad \mathfrak{Q} = M_0 c^2 - m_0 c^2.$$

A l'approximation newtonienne où  $c \rightarrow \infty$  et où  $\square a \simeq -\Delta a$ , nous retrouvons la valeur

$$\mathfrak{Q} = \sqrt{m_0^2 c^2 + c^2 \hbar^2 \frac{\square a}{a}} - m_0 c^2 \simeq -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta a}{a}$$

comme cela devait être.

Les formules relativistes que nous venons d'étudier sont extrêmement importantes pour tout ce qui suit car la Mécanique ondulatoire est, comme je l'avais pressenti dès ses débuts, une théorie essentiellement relativiste dont l'équation de Schrödinger qui n'est pas relativiste ne suffit pas à révéler la véritable nature.

3. **Interprétation du mouvement de guidage.** — Il importe maintenant de mettre en évidence deux caractéristiques essentielles du mouvement de guidage.

La première d'entre elles, c'est qu'elle exprime que la particule en se déplaçant dans son onde reste constamment en phase avec cette onde. Pour le démontrer, supposons d'abord que la particule n'est soumise à aucune force classique, ce qui revient à poser  $\vec{V} = \vec{\Lambda} = 0$  dans l'équation de Klein-Gordon. Si alors nous nous déplaçons le long de la trajectoire de guidage d'une longueur  $dl$  dans le temps  $dt$ , la variation correspondante de la phase de l'onde sera

$$(13) \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right) dt \\ = \left( \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dt = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt.$$

Or, la particule ayant une fréquence interne  $\nu_0 = \frac{1}{h} M_0 c^2$ , sa phase interne  $\varphi_1$ , quand elle se déplace de  $dl$  dans le temps  $dt$ , varie de

$$(14) \quad d\varphi_1 = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt = d\varphi.$$

Nous voyons donc bien que la particule se déplace dans son onde de façon que sa vibration interne <sup>(1)</sup> reste constamment en phase avec celle de l'onde.

(1) Définie par l'expression  $a_1 e^{\frac{i}{h} \varphi_1}$  avec  $a_1$  et  $\varphi_1$  réels.

On peut interpréter ce résultat en remarquant que la particule est définie dans cette théorie comme une très petite région de l'onde où l'amplitude est très grande et qu'il est par suite naturel que le rythme interne de la particule soit le même que celui de l'onde au point où elle se trouve. Nous ferons à ce sujet la remarque très importante suivante. Pour que cette interprétation du guidage soit acceptable, il faut que les dimensions de la très petite région singulière définie par  $u_0$  soient très petites par rapport à la longueur d'onde de l'onde  $\nu$ . On peut donc dire que toute la théorie que nous développons aurait une limite de validité pour les très courtes longueurs d'onde, c'est-à-dire pour les énergies très élevées. C'est là une remarque qui est sans importance dans les cas usuellement considérés, mais qui pourrait devenir capitale dans l'étude des particules de très hautes énergies.

Étendons maintenant la démonstration qui précède au cas où, dans l'équation de Klein-Gordon,  $V$  et  $\vec{A}$  ne sont pas nuls. L'accord de phase entre l'onde et la particule s'exprime toujours par l'équation

$$(15) \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right) dt = \frac{d\varphi_1}{dt} dt.$$

Nous poserons ici

$$h\nu_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} = M_0 c^2 + \varepsilon V_0 = M'_0 c^2,$$

avec

$$M'_0 c^2 = M_0 c^2 + \varepsilon V_0$$



dans le système propre de la particule où celle-ci est momentanément au repos.

D'autre part, on a

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = h\nu = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M'_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \\ \frac{d\varphi_1}{dt} = h\nu_c = h\nu_0 \sqrt{1-\beta^2} = M'_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} \end{cases}$$

et la relation (15) se trouve encore bien vérifiée. Nous remarquerons que cette démonstration revient à admettre que la masse propre variable de la particule contient, en plus du terme quantique  $M_0$  défini par (4), un terme dépendant du potentiel classique  $V_0$  variable auquel la particule se trouve soumise dans son système propre. C'est là une circonstance dont il conviendrait d'approfondir la signification.

Il existe une autre caractéristique essentielle du mouvement de guidage. *C'est que le mouvement de la particule s'effectue suivant une Dynamique relativiste à masse propre variable.* Pour le voir, nous prendrons tout naturellement comme fonction de Lagrange  $\mathcal{L}$  de la particule libre

$$(17) \quad \mathcal{L} = - M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Le principe de moindre action  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$  nous conduit alors aux équations de Lagrange

$$(18) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i},$$

c'est-à-dire ici à

$$(19) \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = -c^2 \sqrt{1-\beta^2} \overrightarrow{\text{grad}} M_0,$$

ce qui montre bien que la Dynamique de la particule est une Dynamique relativiste à masse propre variable. La symétrie relativiste entre l'espace et le temps nous conduit à compléter l'équation (19) par la suivante :

$$(20) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = c^2 \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial M_0}{\partial t}.$$

Comme  $\frac{dM_0}{dt} = \frac{\partial M_0}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} M_0$ , les équations (19) et (20) nous donnent

$$(21) \quad \frac{dW}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = c^2 \sqrt{1-\beta^2} \frac{dM_0}{dt}.$$

Or, on a

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{p})}{dt} - \vec{p} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{p}) - \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \\ c^2 \sqrt{1-\beta^2} \frac{dM_0}{dt} = \frac{d}{dt} (M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}) + \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \end{array} \right.$$

d'où

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \left( W - \vec{v} \cdot \vec{p} - M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} \right) = 0$$

et, comme nous supposons que, si la particule est au repos on a  $\beta = 0$  et  $W = M_0 c^2$ , il en résulte que

$$(24) \quad W = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + \vec{v} \cdot \vec{p} = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

relation qui est, en effet, bien vérifiée puisque

$$W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

La relation (24) que nous venons d'obtenir à partir de la Dynamique du guidage à masse propre variable possède, nous le verrons, une signification thermodynamique très remarquable.

On obtiendrait la généralisation du raisonnement qui précède au cas de l'existence d'un champ électromagnétique extérieur en partant de la fonction de Lagrange

$$(25) \quad \mathcal{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \varepsilon \left( \mathbf{V} - \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{c} \right) = M'_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2},$$

compte tenu de la formule de transformation rela-

$$\text{tiviste } V_0 = \frac{\mathbf{V} - \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{A}}}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

#### 4. Interprétation des équations de continuité (C) et (C').

— Cherchons maintenant la signification des équations (C) et (C') qui correspondent respectivement à l'équation non relativiste de Schrödinger et à l'équation relativiste de Klein-Gordon.

Commençons par l'équation (C)

$$(C) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \operatorname{div} (a^2 \overrightarrow{\operatorname{grad} \varphi}) = 0.$$

En vertu de l'équation (8) du guidage et en posant  $\rho = Ka^2$ , où  $K$  est une constante, elle prend la forme

$$(26) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

C'est ce qu'on nomme en Hydrodynamique l'équation de continuité où  $\rho d\tau$  est le nombre des molécules du fluide dans l'élément de volume  $d\tau$  et  $\vec{v}$  leur vitesse. Elle peut s'écrire  $\frac{D}{Dt}(\rho d\tau) = 0$ , où la dérivée  $\frac{D}{Dt}$  est prise en suivant le mouvement des molécules et elle exprime la conservation du fluide. Mais ici nous n'avons qu'une particule et il semble alors naturel de considérer la grandeur  $\rho d\tau$  comme proportionnelle à la probabilité de la présence de la particule dans l'élément de volume  $d\tau$ . Cependant, cette interprétation soulève une difficulté si l'on suppose que la particule suit régulièrement sa trajectoire de guidage comme nous l'avons admis jusqu'ici. Nous reviendrons sur cette difficulté et cela nous conduira à compléter la théorie du guidage, telle que nous l'avons développée jusqu'ici, par un élément aléatoire, ce qui nous ouvrira des horizons nouveaux.

Sans insister pour l'instant sur ce point, nous admettrons que la quantité  $\rho = a^2(x, y, z, t)$  donne, à un facteur multiplicatif constant près, la probabilité de la présence de la particule à l'instant  $t$  dans l'élément de volume  $d\tau$  de coordonnées  $x, y, z$ . Comme nous serons amenés au chapitre suivant à définir la fonction statistique  $\Psi$  en fonction de l'onde réelle  $\varphi$  par la

relation  $\Psi = C\varphi$ , où  $C$  est une constante de normalisation telle que  $\int |\Psi|^2 d\tau = 1$ , nous serons conduits à dire que  $|\Psi|^2 d\tau$  représente en valeur absolue la probabilité de présence en question.

Examinons maintenant la relation (C') relative à l'équation d'onde relativiste de Klein-Gordon. Après multiplication par  $2a$ , elle peut s'écrire

$$(C') \quad \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial a^2}{\partial t} - \left( \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \vec{A} \right) \overrightarrow{\text{grad}} a^2 + a^2 \square \varphi = 0.$$

Ici nous définirons  $\rho$  par la formule

$$(27) \quad \rho = K a^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right).$$

Avec cette définition de  $\rho$  et en tenant compte de la définition (11) de la vitesse de guidage et de la relation de Lorentz entre les potentiels  $\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div} \vec{A} = 0$ , on retrouve l'équation de continuité (26).

On peut donc admettre, avec les mêmes réserves que précédemment, que la quantité  $\rho d\tau = K a^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) d\tau$  représente la probabilité de la présence de la particule dans l'élément  $d\tau$  à l'instant  $t$ . Nous avons ainsi généralisé les résultats obtenus ci-dessus avec l'équation d'ondes de Schrödinger au cas de l'équation d'ondes des particules de spin nul et il est facile de vérifier qu'à l'approximation newtonienne la définition (27) peut se ramener à la définition  $\rho = K a^2$ .

## CHAPITRE III

# COMPLÉMENTS SUR LA THÉORIE DE LA DOUBLE SOLUTION

**1. Introduction de l'onde statistique  $\Psi$ .** — Jusqu'à présent nous avons seulement étudié l'onde  $\varphi$  qui contient une petite région singulière, en général mobile, constituant la particule. Cette onde  $\varphi$  qui aurait une très faible amplitude occuperait la presque totalité du domaine occupé par une onde  $u = u_0 + \varphi$ , où  $u_0$  représenterait l'onde dans la région extrêmement petite où l'amplitude est très grande. La structure de l'onde dans la région  $u_0$  peut être très complexe; c'est elle qui définirait la structure de la particule. Nous n'insisterons pas ici sur ce problème. Il paraît très naturel que la propagation de l'onde  $\varphi$ , onde physique réelle se propageant dans l'espace au cours du temps, puisse déterminer, comme nous l'avons admis dans la théorie du guidage, le déplacement de la particule qui lui est intégrée et aussi que les états stationnaires de cette onde  $\varphi$  dans des systèmes tels que l'atome d'hydrogène puisse déterminer l'état quantique de ce système.

Mais, depuis les travaux de Schrödinger, on s'est habitué à considérer uniquement l'onde  $\Psi$  dont l'amplitude est arbitrairement normée. Or, cette onde ne peut pas être considérée comme une onde physique d'abord parce que l'amplitude d'une onde physique a une valeur déterminée et ne peut pas être arbitrairement normée et aussi parce que, si  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont deux solutions normées de l'équation linéaire des ondes  $\Psi$ , la somme  $\Psi_1 + \Psi_2$  n'est pas une solution normée de sorte que l'onde  $\Psi$  normée ne possède pas la propriété de superposition qui caractérise les ondes physiques solutions d'une équation de propagation linéaire. Aussi a-t-on été amené à regarder l'onde  $\Psi$  comme une représentation de probabilités, un instrument de prévision, permettant de prévoir la probabilité des résultats possibles de la mesure des grandeurs attachées à une particule ou à un ensemble de particules. Or, il est impossible qu'une simple représentation de probabilités puisse provoquer des phénomènes physiques tels que manifestation localisée d'une particule, phénomènes d'interférences ou de diffraction, etc., ou imposer des valeurs aux énergies des états stationnaires des atomes. Seule une réalité objective peut provoquer de pareils effets et une représentation de probabilité n'a pas ce caractère.

Cependant il est certain que l'utilisation de l'onde  $\Psi$  et de ses généralisations a conduit à un très grand nombre de prévisions exactes et de théories fructueuses. C'est là un fait qu'il ne saurait être question de contester. La situation s'éclaire si l'on fait intervenir

à côté de l'onde  $\Psi$  statistique l'onde  $\nu$  qui, elle, peut provoquer les phénomènes dont l'onde  $\Psi$  donne l'aspect statistique. Il importe donc d'établir une relation entre l'onde  $\Psi$  et l'onde  $\nu$ .

En introduisant une constante  $C$  qui peut être complexe, nous établirons cette relation en écrivant

$$(1) \quad \Psi = C\nu = Ca e^{\frac{i}{\hbar}\varphi},$$

$C$  est un facteur de normalisation tel que

$$\int_{\mathcal{V}} |\Psi|^2 d\tau = 1,$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume occupé par l'onde  $\nu$ . Comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre précédent, en théorie de Schrödinger où  $|\Psi|^2 d\tau$  donne la probabilité de présence de la particule dans l'élément de volume  $d\tau$ , la grandeur  $|\Psi|^2 d\tau$  nous donne cette probabilité *en valeur absolue* et c'est là la raison de l'introduction de la fonction statistique  $\Psi$  à partir de l'onde réelle  $\nu$  par la relation (1).

Une première remarque à faire au sujet de la relation (1) est la suivante. Comme  $|\Psi| = |C|a$  et que la phase de  $\Psi$  ne peut différer de celle de  $\nu$  que par une constante additive, nous voyons que les formules de guidage et les expressions du potentiel quantique

(1) Dans le cas d'une onde  $\nu$  portant  $N$  bosons (par exemple  $N$  photons), il faut normer le  $\Psi$  en posant  $\int_{\mathcal{V}} |\Psi|^2 d\tau = N$ .



données au dernier chapitre sont insensibles à la substitution de  $\Psi$  à  $\varphi$ .

Une autre remarque est la suivante :  $|C|$  doit être très supérieur à 1. En effet, considérons une grandeur attachée à une particule et dont on connaît la valeur  $g$ . La théorie usuelle, qui utilise la fonction  $\Psi$ , admet que cette grandeur est répandue dans toute l'onde avec une densité  $|\Psi|^2 g$  de sorte que  $\int_{\mathfrak{V}} |\Psi|^2 g d\tau = g$ . Mais dans la théorie de la double solution, la grandeur  $g$  est certainement concentrée presque entièrement dans la particule, c'est-à-dire dans la très petite région occupée par  $u_0$ . On doit donc avoir

$$(2) \quad \int_{\mathfrak{V}} a^2 g d\tau \ll \int_{\mathfrak{V}} |\Psi|^2 g d\tau,$$

d'où, d'après (1),

$$(3) \quad |C| \gg 1.$$

On peut illustrer ce résultat par une image un peu simpliste, mais très suggestive. Si nous assimilons la grandeur  $g$  à une quantité de sable, la théorie de la double solution se représente l'onde  $u$  comme formée d'une couche très mince de sable (partie  $\nu$  de l'onde  $u$ ) portant un tas de sable très localisé et très élevé. La quantité totale de sable dans toute l'onde  $u$  équivaut alors à la quantité totale de la grandeur  $g$  dans l'onde  $u$ . Mais la théorie usuelle, qui ignore l'existence du tas de sable, cherche à nous donner une image statistique de la répartition de la

grandeur  $g$  en imaginant une couche de sable épaisse et continûment répartie qui contiendrait la même quantité totale de sable. Cette couche homogène doit avoir évidemment une épaisseur beaucoup plus grande que la mince couche qui, pour nous, représente la répartition de la grandeur  $g$  dans la partie  $\nu$  de l'onde  $u$ . Et l'on voit aisément que cela entraîne que, dans la relation (1),  $|C|$  soit beaucoup plus grand que 1.

C'est parce que l'interprétation précédente m'avait amené à considérer simultanément deux solutions distinctes, mais reliées par la relation (1), de l'équation des ondes, l'une  $\nu$  à caractère physique et non normée, l'autre  $\Psi$  normée et à signification statistique, que j'avais été amené à désigner cet ensemble théorique sous le nom de « Théorie de la double solution ».

Par la distinction des deux ondes  $\nu$  et  $\Psi$  le mystère du double caractère à la fois subjectif et objectif de l'onde dans la théorie usuelle disparaît et l'on peut ne plus attribuer à une simple représentation de probabilité l'étrange possibilité de provoquer des phénomènes physiques observables. De plus, il semble bien que du même coup l'on puisse comprendre ce que l'on appelle dans la théorie usuelle « la réduction du paquet d'ondes » par l'observation, expression qui, si on la prenait au pied de la lettre, correspondrait à un véritable miracle. En effet, lorsqu'un processus physique, tel que l'action d'un processus de mesure, dissocie l'onde  $\nu$  du corpuscule en portions définitivement séparées avec rupture des relations de phase et qu'ensuite une constatation nous apprend que le

corpuscule est présent dans l'une de ces portions, nous devons pour traduire le nouvel état de nos connaissances poser  $C = 0$  pour toutes les régions autres que celle où le corpuscule se trouve et renormaliser l'onde  $\Psi$  dans cette région-là. Ainsi les possibilités de valeurs différentes et éventuellement nulles de la constante  $C$  pour les différentes portions en lesquelles l'onde  $\nu$  initiale s'est fragmentée nous permettent d'interpréter la réduction du paquet d'ondes sans porter atteinte au caractère objectif de l'onde  $\nu$ . Cette brusque et incompréhensible réduction de l'étendue occupée par l'onde porte sur la représentation  $\Psi$  de la probabilité de présence de la particule et non sur l'onde physique réelle.

**2. La localisation de la particule dans l'onde et la loi du guidage.** — Jusqu'ici nous avons représenté l'insertion de la particule dans son onde en disant que l'onde  $u$  comporte, en dehors de sa partie régulière  $\nu$  de très faible amplitude, une très petite région singulière de très grande amplitude et que la connaissance de la forme  $u_0$  de l'onde  $u$  dans la région singulière pourrait donner une description de l'état interne de la particule. On peut penser qu'en raison de la très grande amplitude de l'onde dans la région singulière, elle cesserait d'obéir à une équation d'ondes linéaire et que la non-linéarité pourrait un jour jouer un rôle essentiel dans la théorie de la constitution interne de la particule. Des tentatives ont été faites, notamment par M. Jean-Pierre Vigier, pour obtenir à l'aide d'hypo-

thèses sur la structure interne de la particule une interprétation des grandeurs (charge, spin, isospin, nombre baryonique, étrangeté, masse) qui caractérisent les diverses sortes de particules et permettent de tenter d'en établir une classification. Nous n'insisterons pas sur ces tentatives dont les bases sont encore assez incertaines.

Une question qui peut être abordée avec plus de sécurité est celle de la justification de la loi du guidage par l'examen de la façon dont la région singulière  $u_0$  doit se déplacer dans l'onde régulière  $\nu$  qui l'entoure. J'ai donné, il y a quelques années, des raisonnements permettant de justifier la loi du guidage <sup>(1)</sup>. Ils reposent essentiellement sur l'étude de la manière dont doivent se raccorder à la périphérie de la région singulière les grandeurs qui caractérisent respectivement l'onde régulière  $\nu$  et l'onde  $u_0$ , celle-ci devant se mettre à croître très rapidement dans la région singulière.

Ces raisonnements présentent une grande analogie avec ceux qu'Einstein et ses continuateurs avaient utilisés en Relativité générale pour justifier l'affirmation qu'une particule matérielle a un mouvement représenté par une géodésique de l'espace-temps. Cette question qui avait préoccupé Einstein a été traitée d'une façon approfondie par Georges Darmois et André Lichnerowicz [5]. Le principe de leur méthode de démonstration est de considérer le tube d'univers très délié qui représente dans l'espace-temps le mou-

---

(1) Voir bibliographie, [1], a, p. 102 et 287.

vement de la particule et d'écrire qu'il y a raccordement continu, à la périphérie de ce tube de géodésiques, du champ intérieur au tube avec les géodésiques du champ extérieur. Transposée en théorie de la double solution, la méthode consiste à écrire que la particule se déplace dans l'espace à l'intérieur d'un tube très étroit dont les parois sont formées par un ensemble de lignes de courant de l'onde  $\nu$  considérée comme un écoulement hydrodynamique. Comme ces lignes de courant sont définies par la vitesse  $\vec{v}$  de la théorie du guidage, la particule reste enfermée dans le tube au cours de son mouvement et la loi du guidage de la particule par l'onde  $\nu$  en résulte. Bien que la nature physique du problème en Relativité générale et en Théorie de la double solution soit différente, la méthode de démonstration est très analogue.

Mais il existe une autre manière plus schématique d'aborder le problème. Il consiste à représenter la particule par une singularité (au sens mathématique du mot) au sein de l'onde et à chercher des solutions à singularité mobile des équations d'ondes. J'avais déjà esquissé cette méthode dans mon article du *Journal de Physique* de 1927. J'avais, en effet, montré que l'on peut trouver avec l'équation de Klein-Gordon des solutions ayant la phase d'une onde plane monochromatique et possédant une singularité mobile et j'avais introduit la notion d'états « contraints » en remarquant que la forme de la solution à singularité peut dépendre des conditions aux limites auxquelles l'onde est soumise. Mais il était important de généra-

liser ces résultats au-delà du cas très particulier que j'avais étudié. Ce problème a été abordé par M. Francis Fer dans sa thèse de doctorat, puis repris d'une façon plus étendue par M. Thiounn dans une série de travaux [6]. M. Thiounn a démontré qu'aussi bien dans le cas de l'équation de Klein-Gordon applicable aux particules de spin 0 que dans le cas des équations d'ondes de Dirac applicables à l'électron et aux particules de spin  $\frac{\hbar}{2}$  et dans le cas des équations de Maxwell avec terme de masse applicables aux particules de spin  $\hbar$  (en particulier aux photons), il existe des solutions comportant une singularité ponctuelle *se déplaçant suivant la loi du guidage*. Assurément la représentation de la particule par une simple singularité de l'onde n'est pas une véritable représentation de la structure de la particule et n'en constitue qu'une image très schématique. Néanmoins je considère les travaux de M. Thiounn sur ce sujet comme très importants et comme fournissant une remarquable confirmation de la théorie du guidage.

**3. Extension de la Dynamique du guidage aux particules de spin  $\frac{\hbar}{2}$  et  $\hbar$ .** — Nous sommes maintenant amenés à parler de la Dynamique du guidage pour les particules de spin  $\frac{\hbar}{2}$  comme l'électron ou de spin  $\hbar$  comme le photon. Pour le faire, nous utiliserons le formalisme tensoriel d'Univers avec la convention de sommation

des indices en posant

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \\ ds^2 = -dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - dl^2, \\ u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}, \quad u_\mu u^\mu = -1. \end{array} \right.$$

Les composantes du quadrivecteur impulsion-énergie ont pour expressions

$$(5) \quad p_1 = p_x, \quad p_2 = p_y, \quad p_3 = p_z, \quad p_4 = iW,$$

où  $p_x, p_y, p_z$  sont les composantes de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  et où  $W$  est l'énergie. Nous exposerons d'abord avec ce formalisme le cas déjà étudié de la particule de spin 0, puis ceux de la particule de spin  $\frac{\hbar}{2}$ , puis de la particule de spin  $\hbar$ .

*a. Particule de spin 0 (équation de Klein-Gordon).* — Nous définirons l'impulsion-énergie par la formule

$$(6) \quad p_\mu = M_0 c u_\mu = -\partial_\mu \varphi,$$

avec  $\Psi = a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}$ ,  $a$  et  $\varphi$  réels <sup>(1)</sup>, où

$$(7) \quad M_0 c^2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square a}{a}}.$$

La Dynamique de la particule qui est une dynamique à masse propre variable est définie par les équations

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{dp_\mu}{ds} &= \frac{d}{ds} (M_0 c u_\mu) = u^\nu \partial_\nu (M_0 c u_\mu) \\ &= u^\nu \partial_\mu (M_0 c u_\nu) + u^\nu [\partial_\nu M_0 c u_\mu - \partial_\mu M_0 c u_\nu]. \end{aligned}$$

---

(1) En vertu de la relation  $\Psi = C v$ , on peut écrire ici  $\Psi$  ou  $v$ .

Mais le dernier terme entre crochet est nul en vertu de (6) et  $u^\nu \partial_\mu (M_0 c u_\nu) = -\partial_\mu M_0 c$ , d'où finalement

$$(9) \quad \frac{d}{ds} (p_\mu) = \frac{d}{ds} (M_0 c u_\mu) = -\partial_\mu (M_0 c),$$

ce qui donne bien les équations (19) et (20) du chapitre précédent définissant la Dynamique à masse propre variable de la particule.

Naturellement à l'approximation newtonienne en posant  $\mathfrak{Q} = M_0 c^2 - m_0 c^2$ , nous trouvons

$$(10) \quad \frac{d}{dt} (M_0 \dot{\varphi}) = -\overrightarrow{\text{grad}} (M_0 c^2) = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathfrak{Q},$$

$\mathfrak{Q}$  étant le potentiel quantique.

*b. Particule de spin  $\frac{\hbar}{2}$  (équations de Dirac).* — La théorie de Dirac définit l'onde  $\Psi$  par quatre composantes  $\Psi_k$  avec  $k = 1, 2, 3, 4$  qui obéissent à quatre équations aux dérivées partielles simultanées du 1<sup>er</sup> ordre, mais ne sont pas les composantes d'un quadrivecteur. Ces équations sont bien connues et nous ne les transcrivons pas ici. Pour nous, l'onde réelle  $\varphi$  a les quatre composantes  $\varphi_k$  obéissant aux équations de Dirac avec  $\Psi_k = C\varphi_k$ .

En théorie de Dirac, on définit un courant d'Univers  $j_\mu = \rho_0 u_\mu$  où  $\rho_0$  est une densité invariante et l'on décompose ce courant en deux parties par la « décomposition de Gordon » qui, en écrivant  $\Psi_k = a_k e^{\frac{i}{\hbar} \varphi_k}$



avec  $a_k$  et  $\varphi_k$  réels, s'écrit

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} j_{\mu}^{(1)} &= -\frac{1}{m_0 c} \sum_k a_k^+ \partial_{\mu} \varphi_k \cdot a_k = -\frac{1}{m_0 c} \overline{\partial_{\mu} \varphi} \sum_k a_k^+ a_k, \\ j_{\mu}^{(2)} &= \frac{\hbar}{2 m_0 c} \sum_k \partial_{\nu} (a_k^+ i \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} a_k), \end{aligned} \right.$$

où  $m_0$  est la masse propre usuelle de la particule et où les  $\gamma_{\mu}$  sont les matrices bien connues de Dirac. De plus, dans (11) on a posé

$$(12) \quad a_k^+ = a_k \gamma_4, \quad \overline{\partial_{\mu} \varphi} = \frac{\sum_k a_k^+ \partial_{\mu} \varphi_k a_k}{\sum_k a_k^+ a_k} = \frac{\sum_k a_k^+ \partial_{\mu} \varphi_k a_k}{\Omega_1},$$

$\Omega_1$  étant le premier des deux invariants introduits par la théorie de Dirac qui sont

$$(13) \quad \Omega_1 = \sum_k a_k^+ a_k, \quad \Omega_2 = \sum_k a_k^+ \gamma_5 a_k,$$

avec  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ .

Dans la décomposition (11) de Gordon,  $j^{(1)}$  est le vecteur courant lié au mouvement de la particule tandis que  $j^{(2)}$  traduit l'existence du spin. Les formules bien connues de Pauli-Kofink donnent

$$(14) \quad \rho_0 = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}.$$

On est alors conduit <sup>(1)</sup> à définir la masse propre variable  $M_0$  de la particule par

$$(15) \quad M_0 = \frac{m_0 \rho_0}{\Omega_1} = m_0 \sqrt{1 + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}}$$

et, comme  $\Omega_2$  est nul pour l'onde plane monochromatique, on en conclut que, dans ce cas comme dans celui de la particule sans spin,  $M_0$  a alors sa valeur minimale  $M_0 = m_0$ , résultat dont nous verrons bientôt l'importance dans la Thermodynamique cachée des particules.

Pour l'impulsion-énergie dans le mouvement de guidage, on trouve

$$(16) \quad p_\mu = M_0 c u_\mu = -\partial_\mu \varphi + P_\mu,$$

avec

$$(17) \quad P_\mu = \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\sum_k \partial_\nu (a_k^+ i \gamma_\mu \gamma_\nu a_k)}{\Omega_1}.$$

Si la particule a une charge électrique et est soumise à un champ électromagnétique, il y a lieu d'ajouter à l'expression précédente des termes dépendant des potentiels électromagnétiques.

Comme dans le cas de la particule de spin 0, on trouve facilement l'équation

$$(18) \quad \frac{dp_\mu}{ds} = \frac{d}{ds} (M_0 c u_\mu) = -\partial_\mu (M_0 c) + u^\nu [\partial_\nu p_\mu - \partial_\mu p_\nu],$$

mais ici le terme entre crochets n'est pas nul.

---

(1) Voir [4], a, p. 198 et ss.

En résumé, nous voyons que, pour la particule de Dirac, la théorie du guidage prend un aspect plus compliqué que pour la particule de spin 0. Il serait très intéressant d'en faire une étude plus approfondie généralisant celle que nous avons faite pour la particule de spin 0.

*c. Cas du photon et des particules de spin  $\hbar$  (équations maxwelliennes).* — On sait que les équations d'ondes de la particule de spin  $\hbar$  sont les équations de Maxwell complétées par des termes de masse (Louis de Broglie, Proca). J'ai toujours pensé que, même pour le photon, on doit introduire ces termes de masse, mais alors la masse propre qui y figure et que je désigne généralement par  $\mu_0$  est extrêmement petite, mais non nulle. J'ai exposé souvent les raisons pour lesquelles cela me paraissait nécessaire de façon à faire rentrer le cas du photon dans le cadre général de la Mécanique ondulatoire de la particule de spin  $\hbar$  <sup>(1)</sup>. L'introduction de ces termes extrêmement petits oblige à considérer les potentiels électromagnétiques comme des grandeurs physiques à valeur bien déterminée contrairement au très arbitraire « principe de l'invariance de jauge » et, tout en faisant résulter des équations maxwelliennes du photon la relation de Lorentz entre les potentiels  $\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0$ , permet de définir le mouvement du photon, comme celui des autres particules de spin  $\hbar$ ,

---

(1) Voir [4], d.

à l'aide d'un quadrivecteur courant, ce qui me paraît essentiel.

Nous introduirons donc pour les particules de spin  $\hbar$  et notamment pour le photon, un quadrivecteur complexe « potentiel » de composantes  $A_\mu$  et un tenseur antisymétrique complexe de rang 2  $F_{\mu\nu}$  qui, pour le photon, sera le « champ électromagnétique complexe », et les équations de Maxwell complétées par les termes de masse propre nous fournissent les relations

$$(19) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu, \quad \partial_\nu A_\nu = 0.$$

Nous poserons  $A_\mu = a_\mu e^{i\varphi_\mu/\hbar}$  avec  $a_\mu$  et  $\varphi_\mu$  réels.

On admet alors pour le quadrivecteur courant-densité la définition

$$(20) \quad \begin{aligned} j_\nu &= \rho_0 u_\nu = iK (A^{\mu*} F_{\mu\nu} - \text{conj.}) \\ &= iK [A^{\mu*} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) - \text{conj.}], \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante dépendant des unités choisies pour  $A_\mu$  et  $F_{\mu\nu}$  et où  $u_\nu$  est toujours le quadrivecteur « vitesse d'Univers » de la particule et  $\rho_0$  la densité propre.

Posons encore, la seconde définition étant analogue à la seconde définition (12),

$$(21) \quad |a|^2 = \sum_\nu a^\nu a_\nu = |A|^2 - |V|^2, \quad \partial_\nu \varphi = \frac{\sum_\mu a^\mu \partial_\nu \varphi_\mu a_\mu}{|a|^2}.$$

Dans l'expression (20) de  $j_\nu$ , le terme  $iK (A^{\mu*} \partial_\nu A_\mu - \text{conj.})$  nous donne  $-\frac{2K|a|^2}{\hbar} \partial_\nu \varphi$ . D'autre part, on peut

remplacer  $A^{\mu*} \partial_{\mu} A_{\nu}$  par  $\partial_{\mu} (A^{\mu*} A_{\nu})$  d'après la seconde équation (19) et l'on obtient finalement pour définir le mouvement de guidage la relation

$$(22) \quad \rho_0 u_{\nu} = - \frac{2K|a|^2}{\hbar} \partial_{\nu} \varphi + 2K \partial_{\mu} \left[ a^{\mu} a_{\nu} \sin \frac{\varphi_{\nu} - \varphi_{\mu}}{\hbar} \right].$$

Par analogie avec la relation (11), on est conduit à définir la masse propre variable de la particule par la formule

$$(23) \quad M_0 = \frac{\rho_0 \hbar}{2|a|^2 c K}$$

et l'on trouvera alors pour les composantes  $M_0 c u_{\nu}$  de l'impulsion-énergie

$$(24) \quad p_{\nu} = M_0 c u_{\nu} = - \partial_{\nu} \varphi + \frac{\hbar}{|a|^2} \partial_{\mu} \left[ a^{\mu} a_{\nu} \sin \frac{\varphi_{\nu} - \varphi_{\mu}}{\hbar} \right].$$

Avec les définitions précédentes, la Dynamique du guidage de la particule est régie par l'équation

$$(25) \quad \frac{d}{ds} (M_0 c u_{\nu}) = - \partial_{\nu} (M_0 c) + u^{\mu} [\partial_{\mu} (M_0 c u_{\nu}) - \partial_{\nu} (M_0 c u_{\mu})].$$

Pour la particule de spin  $\frac{\hbar}{2}$ , nous avons trouvé l'expression (14) de  $\rho_0$  en fonction des deux invariants  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  de la théorie de Dirac. Pour trouver une expression de la même forme, nous poserons

$$(26) \quad \rho_0 = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2},$$

avec

$$(27) \quad \Omega_1 = \frac{2KcM_0|a|^2}{\hbar},$$

l'invariant  $\Omega_2$  pouvant être calculé à partir de (20) et de (27) par la formule  $\Omega_2^2 = -j_\nu j^\nu - \Omega_1^2$ .

Or, pour une onde plane monochromatique, on trouve

$$(28) \quad \rho_0 = \sqrt{-j^\nu j_\nu} = \frac{2 K c m_0 |a|^2}{\hbar},$$

$m_0$  étant la masse propre normale. La masse propre variable  $M_0$  a donc alors, comme dans le cas de l'électron, sa valeur minimale  $m_0$  qui, pour le photon, est égale à l'extrêmement petite masse propre  $\mu_0$ .

Un cas important en Optique est celui où les  $a_\mu$  peuvent être considérées comme des constantes et où les  $\varphi_\mu$  ne diffèrent que par une constante de sorte que  $\varphi_\mu = \varphi + \alpha_\mu$  où  $\alpha_\mu$  est une constante. L'équation (24) se réduit alors à

$$(29) \quad p_\nu = M_0 c^3 u_\nu = -\partial_\nu \varphi.$$

Elle a la même forme que l'équation (6) de la particule de spin 0.

Sans entreprendre ici une étude détaillée de la Dynamique de la particule de spin  $\hbar$ , nous ferons à son sujet une remarque importante. Nos idées générales nous conduisent à admettre que les grandeurs  $A_\mu$  et  $F_{\mu\nu}$  internes à la particule doivent se raccorder à sa périphérie avec les grandeurs correspondantes de l'onde environnante. Le long de la ligne d'univers de la particule, le quadrivecteur potentiel interne doit donc rester parallèle à celui de l'onde  $\nu$  et en phase avec lui. Non seulement le mouvement

de la particule doit être tel qu'elle décrive la trajectoire de guidage avec constante égalité de la phase interne et de la phase externe, mais il faut aussi que sa structure interne *tourne* de façon à maintenir le parallélisme du quadrivecteur potentiel interne et du quadrivecteur potentiel externe. Cette remarque est particulièrement intéressante à appliquer au photon pour lequel le quadrivecteur potentiel détermine l'état de polarisation (*Voir à ce sujet [4], d.*)

## CHAPITRE IV

# LA THERMODYNAMIQUE CACHÉE DES PARTICULES

1. **Nécessité d'introduire en théorie de la double solution un élément aléatoire.** — Nous allons d'abord nous borner à l'équation de Schrödinger qui fournit toujours une première approximation pour les vitesses petites par rapport à  $c$ .

Nous avons vu au chapitre II paragraphe 4, que l'équation de continuité (C) conduit à penser que la probabilité de la présence de la particule dans un élément de volume  $d\tau$  est proportionnelle à  $a^2 d\tau$ ,  $a$  étant l'amplitude de l'onde  $\varphi$ , ce qui conduit en introduisant l'onde statistique  $\Psi$  par la relation  $\Psi = C\varphi$  à dire que la probabilité en question est égale en valeur absolue à  $|\Psi|^2 d\tau$ , résultat bien connu. Cependant cette idée paraît avec nos conceptions conduire à des difficultés. On le voit, par exemple, en considérant un atome d'hydrogène dans un de ses états stationnaires. On a alors  $\Psi = a e^{\frac{i}{\hbar} E_k t}$ , où  $E_k$  est l'une des énergies quantifiées. La formule du guidage  $\vec{\varphi} = -\frac{1}{m} \text{grad} \varphi$



nous donne  $\vec{v} = 0$ . L'électron serait donc immobile en un point de l'atome et l'on ne voit pas du tout comment la relation de continuité pourrait conduire à justifier la probabilité en  $|\Psi|^2$ .

Il y a là une difficulté analogue à celle qui est bien connue en Mécanique statistique où le théorème de Liouville ne suffit pas à établir que la probabilité pour le point représentatif d'une molécule d'un gaz d'être présent dans un élément de volume de son extension-en-phase est proportionnelle à cet élément de volume. Il faut pour justifier cette affirmation introduire dans le mouvement des molécules un élément aléatoire qui perturbe constamment le mouvement régulier de la molécule. Boltzmann, considérant cet élément aléatoire comme résultant des chocs continuels de la molécule avec les autres molécules du gaz, l'avait appelé le « chaos moléculaire ».

En d'autres termes, il semble bien que le fait universellement admis qu'une particule a une probabilité  $|\Psi|^2 d\tau$  de manifester sa présence dans un élément de volume  $d\tau$  suffit à rendre nécessaire l'intervention d'un élément aléatoire caché. En effet, l'existence d'une loi de probabilité qui ne peut aucunement déterminer individuellement les phénomènes auxquels elle s'applique me paraît toujours résulter de causes aléatoires. On peut s'en rendre compte sur des exemples très simples tels que celui-ci. Quand un tireur tire sur une cible en cherchant à en atteindre le centre, les arrivées des balles sur la cible se répartissent autour

du centre visé suivant une loi de probabilité qui dépend de l'habileté du tireur : cette loi de probabilité a pour origine les variations aléatoires continues de l'état physique du tireur, variations qui modifient légèrement la façon dont il tire.

Il me paraît donc impossible de justifier la loi statistique en  $|\Psi|^2$  sans introduire un élément aléatoire et, dans la théorie de la double solution, cela implique que le mouvement régulier de la particule prévue par la loi du guidage doit subir continuellement des perturbations aléatoires qui le font passer constamment d'une trajectoire de guidage sur une autre par une sorte de mouvement brownien qui se superpose au mouvement de guidage. Alors, grâce à l'introduction de ces perturbations aléatoires, l'équation de continuité  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0$ , où  $\rho = a^2$  et où  $\vec{v}$  est la vitesse de guidage permettra de justifier la loi de probabilité de présence en  $|\Psi|^2$ .

Mais, pour une particule qui nous semble isolée de toute action perturbatrice comme un électron dans l'atome H, quelle peut être l'origine de ces perturbations aléatoires indépendantes de l'entourage? On est évidemment amené à penser que toute particule, même quand elle nous paraît isolée, est en contact avec un milieu subquantique caché qui constitue une sorte d'invisible thermostat. Cette intéressante hypothèse a été envisagée, il y a une quinzaine d'années, dans un très intéressant travail de MM. David Bohm et Jean-Pierre Vigier [7] et nous pensons qu'on doit

l'adopter. La particule échangerait ainsi continuellement de l'énergie et de la quantité de mouvement avec ce milieu subquantique comme un granule très léger entraîné par un écoulement fluide dont le mouvement non perturbé serait défini par une ligne de courant du fluide est en plus animé d'un mouvement brownien dû à ses continuelles interactions avec les molécules cachées du fluide. De même qu'en l'absence de son mouvement brownien le granule suivrait l'une des lignes de courant de l'onde qui l'entraîne, la particule aurait, sans les perturbations que lui inflige constamment son contact avec le milieu subquantique, le mouvement régulier défini par la théorie du guidage à partir de la propagation de l'onde. Donc, dans un cas comme dans l'autre, au mouvement régulier se superpose un mouvement brownien qui fait constamment passer la particule d'une de ses trajectoires régulières sur une autre. Nous reviendrons au paragraphe 4 sur ce mouvement brownien de la particule dans son onde.

Dès qu'on a admis l'existence d'un « milieu subquantique » caché, on est amené à se demander quelle est la nature de ce milieu. Il a certainement une nature très complexe. En effet, il doit d'abord ne pas pouvoir servir de milieu de référence universel, ce qui serait en opposition avec la théorie de la Relativité. De plus, nous verrons qu'il se comporte non pas comme un thermostat unique, mais plutôt comme un ensemble de thermostats dont les températures seraient reliées aux énergies propres  $m_0 c^2$  des diverses

sortes de particules. Bien que des tentatives intéressantes aient déjà été faites au sujet de la nature du milieu subquantique, il nous paraît prématuré à l'heure actuelle de discuter ce problème et nous ne l'aborderons pas ici.

Les conceptions que nous venons d'introduire dans ce paragraphe conduisent à penser que le comportement des particules en Physique quantique ne peut être vraiment compris qu'en introduisant une Thermodynamique d'un type très nouveau. Cette Thermodynamique peut être appelée la « Thermodynamique de la particule isolée » parce qu'elle intervient même pour une particule qui nous paraît entièrement isolée. On peut aussi la nommer « Thermodynamique cachée des particules ». J'ai commencé à la développer pendant l'été de 1960 dans des Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Elle m'apparaît aujourd'hui comme le couronnement nécessaire de la théorie de la double solution et je vais en exposer les grandes lignes dans les paragraphes qui suivent.

**2. Introduction de la Thermodynamique cachée des particules [8].** — Nous rappellerons d'abord un résultat obtenu autrefois par Einstein dans sa théorie de l'inertie de l'énergie.

Considérons un corps formé de molécules de masse propre  $m_0$  animées d'agitation calorifique et en équilibre thermodynamique. Par définition, on appelle système de référence propre du corps le système de

référence dans lequel la quantité de mouvement totale du corps est nulle. L'énergie totale du corps dans son système propre est alors

$$(1) \quad W_0 = \sum \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = M_0 c^2,$$

la somme  $\sum$  étant prise sur toutes les molécules. Le raisonnement d'Einstein montre alors <sup>(1)</sup> que dans un système de référence où l'ensemble du corps a la vitesse  $\beta c$ , on a pour l'énergie l'expression

$$(2) \quad W = \frac{W_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Ce résultat est fondamental. Il signifie que l'on peut attribuer à un corps chaud en équilibre thermodynamique une masse propre globale  $M_0$  telle que l'énergie  $M_0 c^2$  représente dans le système propre l'ensemble des énergies de masse des particules et de leur énergie d'agitation calorifique. Il conduit donc à considérer l'énergie d'agitation calorifique comme faisant partie de la masse propre totale du corps. Ainsi énergie de masse propre et énergie d'agitation calorifique seraient des grandeurs de même nature et cela suggère l'idée très importante et très nouvelle que l'énergie de masse propre d'une particule pourrait être une énergie de chaleur contenue dans la particule. Et cette idée se trouve en accord

---

(1) Voir [8], c, p. 2-3.

avec l'image que nous nous sommes faite de la particule qui, étant une sorte de petite horloge de fréquence propre  $\nu_0$ , serait animée d'un mouvement d'agitation interne.

Comme nous avons vu que la particule doit posséder une masse propre variable  $M_0$ , nous arrivons à penser que l'énergie interne  $M_0 c^2 = h\nu_0$  représente une chaleur interne variable  $Q_0$  contenue dans la particule, énergie de chaleur qui se réduit à  $m_0 c^2$  quand le potentiel quantique est nul d'après la formule  $\mathfrak{Q} = M_0 c^2 - m_0 c^2$  trouvée précédemment.

Mais si  $Q_0 = M_0 c^2$  est la chaleur interne contenue dans la particule dans son système propre, quelle est l'expression de cette chaleur dans un système de référence où la particule a la vitesse  $v = \beta c$ ? Planck et Laue ont démontré vers 1908 que la formule de transformation relativiste de la chaleur est

$$(3) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Bien que cette formule ait été récemment contestée par divers auteurs, je suis personnellement convaincu à la suite de longues réflexions qu'elle est exacte <sup>(1)</sup>. L'invariance de l'entropie, grandeur définie par la formule  $dS = \frac{dQ}{T}$ , montre alors que l'on doit avoir aussi pour la température la formule de transformation

$$(4) \quad T = T_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

---

(1) Voir à ce sujet [8], c, d, e.

Ces formules étant admises, nous pouvons écrire

$$(5) \quad \begin{cases} Q_0 = M_0 c^2 = h \nu_0, \\ Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2} = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = h \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \end{cases}$$

ce qui est bien en accord avec la formule de transformation  $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$  de la fréquence d'une horloge.

L'accord entre la Thermodynamique relativiste et la conception de la particule comme étant une petite horloge et un petit réservoir de chaleur est donc complet. On peut d'ailleurs le voir en démontrant que la formule (3) est en accord avec la formule du guidage. Pour le voir, nous commencerons par remarquer que, dans le système de référence où la particule a la vitesse  $\beta c$ , son énergie  $\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  doit être la somme de l'énergie interne de chaleur qu'elle transporte et d'une énergie  $E_t$  due à son mouvement de translation, ce qui nous donne

$$(6) \quad \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = Q + E_t = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

formule dont l'exactitude se vérifie immédiatement.

L'énergie de translation  $E_t$  égale à  $\frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  est différente de l'énergie cinétique  $M_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right]$  habituellement considérée en Dynamique relativiste. J'ai étudié <sup>(1)</sup> la relation qui existe entre ces deux

---

(1) Voir [8],  $c$  et  $e$ .

définitions de l'énergie de mouvement qui ont chacune leur signification, l'énergie de translation d'ensemble  $E_t$  devant être considérée comme la véritable énergie due au mouvement.

Nous allons maintenant montrer que la relation (6) exprime, conformément à la théorie du guidage, le fait que la particule se déplace dans son onde de façon à maintenir constamment égale la phase de son mouvement interne et celle de l'onde. En effet, d'après la théorie du guidage, on a

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$\varphi$  étant la phase de l'onde  $a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}$  et, d'autre part, le mouvement interne de la particule étant représenté par  $a_i e^{\frac{i}{\hbar} \varphi_i}$ , la phase  $\varphi_i$  varie pendant le temps  $dt$  de

$$(8) \quad d\varphi_i = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt = h \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} dt.$$

Or, quand la particule se déplace de  $dl$  dans le temps  $dt$ , la variation de la phase  $\varphi$  de l'onde à l'endroit où elle se trouve est

$$(9) \quad d\varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right) dt \\ = \left( \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) dt = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt.$$

On a donc  $d\varphi = d\varphi_i$ , ce qui exprime bien que la particule se déplace dans son onde en restant constamment



en phase avec elle. Il existe donc une très remarquable concordance entre les formules de la Thermodynamique relativiste de Planck-Laue et celles de la théorie du guidage de la particule par son onde. La comparaison des formules données ci-dessus avec celles du chapitre II, paragraphe 3, confirme entièrement ce fait.

Si l'on fait pour l'instant abstraction des rapides perturbations aléatoires de  $M_0$  par interaction avec le milieu subquantique sur lesquelles nous reviendrons plus loin, la particule doit suivre sa trajectoire de guidage et le long de cette trajectoire, sa chaleur interne varie en général constamment car on a  $\delta Q_0 = \delta \mathfrak{Q}_0 = \delta (M_0 c^2 - m_0 c^2)$ . Dans le système propre, les variations de la chaleur interne sont donc égales aux variations du potentiel quantique et dans le système où la particule a la vitesse  $v = \beta c$ , on a

$$\delta Q = \delta Q_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - \beta^2} \delta (M_0 c^2 - m_0 c^2).$$

Au chapitre II, paragraphe 3, nous avons introduit pour une particule qui n'est soumise à aucun champ extérieur, mais uniquement à la force quantique, la fonction de Lagrange  $\mathcal{L} = - M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$  et nous en avons tiré les équations de la Dynamique relativiste de la particule à masse propre variable. L'Action étant définie par

$$(10) \quad \int_0^t \mathcal{L} dt = \int_0^t - M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt = \int_0^t - M_0 c^2 ds$$

est visiblement un invariant.

Conformément à une idée qu'Eddington avait déjà entrevue autrefois, dans son célèbre ouvrage *Espace-temps et gravitation* <sup>(1)</sup>, il est tentant d'établir une relation entre les deux invariants relativistes fondamentaux que sont l'Action et l'Entropie. Mais l'intégrale d'Action (10) dépend d'un intervalle de temps indéterminé tandis que l'Entropie est une grandeur ayant une valeur déterminée. Pour pouvoir établir une relation entre les deux grandeurs, il est donc nécessaire de choisir convenablement l'intervalle de temps qui figure dans l'expression de l'Action. Avec nos conceptions, il paraît naturel de choisir comme intervalle d'intégration la période interne  $T$  de la particule dans le système de référence où elle a la vitesse  $\beta c$ , et comme on a  $\frac{1}{T} = \nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , l'on définira l'Action comme égale à <sup>(2)</sup>

$$(11) \quad A = \int_0^T -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt = -\frac{M_0 c^2}{\nu_0}$$

et l'on est amené à définir l'Entropie de l'état de mouvement de la particule par la relation

$$(12) \quad \frac{S}{k} = \frac{A}{h},$$

d'où l'on tire

$$(13) \quad \partial S = -k \frac{\partial M_0 c^2}{h \nu_0} = -k \frac{\partial Q_0}{m_0 c^2}$$

<sup>(1)</sup> p. 219 de l'édition française, Hermann, Paris, 1921.

<sup>(2)</sup> La période  $T$  étant très petite, nous supposons  $M_0$  et  $\beta$  sensiblement constants pendant la durée de l'intégration.

puisque nous avons  $\delta Q_0 = \delta \mathfrak{E}_0 = \delta (M_0 c^2 - m_0 c^2)$ . Dans les formules (12) et (13),  $k$  et  $h$  sont respectivement les constantes de Boltzmann et de Planck. Nous sommes ainsi parvenus à attribuer au mouvement de la particule dans son onde une certaine entropie et, par suite, une certaine probabilité définie par la formule de Boltzmann écrite sous la forme  $P = e^{\frac{S}{k}}$ .

Avec l'hypothèse de l'existence du milieu subquantique assimilable à un thermostat caché que nous avons développée au paragraphe précédent, nous devons interpréter les relations thermodynamiques obtenues ci-dessus de la façon suivante. Au cours du mouvement de guidage de la particule, sa masse propre  $M_0$  varie en général constamment, ce que nous pouvons interpréter en disant qu'elle échange continuellement de la chaleur avec le thermostat caché. Ces échanges de chaleur sont liés aux variations du potentiel quantique, c'est-à-dire aux variations de l'amplitude de l'onde au point où se trouve la particule et l'on voit ainsi que c'est l'onde qui sert d'intermédiaire entre la particule et le milieu subquantique.

L'équation (13) peut, en effet, s'écrire en posant

$$(14) \quad T_0 = \frac{h\nu_0}{k} = \frac{m_0 c^2}{k}, \quad T = T_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

sous la forme

$$(15) \quad \delta S = - \frac{\delta Q_0}{T_0} = - \frac{\delta Q}{T} = - k \frac{\delta M_0}{m_0}.$$

Mais que signifie le signe — qui figure au second membre? On peut le comprendre en admettant que la particule est un système trop simple pour qu'on puisse lui attribuer une température et une entropie. Il est alors naturel de considérer la température et l'entropie définies ci-dessus comme se rapportant au thermostat caché. L'entropie  $S$  ainsi interprétée diminue quand le thermostat caché cède de la chaleur à la particule, ce qui explique la présence du signe — dans la formule (15).

Il peut paraître étrange que la température  $T$  dépende de la masse propre normale  $m_0$  de la particule. Mais il ne faut pas oublier que c'est par l'intermédiaire de l'onde que la particule est en contact thermique avec le thermostat caché. L'onde physique  $\nu$  avec laquelle la particule est constamment en résonance en raison de l'accord de leurs phases constitue pour elle en quelque sorte une « surface de contact » avec le milieu subquantique. Cette remarque nous paraît rendre plus facile à comprendre le fait que pour la particule en chaque point de sa trajectoire la température apparente du thermostat caché dépende de la fréquence locale de l'onde, donc de  $m_0$ . C'est pourquoi nous avons dit dans le précédent paragraphe que le milieu subquantique se comporte comme un ensemble de thermostats dont les températures sont reliées aux masses propres des diverses espèces de particules. Une description plus détaillée du milieu subquantique permettrait peut-être de mieux éclairer cette question.

Pour terminer cet exposé de la Thermodynamique de la particule isolée, nous ajouterons encore une remarque intéressante.

Soit un corps C en contact avec un thermostat de température T. La loi de distribution canonique de Boltzmann-Gibbs donne pour la probabilité de l'état d'énergie E du corps C

$$(16) \quad P = P_0 e^{-\frac{E}{kT}}.$$

Mais qu'est-ce que  $P_0$ ? On dit généralement que  $P_0$ , appelée « probabilité *a priori* », est la probabilité de l'état du corps C s'il était complètement isolé. D'après nos idées, cela semble bien signifier que  $P_0$  est la probabilité définie par la Thermodynamique cachée des particules. Or, on admet en théorie quantique que les probabilités *a priori* des divers états quantiques sont égales. On ne donne d'ailleurs aucune démonstration de cette affirmation.

Pour voir ce que cette affirmation peut signifier, considérons le cas simple de l'atome d'hydrogène dans un état complètement stationnaire, c'est-à-dire où  $\varphi = Et$ . Dans cet état le théorème du Viriel de la théorie de la double solution <sup>(1)</sup> donne

$$(17) \quad 2 \bar{\mathfrak{Q}} + \bar{V} = 0,$$

où V est le potentiel coulombien auquel est soumis l'électron et  $\mathfrak{Q}$  le potentiel quantique, les moyennes étant prises en  $|\Psi|^2$ . Or, R étant la constante de

---

(1) Voir [4], b, p. 75.

Rydberg et  $n$  le nombre entier qui caractérise l'état stationnaire, on a pour l'énergie de cet état

$$(18) \quad E_n = -\frac{R\hbar}{n^2} = \bar{\mathfrak{Q}} + V = -\bar{\mathfrak{Q}}.$$

La probabilité  $P$  du  $n^{\text{ième}}$  état quantique quand l'atome se trouve en contact avec un thermostat de température  $T$  est, d'après (16) et (18),

$$(19) \quad P = P_0 e^{+\frac{\bar{\mathfrak{Q}}}{kT}}.$$

Si  $P_0$  est la probabilité définie par la Thermodynamique cachée des particules, on a

$$(20) \quad P_0 = e^{\frac{S}{k}} = \text{Cte } e^{-\frac{\bar{\mathfrak{Q}}}{m_0 c^2}},$$

$m_0$  étant la masse propre de l'électron. Quand l'atome passe d'un état quantique à un autre,  $\bar{\mathfrak{Q}}$  varie de  $\delta\bar{\mathfrak{Q}}$ .

Alors  $e^{+\frac{\bar{\mathfrak{Q}}}{kT}}$  est multiplié par  $e^{+\frac{\delta\bar{\mathfrak{Q}}}{kT}}$  et  $P_0$  par  $e^{-\frac{\delta\bar{\mathfrak{Q}}}{m_0 c^2}}$ . Même pour des valeurs élevées de  $T$ , par exemple  $T = 10^4$  degrés Kelvin,  $kT$  ne dépasse pas l'ordre de grandeur de  $10^{-12}$  erg (car  $k = 1,37 \cdot 10^{-16}$  C.G.S.), tandis que  $m_0 c^2$  est de l'ordre de  $10^{-6}$  erg, donc beaucoup plus grand. On voit donc que, quand on passe d'un état quantique à un autre, la variation

de  $P_0$  est beaucoup plus petite que celle de  $e^{-\frac{E}{kT}}$  de sorte que dans l'expression (16) on peut considérer  $P_0$  comme sensiblement constant. Ainsi se trouve approximativement légitimée l'hypothèse usuelle que  $P_0$  a la même valeur pour tous les états quantiques.

**3. Introduction des perturbations aléatoires d'origine subquantique.** — Dans le paragraphe précédent, nous avons développé la Thermodynamique cachée des particules en tenant seulement compte du mouvement de guidage et sans faire intervenir les perturbations aléatoires qui se superposent à ce mouvement comme nous l'avons expliqué dans le premier paragraphe. Les échanges entre le milieu subquantique et la particule sont alors réglés d'une façon continue par les variations du potentiel quantique le long de la trajectoire de guidage, mais il faut y ajouter ceux qui proviennent des échanges de chaleur aléatoires dont résulte une sorte de mouvement brownien superposé au mouvement de guidage comme nous l'avons expliqué plus haut. De là provient la nécessité de prendre toujours des moyennes sur les diverses positions possibles de la particule comme nous l'avons fait à la fin du paragraphe précédent.

Dans l'application usuelle du principe de Hamilton en Mécanique analytique, on part d'un mouvement « naturel », c'est-à-dire d'un mouvement conforme aux lois de la Mécanique. On suppose qu'au cours de ce mouvement la particule partant d'un point A de l'espace au temps  $t_0$  parvient en un point B au temps  $t_1$ , puis on *imagine* un mouvement « varié » fictif et infiniment voisin du mouvement naturel en imposant à ce mouvement varié que les points A et B et les instants  $t_0$  et  $t_1$  soient les mêmes. Le principe de Hamilton nous dit alors que le mouvement naturel

est caractérisé par l'équation

$$(21) \quad \int_{t_0}^{t_1} [\delta \mathcal{L}]_{M_0} dt = 0,$$

où  $[\delta \mathcal{L}]_{M_0}$  est la variation de  $\mathcal{L}$  quand on maintient la masse propre  $M_0$  constante et égale à sa valeur normale  $m_0$ , ce qui va en quelque sorte de soi en Mécanique classique. De plus, comme le principe de Hamilton est un principe de *moindre* action, nous pouvons écrire

$$(22) \quad \int_{t_0}^{t_1} [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt > 0.$$

Mais nous allons maintenant introduire l'idée que, même quand on peut négliger le potentiel quantique, la masse propre puisse subir d'incessantes petites fluctuations autour de sa valeur moyenne  $m_0$ . Il devient alors possible de donner un sens physique aux mouvements variés en les considérant non plus comme des mouvements fictifs purement imaginés, mais comme des mouvements pouvant avoir lieu réellement sous l'action de certaines petites fluctuations momentanées de la masse propre pendant l'intervalle de temps  $t_0 \rightarrow t_1$ .

Si l'on admet cette hypothèse, le mouvement varié doit, en lui appliquant le principe de Hamilton, être déterminé par l'équation

$$(23) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta (\mathcal{L} + \delta \mathcal{L}) dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta \mathcal{L} + \delta^2 \mathcal{L}) dt = 0.$$



Mais ici, la masse propre n'étant plus supposée constante, nous devons écrire

$$(24) \quad \delta \mathcal{L} = [\delta \mathcal{L}]_{M_0} + \partial_{M_0} \mathcal{L}, \quad \delta^2 \mathcal{L} = [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0} + \delta_{M_0}^2 \mathcal{L}$$

en désignant par  $\delta_{M_0}^2 \mathcal{L}$  les termes qui dans  $\delta^2 \mathcal{L}$  proviennent de la variation de la masse propre. Nous montrerons plus loin que le terme en  $\delta_{M_0}^2 \mathcal{L}$  est négligeable par rapport aux autres, ce qui permet d'écrire (23) sous la forme

$$(25) \quad \int_{t_0}^{t_1} \{ [\delta \mathcal{L}]_{M_0} + \partial_{M_0} \mathcal{L} + [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0} \} dt = 0.$$

Mais la première intégrale est nulle en vertu de (21) et nous obtenons, d'après (22),

$$(26) \quad - \int_{t_0}^{t_1} \partial_{M_0} \mathcal{L} dt = - (t_1 - t_0) \overline{\partial_{M_0} \mathcal{L}} = \int_{t_0}^{t_1} [\delta^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt > 0,$$

$\overline{\partial_{M_0} \mathcal{L}}$  étant une moyenne temporelle prise entre  $t_0$  et  $t_1$ . Alors, comme  $t_1 - t_0$  est positif et que  $-\partial_{M_0} \mathcal{L}$  est la quantité de chaleur cédée par le thermostat caché à la particule, on voit qu'en moyenne temporelle cette quantité de chaleur, qui est constamment nulle sur la trajectoire naturelle, est positive sur la trajectoire fluctuée. Il en résulte que l'entropie diminue en moyenne quand on passe du mouvement naturel au mouvement varié. L'entropie de la Thermodynamique cachée est donc maximale dans le mouvement naturel par rapport aux fluctuations soumises aux conditions de la variation hamiltonienne, ce qui permet de dire

que le mouvement naturel est plus probable que les mouvements variés. En termes imagés, on peut dire que la trajectoire naturelle suit une ligne de talweg d'une vallée de néguentropie <sup>(1)</sup>. On fait ainsi apparaître une très remarquable relation entre le principe de moindre action et le second principe de la Thermodynamique.

Il nous reste cependant à démontrer que nous avons eu raison de négliger dans (25) les termes en  $\delta_{M_0}^2 \mathcal{L}$ . On le voit en remarquant que, d'après l'équation (26),  $\partial_{M_0} \mathcal{L}$  est du même ordre que  $[\partial^2 \mathcal{L}]_{M_0}$ , c'est-à-dire du second ordre par rapport aux variations hamiltoniennes de sorte que  $\partial_{M_0}^2 \mathcal{L}$  est du troisième ordre et peut être négligé.

Le principe de moindre action comporte une restriction étudiée en Mécanique analytique classique sous le nom de théorie des foyers cinétiques. En ce qui concerne l'action hamiltonienne, on peut l'énoncer de la façon suivante. Supposons qu'il existe deux mouvements naturels 1 et 2 extrêmement voisins qui amènent une particule du point A à l'instant  $t_0$  à un point C à l'instant  $t_2$ . On peut alors dire que le point C est le foyer cinétique hamiltonien du point A. Si l'on effectue la variation hamiltonienne sur la trajectoire 1 entre le point A et un point B, correspondant à un instant  $t_1$ , qui est situé entre A et C ( $t_0 < t_1 < t_2$ ), l'action est minimale pour l'intervalle de temps  $t_1 - t_0$ . Mais si B est situé sur la trajectoire

---

(1) Néguentropie = entropie changée de signe.

au-delà du point C ( $t_0 < t_2 < t_1$ ), il n'y a plus de minimum de l'action pour l'intervalle de temps  $t_1 - t_0$ .

L'aspect thermodynamique que nous avons donné au principe de moindre action nous permet de trouver une interprétation intuitive du rôle joué par le foyer cinétique. En effet, si nous appliquons le principe de Hamilton aux mouvements 1 et 2 entre A et C, chacun d'eux pouvant être considéré comme un mouvement varié par rapport à l'autre, nous devons écrire

$$(27) \quad \int_{t_0}^{t_2} [\delta_{12}^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt \geq 0, \quad \int_{t_0}^{t_2} [\delta_{21}^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt \geq 0,$$

ce qui n'est possible que si

$$(28) \quad \int_{t_0}^{t_2} [\delta_{12}^2 \mathcal{L}]_{M_0} dt = 0.$$

Donc, quand on passe de la trajectoire 1 à la trajectoire 2 ou inversement, la variation seconde de l'action hamiltonienne est nulle. Mais la relation (26) nous donne

$$(29) \quad \partial_{12} \bar{S} = \partial_{21} \bar{S} = 0.$$

L'entropie moyenne reste donc la même quand on passe du mouvement 1 au mouvement 2 entre A et C.

Avec notre point de vue thermodynamique, nous pouvons dire maintenant que les deux trajectoires 1 et 2 suivent les lignes de talweg de deux vallées de néguentropie très voisines et de même profondeur moyenne qui sont séparées l'une de l'autre par une colline de néguentropie, mais qui viennent se rejoindre

en C. Si le point B se trouve sur la trajectoire 1 entre A et C, toute trajectoire variée devra grimper sur le flanc des collines de néguentropie qui bordent la trajectoire 1 : on a donc  $\overline{\delta S} \leq 0$ , c'est-à-dire qu'il y aura pour A 1 B un minimum de l'action hamiltonienne. Si, au contraire, le point B est situé sur la trajectoire 1 au-delà du point C, on pourra prendre comme mouvement varié le mouvement 2 de A à B, puis le mouvement 1 de B à C et, comme alors la trajectoire variée reste au fond d'une vallée de néguentropie de même niveau moyen que la vallée ACB du mouvement 1, on aura pour cette variation  $\overline{\delta S} = 0$  ou  $[\overline{\delta^2 \mathcal{L}}]_{M_0} = 0$  et l'action hamiltonienne ne sera pas minimale pour toutes les variations possibles.

Pour terminer ce paragraphe, nous dirons encore quelques mots au sujet du mouvement brownien de la particule dans son onde. A l'approximation newtonnienne (qui correspond à l'équation de Schrödinger), le mouvement brownien d'une particule peut toujours être représenté par une équation de diffusion de la forme

$$(30) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho,$$

où  $\rho$  est la probabilité de présence de la particule à une distance  $r$  de son point de départ,  $D$  étant le coefficient de diffusion.

Divers auteurs, notamment M. Nelson (<sup>1</sup>), ont cherché à déduire de l'équation de Schrödinger un mouvement

---

(<sup>1</sup>) Voir [9], a.

brownien de la particule. Cela m'a amené à faire un calcul analogue dans une Note récente dans le cadre de la théorie de la double solution et en partant de l'idée suivante : Les perturbations subquantiques se traduisent par de petites fluctuations aléatoires de la masse propre produisant de petites variations dans la forme de l'onde et dans le mouvement de guidage de la particule, mais j'ai admis que, même pendant la durée des perturbations, il y a toujours accord de phase entre le mouvement interne de la particule et la vibration de l'onde au point où elle se trouve. Si alors on considère les positions de la particule à l'instant où une perturbation aléatoire va commencer et à l'instant où cette perturbation vient de se terminer, un calcul que je ne reproduis pas ici <sup>(1)</sup> me conduit à la valeur suivante du coefficient D du mouvement brownien :

$$(31) \quad D = \frac{2\pi}{3} \frac{\hbar}{m_0} = \frac{1}{3} \frac{h}{m_0},$$

valeur qui ne diffère que par un coefficient numérique de la valeur trouvée par Nelson.

L'hypothèse que la particule est animée dans son onde d'un mouvement brownien me paraît impliquer nécessairement la localisation constante de la particule dans l'onde. Nous savons d'ailleurs qu'à ce mouvement brownien doit se superposer un mouvement régulier défini par la formule du guidage comme cela résulte du reste d'une des équations de M. Nelson.

---

(1) Voir [9], b.

**4. La prérogative des ondes planes monochromatiques et des états stationnaires et l'existence des états transitoires.** — Une des idées les plus caractéristiques introduites par Bohr dans sa célèbre théorie de l'atome en 1913 a été celle des transitions brusques entre états stationnaires dans les systèmes quantifiés. Ces transitions brusques ne seraient, pensait-il, susceptibles d'aucune description en termes d'espace et de temps. La continuité des processus physiques disparaîtrait donc d'une manière bien contraire à toutes les idées antérieures des physiciens. Engagée dans cette voie, la Physique quantique « orthodoxe » en est arrivée, notamment en théorie quantique des champs, à attribuer aux ondes planes monochromatiques (qui, cependant, nous le dirons dans le prochain chapitre, n'existent jamais réellement) un caractère privilégié et à admettre que les interactions entre matière et rayonnement s'opèrent toujours par des transitions brusques et indescriptibles entre ondes planes monochromatiques pour le rayonnement.

En réfléchissant sur cette question avec mes collaborateurs (MM. Fer, Andrade e Silva, Lochak et Thiounn), j'en suis arrivé à des conceptions nouvelles que je vais résumer brièvement. Pour faire comprendre l'orientation de ma pensée, je partirai de la remarque que dans la théorie usuelle on accorde une sorte de « prérogative » aux états que l'on peut qualifier de « monochromatiques ». Ces états privilégiés comprennent, d'une part les états stationnaires des sys-

tèmes quantifiés associés à une onde stationnaire représentée par une fonction propre de l'hamiltonien, d'autre part les états des particules associées à une onde progressive monochromatique plane (ou du moins à un train d'ondes assimilable à une telle onde). Cette prérogative, dont Schrödinger avait souligné le caractère étrange, conduit à regarder ces états privilégiés comme ayant une existence plus réelle que les états représentés par des superpositions de fonctions propres ou d'ondes planes monochromatiques. Et cependant, malgré l'hypothèse bohrienne du caractère absolument discontinu des états quantifiés qui devrait conduire à ne considérer que ces états, on fait souvent intervenir des états de superposition, notamment dans les calculs de perturbations. Mais on se refuse ordinairement, semble-t-il, à attribuer à ces états de superposition une existence physique et on se borne à les considérer comme servant uniquement à calculer des probabilités. Nous insisterons plus loin sur les conséquences paradoxales d'une telle conception dans le cas où l'on déduit d'un tel calcul la largeur spectrale des raies émises par un atome dans une transition quantique.

Mais avec nos conceptions nous devons admettre qu'à chaque onde statistique  $\Psi$  doit correspondre une onde physique réelle  $\psi$ . Nous devons considérer les états de superposition non pas comme de simples représentations de probabilités, mais comme décrivant des états physiques réels. Pour nous, ce sont des états physiques qu'on peut nommer « transitoires » ou

« précurseurs » qui servent de transition continue de très brève durée entre deux états privilégiés. En d'autres termes, les états « monochromatiques » seraient des états très stables de grande probabilité tandis que les états de superposition seraient non pas inexistant, mais seulement de faible probabilité. Transposé dans notre langage thermodynamique, cela signifie que les états de superposition ont une entropie plus petite que les états « monochromatiques » et que des processus très rapides, à caractère peut-être irréversible, ramènent toujours particules ou systèmes vers des états à entropie plus élevée chaque fois que les conditions imposées à la particule ou au système permettent les échanges d'énergie nécessaires. Des circonstances de ce genre se rencontrent fréquemment en Thermodynamique chimique où le passage d'un état chimique à un autre état chimique stable s'opère par l'intermédiaire d'états de moindre entropie.

Dans le cas d'un système isolé qui n'échange aucune énergie avec l'extérieur (ce qui n'est pas le cas d'un atome qui émet ou qui absorbe un photon), j'ai pu démontrer que l'entropie d'une onde plane monochromatique est supérieure à celle d'un état de superposition. Cela résulte du fait que  $\bar{M}_0$  a sa valeur maximale égale à  $m_0$  pour l'onde plane monochromatique. Pour les particules de spin  $\frac{\hbar}{2}$  et  $\hbar$ , on le voit facilement en se reportant à la formule (15) et aux formules (27) et (28) du chapitre III. Pour une particule de spin 0 à l'approximation newtonienne, les formules (6) et



(12) du chapitre II permettent d'écrire,  $D$  étant le volume occupé par l'onde,

$$M_0 = m_0 - \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} \int_0 a^2 \frac{\Delta a}{a} d\tau = m_0 + \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} \int_0 (\overrightarrow{\text{grad } a})^2 d\tau \geq m_0.$$

Pour l'onde plane monochromatique où  $\overrightarrow{\text{grad } a}$  est partout nul, on a bien  $M_0 = m_0$ .

Dans le cas d'une transition quantique, la question se présente sous un aspect un peu différent puisqu'il y a alors échange d'énergie de l'atome avec l'extérieur par émission ou absorption d'un photon. Ce qui intervient alors, ce n'est plus le maximum de l'entropie, mais le minimum de l'énergie libre. J'ai étudié le problème avec quelques détails dans mon livre sur la Thermodynamique cachée des particules ([8],  $a$ , p. 114 et ss.) et je me borne à y renvoyer le lecteur.

Pour montrer l'intérêt de considérer les états précurseurs comme nous venons de le faire, nous allons envisager l'émission d'un photon par un atome dans une transition quantique. L'atome se trouve initialement dans un état quantique d'énergie  $E_0$  et peut passer dans un des états quantiques d'énergie  $E_k < E_0$  avec émission d'un photon de fréquence  $\nu_k = \frac{E_0 - E_k}{h}$ .

Mais pour nous l'émission du photon est précédée d'un état transitoire précurseur au cours duquel l'atome entre en interaction avec un photon qui est encore caché dans le milieu subquantique. Dans la méthode usuelle en Mécanique quantique, on repré-

sente ce processus par un calcul de perturbations où l'on envisage une onde  $\Psi$  de l'atome formée par la superposition des diverses fréquences qui peuvent être émises. L'on montre alors qu'il s'introduit un amortissement de l'onde  $\Psi_0$  initiale correspondant à la « largeur spectrale »  $\hat{\nu}$  de l'onde qui sera émise au moment où, par une transition de Bohr, un photon sera émis. Dans l'interprétation orthodoxe de ce calcul, on considère l'onde  $\Psi$  perturbée comme une simple représentation de probabilités, chaque terme dans l'expression du  $\Psi$  correspondant isolément à l'une des transitions possibles. On arrive ainsi pour la prévision des largeurs spectrales à des formules qui sont confirmées par l'expérience <sup>(1)</sup>. Mais dans l'interprétation probabiliste usuelle, le résultat obtenu doit s'interpréter en disant : « La largeur spectrale de l'onde qui est finalement émise par la transition  $E_0 \rightarrow E_k$  dépend de la probabilité de toutes les transitions qui ne sont pas produites ». Sous cette forme, cette conclusion me paraît inadmissible et je pense qu'il faut chercher une autre interprétation du succès obtenu par le calcul usuel de perturbations.

Cette interprétation me paraît devoir être cherchée dans la direction suivante. Si l'on admet que l'onde  $\Psi$  statistique dérive toujours par la relation  $\Psi = C\nu$  d'une onde  $\nu$  réelle, on doit considérer le calcul usuel de perturbations comme nous donnant la variation

---

(1) W. HEITLER, *The quantum theory of radiations*, 3<sup>e</sup> éd., p. 126.

objective de l'onde  $\nu$  au cours de l'état précurseur qui précède la transition quantique. La largeur spectrale que l'on calcule apparaît alors comme résultant de l'évolution des composantes cohérentes de l'onde  $\nu$  pendant l'état précurseur. Elle est déterminée non pas par les probabilités des diverses transitions quantiques qui ne se produiront pas, mais par la structure de l'onde  $\nu$  *réellement réalisée pendant l'état précurseur*. Il n'y a plus ainsi aucun paradoxe.

Des considérations analogues peuvent évidemment être développées pour l'absorption d'un photon par un atome qui, recevant une onde électromagnétique de fréquence  $\nu_k$ , peut passer d'un état initial d'énergie  $E_0$  à un état d'énergie  $E_k = E_0 + h\nu_k$  avec disparition d'un photon sans doute alors résorbé dans le milieu subquantique. Là encore le calcul de perturbations que l'on peut faire dans la théorie usuelle doit selon nous être interprété comme décrivant l'évolution objective d'un état précurseur précédant la transition quantique d'absorption. Dans des travaux récents, MM. Georges Lochak et Mumm Thiounn ont étudié, uniquement à l'aide d'équations classiques, l'état précurseur créé dans un atome par une onde électromagnétique incidente très intense, c'est-à-dire partant de très nombreux photons, produisant des effets non linéaires. Ils ont ainsi obtenu des résultats nouveaux qui paraissent très intéressants [10].

Les problèmes étudiés dans ce paragraphe 4 n'ont été qu'effleurés et devraient faire l'objet d'études plus approfondies. Aussi ne croyons-nous pouvoir y insister

davantage. J'ajouterai cependant que MM. Andrade e Silva et Vassalo Pereira ont présenté récemment ma Thermodynamique cachée des particules sous une forme un peu différente qui n'en modifie pas les résultats essentiels <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> J. ANDRADE E SILVA et J. VASSALO PEREIRA, *Int. J. of Theoretical Physics*, vol. 3, 1970, p. 67-76.

## CHAPITRE V

# INEXISTENCE DES ONDES PLANES MONOCHROMATIQUES. ANALYSE DE DIVERSES EXPÉRIENCES ET PROBLÈMES NON RÉSOLUS

1. **Inexistence physique des ondes planes monochromatiques.** — Une remarque qui me paraît essentielle parce qu'elle permet d'expliquer les paradoxes que l'on a pu signaler dans la façon dont on envisage actuellement la Mécanique quantique est la suivante : l'onde plane monochromatique n'a aucune existence physique. En effet, l'onde plane monochromatique remplirait l'espace tout entier et durerait éternellement : il est évident qu'elle ne peut représenter aucun phénomène physique réel. Toute onde réelle est toujours limitée par un front d'ondes avant et par un front d'ondes arrière : s'il n'en était pas ainsi, il serait impossible d'allumer ou d'éteindre une lampe, il serait impossible d'envoyer un signal lumineux avec une vitesse finie. Assurément, si une onde a une extension suffisante dans le sens de sa propagation, on peut la représenter très approximativement par une onde plane

monochromatique dans la région comprise entre les fronts d'ondes et ce procédé est couramment employé avec succès dans l'étude des phénomènes optiques, mais on doit se méfier de tous les raisonnements où l'on emploie systématiquement la notion d'ondes planes monochromatiques.

En admettant pour la propagation des ondes des équations linéaires, on sait depuis longtemps que les trains d'ondes limités, qui ont seuls une existence physique, doivent être représentés par des intégrales de Fourier portant généralement sur un petit intervalle de fréquences et définissant une « largeur spectrale »  $\delta\nu$ . Un tel train d'ondes très sensiblement monochromatique dans toute sa partie centrale est souvent appelé un « groupe d'ondes ». Il peut être considéré comme animé d'un mouvement d'ensemble avec une « vitesse de groupe » qui est la vitesse des fronts avant et arrière du train d'ondes. Si  $V$  est la vitesse de phase de la propagation des ondes qui est définie à partir de la fréquence  $\nu$  et de la longueur d'ondes  $\lambda$  par  $\lambda = \frac{V}{\nu}$  et qui, en général, dépend de la fréquence  $\nu$ , la vitesse de groupe  $\nu$  est définie par la formule de Rayleigh

$$(1) \quad \frac{1}{\nu} = \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial \nu} = \frac{\partial \frac{\nu}{V}}{\partial \nu}.$$

Le train d'ondes ayant une longueur  $L$ , distance des fronts avant et arrière, est *une grandeur mesurable* par des procédés bien connus en théorie des inter-

férences, notamment par la disparition des interférences quand on emploie des lames minces suffisamment épaisses ou un interféromètre de Michelson à miroirs suffisamment écartés. On peut donc définir un « temps de cohérence »  $\tau = \frac{L}{v}$  du train d'ondes en remarquant qu'en un point M, il se comporte comme une onde plane monochromatique pendant un temps de l'ordre de la durée qui s'écoule entre le passage au point M du front avant et du front arrière du train d'ondes.

On possède des données numériques sur la valeur de la longueur L des trains d'ondes et, par suite, sur celle de la durée de cohérence  $\tau$ . Pour la lumière visible dont la longueur d'onde moyenne est de  $0,5 \mu$ , on sait depuis longtemps que la longueur L est de l'ordre de quelques centaines de milliers de longueurs d'onde, c'est-à-dire de l'ordre du mètre, du moins pour les sources de lumière usuelles. La durée de cohérence  $\tau$  est donc de l'ordre de  $10^{-8}$  s pour  $v \simeq c$ . Pour les électrons, on a pu également mesurer la longueur des trains d'ondes (Moellenstedt, Faget) et l'on a pu trouver pour L des valeurs de l'ordre du micron pour des électrons dont la vitesse est de l'ordre de  $10^9$  cm/s, de sorte que  $\tau$  est de l'ordre de  $10^{-13}$  s.

Quand on étudie en Mécanique quantique la détermination des fonctions propres correspondant à un problème donné, on s'aperçoit que, dans le cas des spectres continus, l'emploi de fonctions propres qui ne sont pas nulles à l'infini soulève des difficultés et

que pour obtenir une représentation satisfaisante, il est nécessaire d'introduire la notion de différentielle propre <sup>(1)</sup>. Or, comme Sommerfeld l'avait remarqué il y a longtemps, cela revient à remplacer les ondes planes monochromatiques qui ne sont pas nulles à l'infini par des trains d'ondes limités à petite largeur spectrale dont les différentielles propres sont précisément la représentation mathématique. On démontre d'ailleurs que les différentielles propres sont orthogonales et qu'elles peuvent être normées.

La théorie des différentielles propres mériterait, me semble-t-il, d'être étudiée plus qu'elle ne l'a été parce que c'est elle qui peut donner, en théorie ondulatoire linéaire, la représentation des trains d'ondes à petite largeur spectrale. Elle devrait permettre de définir non seulement la longueur  $L$  des trains d'ondes dans le sens de la propagation, mais aussi son extension latérale, sa largeur, qui est sans doute beaucoup plus grande que  $L$ . A l'heure actuelle, il n'existe à ma connaissance aucune vérification expérimentale de la largeur finie d'un train d'ondes, mais il ne serait peut-être pas impossible d'obtenir une évaluation au moins approximative de cette largeur par des expériences appropriées. Il n'est d'ailleurs pas certain qu'en admettant le caractère linéaire des équations de propagation, on puisse obtenir une représentation entièrement exacte de la structure des trains d'ondes.

---

(1) Voir mon livre *Quantification dans la nouvelle Mécanique*, Hermann, Paris, 1968, p. 139 et ss.



C'est un point sur lequel nous reviendrons au paragraphe 4 du présent chapitre.

Nous ne tenterons pas de développer ici une théorie complète des différentielles propres, mais nous indiquerons un résultat important qu'elle nous semble devoir fournir. Dans les exposés usuels, on considère la fonction statistique normée  $\Psi$  d'une particule ou d'un ensemble de particules comme développée en une somme de fonctions propres de la forme  $\Psi = \sum_k c_k \Psi_k$

normées et orthogonales où les  $c_k$  sont des coefficients complexes et l'on affirme que, si un processus de mesure permet d'attribuer à la particule ou au système l'état correspondant à l'indice  $k$ , la probabilité de ce résultat est donnée par  $|c_k|^2$ . Or, nous savons que, du moins dans le cas des spectres continus, nous devons remplacer les fonctions propres  $\Psi_k$  par les différentielles propres  $[\Psi_k]$ . Le symbole  $[\Psi_k]$  que nous introduisons représente la différentielle propre qui, si sa largeur spectrale était nulle, se réduirait à la fonction propre  $\Psi_k$ . Dans le cas d'une onde progressive libre,  $[\Psi_k]$  représente non pas l'onde plane monochromatique  $\Psi_k$  qui n'existe jamais, mais un train d'ondes de largeur spectrale finie  $\delta\nu$  assimilable dans toute sa partie centrale à l'onde plane monochromatique  $\Psi_k$ .

Si l'état initial d'une particule est constitué par une superposition de trains d'ondes, sa fonction  $\Psi$  sera de la forme

$$(2) \quad \Psi = \sum_k c_k [\Psi_k],$$

les différentielles propres  $[\Psi_k]$  étant normées et orthogonales. Supposons qu'une expérience ait pour résultat de séparer dans l'espace les trains d'ondes  $[\Psi_k]$ . On pourra alors, si l'on peut déceler la présence de la particule dans l'un de ces trains d'ondes, connaître l'état de mouvement final. Comme l'on sait que la probabilité de présence de la particule dans un élément de volume  $d\tau$  de l'espace est donnée par  $|\Psi|^2 d\tau$ , la probabilité pour que la mesure en question permette d'attribuer à la particule l'état de mouvement d'indice  $k$  sera,  $R_k$  étant la région de l'espace occupée par le  $k^{\text{ième}}$  train d'ondes,

$$(3) \quad \int_{R_k} |\Psi|^2 d\tau = \int_{R_k} |c_k|^2 |[\Psi_k]|^2 d\tau = |c_k|^2,$$

avec  $\sum_k |c_k|^2 = 1$ , puisque les  $[\Psi_k]$  sont normées et orthogonales. La probabilité pour que l'opération de mesure conduise à attribuer à la particule l'état de mouvement correspondant au train d'ondes  $[\Psi_k]$  est donc bien  $|c_k|^2$ .

**2. Difficultés que l'on rencontre si l'on oublie la limitation des trains d'ondes.** — Nous allons maintenant montrer sur quelques exemples que le fait de toujours considérer des trains d'ondes limités et jamais les irréalisables ondes planes monochromatiques permet d'éviter certains paradoxes que l'on rencontre si l'on oublie de tenir compte de cette limitation des trains d'ondes.

a. *Problèmes de choc et objection de Schrödinger.* — Einstein avait attiré l'attention, notamment dans son article avec Rosen et Podolsky <sup>(1)</sup>, sur certaines objections que soulève l'interprétation actuellement admise de la Mécanique ondulatoire. De son côté et sous une forme plus nette, Schrödinger a insisté sur le fait que la collision entre des particules n'est pas compatible avec l'image des ondes planes monochromatiques et il en a tiré une forme d'objection contre l'interprétation usuelle du résultat d'une collision qui me paraît avoir une grande force <sup>(2)</sup>.

Schrödinger a remarqué qu'une collision entre particules impliquait que ces particules sont d'abord distantes l'une de l'autre, puis se rapprochent et entrent en interaction, puis s'éloignent de nouveau après un échange d'énergie et de quantité de mouvement. Mais, si l'on associe aux particules des ondes planes monochromatiques, aucune représentation de ce genre n'est possible : les ondes des particules ayant une extension infinie se recouvrent constamment et l'état de choc n'a ni commencement ni fin, ce qui est inadmissible. Pour obtenir en Mécanique ondulatoire une représentation satisfaisante d'une collision entre particules, il faut leur associer des trains d'ondes limités qui, d'abord distants, se rapprochent les uns des autres et viennent se recouvrir pour enfin se séparer de nouveau quand la collision est terminée. C'est en utilisant cette

---

(1) *Phys. Rev.*, t. 47, 1935, p. 777.

(2) *Naturwissenschaften*, t. 23, 1935, p. 727, 823 et 844.

image que Schrödinger a pu mettre sous une forme particulièrement frappante le caractère paradoxal de l'interprétation actuellement admise des phénomènes de collision.

Considérons deux trains d'ondes presque monochromatiques associés à deux particules 1 et 2 et supposons qu'ils viennent à la rencontre l'un de l'autre.

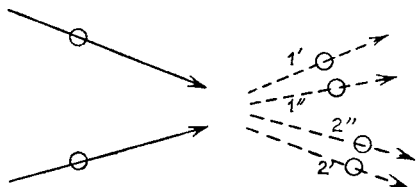


Fig. 1.

Quand ils sont parvenus à proximité, les deux particules entrent en interaction et la théorie usuelle, pour prévoir les résultats possibles de cette interaction, envisage la propagation d'une onde  $\Psi$  dans l'espace de configuration du système des deux particules. La Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration nous apprend alors que le choc peut donner lieu à toute une série de mouvements compatibles avec la conservation globale de l'énergie et de la quantité de mouvement. Après la fin de la collision, ou bien le train d'ondes de la particule 1 décrira finalement la trajectoire 1', le train d'ondes de la particule 2 décrivant la trajectoire 2'; ou bien le train d'ondes de la particule 1 décrira la trajectoire 1'', le train d'ondes de

la particule 2 décrivant la trajectoire  $2''$ , etc. Dans l'état final, les trains d'ondes forment donc des couples *corrélés*  $1'-2'$ ,  $1''-2''$ ,  $1'''-2'''$ , etc.

Supposons maintenant que nous observions une localisation de la particule 1 dans le train d'ondes  $1'$ ; nous saurons par cela même que la particule 2 se trouve dans le train d'ondes  $2'$ . Or, l'interprétation actuellement orthodoxe qui admet que la particule n'est pas localisée dans son onde interprète ce qui précède de la façon suivante. Après le choc, la particule 1 serait potentiellement présente dans l'ensemble des trains d'ondes  $1'$ ,  $1''$ , ... tandis que la particule 2 serait potentiellement présente dans l'ensemble des trains d'ondes  $2'$ ,  $2''$ , .... Lorsque se produit la localisation observable de la particule 1 dans le train d'ondes  $1'$ , la particule 2 se trouverait brusquement localisée par cette seule observation dans le train d'ondes  $2'$  et cela bien qu'on n'ait exercé aucune action sur elle et que le train d'ondes  $2'$  puisse à ce moment se trouver extrêmement éloigné de  $1'$ . Comme l'a dit très justement Schrödinger, « ce serait de la magie ».

Mais, si nous admettons la localisation permanente de chaque particule dans son train d'ondes, nous parvenons à une interprétation plus raisonnable. Pour nous, après le choc, les particules seront localisées dans l'un des couples corrélés de trains d'ondes  $1'-1''$ ,  $2'-2''$ , ..., mais nous ignorons dans lequel de ces couples corrélés elles se trouvent tant que nous n'aurons observé aucune localisation des particules. Mais, si nous observons une localisation de la particule 1

dans le train d'ondes 1', c'est qu'elle s'y trouvait déjà avant cette observation et alors nous apprenons par là même que la particule 2 est dans le train d'ondes 2'. Ce n'est pas l'observation de la particule 1 dans 1' qui met la particule 2 dans 2' où elle se trouvait déjà. Tout devient très clair et il n'y a plus de magie.

Nous apercevons comment l'hypothèse de la localisation des particules dans leur onde jointe à l'idée que l'on a toujours affaire à des trains d'ondes limités nous permet d'éviter toute interprétation paradoxale.

*b. Sur les corrélations dans la mesure des spins.* — Plusieurs auteurs ont cru pouvoir déduire de l'étude de la mesure des spins la preuve de l'existence de corrélations entre les états de spin de deux particules se trouvant à une grande distance l'une de l'autre et ils en ont tiré la conclusion qu'il était impossible d'admettre une interprétation causale de la Mécanique quantique. Nous pensons que cette conclusion ne peut pas être maintenue si l'on tient compte du fait que les particules à spin, atomes ou électrons, sont toujours liées à des trains d'ondes limités de petites dimensions.

Pour étudier cette question, rappelons d'abord comment s'effectue la mesure d'une composante de spin d'une particule. On emploie pour cela un électroaimant du type Stern-Gerlach dans lequel existe un champ magnétique non homogène, par exemple entre des pôles de forme prismatique.

Si un très petit train d'ondes portant une particule de spin  $\frac{\hbar}{2}$  s'engage dans l'appareil en balayant un très petit cylindre, l'action du champ magnétique non uniforme va séparer les deux composantes du train d'ondes qui correspondent aux valeurs  $\sigma_z = \pm \frac{\hbar}{2}$  de la composante  $\sigma_z$  du spin en agissant sur les moments magné-

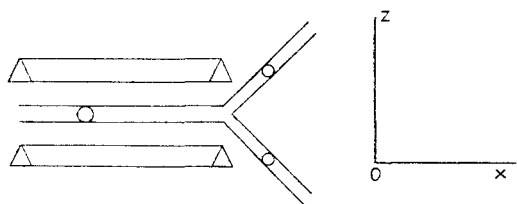


Fig. 2.

tiques qui correspondent aux deux valeurs de  $\sigma_z$ . C'est ce que l'on peut voir facilement sur les équations de Dirac. Mais en même temps le champ magnétique dévie les deux composantes de  $\sigma_z$  l'une vers le haut, l'autre vers le bas de sorte qu'à la sortie de l'appareil, il y a deux trains d'ondes correspondant aux valeurs  $\sigma_z = \frac{\hbar}{2}$  et  $\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}$  qui, en raison de leur petitesse, se séparent et cessent d'interférer, ainsi que cela est représenté schématiquement sur la figure 2.

Mais comme nous ne considérons encore qu'une seule particule qui, pour nous, est portée au début par le train d'ondes initial où elle est localisée à chaque instant, cette particule se trouvera finalement dans

l'un des deux trains d'onde séparés et aura sa composante de spin  $\sigma_z$  égale à  $\frac{\hbar}{2}$  ou à  $-\frac{\hbar}{2}$  suivant le train d'ondes où elle se trouve. C'est pourquoi l'on peut dire que l'appareil utilisé permet une mesure de  $\sigma_z$ . Remarquons que dans l'état final, l'un des trains d'ondes est « vide » alors que l'autre porte la particule.

Considérons maintenant un état initial où deux particules de même nature et de spin  $\frac{\hbar}{2}$  sont portées par un même petit train d'ondes. D'après le principe de Pauli, les spins de ces deux fermions doivent être opposés. Le train d'ondes étant soumis à l'action d'un champ magnétique non homogène, il y aura encore, comme dans le cas d'une seule particule, séparation dans l'espace de deux trains d'ondes correspondant à  $\sigma_z = \frac{\hbar}{2}$  et à  $\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}$  se dirigeant dans des directions différentes. Mais, comme pendant tout le processus de séparation des trains d'ondes, les deux particules doivent suivant le principe de Pauli garder des spins opposés, dans l'état final l'un des trains d'onde de spin  $\frac{\hbar}{2}$  portera l'une des particules tandis que l'autre train d'ondes de spin  $-\frac{\hbar}{2}$  portera l'autre particule. Et comme les directions du mouvement des deux particules sont différentes, elles s'éloigneront rapidement l'une de l'autre.

Les états des deux particules sont dès lors complètement indépendants. Cependant une corrélation sub-



siste entre les états de spin des deux particules tant qu'aucune action extérieure ne modifie la valeur de leur spin. Donc si, ignorant la valeur des spins individuels, nous mesurons la valeur de  $\sigma_z$  sur l'une des particules à l'aide du dispositif étudié plus haut et si nous trouvons la valeur  $\sigma_z = \frac{\hbar}{2}$ , nous sommes alors sûrs qu'une mesure identique faite sur la particule 2 donnera  $\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}$ . Le genre de corrélation qui existe ici est très naturel et ne soulève aucun paradoxe.

Là où le paradoxe apparaît, c'est quand on prétend démontrer qu'après la séparation des deux trains d'ondes une mesure qui change l'état de spin de la particule 1 change également le résultat de la mesure du spin sur la particule 2 qui peut être très éloignée de la particule 1. Supposons qu'après la mesure décrite plus haut des composantes  $\sigma_z$  des deux particules, on mesure la composante  $\sigma_x$  de la particule 1 en employant un dispositif à champ magnétique non homogène analogue à celui qui a été utilisé pour la mesure de  $\sigma_z$ , mais en le faisant tourner de  $\frac{\pi}{2}$ . Plusieurs auteurs ont cru pouvoir démontrer que, si la mesure de  $\sigma_x$  sur la particule 1 donne alors l'une des valeurs  $\sigma_x = \pm \frac{\hbar}{2}$ , une mesure analogue faite sur la particule 2 donnera toujours une valeur égale et opposée de  $\sigma_x$  de façon que la somme des deux  $\sigma_x$  soit égale à zéro comme l'était celle des deux  $\sigma_z$  après la première mesure. Il en résulterait une corrélation des mesures

faites sur deux particules très éloignées l'une de l'autre qui me paraît tout à fait inacceptable. En effet, après la mesure initiale de  $\sigma_z$  sur les deux particules, les deux trains d'ondes portant chacun l'une des particules se sont éloignés l'un de l'autre avec des valeurs égales et opposées de  $\sigma_z$ . Alors la mesure de  $\sigma_x$  sur l'une des particules ne peut plus avoir aucune influence sur l'état de l'autre particule qui, tant qu'on n'agira pas sur elle, conservera la valeur de  $\sigma_z$  que la première mesure lui avait imposée. Si donc on mesure alors la composante  $\sigma_x$  de la particule 2, on se trouvera dans le cas de la mesure du spin sur un train d'ondes portant une seule particule et, comme nous l'avons vu, l'on pourra alors trouver avec une égale probabilité l'une ou l'autre des valeurs  $\sigma_x = \pm \frac{\hbar}{2}$  sans aucune corrélation avec la valeur de  $\sigma_x$  trouvée pour la particule 1 par une mesure effectuée en un point très éloigné. S'il n'en était pas ainsi, on retrouverait la « magie » dont a parlé Schrödinger. Remarquons d'ailleurs que, si des corrélations instantanées à distance existaient réellement, elles seraient équivalentes à la probabilité de signaux se propageant instantanément et toute la théorie de la Relativité qui repose sur l'impossibilité des tels signaux serait à abandonner.

On peut aussi confirmer le raisonnement précédent par la remarque suivante. Lorsqu'on effectue successivement en des points éloignés la mesure de  $\sigma_x$  sur la particule 1 avec un électroaimant  $A_1$  et sur la particule 2 avec un électroaimant  $A_2$ , les appareils  $A_1$

et  $A_2$  fourniront aux particules le moment de quantité de mouvement nécessaire pour changer la direction de leur spin sans que cela, bien entendu, s'accompagne d'aucune mise en état de rotation appréciable des deux électroaimants. Or, les appareils  $A_1$  et  $A_2$  sont des appareils macroscopiques très éloignés l'un de l'autre dont le comportement peut sans aucun doute être entièrement décrit par la Physique classique. Il ne peut donc pas exister entre le fonctionnement de ces deux appareils une corrélation qui serait tout à fait étrangère à la Physique classique.

Des raisonnements analogues pourraient être appliqués à la détermination des états de polarisation des photons, les photons étant des particules de spin  $\hbar$  dont l'état de spin est intimement relié à l'état de polarisation <sup>(1)</sup>. Il me paraît impossible que, quand deux photons et leurs trains d'ondes se sont séparés et éloignés l'un de l'autre, un changement provoqué par un appareil macroscopique (nicol, par exemple) de la polarisation de l'un des trains d'ondes entraîne un changement corrélé de la polarisation de l'autre train d'ondes par un autre appareil macroscopique <sup>(2)</sup>.

*c. Sur une objection d'Einstein à la formule du guidage.* — Dans une contribution au livre jubilaire consacré à Max Born, Einstein, tout en se prononçant toujours pour le rétablissement d'une conception

---

<sup>(1)</sup> Voir [4], d.

<sup>(2)</sup> Voir la Note à la fin du chapitre.

réaliste de la Mécanique ondulatoire, a élevé une objection contre la formule du guidage <sup>(1)</sup>.

Le principe dont part Einstein est que, chaque fois que l'on a affaire à un corps macroscopique, on doit retrouver les images de la Mécanique classique qui donne sans aucun doute une image très approchée de la réalité physique. Ceci posé, il envisage le problème suivant. Considérons une particule qui se déplace suivant une droite  $Ox$  en venant rebondir sur deux miroirs placés perpendiculairement à  $Ox$  aux points d'abscisses  $x=0$  et  $x=l$ . La Mécanique ondulatoire usuelle associe à ce mouvement, s'il a une énergie bien déterminée, une onde statistique  $\Psi$  nulle en  $x=0$  et en  $x=l$  et de la forme

$$(4) \quad \Psi = a_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad \text{avec} \quad E_n = \frac{n^2 h^2}{8ml^2},$$

$n$  étant entier. Dans l'interprétation orthodoxe, cette onde représente la possibilité de deux mouvements de même quantité de mouvement  $p = \frac{nh}{2l}$  s'effectuant, l'un de gauche à droite, l'autre de droite à gauche, ces deux mouvements ayant la même probabilité. Au point de vue de la Physique macroscopique, si la particule est macroscopique, elle a à chaque instant l'un des deux mouvements à l'exclusion de l'autre. L'interprétation usuelle, dit alors Einstein, représente donc

<sup>(1)</sup> *Scientific papers presented to Max Born*, Oliver and Boyd, Edinburg, 1953, p. 33 et ss.

Voir aussi dans le même volume l'article de D. Bohm, p. 13.

exactement la situation statistique au cours du temps, mais non pas l'état réel instantané de la particule macroscopique. C'est donc une description statistiquement exacte, mais incomplète comme description de la réalité physique.

Mais voici maintenant l'objection qu'il tire du cas étudié contre la formule du guidage. Dans la formule (4), la phase  $\varphi$  de l'onde  $\Psi = a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}$  se réduit à  $E_n t$  et est, par suite, indépendante de  $x$ . La formule du guidage nous donne donc

$$(5) \quad v = - \frac{1}{m} \text{grad } \varphi = 0.$$

La particule serait immobile et, si cette particule constitue une petite bille au sens usuel du mot, nous nous trouvons en contradiction avec la Mécanique classique qui nous affirme, certainement avec raison, que la bille doit avoir un mouvement de va-et-vient le long de  $Ox$  avec rebondissement alternatif sur chacun des deux miroirs. Einstein en a conclu que la formule du guidage ne peut pas, elle non plus, représenter la réalité physique.

L'analyse d'Einstein est dans son ensemble très intéressante, mais elle appelle d'abord une réserve. On peut, en effet, remarquer que, si la particule considérée est macroscopique, elle est nécessairement formée par un ensemble de particules élémentaires et que l'onde  $\Psi$  est alors associée au centre de gravité du système, ce qui rend l'interprétation plus difficile. Mais, en dehors de cette réserve, on peut trouver une

réponse à l'objection d'Einstein contre la formule du guidage.

Pour développer cette réponse, nous partirons encore de la remarque qu'un train d'ondes a toujours des dimensions limitées ne pouvant dépasser, nous l'avons vu, un certain nombre, d'ailleurs très élevé, de longueurs d'onde. Comme pour une énergie donnée  $E$ , la longueur d'onde  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$  est d'autant plus petite que  $m$  est plus grand, nous voyons que le train d'ondes associé à une particule d'énergie donnée aura, quand la masse augmente, une longueur très inférieure à la distance  $l$  des deux miroirs dans l'exemple d'Einstein. Pour une masse suffisamment grande, il ne sera plus possible d'imaginer qu'il y ait entre les deux miroirs une onde stationnaire du type (4) due à la superposition de deux trains d'ondes se propageant en sens inverses. On devra, au contraire, se représenter un train d'ondes de petites dimensions venant se réfléchir alternativement sur chacun des miroirs et cette image correspond exactement à l'image macroscopique classique d'une bille qui oscille le long d'une droite en venant se réfléchir alternativement sur les deux miroirs parallèles. Cette réponse à l'objection d'Einstein me paraît satisfaisante et montre une fois de plus qu'il ne faut jamais oublier que tout train d'ondes a une longueur limitée.

Une autre objection contre la formule du guidage avait été faite par Pauli au Conseil Solvay d'octobre 1927 en envisageant le problème antérieurement

traité par Fermi du choc d'une particule avec un rotateur quantifié. J'ai étudié cette objection dans un de mes livres <sup>(1)</sup> et je pense y avoir répondu en introduisant encore l'idée que l'onde de la particule est toujours limitée. Je n'y reviens donc pas ici.

**3. Analyse de diverses expériences.** — Nous allons maintenant analyser diverses expériences réalisables ou imaginables dont nous tirerons certaines conséquences intéressantes.

*a. Trous d'Young et interférence des probabilités.* — M. Heisenberg a introduit, il y a longtemps, l'idée de « l'interférence des probabilités » s'appuyant sur l'expérience bien connue des trous d'Young et son raisonnement est souvent considéré comme excluant la possibilité d'une localisation permanente de la particule dans son onde. Nous voulons montrer qu'avec nos idées cette conclusion ne s'impose aucunement.

Considérons avec Heisenberg un écran d'Young percé de deux trous A et B sur lequel tombe un train d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique et calculons la probabilité pour que la particule manifeste sa présence en un point M situé au-delà de l'écran dans la région où l'on peut observer les interférences. Heisenberg raisonne comme il suit. Si la particule était constamment localisée, elle devrait passer par l'un des trous d'Young, mettons A, pour

---

<sup>(1)</sup> Voir [4], *a*, p. 174 et ss.

participer aux interférences. Le calcul des probabilités nous dit que la probabilité  $P(M)$  que la particule parvienne en  $M$  est le produit de la probabilité  $P_1(A)$  de son passage par le trou  $A$  par la probabilité  $P_2(A, M)$  pour qu'elle se rende ensuite de  $A$  en  $M$ . On a donc

$$(6) \quad P(M) = P_1(A) \cdot P_2(A, M) = F_1(A, M).$$

Mais, dit Heisenberg, l'expérience prouve qu'il y a « interférence des probabilités » [nous dirions plutôt qu'il y a une probabilité  $P(M)$  déterminée par les interférences], c'est-à-dire que  $P(M)$  doit être une fonction de  $A$ ,  $B$  et  $M$ . En effet, la probabilité de la présence de la particule en  $M$  est donnée par le carré de l'amplitude de l'onde qui a passé par les trous  $A$  et  $B$  et qui interfère derrière l'écran. On a donc

$$(7) \quad P(M) = a^2(M) = F_2(A, B, M).$$

Or, cette formule est incompatible avec la précédente parce que  $F_1$  ne dépend que de la position du trou  $A$  et du point  $M$  tandis que  $F_2$  dépend *en outre* de la position du trou  $B$ . Et l'on en conclut qu'il est impossible d'admettre que la particule ait passé par l'un des trous d'Young : elle ne peut donc être localisée en permanence et doit avoir passé potentiellement par les deux trous à la fois.

Mais ce raisonnement, où l'on admet implicitement la Dynamique corpusculaire classique, repose sur l'hypothèse que, quand la particule a passé par le trou  $A$ , son mouvement ne peut aucunement être



ensuite influencé par l'existence du trou B. Or, dans la théorie de la double solution, on doit remarquer que, dès que la particule a passé par le trou A, elle se trouve dans la région où les portions de l'onde  $\nu$  qui ont passé par A et B interfèrent. Il en résulte que le mouvement de la particule défini par la formule du guidage est dès lors influencé par l'existence du trou B de sorte que l'on doit écrire, au lieu de (6),

$$(8) \quad P(M) = P_1(A) \cdot P_2(A, B, M),$$

ce qui est en accord avec (7). Il n'y a plus aucune difficulté à admettre que la particule ait passé par l'un des trous d'Young et que cependant la probabilité de sa présence en M dépende à la fois de la position du point M et de celle des deux trous d'Young A et B.

Il semble d'ailleurs qu'il serait possible de faire une expérience macroscopique où une conclusion analogue s'imposerait. Supposons qu'une onde sinusoïdale progressive se propage à la surface d'un liquide et s'écoule le long d'un canal rectiligne. Plaçons un écran percé de deux trous perpendiculairement à la direction de la propagation de l'onde. Derrière l'écran, il doit y avoir une région où, par suite des interférences, la répartition des amplitudes de l'onde doit être celle que l'on calcule dans la théorie usuelle des trous d'Young. L'expérience paraît réalisable.

Mais supposons maintenant que l'on ait semé à la surface de l'onde liquide une poudre formée de très petits grains de poussière encore visibles à l'œil nu. Ces grains seront entraînés par l'onde et certains

d'entre eux passeront par les trous de l'écran. Il me paraît probable que derrière l'écran les grains de poussière se concentreront dans les régions de haute amplitude de l'onde et se raréfieront dans les régions de faible amplitude. Comme chaque grain qui est visible a certainement passé par l'un des deux trous d'Young, si l'expérience donnait un résultat conforme à mes prévisions, on pourrait en conclure ce qui suit : chaque grain de poussière, après avoir passé par l'un des trous d'Young, a dans la région derrière l'écran un mouvement qui est influencé par l'existence du trou d'Young par lequel il n'a pas passé. On aurait ainsi une preuve expérimentale du fait que le guidage d'une particule par une onde peut provoquer un groupement de ces particules dans l'espace conforme à la théorie des franges d'interférences et cela parce que la particule est guidée dans son mouvement par la propagation d'une onde qui, elle, a passé par les deux trous d'Young.

*b. Le miroir semi-transparent d'Heisenberg.* — Au Conseil Solvay d'octobre 1927, Heisenberg avait donné un autre exemple qui, selon lui, prouvait aussi l'impossibilité de localiser la particule dans son onde. Il considérait une onde tombant sur un miroir semi-transparent M. Une partie de cette onde passe à travers le miroir et continue son chemin en ligne droite tandis qu'une autre partie est réfléchi.

Si l'on peut détecter la présence d'une particule portée par l'onde dans l'un des deux faisceaux, l'autre, selon Heisenberg, cesse immédiatement d'exister car

il n'est qu'une représentation de la probabilité de présence de la particule. Mais plaçons en  $M'$  un miroir parfaitement réfléchissant qui renvoie l'onde transmise sur l'onde réfléchie de façon qu'elles se superposent dans la région ABCD. Alors nous pourrons observer des interférences dans cette région ABCD. Cela prouve,

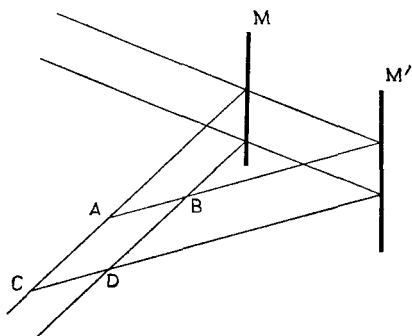


Fig. 3.

disait Heisenberg, que l'onde transmise et l'onde réfléchie existent tant que la particule n'est pas localisée et cela conduit à penser que jusqu'à l'instant de la localisation, la particule est présente à l'état potentiel dans les deux ondes à la fois.

Avec notre point de vue, l'interprétation de cette expérience est tout à fait différente. La particule restant constamment localisée dans l'onde  $\nu$  se trouve après son arrivée sur le miroir  $M$ , soit dans l'onde transmise, soit dans l'onde réfléchie. Si elle manifeste sa

présence dans l'une de ces deux ondes, c'est qu'elle y était déjà. Mais l'onde  $\nu$  étant une onde physique réelle, l'autre onde n'en disparaîtra pas pour cela. C'est seulement l'onde statistique fictive  $\Psi$  qui disparaîtra dans la région de l'onde  $\nu$  où ne se trouve pas la particule. Si l'on interpose le miroir  $M'$ , on pourra obtenir des interférences dans la région ABCD parce que la particule, qu'elle ait traversé le miroir semi-transparent ou qu'elle ait été réfléchie, se trouve guidée quand elle arrive dans la région ABCD par la superposition des ondes  $\nu$  que la réflexion sur le miroir  $M'$  a provoquée. On obtient ainsi une interprétation des interférences en ABCD qui est tout à fait la même que celle que nous avons obtenue plus haut pour les trous d'Young.

Il faut cependant remarquer que notre point de vue nous amène nécessairement à nous poser les deux questions suivantes : 1<sup>o</sup> Si le miroir  $M'$  n'est pas interposé, le train d'ondes incident portant la particule se trouve divisé après son passage sur le miroir semi-transparent  $M$  en deux trains d'ondes dont l'un seulement porte la particule. Que devient ensuite l'autre train d'ondes qui est « vide »? 2<sup>o</sup> Après la séparation des trains d'ondes  $\nu$ , la particule se trouve dans un train d'ondes d'amplitude plus faible que le train d'ondes initial. Donc, après avoir rencontré un nombre croissant de miroirs semi-transparents, une particule se trouverait finalement portée par une onde de plus en plus affaiblie. Peut-on imaginer qu'une onde  $\nu$  de plus en plus affaiblie continue à guider une particule?

Nous nous contentons de poser ces deux questions. Nous y reviendrons dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

*c. Projet d'une expérience mettant en défaut les idées actuellement admises.* — Considérons un dispositif d'interférences comportant deux miroirs sur lesquels se réfléchissent deux faisceaux de lumière cohérents qui viennent ensuite se superposer dans une région d'interférences. Si les deux miroirs sont fixes, les auteurs qui soutiennent les idées actuellement admises en Physique quantique disent que les photons portés par l'onde cohérente sont présents potentiellement dans chacun des deux faisceaux, ce qui permet à ces faisceaux d'être cohérents et explique l'apparition des interférences. Mais, pour ces auteurs, si l'un des deux miroirs peut reculer sous l'impact des photons, la cohérence des deux faisceaux est rompue par ce recul et il ne peut plus y avoir d'interférences. Allant plus loin, ils disent même, d'accord avec les conceptions de Niels Bohr sur la complémentarité, que, si le miroir qui peut reculer ne recule pas, la cohérence est également détruite par le seul fait qu'il aurait pu reculer et alors il n'y a pas d'interférences <sup>(1)</sup>. Cela est bien paradoxal.

Divers auteurs, dont Einstein et plus récemment M. Renninger, ont insisté sur les difficultés soulevées

---

(1) Voir l'article d'EPSTEIN, *Amer. J. Phys.*, vol. 13, 1945, p. 129.

par une telle conception. On trouvera un exposé de ces difficultés dans un de mes livres récents <sup>(1)</sup>.

Il est à remarquer que, dans les exposés de Bohr et de ses disciples, on raisonne généralement comme si l'on pouvait obtenir des diagrammes d'interférences avec un seul photon. Or, il est évident qu'on ne peut observer les franges d'interférences que si de très nombreux photons arrivant successivement ou simultanément se répartissent statistiquement dans la région d'interférences proportionnellement à l'intensité locale de l'onde résultant de la superposition des faisceaux qui s'y croisent.

Si l'on envoie de très nombreux photons sur un dispositif comportant deux miroirs et si l'un au moins de ces miroirs recule sous l'impact des photons, c'est-à-dire sous l'action de la pression de radiation, on peut admettre que les franges d'interférence ne seront pas visibles parce que le recul continu du miroir fera constamment varier la différence de marche des deux faisceaux qui se croisent dans la région d'interférences. Mais cela résulte uniquement de la théorie classique des interférences sans aucune intervention des conceptions de la complémentarité bohrienne.

Guidés par les remarques qui précèdent, nous allons imaginer un dispositif expérimental qui pourrait mettre en défaut les prévisions de la théorie « orthodoxe ».

---

(1) Voir [4], c, chap. III.

Considérons une source de lumière  $S$  qui envoie une onde cohérente sur un écran percé de deux trous  $A$  et  $B$  symétriques par rapport à l'axe de symétrie  $SO$  et suffisamment grands pour qu'on puisse négliger les phénomènes de diffraction. A droite de l'écran il y a

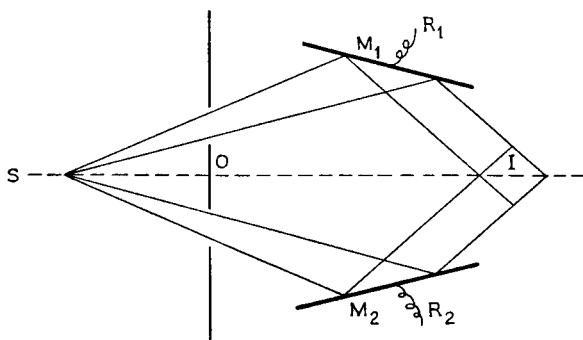


Fig. 4.

donc deux faisceaux de lumière séparés qui viennent frapper deux miroirs parfaitement réfléchissants  $M_1$  et  $M_2$  placés symétriquement par rapport à  $SO$ . Les faisceaux réfléchis par  $M_1$  et  $M_2$  viennent se superposer dans la région d'interférences  $I$ .

Si les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont fixés rigidement, tout le monde sera d'accord pour dire que l'on devra observer des franges d'interférences en  $I$ . Mais les auteurs orthodoxes énonceront les deux affirmations suivantes :

A. Les interférences se manifesteront en  $I$  parce que les photons qui s'y localisent n'ont auparavant mani-

festé nulle part leur nature corpusculaire. S'ils l'avaient fait, leur nature ondulatoire aurait disparu et il n'y aurait plus d'interférences.

B. Les photons avant leur localisation en I étaient répandus potentiellement dans toute l'onde cohérente et chacun passe à la fois par les deux trous A et B. Il est absolument impossible d'admettre que certains photons aient passé par le trou A et d'autres par le trou B.

Maintenant, au lieu de supposer les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  fixes, nous allons supposer qu'ils puissent reculer sous l'action de la pression de radiation due à l'impact des photons, mais que leur recul est limité par l'action antagoniste de ressorts  $R_1$  et  $R_2$  (ou par un dispositif équivalent). Si l'onde incidente est assez intense, par exemple si elle est émise par un laser, les miroirs reculeront un peu sous l'action de la pression de radiation, puis se stabiliseront lorsque la réaction des ressorts équilibrera cette pression. Quand les miroirs se seront stabilisés et seront devenus fixes, il paraît évident que l'on pourra observer les franges d'interférence en I. Mais alors nous pourrions énoncer les deux affirmations suivantes :

A'. Les photons qui se localisent en I dans les franges d'interférences auront tous cédé de la quantité de mouvement à l'un des miroirs en se réfléchissant sur lui. Ils auront donc ainsi manifesté leur nature corpusculaire d'une manière observable par le recul des



miroirs et cependant ils pourront *ensuite* donner lieu à un phénomène d'interférences en manifestant leur nature ondulatoire.

B'. Les photons qui se réfléchissent sur  $M_1$  ont évidemment passé par le trou A tandis que les photons qui se réfléchissent sur  $M_2$  ont évidemment passé par le trou B.

Les affirmations A' et B' sont en complète contradiction avec les affirmations A et B énoncées plus haut. Il semble donc que l'expérience que nous venons d'imaginer, si elle pouvait être réalisée et si elle réussissait, pourrait conduire à rejeter les conceptions sur la constitution de la lumière admises en Physique quantique depuis la théorie de la complémentarité de Bohr. Elle s'interpréterait, au contraire, facilement avec nos idées sur la coexistence des ondes et des particules qui impliquent dans le cas de la lumière, le transport de photons localisés par une très faible onde  $\nu$  électromagnétique <sup>(1)</sup>.

Dans l'expérience que nous proposons, le point essentiel consiste en ceci que, pendant le phénomène d'interférences, les miroirs resteraient immobiles tandis que leur recul initial, mesuré par la compression des ressorts, pourrait permettre d'affirmer que les photons en se réfléchissant sur les miroirs leur apportent constamment de la quantité de mouvement.

---

(<sup>1</sup>) Voir [4], d.

On pourrait objecter à l'expérience proposée que la pression de radiation due à l'arrivée des photons sur un miroir est sujette à des fluctuations de sorte que les miroirs après leur recul garderaient un petit mouvement d'agitation susceptible de brouiller les interférences. Mais avec une onde transportant de très nombreux photons, les fluctuations pourraient être très faibles en valeur relative et l'inertie des miroirs et de leurs ressorts pourrait être assez grande pour qu'après leur recul initial, les miroirs restent sensiblement immobiles.

*d. Sur le dispositif d'apodisation.* — Les physiciens qui cherchent à obtenir de bonnes images lumineuses des objets qu'ils étudient sont gênés par les effets de diffraction qui interviennent dans tous les instruments d'optique car ces effets ont pour conséquence de disperser la lumière autour de l'image prévue par l'optique géométrique. Pour cette raison, ils ont cherché à éliminer ou du moins à diminuer cette sorte de « pied » que présente la courbe de répartition des intensités autour de l'image de façon à obtenir, par un procédé dit « d'apodisation », une répartition plus concentrée des intensités lumineuses et, par suite, une image plus nette.

Sans entrer dans les détails de la théorie dont on trouvera un résumé très clair dans le traité d'Optique de Bruhat réédité par M. Kastler <sup>(1)</sup>, nous voulons

---

(1) Masson, Paris, 1954, p. 242 et ss.

rappeler le principe de la méthode d'apodisation. Considérons un instrument d'optique comportant une ouverture, par exemple de forme circulaire. Sans apodisation, la lumière incidente aura la même intensité sur toute l'ouverture et le principe d'Huyghens joint à la formule d'inversion de Fourier permet de calculer la forme de l'image avec son pied gênant. Mais plaçons sur l'ouverture du côté de l'onde incidente une lame

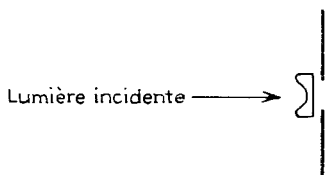


Fig. 5.

absorbante d'épaisseur variable, par exemple plus épaisse sur les bords qu'au milieu. Alors sur l'ouverture, l'intensité lumineuse ne sera plus uniforme : elle sera plus grande au centre que sur les bords. Dans ces conditions, la théorie prévoit et l'expérience vérifie que la figure de diffraction peut se trouver resserrée et qu'on peut ainsi obtenir une image améliorée par apodisation.

Or, il me paraît certain (et l'expérience serait sans doute facile à faire) que l'image apodisée serait obtenue sans modification si, au lieu d'utiliser une source de lumière intense, on utilisait une source très faible, si faible que les photons avec leurs trains d'ondes individuels n'arriveraient que un par un sur l'ouverture de l'appareil. Réfléchissons un peu sur ce qui se passe-

rait. Tous les photons qui passeraient par l'ouverture et qui iraient contribuer à former l'image auraient traversé la lame absorbante (ceux qui seraient absorbés dans cette lame ne nous intéressent pas) et cependant ces photons qui n'ont pas subi l'absorption photonique discontinue dans la lame ne se répartiraient plus de la même manière dans le plan image qu'en l'absence d'apodisation. Cela paraît bien nous imposer d'admettre que « quelque chose » qui accompagne le photon et qui influe sur son mouvement a été absorbé dans la lame par un processus continu *et non pas par l'absorption photonique discontinue seule prise en considération dans les théories actuelles*. Or ce « quelque chose » ne peut être que le train d'ondes  $\nu$  qui porte et guide le photon et l'absorption non photonique de ce train d'ondes dans la lame absorbante a le caractère continu de l'absorption classique des ondes électromagnétiques. Il y a là, me semble-t-il, un très fort argument en faveur de l'idée qu'en théorie de la double solution, l'onde  $\nu$  qui porte le photon doit être une onde électromagnétique du type classique, mais de très faible amplitude.

Cette conception de l'onde porteuse d'un photon conduit à penser que, si la presque totalité de l'énergie du train d'ondes électromagnétique est certainement concentrée à l'intérieur du photon, il est néanmoins possible qu'une très petite fraction de cette énergie soit répartie dans toute l'étendue du train d'ondes  $\nu$ . On peut alors se demander si une diminution suffisamment importante de l'énergie de l'onde  $\nu$  n'obligerait

pas le photon à céder au train d'ondes qui lui sert de support une petite fraction de son énergie interne avec naturellement une diminution de sa fréquence comme l'exige la relation  $W = h\nu$ . Il serait donc très intéressant d'examiner expérimentalement si des photons qui ont réussi à traverser un milieu très absorbant ou une série de milieux assez absorbants ne subissent pas une petite diminution de fréquence. Si cet effet existait réellement, peut-être permettrait-il d'expliquer le déplacement vers le rouge de la fréquence de la lumière qui nous parvient de nébuleuses très lointaines sans avoir recours à l'hypothèse de l'expansion de l'Univers.

**4. Problèmes non résolus.** — Les remarques que nous venons de faire dans les précédents paragraphes nous conduisent à nous demander si la représentation de la propagation des ondes par des équations linéaires, bien que très utile et très suffisante dans un grand nombre de problèmes, nous donne bien une image complète de la réalité physique. Si un train d'ondes « vide », c'est-à-dire ne transportant aucune particule, a peut-être, comme le suggère la théorie linéaire, une tendance à s'étaler et à s'évanouir, en est-il de même d'un train d'ondes qui porte une particule? N'y aurait-il pas dans ce cas quelque chose qui empêcherait le train d'ondes de s'étaler et lui maintiendrait une forme constante? Pour que cela soit possible, ne faudrait-il pas introduire dans les équations de propagation de l'onde  $\nu$  des termes non linéaires qui seraient négligeables dans presque toute l'étendue du train d'ondes,

mais qui interviendraient d'une façon importante sur les bords du train d'ondes et dans la très petite région de haute amplitude qui constitue la particule, donnant ainsi à l'ensemble formé par la particule et l'onde une cohésion dont une théorie linéaire ne peut pas rendre compte?

Il est facile de comprendre que des termes non linéaires insensibles dans le corps du train d'ondes deviennent essentiels dans la région de haute amplitude qu'est la particule. Ces termes assureraient la liaison entre la particule et son onde et pourraient peut-être expliquer comment la particule peut céder de l'énergie à l'onde quand l'amplitude de celle-ci devient trop faible. Si les termes non linéaires dépendaient des dérivées de la fonction d'onde, on pourrait comprendre qu'ils disparaissent dans le corps du train d'ondes, mais reparaissent sur ses bords supposés suffisamment abrupts.

On peut donner un argument assez fort en faveur de l'idée que l'extension des trains d'onde au cours de leur propagation telle qu'elle résulte des équations de propagation linéaires ne doit pas être exacte. Cet argument, c'est le caractère paradoxal du résultat que l'on obtient en calculant l'extension progressive d'un train d'ondes en Mécanique ondulatoire. Tandis que pour des particules de vitesse égale ou presque égale à  $c$  (photons) les trains d'ondes calculées par la théorie linéaire usuelle n'ont pas tendance à s'allonger, il n'en est pas du tout de même pour des particules de vitesse plus faible. Un calcul fait par M. Bohm montre

que, si le train d'ondes d'une particule de masse  $m$  a à l'instant 0 une longueur  $\Delta x_0$ , il aura à l'instant  $t$  une longueur  $\Delta x$  donnée, à l'approximation non relativiste par

$$(9) \quad \Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 (\Delta x_0)^2}},$$

ce qui, au bout d'un temps  $t$  très court, peut s'écrire <sup>(1)</sup>

$$(10) \quad \Delta x = \frac{\hbar}{m \Delta x_0} t.$$

Cette formule traduit un éparpillement des composantes du train d'ondes qui se propagent avec des vitesses différentes, ce qui entraîne une désorganisation du train d'ondes.

Appliquons cette formule à un électron de masse  $m \simeq 10^{-27}$  g. Comme nous l'avons déjà dit, la longueur du train d'ondes d'un électron émis dans un laboratoire par un canon à électrons est de l'ordre du micron. Or, considérons un électron qui, émis à la surface du Soleil, arriverait sur la Terre. La distance Soleil-Terre étant de l'ordre de 8 minutes de lumière, si la vitesse de l'électron est environ égale à 1/10 de la vitesse  $c$ , soit environ  $3 \cdot 10^9$  cm/s, l'électron mettra environ  $80 \text{ mn} = 4800 \text{ s}$  pour aller du Soleil à la Terre. Comme  $\frac{\hbar}{m}$  est pour un électron de l'ordre de 1, on

<sup>(1)</sup> D. BOHM, *Quantum Theory*, Prentice Hall, New York, 1951, p. 73.

Voir aussi SOMMERFELD, *Wellenmechanik*, éd. 1961, chap. III, § 1.

trouve avec  $\Delta x_0 \simeq 10^{-4}$  cm,

$$(11) \quad \Delta x \simeq \frac{4\,800}{10^{-4}} \simeq 5 \cdot 10^6 \text{ cm} = 50 \text{ km}.$$

Le train d'ondes à son arrivée sur la Terre aurait donc une longueur de l'ordre de 50 km, c'est-à-dire serait devenu pendant le trajet environ 50 milliards de fois plus grand !

Ce résultat est surprenant. Les partisans des interprétations actuelles diront que cela signifie simplement que l'incertitude sur la position de l'électron qui était de  $10^{-4}$  cm au départ a augmenté énormément pendant la durée du trajet. En effet, pour eux, le train d'ondes n'est que la représentation d'une probabilité de présence. Mais je crois que la question est plus grave. En réalité, la longueur du train d'ondes est une grandeur mesurable qui correspond à des possibilités d'interférences dans des conditions données : elle constitue une propriété physique de l'électron. Je pense que, si l'on pouvait mesurer cette grandeur physique pour un électron ayant accompli un très long trajet, on lui trouverait sensiblement la même valeur, de l'ordre du micron, qu'on lui aurait trouvé au moment de son émission.

Bien que quelques tentatives intéressantes aient été faites pour étudier des équations d'ondes non linéaires assurant la conservation des trains d'ondes, notamment par M. Georges Lochak <sup>(1)</sup>, peu de résultats ont encore été obtenus dans cette direction. Il y a dans le domaine que nous venons seulement d'effleurer tout un ensemble

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 1986 et 2146.



de problèmes très difficiles dont la solution ne pourra progresser que lentement. J'ai cru cependant devoir les indiquer parce que je pense que, pour développer notre conception de la coexistence des ondes et des particules, on sera très probablement amené à les envisager.

*Note au sujet du paragraphe 2. b.* — Dans un mémoire célèbre, Einstein, Rosen et Podolsky ont contesté certaines affirmations usuelles en Mécanique quantique en partant du postulat suivant (postulat E. R. P.) dont l'exactitude paraît évidente : « Si l'on peut, sans troubler en aucune façon l'état d'un système, prédire avec certitude le résultat de la mesure d'une grandeur sur ce système, alors il existe un élément de réalité correspondant à cette grandeur ». Divers auteurs ont cru pouvoir mettre en défaut ce postulat en s'appuyant sur la mesure du spin. En effet, pour eux, dans le problème examiné au paragraphe 2. b, si l'on mesure la composante  $\sigma_x$  du spin sur celui des deux trains d'ondes où  $\sigma_z = +\frac{\hbar}{2}$ , le fait de trouver  $\sigma_x = \frac{\hbar}{2}$  impliquerait que pour l'autre train d'ondes une mesure de  $\sigma_x$  donnerait nécessairement  $\sigma_x = -\frac{\hbar}{2}$ . Ils en concluent que cela contredit le postulat E. R. P. car dans le deuxième train d'ondes où  $\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}$ ,  $\sigma_x$  n'a pas avant la mesure de valeur définie et n'est donc pas un élément de réalité. L'argument ainsi opposé au postulat E. R. P. ne nous paraît pas valable parce que les mesures de  $\sigma_x$  sur les trains d'ondes  $\sigma_z = \frac{\hbar}{2}$  et  $\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}$  sont totalement indépendantes après la séparation très rapide des trains d'ondes. La mesure de  $\sigma_x$  sur l'un des trains d'ondes ne nous donne, après leur séparation, aucune indication sur la valeur que fournirait une mesure de  $\sigma_x$  sur l'autre train d'ondes. Le postulat E. R. P. n'est donc pas applicable et ne se trouve aucunement contredit. C'est toujours en considérant des ondes planes monochromatiques au lieu de considérer des trains d'ondes limités que l'on arrive à des conclusions inexactes.

## CHAPITRE VI

# LA DYNAMIQUE DU GUIDAGE DANS UN MILIEU RÉFRINGENT ET DISPERSIF ET LA THÉORIE DES ANTIPARTICULES <sup>(1)</sup>

1. **Théorie générale.** — Dans les chapitres précédents nous avons toujours supposé que la propagation de l'onde s'opère dans un milieu qui ne possède pas les propriétés d'un milieu réfringent et dispersif. Je me propose maintenant d'étudier le mouvement d'une particule dans son onde quand la propagation de celle-ci s'opère dans un milieu réfringent et dispersif en insistant sur le cas particulièrement intéressant où la vitesse de groupe est en sens inverse de la vitesse de phase.

Soit un train d'ondes sensiblement monochromatique de fréquence centrale  $\nu$  et de longueur d'ondes correspondante  $\lambda$ .  $V$  étant la vitesse de phase et  $n$  l'indice de réfraction, on a les relations  $n = \frac{c}{V}$  et  $\nu = \frac{V}{\lambda}$ . Avec

---

<sup>(1)</sup> Voir [4], f.

les notations précédemment utilisées, nous écrirons l'onde sous la forme  $a e^{i\varphi}$ , avec

$$(1) \quad \varphi = h\nu t - \vec{k} \cdot \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{h}{\lambda} \vec{n},$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unité définissant la direction de propagation. Quand au mouvement de la particule, il est défini par sa vitesse  $\vec{v}$ , son énergie  $W$  et sa quantité de mouvement  $\vec{p}$ . Quand la vitesse  $\vec{v}$  est dirigée dans le sens de la propagation de l'onde, nous savons que l'on peut poser  $\vec{p} = \vec{k} = \frac{h}{\lambda} \vec{n}$ . Mais dans le cas où la vitesse  $\vec{v}$ , par suite de la dispersion, se trouve dirigée en sens de la propagation de l'onde, nous serons amenés à écrire

$$(2) \quad \vec{p} = -\vec{k} = -\frac{h}{\lambda} \vec{n}.$$

D'où la conclusion remarquable qu'alors la formule classique  $p = \frac{h}{\lambda}$  doit être remplacée par  $p = -\frac{h}{\lambda}$ . Cela s'explique aisément en remarquant que le vecteur de propagation  $\vec{k}$  étant toujours dirigé dans le sens de la propagation de l'onde, la vitesse  $\vec{v}$  et la quantité de mouvement  $\vec{p}$  de la particule sont alors dirigées dans le sens contraire. On doit alors également écrire la formule du guidage sous la forme

$$(3) \quad \vec{p} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

au lieu de  $\vec{p} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ .

Remarquons maintenant que la vitesse  $v$  de la particule, donc de l'énergie, doit coïncider avec la vitesse de groupe définie par la formule de Rayleigh

$$(4) \quad \frac{1}{v} = \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial v} = \frac{1}{c} \frac{\partial (nv)}{\partial v}$$

qui peut s'écrire  $v = \frac{\partial W}{\partial k}$ , ce qui, quand on a  $v > 0$ , et  $\vec{p} = \vec{k}$ , se confond avec la formule  $v = \frac{\partial W}{\partial p}$  bien connue dans la théorie des équations de Hamilton.

Je vais maintenant introduire une hypothèse que j'avais déjà introduite en 1926 dans la note finale de mon article intitulé *Parallélisme entre la Dynamique du point matériel et l'optique géométrique* <sup>(1)</sup>. Elle consiste à admettre que, dans un milieu réfringent dispersif, le mouvement de la particule s'effectue comme si elle était soumise à un potentiel traduisant la réaction que le milieu exerce sur elle, potentiel défini par

$$(5) \quad P = W \left( 1 - n \frac{\partial (nv)}{\partial v} \right) = W \left( 1 - \frac{c^2}{vV} \right).$$

On a alors pour la phase  $\varphi$  de l'onde, la direction de propagation étant prise pour axe de  $x$ ,

$$(6) \quad d\varphi = W dt - k dx,$$

avec

$$(7) \quad k = \frac{W - P}{c^2} \quad v = \frac{h}{\lambda}.$$

---

(1) *J. Physique*, séries VI et VII, 1926, p. 1-6.

Or, nous l'avons vu, dans la théorie du guidage de la particule par son onde, le principe fondamental est que la phase interne  $\varphi_i$  de la particule doit toujours coïncider avec la phase  $\varphi$  de l'onde qui la porte, c'est-à-dire que l'on doit avoir  $\varphi_i = (\varphi)_{x=vt}$ . Donc

$$(8) \quad d\varphi_i = (d\varphi)_{x=vt} = (W - kv) dt = \left[ W - \frac{W - P}{c^2} v^2 \right] dt,$$

ce qui, compte tenu de (5), nous donne

$$(9) \quad \frac{1}{h} d\varphi_i = \frac{W}{h} \left( 1 - \frac{v}{V} \right) dt = 2\pi\nu \left( 1 - \frac{v}{V} \right) dt.$$

Remarquons en passant que, dans le cas du vide où  $v = v_0$ , on a  $P = 0$  et  $n = \frac{c}{V} = \frac{c_0}{c} = \beta$ , formule bien connue depuis longtemps. Alors

$$(10) \quad \frac{1}{h} d\varphi_i = \frac{W}{h} (1 - \beta^2) dt = 2\pi\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

formule qui exprime, comme nous le savions, que la vibration interne de la particule subit le ralentissement des horloges relativistes. Nous retrouvons donc les résultats que nous avons trouvés précédemment, mais nous devons remarquer qu'avec les définitions adoptées, l'absence de réfraction dans la propagation de l'onde s'exprime par la formule

$$(11) \quad n = \beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}$$

et non par  $n = 1$ .

Revenons maintenant à la formule (9). Elle peut s'interpréter en faisant intervenir l'effet Doppler. Comme nous comptons la vitesse  $v$  de la particule dans le sens de la propagation de l'onde dans le système de référence où la particule a la vitesse  $v$ , la théorie relativiste de l'effet Doppler nous apprend que, dans le système de référence où la particule est immobile, la fréquence de l'onde est

$$(12) \quad \nu = \nu_0 \frac{1 - \frac{v}{V}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$(13) \quad \frac{1}{\hbar} d\varphi_i = 2\pi\nu_0 dt_0 = 2\pi\nu \left(1 - \frac{v}{V}\right) dt,$$

car  $dt_0 = dt\sqrt{1 - \beta^2}$ . Or, la formule (13) est identique à la formule (9) et cela nous explique pourquoi la coïncidence des phases  $\varphi$  et  $\varphi_i$  nous a conduit à la formule (9).

D'ailleurs, inversement, en admettant la coïncidence des phases de l'onde et de la particule et en tenant compte de l'effet Doppler, on peut partir de la formule (12) et remonter à la formule (5), ce qui justifie la forme adoptée pour P.

**2. La masse propre modifiée.** — Dans la Dynamique du guidage d'une particule dans un milieu réfringent dispersif, on peut introduire une masse propre modifiée  $m_0^*$  différente de la masse propre habituelle  $m_0$ .

Nous le ferons de la façon suivante. Nous partons des formules valables pour  $\nu > 0$ .

$$(14) \quad W = \frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + P; \quad \vec{p} = \frac{m_0^* \vec{\nu}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \vec{k} = \frac{W-P}{c^2} \vec{\nu}.$$

Puis, en admettant que la masse propre modifiée doit être positive même si  $\nu < 0$ , nous poserons

$$(15) \quad \vec{p} = \vec{k} = \frac{1}{\lambda} \vec{n} \quad \text{si } \nu > 0; \quad \vec{p} = -\vec{k} = -\frac{1}{\lambda} \vec{n} \quad \text{si } \nu < 0.$$

La seconde formule (15) se justifie aisément car  $\vec{k}$  est un vecteur dirigé suivant la propagation de l'onde tandis que  $\vec{p}$  est dirigé suivant le mouvement du corpuscule, c'est-à-dire en sens inverse de  $\vec{k}$ .

De (15), nous tirons aisément

$$(16) \quad \frac{m_0^*}{\sqrt{1-\beta^2}} = \pm \frac{W-P}{c^2}.$$

et de là, d'après (5),

$$(17) \quad m_0^* = \pm \frac{W}{\nu V} \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{c^2}}.$$

Dans les formules (16) et (17), on doit prendre le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que la vitesse est supérieure ou inférieure à 0.

Dans le vide où  $\nu = \nu_0 = \frac{c^2}{V}$  et où  $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , on a par (17)  $m_0^* = m_0$  comme on devait s'y attendre.

En posant  $m^* = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , on peut écrire la formule (17) sous les formes suivantes. Dans le cas où  $\nu > 0$  et  $p = \frac{h}{\lambda}$ , on a

$$m^* = \frac{h}{\nu \lambda} = \frac{h\nu}{\nu V} = \frac{k}{\nu} > 0$$

et, dans le cas où  $\nu < 0$  et  $p = -\frac{h}{\lambda}$ , on a

$$m^* = -\frac{h}{\nu \lambda} = -\frac{h\nu}{\nu V} = \frac{k}{|\nu|} > 0,$$

ce qui permet d'écrire la formule générale

$$(17 \text{ bis}) \quad m^* = \frac{k}{h} \left| \frac{dk}{d\nu} \right|.$$

D'après nos définitions, la masse propre modifiée est donc toujours positive. Il faut faire ici une remarque essentielle. Si la particule est soumise à un champ extérieur qui dans le vide aurait pour effet de l'accélérer, *l'action de ce champ s'exerce en réalité sur la propagation de l'onde* puisque le potentiel dont il dérive figure dans l'équation de propagation de l'onde. Le mouvement de la particule n'est pas directement déterminé par l'action du champ, mais par le fait qu'elle doit se déplacer de façon que sa vibration interne reste en phase avec celle de l'onde. Si l'action du champ extérieur fait croître le vecteur  $\vec{k}$ , il en résultera dans le cas  $\nu < 0$  qu'elle fera croître la quantité de mouvement  $\vec{p} = -\vec{k}$  dans le sens opposé à la propagation



de l'onde. Tout se passera donc comme si la particule de masse propre  $m_0^*$  était soumise à l'action d'un champ inverse de celui qui s'exerce réellement. Si le champ appliqué est un champ électrique et si la particule a une charge électrique  $\varepsilon$ , cette particule se comportera donc comme une particule de masse positive  $m_0^*$ , mais de charge électrique  $-\varepsilon$ .

**3. Comparaison avec la théorie des antiparticules.** — Ce que nous venons de dire rend évident que la théorie exposée ci-dessus qui repose essentiellement sur la formule (4) de Rayleigh présente une grande analogie avec la théorie des antiparticules et c'est là un point important qui mérite d'être précisé <sup>(1)</sup>.

La théorie des antiparticules est apparue d'abord en Physique théorique pour l'interprétation de la production des paires électron-positon sous la forme de la théorie des « trous » de Dirac. Dans cette théorie, on admet qu'il existe dans le vide un océan d'électrons cachés de charge électrique  $-e$  et d'énergie négative  $-m_0c^2$ . L'apport par un agent extérieur d'une énergie  $2m_0c^2$  entraînerait l'arrachement d'un de ces électrons au milieu caché où il se trouvait, milieu qu'il est évidemment tentant d'assimiler au milieu subquantique dont nous avons parlé précédemment, et son apparition au niveau microphysique observable sous forme d'un électron « normal » d'énergie  $m_0c^2$ . Il en

---

<sup>(1)</sup> Nous n'insisterons pas ici sur les applications possibles des mêmes idées à la théorie des semi-conducteurs.

résulterait un « trou » dans l'océan des électrons caché à énergie négative et c'est ce trou qui se manifesterait à nous à l'échelle microphysique observable sous la forme d'une antiparticule de masse propre positive  $m_0$  et de charge positive  $+e$  qui serait le positon.

Bien que cette théorie des trous ait rendu de grands services, elle ne paraît pas bien claire et n'est peut-être pas bien en accord avec la conservation de l'énergie; en effet, dans l'état initial nous avons une particule d'énergie  $-m_0c^2$  et dans l'état final deux particules d'énergie propre totale  $2m_0c^2$ , ce qui correspond à une augmentation d'énergie de  $3m_0c^2$ , alors qu'il n'y a eu qu'un apport extérieur d'énergie égal à  $2m_0c^2$ .

Nous allons maintenant proposer une théorie différente de la création des couples particule-antiparticule reposant sur l'idée que l'antiparticule est une particule qui se déplace dans son onde en sens inverse de la propagation de celle-ci. En d'autres termes, nous admettons que, lors de l'apparition au niveau observable d'un couple particule-antiparticule, l'un des constituants du couple est une particule normale qui se déplace dans son onde en sens inverse de la propagation de celle-ci. En d'autres termes, nous admettons que, lors de l'apparition au niveau observable d'un couple particule-antiparticule, l'un des constituants du couple est une particule normale dont l'onde se propage avec un indice de réfraction

$$(18) \quad n = \beta = \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}}$$

tandis que l'autre constituant, l'antiparticule, serait porté par une onde dont l'indice de réfraction  $n(\nu)$  serait tel que, d'après la formule (4) de Rayleigh, cette antiparticule se déplace en sens inverse de la propagation de son onde. La particule normale, pour laquelle le potentiel  $P$  serait nul, serait en quelque sorte détachée du milieu subquantique (aux perturbations d'origine subquantique près), tandis que l'antiparticule, bien que décelable au niveau microphysique observable, resterait plus intimement reliée au milieu subquantique par un potentiel  $P$ .

Pour développer cette théorie, nous remarquerons d'abord, comme on le fait dans toutes les théories reposant sur des équations d'ondes relativistes, que la relation

$$\frac{(W - P)^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2$$

conduit à écrire

$$(19) \quad W - P = \pm c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2},$$

où le double signe qui figure au second membre constitue une difficulté bien connue.

Or, il nous paraît nécessaire d'admettre d'abord, en accord avec la théorie des trous, que l'énergie propre d'une particule est négative dans le milieu caché. Pour cette raison, en admettant que le milieu caché contient une infinité de particules de masse propre  $m_0^* = -m_0$ , nous envisageons les deux solutions sui-

vantes de l'équation (19) correspondant respectivement à une particule et à une antiparticule :

*a.* La solution normale  $P = 0$  avec  $m_0^* = m_0$  et  $v = v_0$ ;

*b.* La solution anormale  $P = 2 W$  qui correspond, d'après (5), aux relations

$$n \frac{\partial(nv)}{\partial v} = -1, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{v} = \frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial v} = -\frac{V}{c^2} = -\frac{1}{v_0}$$

et l'on a alors

$$(20) \left\{ \begin{aligned} W &= \frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + P = -\frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \\ \vec{k} &= \frac{W - P}{c^2} \vec{v}_0 = -\frac{m_0^* \vec{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{m_0 \vec{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \\ \vec{p} &= -\vec{k} = -\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right.$$

L'antiparticule apparaît donc au niveau microphysique observable comme ayant une masse propre positive  $m_0$ , une vitesse  $\vec{v}_0$  en sens inverse de la propagation de l'onde et, d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, une charge électrique égale et opposée à celle de la particule. C'est bien là ce qu'il fallait obtenir.

**4. Introduction de la Thermodynamique cachée des particules.** — Nous rappellerons quelques points de la Thermodynamique cachée des particules qui a été étudiée au chapitre IV. Si une particule de masse propre  $m_0$  est portée par un train d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique, l'entropie définie par la Thermodynamique cachée est égale à  $-k$ . Mais, si le thermostat caché fournit à la particule une quantité d'énergie  $Q$  (sous forme de chaleur cachée) qui porte son énergie propre à la valeur  $M_0 c^2 = m_0 c^2 + Q$ , l'entropie devient  $S = -k \frac{M_0 c^2}{m_0 c^2}$ ,  $k$  étant toujours la constante de Boltzmann. Dans la théorie de la double solution,  $Q$  apparaît sous la forme d'un « potentiel quantique » inconnu des théories anciennes. La variation de l'entropie est donc fournie par la formule

$$(21) \quad \delta S = -k \frac{Q}{m_0 c^2}.$$

Ceci rappelé, admettons comme plus haut que dans le milieu subquantique, les particules ont des énergies au repos  $-m_0 c^2$ . Lorsque des particules du milieu microphysique observable avec une énergie  $2m_0 c^2$  en s'annihilant, une particule du milieu subquantique pourra émerger au niveau microphysique observable avec une énergie au repos égale à  $-m_0 c^2 + 2m_0 c^2 = m_0 c^2$ . Mais, comme l'exige d'ailleurs la conservation de la charge, il devra aussi émerger une antiparticule d'énergie au repos  $m_0 c^2$ , ce qui

oblige le milieu subquantique à fournir l'énergie  $2m_0c^2$  à une particule jusqu'alors cachée avec l'énergie  $-m_0c^2$ . La conservation de l'énergie se trouve alors correctement satisfaite, mais d'après la formule (21), ce processus entraîne une baisse de l'entropie égale à  $2k$ . C'est la fourniture d'énergie par le milieu subquantique à l'antiparticule qui se traduit par l'intervention du potentiel  $P$  qui figure dans les équations (20). On comprend alors que l'antiparticule soit *instable* parce que son apparition correspond à une baisse  $\partial S = -2k$  de l'entropie. Il en résulte que si une particule et une antiparticule se rencontrent, elles auront une tendance à s'annihiler en donnant naissance à deux particules normales d'énergie propre totale  $2m_0c^2$  avec une augmentation d'entropie égale à  $2k$ .

Précisons que le potentiel  $P$  défini dans le premier paragraphe de ce chapitre n'est pas un potentiel quantique parce qu'il ne fait pas intervenir le milieu subquantique, mais qu'il résulte seulement de l'action sur la propagation de l'onde du milieu traversé. C'est par exemple ce qui a lieu dans les cas suivants : propagation de la lumière dans un milieu dispersif, propagation d'une onde électromagnétique hertzienne d'hyperfréquence dans un tube à onde progressive le long d'une ligne à retard (appareils à ondes directes ou à ondes inverses, carcinotrons, etc.), propagation de l'onde d'un électron dans un solide (théorie des semi-conducteurs), etc.

Mais le potentiel  $P = Q$  envisagé dans les deux derniers paragraphes peut, lui, être assimilé à un potentiel

quantique parce qu'il traduit une interaction avec le milieu subquantique. On doit donc pouvoir le définir par la formule générale de définition du potentiel quantique

$$(22) \quad Q = M_0 c^2 - m_0 c^2$$

qui donne, puisque  $m_0^* = -m_0$  et que  $Q = 2m_0 c^2$ ,  $M_0 = m_0$ . On a donc pour l'énergie et la quantité de mouvement de l'antiparticule

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} W_0 &= \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ \vec{p} &= \frac{M_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = - \frac{m_0 \vec{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = -\vec{k}. \end{aligned} \right.$$

La valeur obtenue pour  $\vec{p}$  correspond bien à un mouvement de corpuscule avec la vitesse  $\vec{v} = -\vec{v}_0$  en sens inverse de la propagation de l'onde, ce qui est satisfaisant.

Il serait assurément prématuré de vouloir dès maintenant préciser la nature du milieu subquantique. Cependant, en relation avec le problème que nous venons d'étudier, on pourrait essayer de se représenter le milieu subquantique comme renfermant un nombre énorme de particules à énergie négative entre lesquelles existerait une énergie potentielle  $\mathcal{R}$  si grande que l'énergie totale du milieu subquantique

$W_0 = \mathcal{E} - \sum_i m_{0i} c^2$  soit positive. L'émission simultanée d'une particule et d'une antiparticule augmenterait alors  $W_0$  de  $2m_0 c^2$ , mais simultanément  $\mathcal{E}$  devrait diminuer de  $\delta\mathcal{E} = -4m_0 c^2$  de façon qu'il y ait fourniture de l'énergie  $2m_0 c^2$  par le milieu subquantique à l'antiparticule.

Sans insister davantage sur la théorie des antiparticules, nous croyons pouvoir dire que l'ensemble des idées exposées dans ce chapitre ouvre des perspectives nouvelles qu'il serait intéressant d'approfondir davantage <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Voir à ce sujet *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série B, 1970, p. 549.



## CHAPITRE VII

### AUTRES APPLICATIONS DES IDÉES PRÉCÉDEMMENT DÉVELOPPÉES

1. Sur la relation  $\oint \vec{p} d\vec{s} = nh$  de l'ancienne théorie des quanta et la théorie de la double solution (1). — Considérons, par exemple dans un atome d'hydrogène, un état stationnaire dont la fonction d'onde a la forme

$$(1) \quad \psi = \frac{\Psi}{C} = a(x, y, z) e^{\frac{i}{\hbar} [Wt - \varphi_1(x, y, z)]}.$$

Ce qui caractérise une onde stationnaire, c'est que son amplitude ne dépend pas du temps et que sa phase est linéaire en  $t$ .

La connaissance de la fonction  $\varphi_1$  nous permet de tracer en chaque point de l'atome le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_1$  et, par suite, si nous partons d'une position initiale  $P$  supposée donnée de l'électron, nous pourrions en

---

(1) Nous faisons ici abstraction des perturbations subquantiques.

principe tracer de proche en proche toute la trajectoire de guidage qui part de P.

Supposons maintenant que la trajectoire de guidage en question soit fermée, c'est-à-dire que partie de P, elle revienne en P. Comme la fonction d'onde doit être uniforme, donc avoir une valeur bien déterminée en chaque point, on doit avoir

$$(2) \quad \frac{2\pi}{h} \oint \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_1 \cdot d\vec{s} = n 2\pi,$$

avec  $n$  entier positif ou négatif,  $ds$  étant un élément de la trajectoire de guidage. Mais la théorie du guidage nous dit que la quantité de mouvement en chaque point de sa trajectoire  $\vec{p}$  est égale à  $-\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_1$ . La formule (2) peut donc s'écrire

$$(3) \quad \oint \vec{p} \cdot d\vec{s} = nh,$$

ce qui est la formule définissant les trajectoires fermées stables de l'ancienne théorie des quanta.

Mais il serait tout à fait faux d'en conclure que l'ancienne théorie des quanta de Bohr-Sommerfeld est exacte. En effet, les mouvements et les trajectoires considérés dans cette ancienne théorie des quanta étaient calculés à l'aide de la Mécanique corpusculaire classique (newtonienne chez Bohr, relativiste einsteinienne chez Sommerfeld). Or, ici les mouvements et les trajectoires doivent être calculés à l'aide de la Mécanique ondulatoire et de la théorie du guidage.

Diverses remarques permettent de préciser ce fait. Par exemple, dans la théorie primitive de l'atome d'hydrogène de Bohr, les trajectoires circulaires sont des grands cercles de la sphère centrés sur le noyau de l'atome tandis que dans la théorie de la double solution, on obtient comme trajectoires de guidage des petits cercles de cette sphère centrés sur un axe Oz avec  $\frac{2\pi}{h}\varphi_1 = \pm m\alpha$ , où  $\alpha$  est l'azimut autour de l'axe de symétrie Oz et la formule (3) est exacte pour ces trajectoires de guidage. On doit aussi noter que pour les états complètement stationnaires, c'est-à-dire ceux pour lesquels  $\varphi_1$  se réduit à une constante, la trajectoire de guidage se réduit à un point et que, dans ce cas, la formule (3) reste exacte en prenant  $n = 0$ , valeur de  $n$  qui était exclue dans l'ancienne théorie des quanta où  $n$  devait être un nombre entier supérieur à 0. Pourquoi pouvons-nous trouver ici des trajectoires réduites à un point? C'est parce que dans l'ancienne théorie des quanta, l'électron dans l'atome d'hydrogène était seulement soumis à la force coulombienne dirigée vers le noyau et que cette force ne pouvait être équilibrée que par la force centrifuge résultant du mouvement de l'électron, ce qui excluait que l'électron pût rester immobile. Mais il n'en est pas de même dans la théorie du guidage où l'électron est soumis à l'action du potentiel quantique et où, comme je l'ai montré il y a longtemps <sup>(1)</sup>, l'électron peut rester immobile

---

(<sup>1</sup>) Voir [4], a, p. 119 et ss.

quand la force quantique équilibre la force coulombienne, ce qui a lieu précisément dans les états complètement stationnaires.

Le grand intérêt de ce qui précède me paraît être de faire voir que la théorie du guidage permet de retrouver, avec les modifications nécessaires indiquées plus haut, des formules analogues à celles qui servaient de bases à l'ancienne théorie des quanta et de retrouver aussi, convenablement transposé, le raisonnement qui m'avait permis dans ma Thèse d'interpréter ces formules.

**2. Sur une expérience récente de MM. Pfleegor et Mandel [11].** — Une belle expérience récente de Pfleegor et Mandel <sup>(1)</sup> a démontré que l'on peut déceler l'existence des franges d'interférences dues à la superposition des ondes émises par deux lasers indépendants dans des conditions telles qu'il n'y ait pratiquement jamais deux photons arrivant à la fois dans l'appareil d'interférences. L'interprétation de ce résultat avec les idées actuellement admises en Physique quantique est difficile comme on le voit en lisant les conclusions de l'article de Pfleegor et Mandel. Au contraire, elle nous semble très simple et très claire avec nos idées sur la coexistence des ondes et des particules.

En effet, quand on applique ces idées au cas particulier des ondes électromagnétiques et des photons, on est amené à considérer l'onde  $\nu$  des photons comme

---

(<sup>1</sup>) *Phys. Rev.*, vol. 159, n° 5, 1967, p. 1084.

une très faible onde électromagnétique obéissant très sensiblement aux équations de Maxwell comme nous l'avons expliqué dans notre livre *Ondes électromagnétiques et Photons* ([4], *d*). C'est cette circonstance qui explique, pensons-nous, que la théorie électromagnétique de Maxwell suffise à interpréter un très grand nombre de phénomènes bien qu'elle ignore l'existence, cependant certaine, des photons. En effet, suivant la loi du guidage, la répartition des photons dans l'espace et la phase de leur vibration interne se trouvent être entièrement en accord avec les prévisions de la théorie électromagnétique. Dans un champ d'interférences, la probabilité de la présence d'un photon en un point est donc proportionnelle au carré de l'amplitude (intensité) de l'onde  $\nu$  en ce point de sorte que la répartition statistique dans la région d'interférences d'un grand nombre de photons est bien celle que prévoit la théorie électromagnétique classique.

En utilisant ces conceptions, nous allons maintenant développer notre interprétation du résultat de l'expérience de Pilegor et Mandel. Pour nous, dans la cavité d'un laser, il s'établit par un processus quantique d'émission stimulée une onde électromagnétique  $\nu$  stationnaire sur laquelle des photons sont émis par certains atomes. La cavité a une partie de sa paroi qui est un peu semi-transparente. L'onde  $\nu$  intérieure filtre donc légèrement à l'extérieur pendant toute la durée de l'émission laser. S'il y a deux lasers indépendants disposés de façon que les ondes  $\nu$  qu'ils émettent aillent se superposer dans un appareil d'inter-

férences comme c'est le cas dans l'expérience étudiée, les franges d'interférences existent dans l'appareil même quand aucun photon ne vient permettre de les détecter. Il est d'ailleurs physiquement tout à fait évident que chaque photon arrivant dans la région d'interférences provient de l'un des lasers, celui où se trouve l'atome qui l'a émis par une transition stimulée.

Si les lasers émettent très peu de photons à l'extérieur, un photon sortira de temps en temps de l'un des lasers et arrivera isolément dans la région d'interférences. S'il y manifeste sa présence par une localisation observable, ce sera le plus souvent dans une région de grande amplitude *de la superposition des ondes  $\nu$  émises par les deux lasers*. En effet, dans la région d'interférences, le mouvement des photons est guidé par cette superposition et non pas par l'onde simple qui le portait à la sortie du laser où il est né.

Si, au bout d'un temps suffisamment long (à l'échelle de la durée très courte d'une impulsion laser), il arrive dans la région d'interférences un nombre suffisant de photons, provenant de l'un ou de l'autre laser, pour que l'on puisse détecter les franges d'interférences, ces photons se répartiront statistiquement dans cette région d'interférences proportionnellement aux intensités locales des ondes électromagnétiques  $\nu$ . Bien que les photons arrivent isolément les uns après les autres, on pourra donc finalement observer les franges d'interférences exactement pour la même raison qu'on peut les observer dans les expériences d'interférences ordinaires à très faible intensité du type Taylor. L'interpré-

tation du résultat expérimental de Pfleegor et Mandel nous paraît ainsi obtenue d'une façon qui nous semble très claire et très satisfaisante.

Il paraît important d'insister sur certains points de cette interprétation. Un photon provenant de l'un ou de l'autre laser et arrivé dans la région d'interférences est guidé, cela nous paraît physiquement certain, par la superposition des ondes émises par les deux lasers et c'est pour cette raison qu'il est impossible de savoir dans lequel des deux lasers il a pris naissance. Mais notre interprétation de cette impossibilité ne fait intervenir ni les relations d'incertitude d'Heisenberg, ni l'indiscernabilité des bosons qui, pour nous, n'est qu'une apparence résultant des perturbations aléatoires subies par les photons et n'implique pas une perte de personnalité <sup>(1)</sup>.

Une des erreurs commises dans les interprétations que l'on cherche actuellement à donner de ce genre de phénomènes nous paraît de parler d'interférences entre photons comme si les interférences étaient dues aux photons. On sait, en effet, depuis Fresnel, que les interférences sont un phénomène d'origine ondulatoire. Les interférences d'une onde électromagnétique  $\nu$  se produisent, selon nous, d'une façon classique, mais en raison de la très faible intensité de l'onde  $\nu$ , elles ne sont pas par elles-mêmes observables. Néanmoins, en raison du guidage du photon par la superposition des ondes  $\nu$  dans la région d'interférences, l'arrivée

---

(<sup>1</sup>) Voir à ce sujet le chapitre VIII.

d'un photon en un point de cette région est d'autant plus probable que l'amplitude de l'onde  $\nu$  est plus grande en ce point. C'est donc dans les régions de plus grande intensité de l'onde que les photons auront le plus de chance de produire des effets locaux observables tels qu'effet photoélectrique, noircissement local d'une plaque photographique, etc. En résumé, ce ne sont pas les photons, mais les ondes électromagnétiques  $\nu$  qui produisent les interférences; le rôle des photons, qui est essentiel, est seulement de permettre de détecter les interférences par la manière dont ils se répartissent statistiquement dans la région où ces interférences se produisent.

**3. Sur l'interprétation des relations d'incertitude.** — Nous allons étudier le sens que prennent les relations d'incertitude dans notre réinterprétation de la Mécanique ondulatoire qui admet la réalité physique de l'onde et la localisation permanente de la particule dans son onde.

Considérons d'abord une seule particule et son équation d'ondes. Si l'on admet que l'onde est une réalité physique, les variables  $x, y, z, t$  qui figurent dans son équation de propagation sont les variables d'espace et de temps qui n'ont aucun caractère aléatoire. Mais, si l'on admet aussi que la particule est constamment localisée dans son onde comme le suppose la théorie de la double solution, la particule a à chaque instant des coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  et ces coordonnées ont au cours du temps un caractère aléatoire car elles résultent



à chaque instant de la superposition d'un mouvement régulier de guidage et de perturbations aléatoires provenant d'un milieu subquantique. Nous pouvons écrire la première relation d'incertitude sous la forme

$$(4) \quad [\delta X]_i \cdot [\delta p_x]_f \geq h,$$

les deux autres ayant des formes analogues. Dans (4),  $[\delta X]_i$  est l'incertitude sur la valeur de la coordonnée  $X$  de la particule à l'instant initial avant toute mesure et  $[\delta p_x]_f$  est l'incertitude sur la valeur de la composante  $x$  de la quantité de mouvement dans l'état final quand on a effectué une mesure de  $p_x$  sans en connaître encore le résultat. Et naturellement, si  $\delta x$  désigne la longueur du train d'ondes initial dans le sens des  $x$ , on a dans cet état initial

$$(5) \quad \delta X = \delta x,$$

mais, dans cette formule,  $\delta X$  et  $\delta x$  ont des significations tout à fait différentes puisque  $\delta x$  est une longueur au sens usuel du mot tandis que  $\delta X$  est une incertitude sur la position de la particule.

Passons maintenant à la quatrième relation d'incertitude. Par analogie avec (4), nos conceptions nous amènent à écrire

$$(6) \quad [\delta T]_i \cdot [\delta E]_f \geq h,$$

où  $[\delta T]_i$  est l'incertitude sur l'époque où la particule dans son mouvement aléatoire occuperait une position donnée dans le train d'ondes initial et où  $[\delta E]_f$  est l'incertitude sur la valeur de l'énergie de la particule

après une mesure de cette énergie dont on ne connaît pas encore le résultat. On aura dans l'état initial la relation analogue à (5)

$$(7) \qquad \qquad \qquad \delta T = \delta t,$$

mais ici encore  $\delta T$  et  $\delta t$  ont des significations tout à fait différentes, car  $\delta t$  est un intervalle de temps au sens ordinaire du mot tandis que  $\delta T$  est l'incertitude sur l'époque où la particule est présente en un point donné de l'espace.

Comme  $\delta t$  est le temps que met le train d'ondes à passer en un point donné de l'espace, nous avons ainsi obtenu des interprétations précises et symétriques de quatre relations d'incertitude et nous avons donné à la quatrième relation d'incertitude un sens tout à fait analogue à celui de la relation classique en Optique  $\delta\nu \cdot \tau \simeq 1$ , où  $\delta\nu$  est la largeur spectrale d'un train d'ondes et  $\tau$  la durée de son passage en un point de l'espace.

Il paraît intéressant de souligner que, dans les relations d'incertitude écrites sous les formes (4) et (6), les grandeurs portant l'indice  $f$ , qui sont des incertitudes sur le résultat encore inconnu d'une mesure qui a été effectuée, peuvent être regardées comme des incertitudes *prévues* par le théoricien dans l'état initial avant toute mesure. Mais ce second point de vue, qui est conforme aux conceptions usuellement adoptées, ne doit pas conduire à rejeter l'idée que, dans l'état initial, les grandeurs non encore mesurées ont à chaque

instant une valeur bien déterminée, valeur qui peut n'avoir aucun rapport simple avec celle que va leur imposer le processus de mesure si on l'effectue.

Jusqu'ici nous avons envisagé le cas d'une seule particule. Pour un ensemble de particules, on introduit, depuis les travaux de Schrödinger en 1926, la propagation d'une onde associée au système dans son espace de configuration. Cette onde, évidemment fictive, obéit dans l'espace de configuration à une équation de propagation où figurent les *coordonnées*  $X_k$ ,  $Y_k$ ,  $Z_k$  des particules du système et le temps  $t$ . Ici donc on substitue dans l'équation de propagation aux variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  à caractère non aléatoire les coordonnées des particules du système qui, elles, ont un caractère aléatoire. On est ainsi amené par une pente naturelle, mais à tort nous semble-t-il, à considérer les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de l'équation d'ondes d'une particule comme des grandeurs aléatoires et je crois que le succès de la méthode de l'espace de configuration a ainsi beaucoup contribué à fausser l'interprétation de la Mécanique ondulatoire. D'ailleurs, comme Aharonov et Bohm l'ont montré <sup>(1)</sup>, le temps  $t$  qui figure dans l'équation de propagation dans l'espace de configuration est toujours la variable ordinaire de temps et n'a pas de caractère aléatoire, ce qui introduit une curieuse dissymétrie entre les variables d'espace et de temps dans l'espace de configuration. Nous pensons que cette dissymétrie provient de la nature à la fois appauvrie et statistique de la repré-

---

(1) *Phys. Rev.*, vol. 122, 1961, p. 1649.

sensation, que nous donne la méthode de l'espace de configuration, de la propagation réelle des ondes dans l'espace physique. Sans insister sur cette question qui sera étudiée dans le dernier chapitre du présent volume, nous allons donner une forme précise et symétrique des relations d'incertitude de l'espace de configuration.

Numérotant les particules à l'aide d'un indice  $k$ , nous écrirons les trois premières relations d'incertitude pour le  $k^{\text{ième}}$  particule dans l'espace de configuration sous la forme

$$(8) \quad [\delta X_k]_i \cdot [\delta p_{x_k}]_f \geq h,$$

les  $[\delta X_k]_i$  et les  $[\delta p_{x_k}]_f$  étant définies comme les  $[\delta X]_i$  et les  $[\delta p_x]_f$  dans (4).

Pour la quatrième relation d'incertitude, nous écrivons par analogie avec (6)

$$(9) \quad [\delta T]_i \cdot [\delta E]_f \geq h,$$

avec, dans l'état initial,

$$(10) \quad \delta T = \delta t,$$

où  $\delta T$  est l'incertitude sur l'époque où le point figuratif du système se trouve en un point donné de l'espace de configuration tandis que  $\delta t$  est la durée du passage de l'onde fictive en ce point. Ainsi l'interprétation précise et symétrique des relations d'incertitude que nous avons obtenue dans l'espace ordinaire se trouve étendue au cas de l'espace de configuration pour un ensemble de particules.

Bohr a donné de la relation  $\partial E \cdot \delta t \geq h$  pour une particule une interprétation tout à fait différente de la nôtre. Pour lui, si l'on effectue une mesure de l'énergie  $E$  d'une particule qui dure un temps  $\delta t$ , cette mesure ne pourrait faire connaître la valeur de  $E$  qu'avec une incertitude  $\partial E \geq \frac{h}{\delta t}$ . Avec Aharonov et Bohm, je pense que cette interprétation qui brise la symétrie entre les quatre relations d'incertitude est inexacte. Si Bohr l'a adoptée, c'est parce qu'il admettait que dans la relation  $\partial E \cdot \delta t \geq h$ ,  $t$  est le temps au sens usuel du mot, variable non aléatoire, tandis qu'il reconnaissait le caractère aléatoire des grandeurs  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  qu'on fait habituellement figurer dans les trois premières relations d'incertitude. L'erreur commise nous paraît provenir de la confusion entre les variables d'espace et de temps  $x, y, z, t$  non aléatoires et les grandeurs aléatoires  $X, Y, Z, T$  définies plus haut. Mais seule, nous semble-t-il, une théorie qui admet la localisation de la particule dans son onde peut permettre de bien distinguer les deux sortes de grandeur et, en rétablissant la symétrie en toutes les relations d'incertitude, d'en bien comprendre la véritable signification.

**4. Sur le paradoxe de Gibbs.** — Il existe en Thermodynamique classique une difficulté bien connue sous le nom de « paradoxe de Gibbs ». Rappelons-la sous une forme simple en considérant une enceinte de volume  $2V$  divisée en deux compartiments égaux par une cloison  $C$ . Dans l'un des compartiments se trouve

un gaz A formé de  $N$  molécules et dans l'autre un gaz B comprenant également  $N$  molécules, l'ensemble étant maintenu à une température uniforme  $T$ . Chacun des gaz occupant un volume  $V$ , la thermodynamique classique nous apprend que son entropie est de la forme  $S = k N \log V + \dots$ , les termes non écrits ne dépendant pas du volume. Si l'on retire la cloison C, l'entropie de chacun des deux gaz va croître de  $kN \log V$  à  $kN \log 2V$ , soit de  $kN \log 2$ . L'entropie totale du système croîtra donc de  $2kN \log 2$ . Cette augmentation de l'entropie est toute naturelle puisque la diffusion des deux gaz l'un dans l'autre est un phénomène irréversible provoquant une augmentation de l'entropie. Le paradoxe apparaît quand on suppose que les deux gaz A et B sont identiques car alors, quand on enlève la cloison C, il n'y a aucun phénomène de diffusion augmentant l'entropie. Si l'on suppose que les paramètres caractérisant la nature d'un gaz peuvent varier d'une façon continue, il y aurait une augmentation de l'entropie égale à  $2kN \log 2$  si les deux gaz sont infiniment peu différents et une variation nulle s'ils sont identiques. Bien que la nature d'un gaz ne puisse pas varier d'une façon continue, cette variation brusque ne semble pas naturelle : c'est le paradoxe de Gibbs.

Un paradoxe analogue existe dans la symétrisation des fonctions d'ondes des bosons. Soient deux bosons se déplaçant dans l'espace de façon que leurs ondes se superposent dans une même région. Alors, si les bosons sont de nature différente, il n'y a pas lieu de symétriser la fonction d'ondes dans l'espace de confi-

guration du système qu'ils forment. Mais, si les bosons sont de même nature, il faut symétriser. Ainsi, si l'on suppose que les paramètres (par exemple, les masses) caractérisant les particules varient d'une façon continue, il n'y a pas lieu de symétriser pour deux particules différant infiniment peu tandis qu'il faut symétriser pour deux particules de même nature. Il s'introduit là une discontinuité assez paradoxale tout à fait analogue à celle qui fut jadis signalée par Gibbs.

La parenté des deux problèmes est encore mieux montrée par le fait que, si l'on admet les statistiques quantiques liées à l'indiscernabilité des particules, le paradoxe de Gibbs disparaît. On sait, en effet, que, quand on introduit pour un ensemble de  $N$  bosons de même nature les statistiques quantiques, on est amené à diviser par  $N!$  le nombre des complexions admises par la statistique classique. Or, en introduisant cette division par  $N!$  dans le calcul de la partie de l'entropie d'un gaz de  $N$  molécules qui dépend du volume  $V$ , on trouve

$$(11) \quad S = k \log \frac{V^N}{N!}, \quad \text{avec } N! \simeq N^N e^{-N}.$$

Si alors  $S_1$  désigne l'entropie totale de deux gaz de  $N$  molécules remplissant des volumes  $V$  séparés et si  $S_2$  désigne l'entropie de deux gaz de nature différente ayant chacun  $N$  molécules et occupant ensemble un même volume  $2V$ , on trouve

$$(12) \quad S_2 - S_1 = 2k \log \frac{(2V)^N}{N!} - 2k \log \frac{V^N}{N!} = 2k N \log 2,$$

résultat conforme à la Thermodynamique classique.

Mais pour un seul gaz de  $2N$  molécules remplissant le volume  $2V$ , la formule (11) donne

$$(13) \quad S_3 = k \log \frac{(2V)^{2N}}{2N!}$$

et la différence  $S_3 - S_1$  est égale à

$$(14) \quad k \log \frac{(2V)^{2N}}{2N!} - 2k \log \frac{V^N}{N!} = 0.$$

Le paradoxe de Gibbs a donc en apparence disparu, mais c'est seulement parce que nous avons reporté la discontinuité gênante sur l'introduction brusque du facteur  $\frac{1}{N!}$  lié à l'indiscernabilité des particules. Ainsi la difficulté n'est pas réellement éliminée.

Nous voulons maintenant examiner cette difficulté en nous plaçant au point de vue de la théorie de la double solution.

Je ne développerai pas ici la manière dont la théorie de la double solution interprète la symétrisation de la fonction d'ondes des bosons de même nature dans l'espace de configuration. Je dirai seulement que le point essentiel de cette interprétation est le suivant. Si deux particules de même nature suivent dans l'espace physique sur leurs ondes  $\nu$  respectives des trajectoires de guidage corrélées, une perturbation provenant du milieu subquantique peut avoir pour effet de leur faire échanger leurs positions dans l'espace de telle sorte qu'ensuite chacune des particules suive la trajectoire qui était celle de l'autre avant la perturbation. Cette



conception qui respecte l'individualité des particules, tout en expliquant leur équivalence statistique, permet d'ailleurs d'expliquer immédiatement l'apparition du facteur  $\frac{1}{N!}$  dans les évaluations de la statistique de Bose-Einstein pour les bosons.

Sans insister ici sur cette interprétation des statistiques qui sera développée dans le dernier chapitre de ce volume, je rappellerai que le mouvement d'une particule est défini dans notre théorie par le principe fondamental que la vibration interne de la particule doit rester constamment en phase avec celle de l'onde à l'endroit où elle se trouve. Pour deux particules de même nature ayant la même masse propre, les ondes  $\nu$  des deux particules obéissent à la même équation d'ondes et toute trajectoire de guidage de l'une des particules peut aussi être une trajectoire de guidage de l'autre particule. C'est là ce qui rend possible la permutation des particules et ce qui justifie l'introduction de la statistique de Bose-Einstein pour les bosons.

Mais supposons maintenant que les particules aient des masses propres différentes. Alors aucune des deux particules ne pourra suivre une trajectoire de guidage de l'autre particule parce que l'accord de sa phase interne avec la phase de l'onde  $\nu$  de l'autre particule ne peut pas se maintenir.

La question mérite cependant d'être examinée de plus près. Pour cela, considérons ce qui se passerait si une particule de masse  $m_0$  suivait une des lignes de guidage d'une onde  $\nu$  correspondant à une masse propre

différente  $m_0 + \delta m_0$ . La variation pendant un temps  $dt$  de la phase  $\varphi$  de cette onde en un point qui se déplace sur la trajectoire de guidage avec la vitesse  $v = \beta c$  est

$$(15) \quad d\varphi = (m_0 + \delta m_0) c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

alors que la variation de la phase interne  $\varphi_i$  de la particule de masse propre  $m_0$  animée le long de cette ligne de guidage de la vitesse  $v = \beta c$  est

$$(16) \quad d\varphi_i = m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt.$$

Nous voyons qu'alors

$$(17) \quad \delta\varphi - \delta\varphi_i = \delta m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt = h \delta\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} dt,$$

où  $\nu_0$  est la fréquence propre interne de la particule de masse propre  $m_0$ . Donc si  $\delta m_0 \neq 0$ , c'est-à-dire si la masse propre figurant dans l'équation de propagation de l'onde est différente de la masse propre de la particule, l'accord de phase entre la particule et l'onde ne peut pas se maintenir et le guidage de la particule par l'onde ne peut pas avoir lieu.

Cependant nous voyons que l'accord de phase entre la particule et l'onde peut se maintenir *approximativement* pendant un temps  $\tau$  défini par

$$(18) \quad \frac{2\pi}{h} (\delta\varphi - \delta\varphi_i) = 2\pi \delta\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2} \tau = \varepsilon 2\pi,$$

$\varepsilon$  étant très petit. Comme l'emploi de l'espace de configuration est non relativiste, nous pouvons négliger  $\beta^2$

devant l'unité et écrire (18) sous la forme

$$(18 \text{ bis}) \quad \tau = \varepsilon T_0 \frac{m_0}{\delta m_0},$$

où  $T_0 = \frac{1}{\nu_0} = \frac{h}{m_0 c^2}$  est la période interne de la particule. Tant que  $\frac{\delta m_0}{m_0}$  n'est pas beaucoup plus petit que  $\varepsilon$ , aucun accord durable de phase ne pourra s'établir entre l'onde et la particule. Mais, si par la pensée nous faisons tendre  $\delta m_0$  vers zéro, le temps  $\tau$  de quasi-cohérence deviendra d'autant plus long que  $\delta m_0$  sera plus petit.

On arrive ainsi à concevoir comment peut s'établir *d'une façon continue* la symétrisation pour les molécules de deux gaz dont les molécules ont des masses différentes quand la différence de ces masses tend vers zéro. Ainsi disparaît la discontinuité paradoxale que l'on rencontrait à la fois dans le paradoxe de Gibbs et dans l'établissement des statistiques quantiques pour les bosons. La théorie de la double solution, en introduisant l'idée de l'accord de phase entre la particule et son onde dans le mouvement de guidage, parvient ainsi à lever une difficulté qui était restée insoluble.

**5. Spin et moment de quantité de mouvement.** — Dans l'étude des systèmes atomiques contenant des électrons, on est amené à considérer le spin comme une grandeur ayant la même nature physique qu'un moment de quantité de mouvement parce que c'est la somme

de ces deux grandeurs qui obéit à un théorème de conservation.

Cependant, cette conclusion se heurte à une difficulté car le spin défini par la théorie de Dirac n'a pas les mêmes propriétés de variance relativiste qu'un moment de quantité de mouvement. Les composantes  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  d'un moment de quantité de mouvement  $\vec{S}$  se transforment, en effet, comme les composantes d'espace  $M_{yz}$ ,  $M_{zx}$ ,  $M_{xy}$  d'un tenseur antisymétrique du second ordre. Au contraire, le vecteur spin  $\vec{\sigma}$  défini par la théorie de Dirac est formé par les trois composantes d'espace d'un quadrivecteur d'espace-temps dont la composante de temps est nulle dans le système propre de la particule. Cette différence de variance relativiste entre les vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{\sigma}$  ne paraît pas permettre de les considérer comme des grandeurs de même nature physique. L'examen de cette difficulté va nous conduire à une conclusion qui est très intéressante.

Pour aborder l'étude de cette question, rappelons d'abord comment on peut relier dans le cas des composantes de la quantité de mouvement la valeur moyenne fournie par la Mécanique quantique avec les conceptions de la théorie de la double solution. En Mécanique quantique, on fait correspondre aux composantes  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  de la quantité de mouvement les opérateurs  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}$ . La valeur moyenne de  $p_x$  est définie en Mécanique quantique par la formule

$$(19) \quad \bar{p}_x = \int \Psi^* (p_x)_{00} \Psi d\tau.$$

Posons  $\Psi = a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}$ , avec  $a$  et  $\varphi$  réels, il vient

$$(19 \text{ bis}) \quad \bar{p}_x = - \int a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau - \frac{i}{\hbar} \int a \frac{\partial a}{\partial x} d\tau.$$

Comme  $a$  est toujours nul aux limites de l'onde, le second terme de l'expression de  $\bar{p}_x$  est nul et il reste

$$(20) \quad \bar{p}_x = - \int a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau.$$

On trouve des formules pour  $p_y$  et  $p_z$ , d'où

$$(21) \quad \vec{\bar{p}} = - \int a^2 \overrightarrow{\text{grad } \varphi} d\tau.$$

Or, en théorie de la double solution, la probabilité de la présence de la particule dans l'élément de volume  $d\tau$  est donnée par  $\varphi d\tau = a^2 d\tau = |\Psi|^2 d\tau$  et l'on doit poser

$$(22) \quad \vec{\bar{p}} = - \int \vec{p} a^2 dt = - \int a^2 \overrightarrow{\text{grad } \varphi} d\tau.$$

On voit ainsi que la valeur (21) prévue par la Mécanique quantique et la valeur (22) donnée par la théorie de la double solution sont égales. Mais, tandis que la Mécanique quantique répartit la quantité de mouvement dans toute l'onde, la théorie de la double solution la considère comme attachée à la particule dont la probabilité de présence en un point est  $|\Psi|^2 = a^2$ .

Passons maintenant au cas du moment de quantité de mouvement  $\vec{S}$ . Si nous considérons un système contenant une particule en mouvement autour d'un

point central (comme c'est le cas pour l'atome de Bohr dans la théorie primitive), le moment de quantité de mouvement a pour composantes

$$(23) \quad S_x = y p_z - z p_y, \quad S_y = z p_x - x p_z, \quad S_z = x p_y - y p_x.$$

La Mécanique quantique utilise ces expressions en y remplaçant  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  par les opérateurs définis plus haut. Elle pose donc

$$(24) \quad \bar{S}_x = \int -\frac{\hbar}{i} \Psi^* \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi d\tau.$$

Remplaçons encore  $\Psi$  par  $a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}$  avec  $a$  et  $\varphi$  réels. Nous obtenons, en tenant compte du fait que  $a$  s'annule aux limites de l'onde,

$$(25) \quad \bar{S}_x = - \int a^2 \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau.$$

La théorie de la double solution, posant  $\vec{p} = - \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ , écrit

$$(26) \quad \bar{S}_x = \int (y p_z - z p_y) a^2 d\tau = - \int a^2 \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\tau.$$

Des formules analogues sont obtenues pour  $S_y$  et  $S_z$ . Nous voyons de nouveau ici que les valeurs moyennes sont les mêmes en Mécanique quantique et en théorie de la double solution, mais dans cette théorie le moment de quantité de mouvement, au lieu d'être réparti dans toute l'onde, est attaché à la particule dont la position dans l'onde est aléatoire.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier le cas du spin. Avec les conceptions de la théorie de la double solution, le spin de l'électron ne doit pas être regardé comme attaché à un système physique où une particule est en mouvement; nous devons le considérer comme une grandeur *interne* attachée à une particule dont nous ignorons la structure, mais que nous pouvons en première approximation considérer comme ponctuelle. Nous devons donc nous contenter d'attacher à l'électron toujours localisé dans l'onde un vecteur  $\vec{\Sigma}$  dont la valeur moyenne devra nous donner un vecteur ayant les propriétés de variance d'un moment de quantité de mouvement. Nous allons voir que ce vecteur *n'est pas* le vecteur  $\vec{\sigma}$  de la théorie de Dirac.

Dans mon livre intitulé *Théorie générale des particules à spin* publié par Gauthier-Villars en 1942 et réédité en 1954 <sup>(1)</sup>, j'ai développé des calculs concernant la relation du moment de quantité de mouvement  $\vec{S}$  et du vecteur spin  $\vec{\sigma}$  de la théorie de Dirac. J'ai d'abord démontré que, si l'on considère le mouvement d'une particule dans un système matériel, le moment de quantité de mouvement  $\vec{S}$  se transforme suivant les formules

$$(27) \quad S_x = S_{0x} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad S_y = S_{0y} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad S_z = S_{0z}$$

---

<sup>(1)</sup> p. 50-53.

quand on passe du système de référence où le système est au repos au système de référence où il est en mouvement suivant Oz avec la vitesse  $\beta c$ . J'ai montré aussi que le vecteur spin  $\vec{\sigma}$  de Dirac se transforme lors d'un changement de système de référence analogue par les formules

$$(28) \quad \sigma_x = \sigma_{0x}, \quad \sigma_y = \sigma_{0y}, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_{0z}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

de sorte, qu'en vertu de la contraction de Lorentz ( $d\tau = d\tau_0 \sqrt{1-\beta^2}$ ), ce sont les intégrales  $\int \sigma_x d\tau$ ,  $\int \sigma_y d\tau$ ,  $\int \sigma_z d\tau$  qui se transforment comme  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$ .

Le vecteur  $\vec{\sigma}$  de Dirac n'est donc qu'une « densité de spin » et, avec les conceptions de notre théorie, nous devons chercher à attacher à l'électron un vecteur spin  $\vec{\Sigma}$  différent de  $\vec{\sigma}$  tel que,  $\vec{\bar{S}}$  étant la valeur moyenne de la quantité de mouvement interne de l'électron,

$$(29) \quad \vec{\bar{S}} = \int \vec{\Sigma} \rho d\tau.$$

avec  $\rho = \sum_k |\Psi_k|^2$ . Ceci est bien facile à faire car, puisque nous avons  $\vec{\bar{S}} = \int \vec{\sigma} d\tau$ , il suffit de poser

$$(30) \quad \vec{\Sigma} = \frac{\vec{\sigma}}{\rho}.$$



C'est le vecteur  $\vec{\Sigma}$  ainsi défini, et non le vecteur  $\vec{\sigma}$  de Dirac, que nous devons en théorie de la double solution considérer comme le spin attaché à l'électron pendant son mouvement aléatoire dans l'onde.

D'ailleurs comme  $\varphi d\tau$  est un invariant (car  $\varphi = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$  et  $d\tau = d\tau_0 \sqrt{1-\beta^2}$ , d'où  $\varphi d\tau = \rho_0 d\tau_0$ ), la formule (29)

nous montre que les vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{\Sigma}$  ont la même variance. C'est donc bien le vecteur  $\vec{\Sigma}$ , et non le vecteur  $\vec{\sigma}$  de Dirac, qui a la nature physique d'un moment de quantité de mouvement.

De plus, il paraît certain que les grandeurs attachées à une particule doivent pouvoir se définir à l'aide de la seule onde physique  $\varphi$  et, par suite, être indépendantes de la normalisation de l'onde statistique  $\Psi$ . C'est bien le cas pour la quantité de mouvement  $\vec{p} = -\vec{\text{grad}} \varphi$  puisque la phase  $\varphi$  est la même, à une constante additive près, pour les ondes  $\varphi$  et  $\Psi$ , la normalisation ne portant que sur l'amplitude  $a$ . Or, le vecteur  $\vec{\sigma}$  de la théorie de Dirac dépend des composantes  $\Psi_k$  de l'onde statistique  $\Psi$  de Dirac et donc de la normalisation par la formule  $\int \sum_k |\Psi_k|^2 d\tau = 1$ . Au contraire, le vecteur  $\vec{\Sigma} = \frac{\vec{\sigma}}{\rho}$  est une fonction homogène des amplitudes  $a_k$  qui ne dépend pas de la valeur

absolue de ces  $a_k$  : elle est donc indépendante de la normalisation. C'est une raison de plus pour admettre que c'est le vecteur  $\vec{\Sigma}$  qui est le spin attaché à l'électron.

Remarquons enfin que les expressions  $yp_z - zp_y, \dots$  des composantes du moment de quantité de mouvement se justifient tout naturellement dans une théorie où l'on considère la particule comme constamment localisée, comme c'est le cas en Mécanique ancienne, classique ou relativiste, et en théorie de la double solution. Mais partir de ces expressions pour construire les opérateurs  $y(p_z)_{op} - z(p_y)_{op}, \dots$  dans une théorie où la particule n'est pas considérée comme localisée est tout à fait paradoxal. En le faisant, la Mécanique quantique usuelle construit ces opérateurs en partant de formules qu'elle considère comme ne pouvant avoir aucun sens physique. Si elle parvient cependant à en tirer des conclusions exactes, c'est parce qu'elle ne constitue qu'une théorie à caractère statistique qui ne donne pas une véritable représentation de la réalité physique. Mais le fait qu'elle est obligée de partir de formules qui impliquent la localisation des particules me semble prouver que derrière son formalisme statistique est dissimulée une localisation cachée des particules. Une véritable description de la réalité physique doit pouvoir se faire en utilisant uniquement des fonctions définies en chaque point de l'espace au cours du temps *sans jamais être obligé d'introduire des opérateurs*.

**6. Sur l'impossibilité de mesurer simultanément les composantes d'un moment de rotation et d'un spin.** — Nous savons que, pour mesurer les composantes de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'une particule, il faut amener cette particule sur un train d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Comme l'on sait que le vecteur  $\vec{p}$  a alors pour longueur  $p = \frac{h}{\lambda}$  et qu'il est dirigé dans le sens de la propagation de l'onde, l'on connaît la longueur et la direction du vecteur  $\vec{p}$ . On connaît ses trois composantes  $p_x, p_y, p_z$  sur trois axes de coordonnées rectangulaires préalablement choisis. On voit ainsi que ces trois composantes sont simultanément mesurables, ce qui est en accord avec le fait que les opérateurs  $(p_x)_{op}, (p_y)_{op}, (p_z)_{op}$  de la Mécanique quantique commutent.

Mais quand il s'agit d'un moment de quantité de mouvement (moment de rotation) ou d'un spin, on se trouve en présence d'une difficulté. Pour le voir, nous remarquerons d'abord que ces grandeurs sont définies par rapport à un point choisi comme origine des coordonnées. Dans le cas d'un moment de rotation dans l'atome de Bohr, ce point est naturellement le centre de l'atome. Dans le cas du spin considéré comme un moment de rotation interne d'une particule, le point en question est un point central de cette particule. De plus, dans un cas comme dans l'autre, le vecteur considéré est quantifié car il est égal à  $m\hbar$ , avec  $m$

entier <sup>(1)</sup>, dans le cas du mouvement d'un électron dans l'atome ou dans le cas d'un spin à un électron à  $\frac{\hbar}{2}$ .

Voici maintenant la difficulté qui se présente alors. Si nous parvenons dans le cas d'un atome ou d'un électron à orienter le moment de rotation ou le spin dans une certaine direction à l'aide d'un appareil de Stern-Gerlach, nous connaissons sa grandeur et sa direction. Il semblerait donc, par analogie avec le cas du vecteur  $\vec{p}$ , que nous connaissions alors les trois composantes du moment de rotation ou du spin. Mais, et là est la difficulté, cela est en contradiction avec le fait que les opérateurs de la Mécanique quantique qui correspondent aux trois composantes d'un moment de rotation ou d'un spin ne commutent pas.

Pour lever cette difficulté, il est important de préciser la différence de nature qui existe entre une grandeur comme la quantité de mouvement et une grandeur comme un moment de rotation ou un spin. La quantité de mouvement est représentée par un vecteur « polaire » qui ne change pas de sens quand on passe d'un système d'axes à droite à un système d'axes à gauche. Les composantes d'un tel vecteur ont un sens physique bien net. En particulier, la théorie de l'effet Compton qui utilise la conservation de la quantité de mouvement dans le choc photon-électron permet de vérifier expé-

---

(<sup>1</sup>) Nous excluons le cas particulier où  $m = 0$ , car alors il n'y a pas de moment de rotation.

rimentalement l'existence des composantes de la quantité de mouvement d'un photon.

Au contraire, un moment de rotation ou un spin est représenté par un vecteur « axial » qui est une sorte de faux vecteur car il change de sens quand on passe d'un système d'axes à droite à un système d'axes à gauche. Ce faux vecteur n'est en réalité qu'une représentation conventionnelle d'un mouvement circulaire quantifié s'opérant dans un plan perpendiculaire à sa direction et c'est ce mouvement qui est la véritable représentation de la réalité physique. C'est ce que représente la figure suivante.

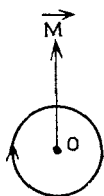


Fig. 6.

Évidemment, si l'on prend trois axes de coordonnées rectangulaires d'origine  $O$  et de directions quelconques, l'on peut projeter le vecteur  $\vec{M}$  sur ces axes, mais les composantes du vecteur ainsi obtenues n'ont pas de sens physique. En effet, elles ne sont pas quantifiées puisqu'elles sont égales à la longueur du vecteur  $\vec{M}$  multipliée par des cosinus définis arbitrairement par l'orientation des axes choisis. On pourrait même dire que les composantes du vecteur  $\vec{M}$  n'existent pas.

Pour préciser maintenant pourquoi il est impossible de connaître simultanément les trois composantes d'un moment de rotation ou d'un spin, rappelons qu'en Physique quantique la connaissance d'une grandeur doit toujours résulter d'une mesure. Considérons donc, par exemple dans le cas où il s'agit d'un spin, la mesure d'une composante à l'aide d'un électroaimant du type Stern-Gerlach. Nous supposons qu'à l'aide d'un premier Stern-Gerlach, on ait orienté le spin dans une direction  $Oz$  et que l'on ait ainsi obtenu la valeur  $\sigma_z = \frac{\hbar}{2}$ . Puis, supposons qu'à l'aide d'un second Stern-Gerlach, on oriente le spin de l'électron ainsi préparé dans la direction  $Ox$  normale à  $Oz$  et que l'on ait ainsi finalement  $\sigma_x = \frac{\hbar}{2}$ . Le résultat des deux opérations successives est représenté par le schéma suivant :

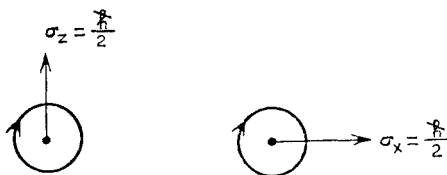


Fig. 7.

Comme je l'ai remarqué précédemment à propos de la mesure du spin (chap. V, 2.b), pour passer de la première situation à la seconde, il faut que le deuxième Stern-Gerlach fournisse à l'électron le moment de rotation nécessaire pour faire basculer de  $90^\circ$  le plan du

mouvement circulaire correspondant au spin. Il est donc absolument évident que le spin final  $\sigma_x$  *n'est pas* la composante  $x$  du spin  $\sigma_z$  initial. On ne peut donc pas dire que l'on a obtenu les composantes  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  d'un même vecteur. Je pense que c'est pour cette raison que l'on doit considérer comme impossible la mesure simultanée de deux composantes d'un spin ou d'un moment de rotation. Cette différence essentielle avec le cas d'un vrai vecteur comme la quantité de mouvement apparaît ainsi comme liée à la fois à la différence de nature vecteur polaire et vecteur axial et au caractère quantifié d'un moment de rotation et du spin.

## CHAPITRE VIII

# L'INTERPRÉTATION DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DANS L'ESPACE DE CONFIGURATION

**1. La Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration pour des particules de nature différente.** — Nous commencerons par rappeler l'interprétation que nous avons donnée, M. Andrade e Silva et moi, de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration par des particules de nature différente. Nous renvoyons à la Thèse de Doctorat de M. Andrade e Silva [12] pour une étude plus approfondie de cette question. Naturellement nous supposerons toujours dans ce qui suit que les particules ont des vitesses petites par rapport à  $c$  parce que la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration n'est pas relativiste.

Considérons d'abord une seule particule dans l'espace physique. L'équation de son onde  $\nu$  s'exprime à l'aide des variables usuelles d'espace et de temps à caractère non aléatoire. La position de la particule dans son onde



est donnée par des coordonnées  $X, Y, Z$  qui, elles, sont aléatoires en raison des perturbations subquantiques. L'ensemble des trajectoires de guidage de la particule dans son onde forme un ensemble statistique parce que les perturbations d'origine subquantique répartissent aléatoirement les positions successives des particules sur les trajectoires de guidage. Cependant, si une grandeur attachée à la particule a une valeur indépendante de la position de la particule dans son onde, on peut attribuer une valeur bien définie à cette grandeur malgré le caractère statistique de cette représentation. C'est ce qui permet d'attribuer une énergie et une quantité de mouvement bien définies à une particule portée par un train d'ondes assimilable à une onde plane monochromatique et c'est ce qui permet aussi d'attribuer une énergie bien définie à un électron porté par une onde stationnaire monochromatique dans l'un des états quantifiés d'un atome.

Considérons maintenant le cas d'un ensemble de particules de nature différente sans interaction classique et bornons-nous au cas de deux particules, la généralisation au cas de  $N$  particules devant être facile. Chacune des particules a dans l'espace physique son onde  $\nu$  et, d'après nos conceptions, elle suivrait une trajectoire bien définie par la loi du guidage si l'on pouvait faire abstraction des perturbations d'origine subquantique. Remarquons que la différence de nature des deux particules nous permet de les numérotier et de les attacher à l'une des deux ondes  $\nu$  d'une façon permanente et définitive. Soit alors  $O_1$  l'onde de la

particule 1 qui suit dans cette onde une trajectoire de guidage  $T_1$ . Soient, de même  $O_2$  et  $T_2$  l'onde et la trajectoire de guidage de la particule 2. Remarquons que les ondes  $O_1$  et  $O_2$  ne peuvent pas interférer quand elles occupent une même région de l'espace parce que leurs équations d'ondes ne sont pas les mêmes.

Si à un instant donné, les deux particules occupent sur  $T_1$  et  $T_2$  les positions  $M_1$  et  $M_2$ , un point  $M$  de l'espace de configuration correspond univoquement aux points  $M_1$  et  $M_2$  de l'espace physique. L'onde  $\nu_1$  qui porte la particule 1 peut s'écrire  $a_1 e^{\frac{i}{\hbar} \varphi_1}$  et l'onde  $\nu_2$  qui porte la particule 2 peut s'écrire  $a_2 e^{\frac{i}{\hbar} \varphi_2}$ , où  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  sont réels. L'onde de l'espace de configuration n'est pas une onde physique réelle du type  $\nu$ , c'est une onde statistique fictive du type  $\Psi$ . Nous représenterons l'ensemble des coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  par  $\vec{r}_1$  et l'ensemble des coordonnées  $x_2, y_2, z_2$  par  $\vec{r}_2$ . Nous définirons alors la valeur de  $\Psi$  au point  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  de l'espace de configuration à l'instant  $t$  en posant  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \nu_1(\vec{r}_1, t) \cdot \nu_2(\vec{r}_2, t)$  à un facteur de normalisation près, ce qui nous donne :

$$(1) \quad \begin{cases} a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = a_1(\vec{r}_1, t) \cdot a_2(\vec{r}_2, t); \\ \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \varphi_1(\vec{r}_1, t) + \varphi_2(\vec{r}_2, t). \end{cases}$$

Si maintenant pour tous les points simultanés  $M_1$  et  $M_2$  des trajectoires de guidage des ondes  $O_1$  et  $O_2$ , nous prélevons les amplitudes  $a_1$  et  $a_2$  et les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , nous pouvons à l'aide des formules (1) construire entiè-

rement dans l'espace de configuration la fonction  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$  qui correspond à l'ensemble des trajectoires de guidage des particules 1 et 2. Cette fonction  $\Psi$  nous permettra de définir la probabilité de la présence simultanée à l'instant  $t$  des deux particules en  $M_1$  et  $M_2$  à l'aide de  $|\Psi|^2 = a^2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$  et leurs mouvements simultanés sur les trajectoires de guidage à l'aide des fonctions  $\overrightarrow{\text{grad}}_1 \varphi$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}_2 \varphi$ . Les ondes  $O_1$  et  $O_2$  étant définies par la juxtaposition continue des trajectoires  $T_1$  et  $T_2$ , l'onde  $\Psi$  nous donnera une représentation exacte de ce qui se passe dans l'espace physique.

Mais cela n'est vrai que pour des particules sans interactions classiques et le cas de deux particules qui interagissent est plus complexe car alors le mouvement de chacune d'elles est influencé par le mouvement de l'autre et il ne suffit plus de considérer une onde  $O_1$  et une onde  $O_2$  portant chacune une infinité de trajectoires de guidage correspondant à la particule liée à l'onde. Il faut maintenant considérer des couples d'ondes corrélées  $O'_1-O'_2, O''_1-O''_2, O'''_1-O'''_2, \dots$  portant chacun un couple *unique* de trajectoires corrélées  $T'_1-T'_2, T''_1-T''_2, T'''_1-T'''_2, \dots$ . Les formules (1) prennent alors la forme

$$(2) \quad \begin{cases} a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = a_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \times a_2(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t); \\ \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \varphi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) + \varphi_2(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t). \end{cases}$$

Elles nous permettent encore de construire dans l'espace de configuration une onde  $\Psi$  qui représentera

l'ensemble des mouvements corrélés des deux particules. Mais ici nous obtenons seulement une représentation *appauvrie* de ce qui se passe dans l'espace physique parce qu'elle ne décrit pas l'ensemble de chacune des ondes  $O'_1-O'_2, \dots$  en ne prenant sur chacune d'elles qu'un seul élément, la trajectoire de guidage.

Nous allons maintenant introduire dans les deux cas qui viennent d'être étudiés les perturbations d'origine subquantique qui, d'après nous, permettent seules de justifier la signification de probabilité de présence attribuée à  $|\Psi|^2$  et certainement exacte. Dans le cas des particules sans interaction, ces perturbations font constamment sautiller chaque particule d'une de ses trajectoires de guidage sur une autre et cela indépendamment des sautilllements analogues subis par l'autre particule. Ceci permet de justifier que les expressions  $|\varphi_1(\vec{r}_1, t)|^2 d\tau$  et  $|\varphi_2(\vec{r}_2, t)|^2 d\tau$  donnent, à un facteur de normalisation près, les probabilités de présence indépendantes de la particule 1 dans  $d\tau_1$  et de la particule 2 dans  $d\tau_2$  de sorte que  $a^2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) d\tau$ , avec  $d\tau = d\tau_1 \cdot d\tau_2$ , donne la probabilité de la présence à l'instant  $t$  du point figuratif du système dans l'élément de volume à six dimensions  $d\tau = d\tau_1 \cdot d\tau_2$  de l'espace de configuration.

Mais les choses sont moins simples quand on considère des particules en interaction. Dans le cas de deux particules de nature différente en interaction, les divers couples de trajectoires corrélées correspondent à des

couples d'ondes différents. Il nous faut donc introduire ici un principe nouveau qui est le suivant : « Lorsqu'une perturbation d'origine subquantique fait passer l'une des particules d'une de ses trajectoires de guidage  $T_1$  à une autre  $T'_1$ , l'autre particule doit simultanément passer de la trajectoire  $T_2$  corrélée de  $T_1$  à la trajectoire  $T'_2$  corrélée de  $T'_1$  ». D'une façon plus concise, on peut dire que les perturbations subquantiques respectent les corrélations. M. Andrade e Silva a bien aperçu ce point essentiel quand il a écrit dans sa Thèse (p. 345) : « Enfin il est important de remarquer que, de l'hypothèse des fluctuations aléatoires généralisées, résulte que, même en présence de potentiels perturbateurs aléatoires, les mouvements des points matériels restent toujours corrélés ». Ceci admis, on peut démontrer qu'en construisant la fonction  $\Psi$  de l'espace de configuration à l'aide des équations (2) où les éléments  $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$  sont prélevés à l'instant  $t$  aux points corrélés sur les trajectoires de guidage corrélées, la grandeur  $a^2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) d\tau$  donne la probabilité de la présence simultanée à l'instant  $t$  des deux particules dans les éléments de volume  $d\tau_1$  et  $d\tau_2$  de l'espace physique.

On remarquera que l'interprétation précédente conduit à considérer que l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration nous donne non seulement une représentation appauvrie de ce qui se passe dans l'espace physique, mais aussi une représentation statistique des diverses possibilités de mouvement dans cet espace physique. Cependant cela n'empêche pas de

pouvoir dans certains cas déduire de l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration une valeur certaine d'une grandeur physique : cela a lieu quand la grandeur garde la même valeur pour tous les mouvements corrélés des particules. Par exemple, si le système est conservatif, la somme des énergies des particules égale à  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  d'après (2) reste constante et l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration a une fréquence constante  $\nu$  à laquelle correspond une énergie bien déterminée  $W = h\nu$ . On s'explique ainsi comment la Mécanique ondulatoire de l'espace de configuration permet de calculer les énergies des états stationnaires d'un ensemble de particules.

Il semble que depuis la Thèse de M. Andrade e Silva (1960) et les travaux que nous avons poursuivis ensuite, tout ce qui précède peut être mis sous une forme assez satisfaisante. Mais nous devons maintenant aborder la question plus difficile des particules de même nature.

**2. Mécanique ondulatoire des particules de même nature. Cas des bosons de spin zéro.** — Nous allons d'abord considérer le cas le plus simple : celui de deux bosons de spin zéro et de même nature sans interaction classique. Nous avons en vue d'expliquer la nécessité de symétriser la fonction d'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration et nous savons que cette symétrisation ne s'introduit que quand les ondes  $\nu$  des deux particules se superposent dans l'espace physique. Mais, si les deux particules sont sans interaction classique, il

paraît certain que leurs ondes  $\nu$  doivent alors interférer puisqu'elles obéissent à une même équation d'ondes (c'est d'ailleurs le cas des photons qui sont sans interaction classique). Si nous nous donnons les positions initiales des deux particules dans l'onde  $\nu$  qui résulte de l'interférence des ondes individuelles et si nous faisons abstraction des perturbations d'origine subquantique, la formule du guidage nous permet de calculer les trajectoires des deux particules. L'absence d'interaction entre les particules fait que les trajectoires de guidage des deux particules ne sont pas corrélées.

Mais, si nous introduisons maintenant les perturbations d'origine subquantique, une circonstance tout à fait nouvelle va apparaître. En effet, dans le cas de deux particules de nature différente, une perturbation d'origine subquantique pouvait faire passer l'une des particules d'une de ses trajectoires de guidage sur une autre, mais ne pouvait pas la faire passer sur une trajectoire de guidage de l'autre particule. La théorie de la double solution, qui interprète le guidage de la particule par son onde comme résultant du fait que la vibration interne de la particule doit rester constamment en phase avec celle de son onde, nous indique immédiatement qu'une particule ne peut pas « s'accrocher » sur une onde correspondant à un autre genre de particule, sa vibration interne ne pouvant pas rester en phase avec celle de cette onde. Or, dans le cas de deux particules de même nature, cette raison n'existe plus et rien n'empêche une perturbation d'origine subquan-

tique de faire passer simultanément chaque particule d'un point de sa trajectoire de guidage à un point d'une trajectoire de guidage de l'autre particule, l'accord de phase entre la particule et l'onde pouvant alors subsister. Il en résulte la possibilité pour les deux particules d'échanger leurs positions sans que rien ne soit modifié dans la propagation de l'onde qui les porte et cela suffit pour expliquer la nécessité de symétriser l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration pour le système des deux particules. Sans insister sur la démonstration de cette affirmation dans le cas de deux bosons de même nature sans interaction classique, nous allons étudier le cas général, pratiquement plus intéressant, de deux bosons de même nature en interaction.

Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, nous allons adopter des notations un peu différentes de celles que vous avons précédemment utilisées. Nous désignerons par  $O_A$  et  $O_B$  les ondes des deux bosons supposés initialement portés par des trains d'ondes séparés dans l'espace. Les trajectoires  $T_A$  et  $T_B$  des deux particules sont corrélées en raison de leur interaction et les positions simultanées des deux particules sont également corrélées. Comme nous supposons que les particules ont une individualité, nous pouvons les caractériser par un numérotage qui persistera ensuite d'une façon permanente. Par exemple, nous pouvons donner le numéro 1 à la particule qui est initialement sur  $O_A$  et le numéro 2 à la particule qui est initialement sur  $O_B$ . Les positions des deux particules sont alors définies par les formules dont le sens est



évident

$$(3) \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_A, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_B.$$

Supposons maintenant que les ondes  $O_A$  et  $O_B$  viennent se superposer dans une même région  $R$  de l'espace physique. Ces ondes vont-elles interférer? Il semble que non. En effet, pour qu'il y ait interférences entre deux ondes, il faut : 1° que leurs équations de propagation soient les mêmes; 2° que la propagation de chacune des deux ondes soit indépendante de tout élément lié à l'autre onde. Or, si la première condition est bien réalisée pour des particules de même nature en interaction, la seconde ne l'est pas par suite de l'interaction, la propagation de chacune des deux ondes étant influencée par la position de l'autre particule dans son onde. Les deux ondes conservent donc une certaine indépendance pendant qu'elles se superposent dans la région  $R$ . Il semble donc bien en résulter que, comme dans le cas de deux particules de nature différente, nous devons en raison de l'interaction considérer une infinité de couples d'ondes corrélées  $O'_A-O'_B, O''_A-O''_B, \dots$  portant une infinité de trajectoires corrélées  $T'_A-T'_B, T''_A-T''_B, \dots$

Mais nous devons maintenant tenir compte des perturbations subquantiques qui entrent constamment en jeu. Rien n'empêche une de ces perturbations de faire passer la particule 1 de la position  $A$  sur la trajectoire  $T_A$  à la position  $B'$  sur la trajectoire  $T_{B'}$ , et simultanément la particule 2 de la position  $B$  sur la trajectoire  $T_B$  corrélée de  $T_A$  à la position  $A'$  corrélée

de  $B'$  sur la trajectoire  $T_A$ . C'est ce que représente la figure suivante où les lignes sinueuses  $AB'$  et  $BA'$  représentent schématiquement les mouvements browniens imposés aux deux particules par la perturbation d'origine subquantique.

Si donc les deux particules occupent à un certain instant dans  $O_A$  et  $O_B$  les positions corrélées  $A'$  et  $B'$ ,

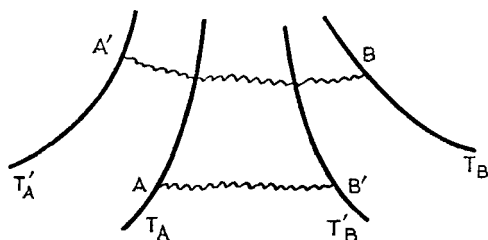


Fig. 8.

on ne saura pas si c'est la particule 1 qui est en  $A'$  et la particule 2 en  $B'$  ou bien si c'est la particule 1 qui est en  $B'$  et la particule 2 en  $A'$ . Les permutations possibles des deux particules dues aux perturbations d'origine subquantique ont donc pour effet que les relations

$$(4) \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_B, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_A$$

sont finalement aussi probables que les relations (3).

Suivant la méthode précédemment exposée, nous devons maintenant construire l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration à partir de certains éléments empruntés à ce qui se passe dans l'espace physique. D'après

ce que nous avons vu précédemment, si nous posons  $\Psi = ae^{\frac{i}{\hbar}\varphi}$ ,  $a$  et  $\varphi$  étant réels, nous devons prélever les grandeurs amplitude et phase des ondes  $O_A$  et  $O_B$  aux points corrélés  $\vec{r}_A$  et  $\vec{r}_B$  et il semblerait naturel de poser

$$(5) \quad \begin{cases} a(\vec{r}_A, \vec{r}_B, t) = a_A(\vec{r}_A, \vec{r}_B, t) \cdot a_B(\vec{r}_B, \vec{r}_A, t); \\ \varphi(\vec{r}_A, \vec{r}_B, t) = \varphi_A(\vec{r}_A, \vec{r}_B, t) + \varphi_B(\vec{r}_B, \vec{r}_A, t). \end{cases}$$

Mais, attention!, la fonction  $\Psi$  de l'espace de configuration doit s'exprimer à l'aide des coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  correspondant au numérotage des particules qui, pour nous, les individualise d'une façon permanente. Or, la correspondance entre  $\vec{r}_A$  et  $\vec{r}_B$  d'une part,  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  d'autre part peut se faire, nous venons de le voir, avec autant de raison par les formules (3) et par les formules (4). Pour définir le  $\Psi$  de l'espace de configuration, il paraît donc nécessaire de remplacer les formules (5) par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = a_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \cdot a_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t) \\ \quad \quad \quad + a_A(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t) a_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t), \\ \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \varphi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) + \varphi_B(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t) \\ \quad \quad \quad + \varphi_A(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t) + \varphi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) \end{cases}$$

à un facteur de normalisation près. Il en résulte

$$(7) \quad a(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = a(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t); \quad \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t),$$

d'où

$$(8) \quad \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t).$$

On aboutit ainsi à la nécessité de symétriser l'onde  $\Psi$  de l'espace de configuration pour les bosons de même nature. Cette nécessité nous apparaît comme résultant du fait qu'il n'y a pas une correspondance univoque entre les coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  des particules et les coordonnées  $\vec{r}_A$  et  $\vec{r}_B$  des positions corrélées dans l'espace physique sur les trajectoires de guidage.

### 3. Compléments au sujet des bosons de même nature.

— Les formules (3) et (4) nous donnent deux manières différentes, mais également possibles de faire correspondre les coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  des particules et les positions  $\vec{r}_A$  et  $\vec{r}_B$  dans l'espace physique. Ces deux possibilités sont représentées dans l'espace de configuration par deux positions M et N du point représentatif du système, le point N étant obtenu à partir du point M par permutation de la valeur des coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ . Dans le cas de deux particules de nature différente, un ensemble de deux trajectoires de guidage dans l'espace physique correspond à une seule trajectoire du point figuratif dans l'espace de configuration. Mais pour deux bosons de même nature un ensemble de trajectoires de guidage  $T_A$  et  $T_B$  dans l'espace physique correspond à deux trajectoires distinctes  $T_M$  et  $T_N$  du point figuratif dans l'espace de configuration. Cela résulte évidemment

du fait que pour les bosons de même nature il n'y a plus correspondance univoque entre les positions corrélées des particules dans l'espace physique et les variables de l'espace de configuration. C'est pour cette raison que la représentation du système dans l'espace de configuration devient fallacieuse et doit être corrigée par une symétrisation d'apparence, arbitraire, des solutions de l'équation de Schrödinger dans cet espace.

Il est facile de généraliser ce qui précède au cas de  $N$  bosons de même nature en interaction. Il y a alors  $N$  lignes de guidage dans l'espace physique, la position des  $N$  bosons sur ces  $N$  lignes de guidage pouvant être constamment permutée par les perturbations d'origine subquantique. Alors à l'ensemble des  $N$  lignes de guidage dans l'espace physique correspondent  $N!$  trajectoires du point représentatif dans l'espace de configuration. On retrouve ainsi le résultat valable pour deux bosons en remarquant que  $2! = 2$ . Cette circonstance est évidemment reliée à l'apparition du facteur  $\frac{1}{N!}$  dans les évaluations des « complexions » indépendantes dans la statistique de Bose-Einstein dont nous avons déjà parlé à propos du paradoxe de Gibbs (*voir* chap. VII, § 4).

Nous allons regarder cette question de plus près. Dans la statistique classique de Boltzmann-Gibbs, on considère un ensemble de particules de même nature obéissant aux lois de la Dynamique classique. Ces particules peuvent être soumises à des champs extérieurs et, notamment au moment des chocs, à des interactions

dont l'ensemble est représenté dans les équations du mouvement par des potentiels du type classique. Les particules conservent toujours leur individualité et le calcul de leurs trajectoires est en principe possible bien qu'en pratique il soit impossible en raison de sa complexité. La Mécanique statistique classique considère alors l'ensemble des positions et des vitesses des particules, chacun de ces ensembles étant représenté par un point dans l'extension - en - phase du système (espace fictif à  $6N$  dimensions s'il y a  $N$  particules) : elle en tire par des calculs bien connus les formules de la statistique de Boltzmann-Gibbs.

Plaçons-nous maintenant non plus au point de vue de la Dynamique classique, mais à celui de la Mécanique ondulatoire interprétée par la théorie de la double solution en faisant d'abord abstraction des perturbations d'origine subquantique. Dans l'espace physique, le mouvement de  $N$  particules de même nature formant le système que l'on considère est déterminé par la propagation des ondes  $\nu$  dans l'espace physique et leurs  $N$  trajectoires de guidage sont déterminées par des équations où figurent des potentiels correspondant aux interactions des particules et éventuellement de l'action sur elles de champs extérieurs, compte tenu des potentiels quantiques. Si donc il n'y avait pas de perturbations d'origine subquantique, la situation serait analogue à celle qu'on rencontre en Mécanique classique. En effet, chaque particule, obéissant à la Dynamique du guidage, qui est une dynamique à masse propre variable, et conservant son individualité au cours

du temps, décrirait une trajectoire très compliquée, en principe calculable bien qu'en pratique généralement impossible à calculer. On devrait donc aboutir à retrouver la statistique de Boltzmann-Gibbs. Or, il est bien connu qu'en Mécanique ondulatoire, un ensemble de bosons de même nature obéit non pas à la statistique de Boltzmann-Gibbs, mais à celle de Bose-Einstein.

Il apparaît ainsi clairement que c'est l'intervention des perturbations d'origine subquantique qui modifie entièrement la nature du problème statistique. En effet, ces perturbations peuvent constamment, tout en maintenant les corrélations, permuter les positions des bosons sur leurs lignes de guidage. Or, pour ces  $N$  particules de même nature, l'état ondulatoire dans l'espace physique est défini par les ondes  $\nu$  avec  $N$  lignes de guidage sans qu'il y ait lieu, en raison des permutations possibles, d'individualiser chaque particule par un numérotage correspondant à leur position. Une permutation quelconque des  $N$  bosons sur leurs trajectoires de guidage par l'effet des perturbations d'origine subquantique ne change donc en rien l'état ondulatoire existant dans l'espace physique. Mais, quand on fait la représentation du mouvement des bosons par la méthode de l'espace de configuration de Schrödinger de la façon indiquée dans ce qui précède, on fait correspondre, nous l'avons vu, aux  $N$  trajectoires de guidage de l'espace physique  $N!$  trajectoires du point représentatif dans l'espace de configuration. Ainsi, dans cet espace fictif, on représente  $N!$  fois ce qui se passe réellement dans l'espace physique. Pour calculer

statistiquement d'une façon exacte le nombre des complexions correspondant à des états ondulatoires différents dans l'espace physique, il faut donc diviser par  $N!$  le nombre des complexions que l'on distingue dans l'espace de configuration, c'est-à-dire le nombre des complexions que la statistique de Boltzmann-Gibbs conduirait à distinguer. Et l'on sait bien depuis longtemps que c'est de cette façon que l'on passe de la statistique de Boltzmann-Gibbs à celle de Bose-Einstein.

Il est maintenant très important de préciser ce qui suit. Dans les exposés usuels de la statistique de Bose-Einstein, on interprète l'intervention du facteur  $\frac{1}{N!}$  en disant que les particules de même nature sont « indiscernables ». Nous pouvons accepter cette manière de parler à condition de préciser qu'elle traduit seulement « l'équivalence statistique » des bosons de même nature au sens précisé plus haut. Mais nous ne pouvons pas accepter de dire, comme on le fait généralement, que les particules de même nature n'ont pas d'individualité. En effet, pour nous, l'idée de particule est liée à l'image d'un très petit objet constamment localisé dans l'espace au cours du temps malgré le caractère de son mouvement et la conception d'une particule dénuée d'individualité nous paraît contradictoire.

Il est intéressant de remarquer, en en donnant un exemple simple que l'on peut trouver, même au niveau macroscopique, des cas où des objets bien individualisés possèdent pour certaines évaluations de proba-



bilités une équivalence statistique analogue à celle des bosons de même nature. Considérons un damier sur lequel sont répartis des pions blancs et des pions noirs. Ces pions ont sans aucun doute une individualité permanente car chacun d'eux est un petit morceau de bois constamment localisé sur le damier et s'y déplaçant d'une certaine façon au cours de la partie de dames. Mais, si à un instant donné nous permutons les positions de deux pions de même couleur, rien ne sera changé en ce qui concerne l'évolution ultérieure possible de la partie de dames. Or, d'après les diverses positions qu'ont à un moment donné les pions blancs et les pions noirs, l'on devrait pouvoir calculer les probabilités pour que l'un ou l'autre des joueurs gagne la partie. Comme la permutation sur le damier des positions de deux pions de même couleur ne peut évidemment pas changer ces probabilités, on a bien là un exemple d'objets macroscopiques, les pions, qui ont certainement une individualité, mais qui sont néanmoins statistiquement indiscernables.

Pour terminer cette étude des ensembles de bosons de même nature, notons qu'il y aurait évidemment lieu d'étendre la théorie précédente aux bosons de spin  $n\hbar$  avec  $n \geq 1$ , mais cela exigerait une étude plus compliquée parce que pour ces bosons, on ne peut plus adopter pour la propagation des ondes dans l'espace physique l'équation de Schrödinger, même si l'on s'en tient à l'approximation non relativiste.

4. **Esquisse de la Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration pour les fermions de même nature.** — Nous allons maintenant considérer le cas de deux fermions de même nature ayant le spin  $\frac{\hbar}{2}$  (ce qui est le cas des électrons). Ici encore, quand il y a interaction et que les ondes  $\nu$  des deux fermions occupent une même région de l'espace, nous avons affaire à une série d'ondes corrélées  $O_1-O_2$ ,  $O'_1-O'_2$ , ... portant des trajectoires corrélées  $T_1-T_2$ ,  $T'_1-T'_2$ , .... La théorie de Dirac que nous devons ici considérer à l'approximation newtonienne (théorie de Pauli) définit chaque onde  $\nu$  à l'aide de deux composantes  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , où  $\nu_1$  correspond au spin  $\sigma_1 = \frac{\hbar}{2}$  et  $\nu_2$  au spin  $\sigma_2 = -\frac{\hbar}{2}$ . En chaque point de l'espace physique, le spin local est défini par les formules

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{\hbar}{2} (\nu_1^* \nu_2 + \nu_2^* \nu_1), \\ \sigma_y = \frac{\hbar}{2} (\nu_1^* \nu_2 - \nu_2^* \nu_1), \\ \sigma_z = \frac{\hbar}{2} (\nu_1 \nu_1^* - \nu_2 \nu_2^*). \end{array} \right.$$

Quand l'un des fermions se trouve en un point de l'espace, son spin est déterminé par la valeur du vecteur  $\vec{\sigma}$  en ce point. Puisque, pour nous, les particules sont constamment localisées dans l'espace, nous devons supposer qu'à l'instant  $t$ , la particule 1 se trouve en un point A de sa trajectoire de guidage  $T_A$  et la particule 2 en un point B de sa trajectoire de guidage  $T_B$ .

Prenons alors la droite BA pour axe des  $x$  et le milieu de  $\overline{BA}$  pour origine des coordonnées, les axes  $Oy$  et  $Oz$  devant être définis plus loin. On peut alors poser  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB} = -\vec{r}_1$ . Si nous supposons les particules attachées à l'axe  $Ox$  et si nous faisons tourner cet axe autour d'un axe qui lui est perpendiculaire en  $O$ , cette rotation aura pour résultat de faire passer la particule 1 de A en B et la particule 2 de B en A de sorte que l'on aura ainsi passé de la situation  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$ , à la situation  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OB}$ . Les particules ont ainsi échangé leurs positions. L'état ondulatoire initial en A sera représenté par  $\varphi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$  et par  $\varphi_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$  que nous écrirons simplement  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  tandis que l'état ondulatoire initial en B sera représenté par  $\varphi_1(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t)$  et  $\varphi_2(\vec{r}_2, \vec{r}_1, t)$  que nous représenterons par  $\tilde{\varphi}_1$  et  $\tilde{\varphi}_2$ , le signe  $\sim$  indiquant la permutation de  $\vec{r}_1$  et de  $\vec{r}_2$ . Dans l'état final, l'état ondulatoire sera représenté en A par  $\tilde{\varphi}_1$  et  $\tilde{\varphi}_2$  et en B par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

Mais les particules en échangeant leurs positions doivent aussi échanger leurs spins puisque les spins sont définis en A et B par l'état ondulatoire local qui n'est pas modifié par la permutation des particules. Il est alors facile de voir que cela ne peut être réalisé que si les spins sont parallèles ou antiparallèles. Nous pouvons donc prendre l'axe  $Oz$  dans le plan déterminé par les deux spins et l'axe  $Oy$  perpendiculaire à ce plan. Dans le cas des spins parallèles, on obtient l'une ou

l'autre des figures suivantes :

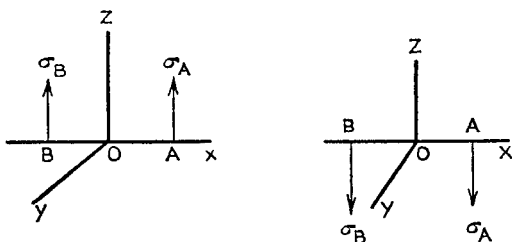


Fig. 9.

et l'on voit que pour réaliser à la fois l'échange des positions et des spins entre les deux particules, il suffit de faire tourner les axes autour de  $Oz$  d'un angle égal à  $\pi$ . Si, au contraire, les axes sont antiparallèles, on aura l'une ou l'autre des figures suivantes :

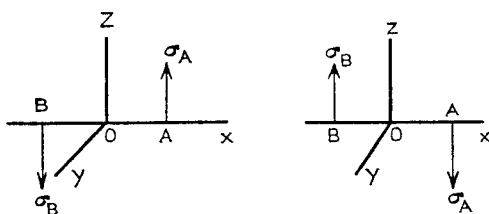


Fig. 10.

et, pour obtenir l'échange des positions et des spins des deux particules, il suffira de faire tourner les axes de  $\pi$  autour de  $Oy$ .

Rappelons qu'en théorie de Dirac non relativiste, les composantes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  se transforment lors d'une rotation

de l'angle  $\theta$  autour de Oz de la manière suivante symbolisée par une flèche :

$$(10) \quad \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad \varphi_2 \rightarrow \varphi_2 e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

tandis que, pour une rotation de  $\pi$  autour de Oy la transformation est

$$(11) \quad \varphi_1 \rightarrow \varphi_1 \cos \frac{\theta}{2} - \varphi_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad \varphi_2 \rightarrow \varphi_2 \cos \frac{\theta}{2} + \varphi_1 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Nous allons étudier d'abord le cas des spins *parallèles*. Comme nous devons alors faire tourner les axes de  $\pi$  autour de Oz, nous aurons à appliquer les formules (10), mais en tenant compte du fait qu'il y a simultanément permutation des positions des particules, ce qui nous conduit à écrire

$$(12) \quad \varphi_1 \rightarrow i\tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2 \rightarrow -i\tilde{\varphi}_2, \quad \tilde{\varphi}_1 \rightarrow i\varphi_1, \quad \tilde{\varphi}_2 \rightarrow -i\varphi_2.$$

Par analogie avec ce que nous avons fait dans le cas des bosons, nous définirons la fonction d'onde du système des deux particules dans l'espace de configuration pour les deux cas de spins parallèles par les produits  $\varphi_1\tilde{\varphi}_1$  et  $\varphi_2\tilde{\varphi}_2$  qui obéissent d'après (12) aux formules de transformation

$$(13) \quad \varphi_1\tilde{\varphi}_1 \rightarrow -\varphi_1\tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2\tilde{\varphi}_2 \rightarrow -\varphi_2\tilde{\varphi}_2.$$

Nous obtenons donc deux fonctions d'onde dans l'espace de configuration qui sont antisymétriques pour l'échange des positions et des spins. Or, comme elles sont évidemment symétriques pour l'échange des

spins, elles doivent être antisymétriques pour l'échange des positions. Il est important de remarquer que nous n'avons pas à considérer dans l'espace de configuration les fonctions d'onde de la forme  $\varphi_1 \tilde{\varphi}_2$  et  $\tilde{\varphi}_2 \varphi_1$  puisque, les spins étant parallèles, les indices de  $\varphi$  doivent être les mêmes.

Passons maintenant au cas des spins *antiparallèles*. Comme nous avons alors à faire tourner les axes de  $\pi$  autour de  $Oy$ , les formules (11), compte tenu de l'échange des positions, nous donnent

$$(14) \quad \varphi_1 \rightarrow -\tilde{\varphi}_2, \quad \varphi_2 \rightarrow \tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{\varphi}_1 \rightarrow -\varphi_2, \quad \tilde{\varphi}_2 \rightarrow \varphi_1.$$

Nous avons donc

$$(15) \quad \varphi_1 \tilde{\varphi}_2 \rightarrow -\varphi_1 \tilde{\varphi}_2, \quad \tilde{\varphi}_1 \varphi_2 \rightarrow -\tilde{\varphi}_1 \varphi_2.$$

Ici, nous n'avons pas à considérer les fonctions  $\varphi_1 \tilde{\varphi}_1$  et  $\varphi_2 \tilde{\varphi}_2$  puisque, les spins étant supposés antiparallèles, les indices des  $\varphi$  dans les produits doivent être différents. Mais, pour avoir des caractères de symétrie bien définis en position et en spin, nous devons remplacer les fonctions  $\varphi_1 \tilde{\varphi}_2$  et  $\tilde{\varphi}_1 \varphi_2$  par les combinaisons symétriques et antisymétriques dont les formules de transformation sont les suivantes :

$$(16) \quad \varphi_1 \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_1 \varphi_2 \rightarrow -(\varphi_1 \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_1 \varphi_1); \quad \varphi_1 \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 \varphi_2 \rightarrow -(\varphi_1 \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 \varphi_2).$$

Les deux combinaisons envisagées sont donc antisymétriques en position et en spin. La première,  $\varphi_1 \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_1 \varphi_2$ , étant symétrique en spin (c'est-à-dire par l'échange des indices 1 et 2) doit être antisymétrique

pour l'échange des positions tandis que la seconde,  $\varphi_1 \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 \varphi_2$ , étant antisymétrique en spin, doit être symétrique pour l'échange des positions.

Finalement nous avons obtenu comme fonctions d'onde possibles dans l'espace de configuration, d'une part les trois fonctions

$$\varphi_1 \tilde{\varphi}_1, \quad \varphi_2 \tilde{\varphi}_2, \quad \varphi_1 \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_1 \varphi_2$$

dont les symboles de spin sont  $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$  et qui sont symétriques en spin et antisymétriques en position, d'autre part l'unique fonction d'onde

$$\varphi_1 \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 \varphi_2$$

dont le symbole de spin est  $\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$  et qui est antisymétrique en spin et symétrique en position.

Nous avons ainsi retrouvé les états triplets et singulets bien connus dans la théorie des systèmes de deux électrons.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. R. Acad. Sc., t. 177, 1923, p. 506, 548 et 630. *Thèse de Doctorat*, Masson, Paris, 1924; rééditée en 1963.
- [2] *J. Physique*, t. 6, 1927, p. 225.
- [3] Conseil de Physique Solvay, octobre 1927, Bruxelles; Rapports et discussions, Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 253-256.
- [4] a. *Une interprétation causale et non linéaire de la Mécanique ondulatoire : la théorie de la double solution*, Gauthier-Villars, Paris, 1956; traduction anglaise : Elsevier, Amsterdam, 1960.  
 b. *La théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.  
 c. *Étude critique des bases de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1963; traduction anglaise : Elsevier, Amsterdam, 1964.  
 d. *Ondes électromagnétiques et Photons*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.  
 e. *J. Physique*, t. 20, 1959, p. 963.  
 f. *J. Physique*, t. 28, 1967, p. 481.
- [5] G. DARMOY, Les équations de la Gravitation einsteinienne. — *Mémorial des Sciences mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1927.  
 A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.
- [6] F. FER, *Thèse de Doctorat*, mai 1956; Bureau de Documentation minière, 1957.  
 M. THIOUNN, *Thèse de Doctorat*, juin 1963; Éditions de la Revue d'Optique, Paris 1965.  
 M. THIOUNN, *Cahiers de Physique*, t. 174, 1965, p. 53; *C. R. Acad. Sc.*, t. 262, série B, 1966, p. 657; *Portugaliae Physica*, vol. 4, 1966, p. 85.



- [7] D. BOHM et J. P. VIGIER, *Phys. Rev.*, vol. 96, 1956, p. 208.
- [8] a. *La Thermodynamique de la particule isolée (ou Thermodynamique cachée des particules)*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
  - b. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1966, p. 1-19.
  - c. *Int. J. Theor. Physics*, vol. 1, n° 1, 1968, p. 1-24.
  - d. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. IX, n° 2, 1968, p. 89-108.
  - e. A. GUESSOUS, *Thèse de Doctorat*, 1967.
  - A. BROTA, *Thèse de Doctorat*, 1969.
- [9] a. E. NELSON, *Phys. Rev.*, vol. 150, 1966, p. 1079. b. *C. R. Acad. Sc.*, t. 264, 1967, p. 1041.
- [10] G. LOCHAK, *J. Physique*, t. 26, 1965, p. 235.  
G. LOCHAK et M. THIOUNN, *C. R. Acad. Sc.*, 268, série B, 1969, p. 897 et 1969; *J. Physique*, t. 30, 1969, p. 482.
- [11] L. de BROGLIE et J. L. ANDRADE E SILVA, *Phys. Rev.*, vol. 172, n° 5, 1968, p. 1284; *C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série B, 1969, p. 277.
- [12] J. L. ANDRADE E SILVA, *Thèse de Doctorat*, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE I

### **Les débuts de la Mécanique ondulatoire.**

	Pages
1. Naissance de la Mécanique ondulatoire . . . . .	1
2. Les travaux de Schrödinger. La découverte de la diffraction des électrons . . . . .	6
3. La théorie de la double solution et le Conseil Solvay de 1927 . . . . .	8
4. Retour à mes idées primitives depuis 1951 . . . . .	12

## CHAPITRE II

### **Exposé de la théorie de la double solution.**

1. Hypothèses et équations de base . . . . .	15
2. Formule du guidage et potentiel quantique . . . . .	18
3. Interprétation du mouvement de guidage . . . . .	23
4. Interprétation des équations de continuité (C) et (C') . . . .	27

## CHAPITRE III

### **Compléments sur la théorie de la double solution.**

1. Introduction de l'onde statistique $\Psi$ . . . . .	31
2. La localisation de la particule dans l'onde et la loi du guidage . . . . .	36

3. Extension de la Dynamique du guidage aux particules de spin $\frac{\hbar}{2}$ et $\hbar$ .....	39
a. Particule de spin 0 (équation de Klein-Gordon) . . . .	40
b. Particule de spin $\frac{\hbar}{2}$ (équations de Dirac) .....	41
c. Cas du photon et des particules de spin $\hbar$ (équations maxwelliennes) .....	44

## CHAPITRE IV

### La Thermodynamique cachée des particules.

1. Nécessité d'introduire en théorie de la double solution un élément aléatoire .....	49
2. Introduction de la Thermodynamique cachée des particules .....	53
3. Introduction des perturbations aléatoires d'origine subquantique .....	64
4. La prérogative des ondes planes monochromatiques et des états stationnaires et l'existence des états transitoires ..	71

## CHAPITRE V

### Inexistence des ondes planes monochromatiques.

#### Analyse de diverses expériences et problèmes non résolus.

1. Inexistence physique des ondes planes monochromatiques .....	79
2. Difficultés que l'on rencontre si l'on oublie la limitation des trains d'ondes .....	84
a. Problèmes de choc et objection de Schrödinger . . . .	85
b. Sur les corrélations dans la mesure des spins .....	88
c. Sur une objection d'Einstein à la formule du guidage .....	93

	Pages
3. Analyse de diverses expériences . . . . .	97
a. Trous d'Young et interférence des probabilités . . . . .	97
b. Le miroir semi-transparent d'Heisenberg . . . . .	100
c. Projet d'une expérience mettant en défaut les idées actuellement admises . . . . .	103
d. Sur le dispositif d'apodisation . . . . .	108
4. Problèmes non résolus . . . . .	111

## CHAPITRE VI

**La Dynamique du guidage dans un milieu réfringent  
et dispersif et la théorie des antiparticules.**

1. Théorie générale . . . . .	117
2. La masse propre modifiée . . . . .	121
3. Comparaison avec la théorie des antiparticules . . . . .	124
4. Introduction de la Thermodynamique cachée des particules . . . . .	128

## CHAPITRE VII

**Autres applications  
des idées précédemment développées.**

1. Sur la relation $\oint \vec{p} \cdot d\vec{s} = n h$ de l'ancienne théorie des quanta et la théorie de la double solution . . . . .	133
2. Sur une expérience récente de MM. Pfleeger et Mandel . . .	136
3. Sur l'interprétation des relations d'incertitude . . . . .	140
4. Sur le paradoxe de Gibbs . . . . .	145
5. Spin et moment de quantité de mouvement . . . . .	151
6. Sur l'impossibilité de mesurer simultanément les compo- santes d'un moment de rotation et d'un spin . . . . .	159

## CHAPITRE VIII

**L'interprétation de la Mécanique ondulatoire  
dans l'espace de configuration.**

	Pages
1. La Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration pour des particules de nature différente . . . . .	165
2. Mécanique ondulatoire des particules de même nature. Cas des bosons de spin zéro . . . . .	171
3. Compléments au sujet des bosons de même nature . . . . .	177
4. Esquisse d'une Mécanique ondulatoire dans l'espace de configuration pour les fermions de même nature . . . . .	183
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	189
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	191

---

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

182880-71

---

Dépôt légal, Éditeur, 1971, n° 1826

Dépôt légal, Imprimeur, 1971, n° 1961

ACHEVÉ D'IMPRIMER LE 30 JUILLET 1971

Imprimé en France