

LES INCERTITUDES D'HEISENBERG ET L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

FONDATION



OUVRAGE PUBLIÉ SOUS LA RESPONSABILITÉ DE :

Simon DINER, Daniel FARGUE et Georges LOCHAK

RESPECTIVEMENT :

RESPONSABLE DU SEMINAIRE,
VICE-DIRECTEUR
ET DIRECTEUR DE LA FONDATION LOUIS DE BROGLIE

1, rue Montgolfier 75003 PARIS

LES INCERTITUDES D'HEISENBERG ET L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

AVEC DES NOTES CRITIQUES DE L'AUTEUR

**PAR
LOUIS DE BROGLIE**

**Secrétaire Perpétuel d'honneur de l'Académie des Sciences
Prix Nobel**

**PRÉFACE ET NOTES COMPLÉMENTAIRES
DE
Georges LOCHAK**

PHYSIQUE
CATÉGORIE : 538
CLASSEMENT : BRO-20

gauthier-villars

**OUVRAGE PUBLIÉ AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ET DE L'ACADEMIE DES SCIENCES**

© BORDAS, Paris, 1982
ISBN : 2-04-015411-6

“ Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration ”

AVANT-PROPOS

(LE TEXTE PLACÉ ICI EN AVANT-PROPOS A ÉTÉ ÉCRIT PAR L'AUTEUR POUR LES « ANNALES DE LA FONDATION LOUIS DE BROGLIE » EN VUE DE LA COMMÉMORATION DU CENTENAIRE D'EINSTEIN.)

Planck et surtout d'Einstein se sont heurtées à l'impénétration de savants éminents. Ils en ont triomphé, mais à mesure que l'organisation de la recherche devient plus rigide, le temps augmente que les îles nouvelles et fécondes ne pourront pas se développer librement.

Tirons en quelques mots la conclusion de ce qui précède. Tandis que, par la force même des choses, s'apparentent sur la recherche et sur l'enseignement scientifique le poids des structures administratives et des préoccupations financières et la lourde armature des réglementations et des planifications, il devient plus indispensable que jamais de préserver la liberté de la recherche scientifique et la libre initiative des chercheurs originaires parce qu'elles ont toujours été et resteront toujours les sources les plus fécondes des grands progrès de la science.

25 Avril 1978

Louis de Broglie

NÉCESSITÉ DE LA LIBERTÉ DANS LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

L'histoire des Sciences montre que dans leur domaine, les plus grands progrès ont été effectués par des penseurs audacieux qui ont aperçu des voies nouvelles et fécondes que d'autres n'apercevaient pas. Si les idées des savants de génie qui ont été les promoteurs de la science moderne avaient été soumises à des commissions de spécialistes, elles leur auraient sans nul doute paru extravagantes et auraient été écartées en raison même de leur originalité et de leur profondeur. En fait, les luttes soutenues, par exemple, par Fresnel et par Pasteur suffiraient à le prouver, certains de ces pionniers se sont heurtés à l'incompréhension de savants éminents et ils ont dû lutter avec énergie avant d'en triompher. Plus récemment, dans le domaine de la Physique théorique dont je puis parler en connaissance de cause, les magnifiques conceptions nouvelles de Lorentz, de Planck et surtout d'Einstein se sont heurtées à l'incompréhension de savants éminents. Ils en ont triomphé, mais à mesure que l'organisation de la recherche devient plus rigide, le danger augmente que les idées nouvelles et fécondes ne puissent pas se développer librement.

Tirons en quelques mots la conclusion de ce qui précède. Tandis que, par la force même des choses, s'appesantissent sur la recherche et sur l'enseignement scientifique le poids des structures administratives et des préoccupations financières et la lourde armature des réglementations et des planifications, il devient plus indispensable que jamais de préserver la liberté de la recherche scientifique et la libre initiative des chercheurs originaux parce qu'elles ont toujours été et resteront toujours les sources les plus fécondes des grands progrès de la Science.

25 avril 1978
Louis de Broglie.

LE PROBLÈME DU DÉTERMINISME CACHÉ

FAC-SIMILÉ DE L'UNE DES NOTES INSÉRÉES
PAR LOUIS DE BROGLIE DANS SON MANUSCRIT
(Le texte se trouve pp. 244 et 245 du présent volume)

(*)

Page 160

L'existence de la théorie de l'onde-pilote semble montrer cependant qu'il existe une sorte de fissure dans le raisonnement de M. von Neumann. En effet, la théorie de l'onde-pilote fournit une interprétation naturelle des lois de la probabilité de la mécanique ondulatoire telle que les difficultés qu'elle souffre, à la limite d'exister alors que le raisonnement de M. von Neumann a la prétention de lui interdire d'exister. Ce raisonnement constituait donc un point faible. Je pense que ce point faible est le suivant : von Neumann admet que toutes les répartitions de probabilité existent au même titre à chaque instant. Il en est différemment dans la théorie de l'onde pilote : le corpuscule aurait à chaque instant une position et une q.m. bien déterminée qui seraient pour nous des "variables cachées" dont les valeurs seraient inaccessibles à nos sens. Notre ignorance de la position introduirait alors d'une manière toute classique des probabilités de localisation qui seraient les probabilités en $1/4\pi^2$ de la H.O. Par contre les composantes de la q.m. auraient des valeurs possibles dont la variation serait en général très compliquée et dont les lois de probabilité sans indice plastique puisque ces valeurs ne sont pas accessibles. La distribution des probabilités pour les composantes de la q.m.

donnés par la M.O (principe de décomposition d'opérateur) ne seraient utilisables qu'après une mesure de la q.m. quand on connaît pas le résultat de la mesure... Les deux distributions de probabilité pour la localisation et pour la q.m. ne seraient donc pas simultanément valables, ce qui ferait tomber le raisonnement de von Neumann.

Supposons cela. Soit un état initial $\psi_0 = \sum_i c_i \psi_i$ où $c_i = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i k_i x}$: $x = i^*$. Dans la théorie de l'onde-pilote le corpuscule a une positionnelle à de probabilité $|c(x)|^2$ avec la quantité de mouvement $p_x = \frac{\hbar}{m} \frac{d}{dx} \psi_0$. On a un collectif classique ^(chotog) défini par les points $|4(x)|^2$ et pour grandeurs cette $A^2 = (\bar{A})^2$ dans l'état défini par $x = x^*$. Si l'on effectue une mesure de p_x గේ^a pour effacer les diverses composantes du développement de Fourier, on obtient un autre collectif ^b défini par les points d'onde correspondant aux diverses valeurs de p_x aux points $(|c(p)|^2)$. L'erreur du raisonnement de von Neumann serait alors de croire toujours en même temps les deux collectifs qui sont valables l'un dans l'état initial, l'autre après la mesure de p_x . C'est également la même raison qui empêcherait de reconstruire le schéma classique de la statistique quand on adopte la théorie des grandeurs les lois de probabilité de la M.O (voir plus haut).

La p.6 de v. de la théorie de l'onde-pilote conduit à attribuer une importance à la représentation q qui à la représentation p, ce qui conduit à des considérations intéressantes sur la théorie de la mécanique des

A
très
de préfacier ,
d'un
qui , hélas , nous
plus .

Picel Karatchentzoff , en
bunille et amical dommage , en lieu et place
du préfacier , en plus illustre
me recevrons

J. Kochak
le 26 Septembre 1982

PRÉFACE

L'ÉVOLUTION DES IDÉES DE LOUIS DE BROGLIE SUR L'INTERPRÉTATION DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

par Georges LOCHAK

L'ouvrage qu'on va lire est tout à fait exceptionnel non seulement dans l'œuvre de Louis de Broglie, mais encore dans la littérature scientifique en général, car on y saisira sur le vif la pensée d'un grand auteur qui soudain se retourne et s'interroge sur la signification véritable d'une théorie dont il est lui-même l'un des créateurs.

Le manuscrit de ce livre date de 1950-1951 et Louis de Broglie a attendu 30 ans avant d'en autoriser la publication. Il l'a désavoué, en effet, peu après l'avoir écrit, car il y exposait, pour la dernière fois sans critique et d'une manière particulièrement brillante et convaincante, l'interprétation de la Mécanique ondulatoire selon les idées de l'Ecole de Copenhague auxquelles il adhérait encore à l'époque mais dont il commença, justement, de douter en relisant son propre texte. Ses doutes s'exprimeront dans ce livre par diverses notes qui étaient collées entre les pages du manuscrit, et que nous reproduirons, ou par des ratures et des petites corrections significatives rajoutées après coup et dont nous ferons état.

Ce dialogue entre un auteur et ce qu'il était encore, lui-même, quelques mois auparavant produit sur le lecteur l'émouvante sensation d'entrer dans l'intimité de sa pensée, d'autant plus que celle-ci s'éclaire par une évolution future que, maintenant, nous connaissons. Louis de Broglie, en effet, par un revirement qui parut brusque à tout le monde mais qui ne faisait, en réalité, que cristalliser de longues réflexions dont nous reparlerons plus loin, devait bientôt devenir un impitoyable contempteur de cette Ecole de Copenhague dont il avait longtemps embrassé les vues. Et en même temps qu'il adopta cette attitude critique, il reprit avec un enthousiasme juvénile sa théorie de la double solution, qu'il avait jadis abandonnée mais dans laquelle il mit à nouveau tous ses espoirs ; était-ce à tort ou à raison c'est là une question qui reste un sujet de controverses que l'avenir, peut-être, un jour tranchera.

Mais, si la théorie proposée par Louis de Broglie reste encore en suspens, je crois, par contre, pouvoir affirmer que les événements ont déjà donné raison à ceux qui, comme lui, ont relancé, puis développé, la vieille interrogation au sujet de l'interprétation des théories quantiques.

Les temps ont changé depuis 30 ans mais à cette époque-là, la brusque reconversion de l'un des plus célèbres physiciens du siècle fit sensation et même scandale. On en parlait à mi-voix, dans les couloirs de l'Institut Henri-Poincaré, comme si Louis de Broglie eût été pris d'un subit accès d'une grave maladie dont il était prudent de se tenir à l'écart.

Ceci n'empêchait pas, bien sûr, qu'une assistance unanimement muette et respectueuse se pressât à ses cours et à ses séminaires tandis que lui passait, majestueux et aimable comme à l'ordinaire, affectant de ne rien savoir. Mais n'en était-il pas de même à Princeton où Einstein, refusant obstinément de suivre le courant dominant en physique, traversait de son air distrait et bon-homme le nimbe de dévotion qui l'entourait, mais écrivait à Max Born (¹) : « ... je suis considéré ici comme une sorte de fossile que les ans ont rendu aveugle et sourd » ?

Le débat s'amplifia, prit une dimension mondiale, avec des allures de guerre de religion et on vit entrer en lice la plupart des fondateurs de la physique quantique suivis de leurs bouillants épigones, en même temps qu'apparurent de jeunes et brillants outsiders comme David Bohm, soudain porté sur le devant de la scène parce qu'il avait eu le grand mérite d'avoir servi de déclencheur à toute cette affaire.

Le débat ne s'est plus jamais éteint. Il est devenu commun de s'interroger sur les bases de la Mécanique quantique au sujet desquelles la belle et silencieuse unanimité de jadis s'est largement rompue, ce qui est heureux car l'unanimité sans faille ne s'obtient guère en science qu'au détriment de l'inventivité et ne peut aboutir qu'à la mort dans l'idéologie et la scolastique.

Dans le débat actuel, les idées de Louis de Broglie, loin d'être admises par tous, restent encore, il faut le dire, ignorées de beaucoup, souvent critiquées par ceux qui les connaissent (plus encore par ceux qui ne les connaissent pas, ce qui est banal) et ses élèves, comme lui-même, reconnaissent qu'elles ne constituent pas encore un tout cohérent que l'on puisse regarder comme une théorie achevée. Cependant, ces idées commencent à ressurgir là et là, surtout à l'étranger.

C'est le cas, par exemple, avec les travaux récents sur les équations d'ondes non linéaires et sur les *solitons*, dont seuls quelques auteurs signalent que de Broglie et ses élèves en furent les incontestables initiateurs en microphysique ; je pense également à des idées comme la primauté des mesures de position sur celles des autres grandeurs physiques et sur la primauté qui s'ensuit pour le rôle de l'analyseur spectral sur l'appareil de mesure proprement dit, qui furent longuement développées par de Broglie et qu'on voit ressortir.

(¹) Albert Einstein, Max Born, *Correspondance 1916-1955*, Ed. du Seuil, Paris, 1972, p. 196.

Après avoir rédigé ce manuscrit que nous ne publions qu'aujourd'hui, Louis de Broglie a développé ses critiques et défendu ses nouvelles idées dans douze livres et plus de soixante mémoires, mais ce livre-ci conservera, j'en suis sûr, une place à part parce qu'il représente un tournant dans son œuvre et aussi parce que c'est le livre de l'interrogation.

En effet, dans les travaux qui ont suivi cet ouvrage, on retrouve partout un double aspect : la critique des théories existantes et la proposition d'une solution de rechange. Or un lecteur peut fort bien être disposé à entendre la critique, ou du moins la question posée, sans pour autant accepter la théorie que de Broglie soutient, si bien que, dans l'esprit d'un tel lecteur, la réponse qu'on lui offre peut oblitérer la pertinence de la question. Ici, au contraire, rien de tel, car les termes sont inversés. La conception soutenue dans le livre est celle de l'Ecole de Copenhague et de Broglie, dans ses notes, ne fait encore que s'interroger à son sujet, ce qui le met de plain-pied avec un lecteur qui, lui aussi, s'interroge. Mais il n'en demeure pas moins que ces notes, ces « paperoles » comme aurait dit Proust, ajoutées au manuscrit, contiennent déjà sous une forme brève et parfois encore elliptique et dubitative (si bien qu'il faudra parfois les décrypter pour le lecteur) presque toutes les idées qui furent à la base de ce nouveau quart de siècle de travail que Louis de Broglie allait entamer à l'âge de 60 ans.

Que le lecteur approuve ces idées, ou qu'il les désapprouve, il est souhaitable qu'il les lise sans manichéisme, en sachant reconnaître le génie d'où qu'il souffle, que ce soit chez de Broglie ou chez Heisenberg, chez Bohr comme chez Einstein. Leur grande époque est révolue, hélas, et les créateurs de la Physique quantique sont aujourd'hui tous morts ou très âgés. Ils sont entrés dans l'histoire et ont emporté avec eux leurs haines et leurs rivalités de grands fauves de la science. Bien sûr, ces rivalités se prolongent de nos jours et sont toujours aussi âpres car la science est un champ clos où s'affrontent des hommes et des idées ardentes et non pas une armoire frigorifique pour vérités établies. Mais au moins disputons-nous entre nous et non plus avec eux ! Admirons leur valeur sans gâter par de vaines restrictions mentales le plaisir intellectuel et artistique que procure leur enseignement. Admirons dans ce livre, aussi bien les subtiles analyses de Bohr et Heisenberg qui y sont rapportées que celles de de Broglie lui-même ; et admirons ce sexagénaire qui ajoutait à son génie scientifique assez de force d'âme, de goût du risque et de mépris du qu'en-dira-ton, pour se remettre en cause alors qu'il était parvenu au faîte de sa carrière et pour mettre en jeu une renommée étincelante, au nom d'une idée dont personne encore ne voulait. Et rêvons un peu aussi, peut-être, sur cette grâce divine d'avoir vécu assez vieux pour accomplir, au soir de sa vie, une nouvelle œuvre et pouvoir dire plus tard, à 80 ans : « Je me suis souvent demandé, dans ces dernières années, si la période qui a suivi mes 70 ans n'a pas été, du point de vue intellectuel, la plus belle de ma vie » (réf. III, 9).

Pour apprécier vraiment ce livre charnière et le revirement qu'il annonce, il est, toutefois, nécessaire de le situer exactement dans l'itinéraire scientifique de son auteur, lequel avait fait, de l'exposé qui va suivre, la condition *sine*

qua non de la publication de son manuscrit. Je crois même intéressant de commencer par raconter l'histoire de cette publication elle-même.

Quand Louis de Broglie, voici quelques années, me fit part de sa décision de me confier la charge d'utiliser au mieux ses papiers scientifiques, il me donna, sur le champ, un certain nombre d'entre eux.

Il s'agissait, pour la plupart, de feuilles volantes de papier à lettre de petit format que tous ses élèves connaissaient bien, sur lesquelles il avait coutume d'inscrire à l'encre noire, avec une plume « Sergent Major », des sortes de courts poèmes scientifiques, chacun d'eux consistant en l'exposé clair et concis d'une question qui tenait le plus souvent dans un seul feuillet dont les deux faces étaient recouvertes de son écriture élégante, ordonnée et sans marge, où tout ne serait que mesure, si d'évidents détails de graphisme ne laissaient transparaître une autorité impérieuse bien que toujours maîtrisée.

Ces papiers étaient classés en plusieurs enveloppes portant chacune une indication, de la main de Louis de Broglie, sur le degré d'intérêt que lui-même y attachait.

Outre ces enveloppes, il me donna plusieurs cahiers correspondant à ce que ses plus jeunes collaborateurs appelaient les « cours du jeudi » parce que, durant les dernières années de sa vie universitaire les deux cours qu'il donnait chaque semaine à l'Institut Henri-Poincaré étaient très différents l'un de l'autre : le lundi, il faisait, devant les étudiants, un cours classique de faculté qu'il répétait, pour l'essentiel, d'année en année et qui constituait la base d'un enseignement de physique théorique, que complétaient des maîtres de conférences et des chefs de travaux ; mais le jeudi matin, devant un public de chercheurs, il faisait un cours dont le sujet se renouvelait tous les ans et qui consistait en un exposé original sur un problème scientifique à l'ordre du jour, selon une tradition qui est plutôt celle du Collège de France que de la Faculté⁽¹⁾.

Ce sont ces cours qui furent à l'origine de la plupart des livres de Louis de Broglie, mais certains d'entre eux n'ont pas été publiés. C'était le cas des quelques-uns qu'il m'a confiés. Il a tout de suite attiré mon attention sur deux de ces cahiers qui se faisaient remarquer de toute manière par leur belle reliure cartonnée recouverte de toile glacée beige : malheureusement, c'était pour me prévenir contre leur éventuelle publication. Il avait même pris la précaution d'inscrire sur la page de garde de chacun d'eux, d'une écriture énergique :

« A ne pas publier »

et ces mots étaient encadrés d'un double trait. Il me dit brièvement ses raisons, tout en m'engageant à lire le manuscrit et me faisant la faveur d'ajouter : « Pour quelqu'un comme vous, cela peut être très intéressant. » Mais quand j'ai lu ce texte, le lendemain même, avec une émotion qui dépassait de loin le seul intérêt scientifique, sachant par cœur le prolongement de chaque paperole, devinant à demi-mot le sens de la plus petite note ajoutée au crayon

⁽¹⁾ En réalité, cette distinction entre les deux cours ne s'est faite qu'à partir de 1954. Jusque-là, ils étaient tous deux de même nature et se renouvelaient chaque année.

et découvrant derrière la moindre rature ou la plus insignifiante correction cet homme que je connaissais comme mon propre père, je me convainquis aussitôt que si lui, en effet, ne pouvait pas publier ce livre, quelqu'un d'autre le pouvait et j'entrepris, bientôt, d'essayer de le flétrir, de le persuader que son texte, en un sens, ne lui appartenait plus, qu'il appartenait à l'histoire des sciences et que celle-ci méritait bien que, sous une forme ou sous une autre, on le lui livrât. Je fis valoir également que le public scientifique n'est que trop habitué à recevoir une science aseptisée, sortie toute armée et brillante de la tête de Jupiter, si bien que les présentations des théories modernes, axiomatisées, synthétiques et formelles donnent faussement à penser que, contrairement aux artistes, les hommes de science seraient capables, en quelque sorte, de pondre des résultats bien ronds et bien lisses, frappés d'emblée au sceau de l'éternité. Nous avions là, au contraire, une occasion, de montrer au lecteur une science en marche qui hésite et avance péniblement sous ses yeux, comme elle le fait dans la réalité. Or tout le monde contemple avec émotion les ébauches des sculpteurs ou les esquisses des peintres dans lesquelles, outre le charme particulier de l'œuvre en devenir, on aime à découvrir les différentes manières de l'artiste, voire les projets abandonnés et remplacés par d'autres. Alors pourquoi toujours dissimuler les esquisses des physiciens ?

La chose, au début, n'allait pas sans mal, Louis de Broglie n'étant pas homme à changer d'avis au gré du vent, mais je revins discrètement à la charge dans les mois qui suivirent, puis un jour, avec son accord, je lui rapportai les deux cahiers que nous examinâmes ensemble, après quoi, avec une feinte et quelque peu plaisante solennité, nous effaçâmes le « A ne pas publier » qui était écrit au crayon et je repartis avec l'autorisation d'éditer le manuscrit *ne varietur*, sous réserve de l'assortir d'un certain nombre de notes complémentaires et d'un texte introductif, qui replacerait cet ouvrage dans l'ensemble de son œuvre.

Ce qu'il faut expliquer, avant tout, c'est ce double revirement, à 25 ans d'intervalle, par lequel Louis de Broglie s'est d'abord écarté de ses conceptions primitives pour y revenir ensuite. Mais pour cela, il faut d'abord comprendre quelle est la place tout à fait particulière qu'il occupe dans la physique quantique.

Je crois qu'on peut affirmer qu'il a été le premier théoricien, après Einstein, à croire en l'existence des quanta de lumière (les photons) et le seul, aussi, à croire non pas même au *dualisme*, mais, selon ses propres termes, à une *coexistence entre les ondes et les corpuscules*.

On sait que l'hypothèse des quanta de lumière a eu le plus grand mal à s'imposer et qu'elle a été longtemps regardée comme une sorte d'erreur de jeunesse d'Einstein qu'on ne lui pardonnait qu'en raison de la grande renommée qu'il s'était acquise par ailleurs (¹). Même la confirmation expérimentale,

(¹) On trouve chez Einstein lui-même des témoignages de ce refus général. Par exemple : « ... je ne doute plus de la *réalité* des quanta dans le rayonnement, bien que je sois toujours seul à avoir cette conviction » (lettre à Besso datée du 29 juillet 1918).

par Millikan, des lois de l'effet photo-électrique n'a convaincu personne, pas même Millikan, et ce n'est que la découverte de l'effet Compton en 1922 qui a frappé les esprits. Mais à ce moment-là, de Broglie travaillait déjà depuis longtemps sur la théorie des quanta de lumière et, dans un article intitulé « Rayonnement noir et quanta de lumière » (réf. I, 12), il retrouvait grâce à cette hypothèse tous les résultats de la thermodynamique du rayonnement noir sans faire appel à l'électromagnétisme et en utilisant seulement la mécanique statistique et la relativité. Il retrouvait notamment, *sans se servir de la théorie des ondes*, l'expression de la loi de Stefan-Boltzmann et (2 ans avant Bose !) le fameux facteur $8\pi h/c^3$ qui figure dans la densité d'énergie du rayonnement. C'est également dans cet article qu'il émettait, pour la première fois l'hypothèse que le photon aurait une masse propre non nulle, que sa vitesse dans le vide dépendrait donc de sa fréquence et que la vitesse c ne serait qu'une sorte de vitesse limite définie par la relativité mais qui ne serait jamais atteinte, non seulement par la matière, mais même par la lumière.

Il s'efforçait, dans cet article, d'accuser le plus fortement possible et d'utiliser au mieux le caractère corpusculaire de la lumière, mais au même moment, il se souciait d'accorder les propriétés corpusculaires avec les propriétés ondulatoires dans une Note « Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière » (réf. I, 13; III, 9) dans laquelle il émettait l'idée de « l'existence d'agglomérations d'atomes de lumière dont les mouvements ne sont pas indépendants, mais cohérents » et il prédisait que « les équations de Maxwell apparaîtront sans doute comme une approximation continue (valable dans beaucoup de cas, mais non dans tous) de la structure discontinue de l'énergie radiante ».

Il est certain que cet état d'esprit domine toute l'œuvre de de Broglie et c'est en fait pour cela qu'il a découvert la Mécanique ondulatoire : c'est, tout d'abord, parce qu'il était profondément convaincu de la double nature corpusculaire et ondulatoire de la lumière et, ensuite, parce qu'il ne concevait pas les propriétés corpusculaires comme une simple « apparence », mais bien comme l'existence de « véritables » corpuscules, en tous points comparables aux autres corpuscules matériels, possédant, comme eux, une masse propre et comme eux soumis aux lois de la dynamique relativiste. Un détail révélateur, à ce sujet, est que de Broglie écrivait souvent — et je crois qu'il était seul à le faire — *atomes* de lumière pour *quanta* de lumière et, parlant de leurs aggrégations cohérentes dans les ondes lumineuses, il disait que ces atomes devaient se grouper en molécules.

Comme il accordait un égal droit de cité et une existence permanente et simultanée aux corpuscules et aux ondes dans la lumière, il fut amené à rechercher le lien qui pouvait exister entre eux et qui établirait une dépendance entre leurs mouvements. C'est cette question qui est à l'origine de la Mécanique ondulatoire car elle le conduisit à définir une fréquence de *vibration interne* du corpuscule, par l'égalité $m_0 c^2 = h\nu_0$ écrite dans le système propre. Or cette formule, d'apparence si simple, entraîne une très grave difficulté car la masse se dilate aux yeux d'un observateur en mouvement, tandis que la fréquence interne lui apparaîtra plus petite en raison du retard des horloges,

si bien que l'égalité ainsi écrite n'est pas invariante relativiste. Mais elle le devient, remarqua de Broglie, et on pourra écrire la *relation du quantum*

$$mc^2 = h\nu$$

dans tous les référentiels galiléens si on associe, dans le système propre de la particule, une *onde* stationnaire de même fréquence ν_0 que la vibration interne, car la fréquence ν de cette onde varie alors comme la masse lors d'un changement de référentiel.

Louis de Broglie établit en même temps la formule $V\nu = c^2$ qui relie la vitesse de phase de l'onde à la vitesse du corpuscule, ce qui lui permit d'énoncer le *théorème de l'harmonie des phases* qui constitue pour lui la clé du dualisme onde-corpuscule : « Le corpuscule glisse sur son onde de façon que la vibration interne du corpuscule reste toujours en phase avec la vibration de l'onde au point où il se trouve. »

Or, comme il traitait les « atomes de lumière » en véritables corpuscules son raisonnement s'appliquait plus généralement (et d'ailleurs s'énonçait comme tel) à un *mobile quelconque*, en particulier à un électron, auquel il fallait, dès lors, associer une onde et de Broglie pouvait donc annoncer dès 1923 qu'« un mobile quelconque pourrait dans certains cas se diffracter. Un flot d'électrons traversant une ouverture assez petite présenterait des phénomènes de diffraction » (réf. I, 17; III, 9).

Et il exprimait aussitôt l'idée qui est à l'origine de sa conception du monde physique :

« Nous concevons donc l'onde de phase comme guidant les déplacements de l'énergie et c'est ce qui peut permettre la synthèse des ondulations et des quanta. La théorie des ondes allait trop loin en niant la structure discontinue de l'énergie et pas assez loin en renonçant à intervenir dans la dynamique. »

Aussitôt après qu'il eût rédigé sa fameuse thèse de 1924, Louis de Broglie précisait sa pensée dans une note (réf. I, 24) qui paraissait une semaine avant la soutenance et où apparaît pour la première fois la notion de *singularité*. On y lit notamment :

« Cette propriété (il s'agit du théorème sur la vitesse de groupe), conséquence directe des équations de Hamilton, permet de considérer le point matériel comme une singularité du groupe d'ondes dont le déplacement est régi par le principe d'Hamilton-Fermat. » Ceci préfigure ce qu'il devait appeler plus tard la *loi du guidage*. Et il termine sa note par cette phrase-programme :

« Mais toute la théorie ne deviendra vraiment claire que si l'on parvient à définir la structure de l'onde lumineuse et la nature de la singularité constituée par le quantum dont le mouvement devrait pouvoir être prévu en se plaçant *uniquement* au point de vue ondulatoire. »

Enfin, peu après, le 16 février 1925, de Broglie fit un premier essai de développement de son programme dans une note intitulée « Sur la fréquence propre de l'électron » (réf. I, 25) et il montra que si l'onde de phase

$$\varphi(x, y, z, t) \exp\left[2i\pi\nu\left(t - \frac{z}{V}\right)\right]$$

obéit à l'équation de d'Alembert, son amplitude φ obéit à l'équation

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{4\pi v_0^2}{c^2} \varphi \quad \left(v_0^2 = \frac{m_0 c^2}{4} \right).$$

Malgré l'apparence, ce n'est pas l'équation de Klein-Gordon car le signe est faux et ce n'est pas en raison d'une erreur de calcul. Cependant, de Broglie n'était pas loin de découvrir la véritable équation d'onde. C'est pourquoi, dès la parution des travaux de Schrödinger, il rectifiait sa note de 1925 et fut l'un des premiers à établir l'équation d'onde scalaire relativiste de l'électron et surtout il y introduisit aussitôt ses idées sur les groupes d'ondes et calcula les premières solutions singulières (réf. I, 29) : ces solutions singulières dont il savait depuis longtemps qu'elles devaient exister et qui étaient, à ses yeux, seules capables de représenter la coexistence des ondes et des corpuscules.

Bientôt, guidé par son principe de l'harmonie des phases, il imagina le lien qui pouvait exister entre ses ondes singulières et les ondes continues de Schrödinger et il développa la *théorie de la double solution* dans un grand mémoire en 1927 (réf. I, 34).

Ce n'était pas une simple interprétation de l'équation de Schrödinger, comme pouvait l'être celle de Madelung parue au même moment. C'était la poursuite de la même idée directrice qui avait guidé ses recherches depuis le début de ses travaux et qui avait déjà abouti à la découverte des propriétés ondulatoires des corpuscules matériels.

Et pourtant, quelques mois plus tard, il renonçait à tout cela. Pourquoi ? Louis de Broglie l'a expliqué lui-même en des termes souvent émouvants dans ses « Souvenirs personnels sur les débuts de la Mécanique ondulatoire » (réf. III, 4) dont il a évidemment renié en partie l'argumentation lorsqu'il est revenu par la suite à ses idées de jeunesse, mais qui nous montrent, tout au moins, quelles étaient à l'époque, ses raisons.

Ces raisons se résument d'une phrase : il s'est, soudain, senti dans une impasse, tandis qu'à côté de lui, la physique passait triomphante. Et il a tout de suite aperçu la cause du soudain retard qu'il prenait, malgré son départ foudroyant : elle était dans la différence entre son propre point de vue et celui adopté par la plupart des autres théoriciens.

Louis de Broglie est un esprit intuitif, concret et réaliste, épris d'images physiques simples dans l'espace à trois dimensions. Il n'accorde pas de valeur ontologique aux modèles mathématiques, notamment aux représentations géométriques dans des espaces abstraits ; il ne les considère et ne les utilise que comme des instruments mathématiques commodes parmi d'autres et ce n'est pas dans leur maniement que s'exerce directement son intuition physique ; devant ces représentations abstraites, il garde toujours présente à l'esprit l'idée que les phénomènes se déroulent, en réalité, dans l'espace physique et ces raisonnements mathématiques n'ont de signification véritable à ses yeux que pour autant qu'il sente à tout moment quelles sont les lois physiques qu'ils recouvrent dans l'espace habituel.

Or il voyait naître en face de lui une approche très différente de la physique théorique, qui était en train de porter ses fruits : c'était une conception tout à fait abstraite de la physique, une description des lois naturelles non plus par des images dans l'espace et dans le temps, mais par des règles algébriques ou bien encore grâce à des raisonnements géométriques dans des espaces représentatifs abstraits le plus souvent complexes et à un grand nombre de dimensions. On assistait au développement, chez les théoriciens, d'une nouvelle sorte d'intuition physique, une intuition au deuxième degré, si l'on peut dire, qui prenait de moins en moins appui directement sur des faits physiques, et qui s'exerçait systématiquement dans le domaine des analogies mathématiques, des règles algébriques et des lois de symétrie ou de transformations de groupe. Les théoriciens ne cherchaient plus à décrire les faits, mais à les prévoir. Leurs prémisses et leurs raisonnements paraissaient purement mathématiques et il devenait très difficile, sinon impossible, de discerner derrière eux quelque image physique, mais pourtant les formules auxquelles ils aboutissaient étaient souvent, comme par miracle, vérifiées par l'expérience. On était loin de la physique théorique de Fresnel, de Maxwell ou de Lorentz. Il est remarquable qu'Einstein, pourtant célèbre pour la finesse de son intuition physique et toujours si proche de l'expérience ait été, en même temps, l'un des principaux initiateurs de ce nouvel état d'esprit, tant par ses travaux en relativité que par son mémoire de 1917 sur les quanta⁽¹⁾, dont l'influence a été très grande sur de Broglie et Schrödinger et où l'on résolvait pour la première fois un problème quantique par un raisonnement géométrique dans l'espace de configuration de la dynamique hamiltonienne.

Il est clair que la mécanique des matrices de Heisenberg et, plus encore, celle des nombres q de Dirac procédaient de cette physique abstraite, mais il en va de même pour les travaux de Schrödinger où l'onde de de Broglie perdait déjà toute signification physique directe, puisque Schrödinger la faisait se propager non plus dans l'espace habituel, mais dans l'espace de configuration, dans lequel une seule onde représente tout un système de particules ; et c'est à cette onde abstraite que, généralisant les idées de de Broglie, Schrödinger appliquait désormais, le principe de Huygens.

De cette tendance, l'Ecole de Copenhague devait bientôt faire une position de principe nettement proclamée par Bohr et Heisenberg⁽²⁾ dont la position se résume clairement dans le tableau ci-après dû à Bohr⁽³⁾.

En se fondant sur les relations d'incertitude et, plus généralement, sur la structure mathématique des théories quantiques telles qu'elles ressortaient des travaux de Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Born et von Neumann, on vit

⁽¹⁾ A. Einstein, *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, **19**, 1917, p. 82.

⁽²⁾ Voir notamment : W. Heisenberg, *Les principes physiques de la théorie des quanta*, Coll. : *Discours de la Méthode*, Gauthier-Villars, 1972 (1^{re} éd. 1931) ; W. Heisenberg, *Physique et philosophie*, Coll. : *Science d'Aujourd'hui*, Albin-Michel, Paris, 1961 ; N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, Gonthier, Genève, 1961.

⁽³⁾ Cité par Heisenberg dans : *Les principes physiques*, p. 53.

Théorie classique	Théorie des quanta
Description des phénomènes dans l'espace et le temps	soit Description des phénomènes dans l'espace et le temps
Causalité	Alternatives reliées statistiquement Relations d'indétermination

bientôt Bohr et ses disciples rejeter toute adéquation possible d'une quelconque représentation causale et spatio-temporelle des phénomènes quantiques. Autrement dit, la colonne de gauche du tableau de Bohr était définitivement rejetée dans le passé ; et l'avenir se trouvait pour eux dans la colonne de droite. Il n'y avait aucun sens, pour eux, à parler *en même temps* d'une localisation de l'électron et de ses propriétés ondulatoires, ces deux aspects de la réalité étant *complémentaires*, au sens de Bohr, et on ne perdait rien disaient-ils, à renoncer à leur coexistence, puisqu'on savait, grâce à de fines analyses physiques, qu'aucune expérience ne pourrait nous révéler les deux propriétés à la fois.

Cette interprétation de la théorie revêtait elle-même un double aspect :

— Tout d'abord, elle procédait d'options philosophiques qui relevaient du positivisme (puisque elle proclamait que seules les grandeurs observables étaient dignes de figurer dans la théorie), de l'idéalisme (car elle ne reconnaissait l'existence d'un fait ou d'une propriété que pendant leur observation), et enfin de l'indéterminisme (en renonçant, en microphysique, à la description causale des processus individuels dans l'espace et dans le temps).

— Mais elle relevait aussi d'un choix opérationnel qui a sans doute été déterminant dans le succès de cette tendance, à une époque de pleine expansion de la physique. En effet, en un sens, l'attitude de l'Ecole de Copenhague revenait à dire, selon un mot de Goethe : « Ne cherchez rien derrière les faits, ils sont eux-mêmes la doctrine. » Ils auraient même pu dire : « Ne cherchez rien derrière les formules, elles sont elles-mêmes la réalité. » Il paraît certain qu'en une période de vive expansion de la théorie, quand ses ressorts mathématiques essentiels commençaient à être connus (tels que le principe de superposition des fonctions d'ondes, la correspondance entre grandeurs physiques et opérateurs, etc.) une telle attitude libérait l'esprit, de la recherche extrêmement difficile d'images physiques sous-jacentes au formalisme et qui seraient responsables des faits observés.

La marche en avant de la théorie en était indéniablement facilitée et c'est ce que Louis de Broglie ressentit cruellement à une époque où il éprouvait les pires difficultés à exprimer mathématiquement le dualisme onde-corpuscule dans l'espace-temps. C'est ce qu'il rappelle dans « Physique et Microphysique » (p. 174) : « Mais plus je cherchais à couler dans ce moule préexistant la matière

nouvelle fournie par mes idées sur la Mécanique ondulatoire, plus je rencontrais d'obstacles et le sentiment sans cesse accru de ces difficultés contribua à m'empêcher pendant toute l'année 1925 de développer rapidement la construction que j'avais entreprise. » 1925 : c'est, ne l'oubliions pas, l'année où il a approché mais quand même manqué l'équation des ondes.

Ses premiers travaux sur les solutions singulières de l'équation de Schrödinger et sur l'équation d'ondes relativiste lui redonnèrent quelque espoir, mais aussitôt de graves obstacles s'amoncelèrent devant lui, à savoir la recherche générale des solutions singulières elles-mêmes, le comportement étrange et peu crédible des singularités dans les états stationnaires et surtout le problème d'une description spatio-temporelle des systèmes de particules, qu'il aurait voulu substituer à la théorie de Schrödinger qui reste confinée à l'espace de configuration.

Invité par Lorentz à présenter un rapport au fameux congrès Solvay de 1927, Louis de Broglie, inquiet par les difficultés mathématiques de la théorie de la double solution, n'en présenta qu'une version très affaiblie qu'il appela « théorie de l'onde pilote » et qui consistait simplement à rajouter, à l'onde continue de Schrödinger, un paramètre caché qui consistait en un point représentant le corpuscule et supposé suivre les lignes de courant de l'onde.

Ce faisant, de Broglie éludait certes les difficultés mathématiques de la théorie de la double solution, mais en revanche, il perdait la cohérence logique de sa théorie causale en faisant « piloter » le corpuscule par une onde continue dont la signification probabiliste était unanimement reconnue, ce que ses adversaires ne manquèrent pas de lui faire remarquer. Le rapport de Louis de Broglie se heurta aux critiques pénétrantes de Pauli, il ne fut soutenu ni par Schrödinger qui ne croyait pas aux corpuscules, ni par Lorentz dont il avait la sympathie mais qui était trop âgé, ni véritablement par Einstein qui se contentait de l'encourager sans l'approuver vraiment, bien qu'il attaquât par ailleurs l'Ecole de Copenhague. En revanche, de Broglie voyait devant lui le brillant quintette formé par Bohr, Heisenberg, Born, Pauli et Dirac qui présentaient non sans triomphalisme, et peu enclins à composer, leur interprétation probabiliste qui présentait certes des failles conceptuelles qu'Einstein se plaisait à élargir, mais qui constituait néanmoins — et constitue encore — l'interprétation la plus commode et la plus heuristique qu'on ait proposée jusqu'ici.

Et c'est ainsi que, troublé par les discussions du Congrès Solvay, désespérant de résoudre les problèmes qu'il s'était posés, nouvellement nommé, en outre, Professeur à l'Institut Henri-Poincaré et placé devant la difficile question de savoir quelle théorie il allait enseigner, de Broglie se résolut bientôt, à regret, à rejoindre le courant dominant et à adopter les vues de l'Ecole de Copenhague.

Un tel ralliement supposait, cependant, une profonde reconversion car il ne s'agissait pas seulement, pour Louis de Broglie, de renoncer à son interprétation de la mécanique ondulatoire, ce qui est un acte douloureux, mais encore d'acquérir des méthodes de pensée nouvelles qui lui étaient profondément étrangères et même contraires à ses instincts les plus profonds.

Il s'en est suivi que pendant 5 ans, de 1927 à 1932, en dehors de quelques travaux de mise au point, il n'a publié aucun mémoire !

Puis soudain il émergea de son long silence et, en peu d'années, il accomplit sa seconde grande découverte : la Mécanique ondulatoire du photon dont Heisenberg a pu écrire plus tard⁽¹⁾ : « La pensée exprimée par Louis de Broglie en 1936⁽²⁾ que les quanta de lumière doivent être aussi considérés comme des édifices composés, conduit à des problèmes de principe de la même importance que ceux que souleva la découverte célèbre des ondes de matière. »

Nous ne saurions ici exposer, ni même résumer cette théorie, mais il faut au moins savoir comment elle s'inscrit dans l'œuvre de de Broglie pour comprendre comment celui-ci allait être conduit vers son second revirement et son retour aux sources.

La Mécanique ondulatoire était sortie, ne l'oubliions pas, d'une généralisation à l'ensemble de la matière des idées d'Einstein sur le dualisme onde-corpuscule dans la lumière mais, curieusement, le photon n'obéissait pas aux premières équations de la Mécanique ondulatoire : l'équation de Schrödinger n'était pas relativiste et celle de Klein-Gordon ne pouvait pas rendre compte de la polarisation. C'était là une énigme qui ne pouvait laisser de Broglie indifférent et, plus qu'à tout autre, il lui revenait d'essayer de faire rentrer la lumière dans le giron de la mécanique ondulatoire à l'origine de laquelle elle s'était trouvée. Dès l'apparition de la théorie de Dirac, il sentit que la chose était possible. Il connaissait fort bien cette théorie dont il fit un magnifique exposé : « L'électron magnétique » (Hermann, 1934) ; elle était relativiste, elle contenait un élément qui ressemble à la polarisation (le spin) et on trouvait même parmi les grandeurs qu'elle permet de définir, un tenseur antisymétrique

de rang deux comme celui de Maxwell. Cela étant, le spin $\frac{1}{2}$ n'est pas le bon et la statistique qui s'ensuit est celle de Fermi et non pas celle de Bose : un photon n'est sûrement pas une particule de Dirac.

Louis de Broglie tâtonna durant quelques années avant de trouver la clé du mystère. Guidé par des considérations de symétrie, par la nécessité de rendre compte de l'annihilation du photon dans des phénomènes tels que l'effet photo-électrique et par l'analogie qui existe entre ce phénomène et celui de l'annihilation d'une paire électron-positron en théorie de Dirac, il parvint à l'idée que le photon ne doit pas être une particule élémentaire et que, précisément, il doit être constitué d'une telle paire de corpuscules de Dirac, de masse extrêmement petite : peut-être des *neutrinos*, d'où le nom de « théorie neutrinienne de la lumière » parfois utilisé. Il établit (en 1934) les équations d'onde de cette particule composée et une transformation algébrique montra que les équations de de Broglie, qui étaient donc formées d'une sorte de *fusion* de deux équations de Dirac, peuvent se scinder en deux systèmes d'équations distincts : l'un d'eux correspond à une particule de spin 0 qui n'a

⁽¹⁾ Dans : *L. de B. physicien et penseur*, Albin-Michel, Paris, 1953.

⁽²⁾ En fait la référence de Heisenberg est inexacte : la théorie date de 1934.

pas encore trouvé de correspondant expérimental, mais l'autre est tout simplement le système des *équations de Maxwell*, complétées toutefois par des termes correctifs qui font intervenir les potentiels électromagnétiques. Ces termes sont très petits parce qu'ils contiennent en facteur la masse propre du photon, mais ils ne peuvent s'annuler complètement par suite d'une circonstance qui faisait se rejoindre la logique interne de la théorie et la conviction profonde de de Broglie : il se trouve, en effet, que la cohérence des calculs impose que la masse propre du photon ne s'annule pas.

Or, si petits que soient ces termes correctifs, ils suffisent à rompre l'invariance de jauge de la théorie et la condition de jauge qui s'ensuit automatiquement est celle de Lorentz.

Bien que la théorie de de Broglie ne soit pas exempte de difficultés, on ne saurait retenir son admiration devant cette grandiose synthèse entre la matière et la lumière, réalisée par la Mécanique ondulatoire et qui se trouve à l'origine d'innombrables travaux. Louis de Broglie lui-même y a travaillé pendant plus de 10 ans, ainsi que plusieurs de ses élèves, et il a consacré vingt mémoires et six livres à cette théorie, ainsi qu'à sa généralisation aux particules de spin quelconque.

Il est intéressant de remarquer, d'ailleurs, que dans tous ces travaux, on voit davantage se manifester la nature profonde de l'auteur et la manière de raisonner qui lui est spontanée qu'on n'y trouve de traces de son adhésion aux idées de Bohr et au mode de pensée plus abstrait et formel qui s'était imposé en physique : un homme peut changer les opinions qu'il professe, mais non sa nature véritable.

La Mécanique ondulatoire du photon est bel et bien construite comme un *modèle physique* dans l'espace habituel. Les raisonnements restent toujours très proches des images classiques et ne s'en écartent que dans la mesure où ils sont aussitôt *transposés* dans le langage mathématique de la Mécanique quantique et, plus spécialement, de la théorie de Dirac. Mais les lois formelles d'invariance par rapport à un groupe, ou l'usage des représentations de groupe, notamment, ne constituent pas chez de Broglie des procédés heuristiques comme c'est le cas chez d'autres physiciens tels Heisenberg, Pauli, Jordan ou Dirac. Par exemple, l'idée de relier la suite des équations des particules à spin à la suite des représentations finies du groupe de Lorentz n'appartient pas à de Broglie, mais il faut remarquer qu'elle n'a été proposée qu'*après* qu'il a ouvert la voie en construisant sa théorie de la lumière par des raisonnements intuitifs sur l'émission et l'absorption des photons, leur rapport possible avec les paires de Dirac, les propriétés du centre de gravité d'un couple de particules relativistes, etc. Ces rapports délicats entre « Théories abstraites et représentations concrètes dans la physique moderne » ont été finement analysés par lui dans un texte (réf. III, 3 ; p. 91) où il se montre à la fois conscient de la force et de la rigueur des raisonnements abstraits et pourtant persuadé que les représentations concrètes, toujours vagues et fragiles, sans cesse remises en question, le plus souvent abandonnées parce que plus ou moins fausses, restent quand même le sel de la terre.

Dans sa théorie de la lumière, son adhésion aux idées de Copenhague ne se reconnaît, à vrai dire, qu'à l'usage qu'il y fait des algorithmes devenus habituels en Mécanique quantique, notamment des calculs des probabilités de transitions, à partir des fonctions d'ondes et des opérateurs hermitiens représentant les grandeurs physiques. En somme, il faisait usage du même langage que tout le monde, ce qui impliquait *ipso facto* l'abandon de ses idées sur la localisation permanente des corpuscules, donc l'abandon de son programme initial et cela pour des raisons générales développées par Bohr et Heisenberg, auxquelles il s'était rangé et dont il a fini, comme il l'a dit lui-même, « par être d'autant plus convaincu qu'il a plus longtemps tenté en vain de les éviter » (réf. II, 4; p. 166).

On doit reconnaître qu'il paraît bien peu probable qu'il eut, de toute manière, réalisé le programme ambitieux qu'il s'était primitivement fixé, car nous savons combien étaient grandes les difficultés qui l'avaient arrêté ; en revanche, peut-être cet abandon a-t-il permis de refermer cette grande boucle qu'il avait lui-même ouverte et qui unifiait l'électron et le photon dans la vision du monde de la Mécanique ondulatoire.

Mais, cette boucle une fois refermée (cela se passait dans les années quarante, les années de guerre), un grand vide se fit en lui, car que pouvait-il faire d'autre après cela ? La synthèse dont il avait pu naturellement rêver était, pour l'essentiel, réalisée et ne paraissait guère perfectible dans le cadre théorique connu ; le seul autre projet qui eût été à la hauteur de ses ambitions était le problème du noyau atomique mais, l'ayant étudié très attentivement (il fit, sur ce sujet, une mise au point en trois volumes), il resta insatisfait des théories existantes, tout en reconnaissant qu'il ne savait pas faire mieux. Et il commença à se demander si les insuffisances de la théorie du noyau étaient dues à un manque provisoire de savoir-faire des théoriciens ou à une insuffisance plus profonde des théories quantiques elles-mêmes.

C'est pourquoi il n'appliqua pas, en réalité, toutes ses forces à ce problème. Cependant, il avait 50 ans, il se sentait en excellente forme intellectuelle ; il n'avait pas d'autres handicaps physiques que, durant quelques années, ceux qui étaient dus à la guerre : il se nourrissait médiocrement et avait froid l'hiver, comme tout le monde, et désertait alors son bureau glacial où il n'entrait plus que subrepticement en manteau, à la recherche d'un livre, et travaillait reclus dans sa chambre chauffée avec des bûches de la Forêt de Chantilly qui appartient à l'Institut de France. Mais ce n'étaient qu'incommodités provisoires : la véritable entrave à son travail était que, se trouvant au sommet de sa carrière, il était accablé d'obligations, encore que même cela ne l'empêchât pas, grâce à des règles de vie monacales et à un travail acharné, d'écrire entre 1941 et 1951 (l'année qui nous occupe) treize livres et trente-trois mémoires originaux.

Or, ce qui nous intéresse ici est le caractère extrêmement varié, et même apparemment disparate, des travaux de cette époque, qui montre l'absence d'un grand projet en cours de réalisation. Durant ces 10 ans, Louis de Broglie a écrit, en effet, sur le photon et les particules à spin (mais de moins en moins),

sur le noyau, les guides d'ondes, l'optique électronique, les invariants adiabatiques en mécanique classique, la variance relativiste de la température, la structure du schéma probabiliste quantique, l'onde de phase et la fréquence propre de l'électron (pour la première fois depuis près de 20 ans), le problème expérimental de la mesure du spin, la théorie quantique des champs, les analogies thermodynamiques en mécanique et en électrodynamique classiques et enfin, car tout, chez lui, procède des quanta et l'y ramène, il écrivit le présent livre ou plutôt, nous le savons, le texte des conférences qu'il devait faire en 1951 et 1952 à l'Institut Henri-Poincaré.

Pourtant, si l'on examine de près ces livres et ces mémoires, si l'on rassemble les commentaires glanés ça et là, au cours d'années de conversation avec l'auteur, comme j'ai pu le faire et, enfin, si on réfléchit aux travaux qu'il a effectués par la suite, la liste des thèmes que je viens de citer s'ordonne facilement.

Certains d'entre eux sont, certes, occasionnels comme les guides d'ondes (commande d'Etat datant du début de la guerre) ou l'optique corpusculaire appelée semble-t-il par des collaborateurs ; mais même ces travaux là, apparemment très spécifiques, sont parsemés de remarques fondamentales (même de développements) sur les ondes et sur l'optique, que Louis de Broglie a utilisés et prolongés par la suite. Les travaux sur le photon et les particules à spin se passent d'explications, car ils constituent évidemment l'achèvement de toute une période. Ceux sur le noyau avaient pour but, nous l'avons dit, d'explorer les possibilités de principe de la Mécanique ondulatoire dans ce domaine et conduisirent Louis de Broglie à la conclusion que les limites de la théorie actuelle risquaient bien d'être atteintes. On peut en dire autant des travaux sur la théorie des champs dans laquelle il n'a jamais admis, que des artifices de calcul, si ingénieux soient-ils, puissent résoudre le problème des « infinis ». En fait, dès avant 1950, il commençait de se persuader que les difficultés de la théorie du noyau, comme celles de l'électrodynamique quantique, étaient irréductibles dans le cadre conceptuel admis et révélaient une impuissance fondamentale de l'ensemble de la théorie à décrire des structures spatio-temporelles. C'est cette conviction grandissante qu'il devait exprimer plus tard, lorsqu'elle cristallisa en lui en 1952, par cette phrase sans ambiguïté : « ...aujourd'hui le pouvoir explicatif de la Mécanique ondulatoire, telle qu'elle est enseignée, paraît en grande partie épousé » (réf. III, 6 ; p. 143) et c'est ce nouvel état d'esprit qui explique tous les autres thèmes de réflexion que nous avons énumérés, y compris ceux du présent livre. En effet, ces thèmes se partagent en deux catégories simples : d'une part, il s'est remis à explorer les bases les plus profondes et les plus lointaines de la théorie des quanta, en revenant à la Mécanique ondulatoire telle qu'il la concevait jadis et à des considérations de thermodynamique, de mécanique classique et de relativité qu'il devait, plus tard, longuement développer ; mais d'autre part, il s'interrogeait sur l'interprétation devenue classique et orthodoxe de la Mécanique ondulatoire, telle qu'il l'enseignait lui-même, ce qui se voit dans les travaux sur le schéma probabiliste de la théorie, sur la mesure du spin et surtout évidemment, dans

le présent livre. Ce livre était-il, comme on incline à le croire en pareil cas, une tentative de se convaincre lui-même ? A vrai dire, je l'ignore et sans doute de Broglie ne l'a-t-il jamais su vraiment : en fait, ce genre de supposition est une traite tirée sur l'inconscient et donc sans valeur contrôlable. Disons plus simplement que de Broglie s'interrogeant sur ces problèmes, il les a soigneusement réexamинés et a voulu faire part à son auditoire du fruit de ses réflexions. Une chose est sûre : l'exposé était absolument orthodoxe, convaincu et convaincant ! Seules de difficiles analyses peuvent faire naître le doute sur ces questions et de telles analyses ne se trouvaient pas dans le texte initial : les notes critiques que nous reproduisons sont toutes postérieures, même si certaines d'entre elles ne le sont peut-être que de quelques mois (nous n'en connaissons pas la date exacte). Il est certain, également, que Louis de Broglie n'envisageait pas du tout, en écrivant ce livre, de reprendre la théorie de la double solution et encore moins celle de l'onde pilote.

Or dans l'été de 1951, donc entre les deux parties de cette série d'exposés, mais alors, semble-t-il, que le manuscrit était déjà entièrement écrit, ou au moins conçu, de Broglie reçut de Princeton, un *preprint* d'un long mémoire signé d'un jeune physicien encore peu connu en France, malgré ses travaux sur les plasmas et un remarquable ouvrage de Mécanique quantique qui venait, il est vrai, tout juste de paraître : c'était David Bohm et son mémoire reprenait et développait la théorie de l'onde-pilote, dont il apprit *in extremis* et juste à temps pour l'inclure dans sa bibliographie, que de Broglie avait déjà construit la même théorie 25 ans auparavant, puis l'avait presque aussitôt abandonnée.

La première réaction de Louis de Broglie fut négative (réf. I, 93). Mieux que quiconque il connaissait les arguments qui militaient contre l'onde-pilote et notamment le principal d'entre eux, à savoir qu'on ne saurait prétendre au caractère causal du mouvement d'un corpuscule si on le fait dépendre d'une onde qui se propage non dans l'espace physique mais dans l'espace de configuration et qui est, en outre, sujette à la *réduction du paquet d'ondes* lors d'une mesure de localisation.

Mais pourtant ce mémoire de Bohm eut sur de Broglie comme l'effet de rompre un charme qui l'aurait longtemps tenu envoûté. Ce charme était celui qu'avait longtemps exercé sur lui, comme sur presque tous les théoriciens, l'ensemble du langage scientifico-philosophique, tissé d'*incertitudes* et de *complémentarité*, dont les tenants de l'Ecole de Copenhague avaient enveloppé le formalisme quantique, et que venait encore couronner — et même pérenniser — le fameux théorème de von Neumann qui affirmait, au terme d'une impressionnante construction mathématique, l'impossibilité de rendre compte des lois quantiques à l'aide d'une théorie causale à paramètres cachés.

Ce théorème relevait, quand on y réfléchit, d'une incroyable prétention philosophique : celle de prouver, de l'intérieur d'une théorie, que les principes sur lesquels elle repose sont définitifs et marquent une limite ultime des connaissances humaines. On retrouve là sous une forme nouvelle, qui n'est antinomique qu'en apparence, le triomphalisme et les excès du déterminisme

laplacien. Eh bien ! Louis de Broglie, qui venait d'exposer dans son cours ce théorème de von Neumann comme une vérité inattaquable et que personne, d'ailleurs, n'avait attaquée depuis 25 ans, eut soudain l'intuition que la théorie de l'onde-pilote, si imparfaite qu'elle fût, constituait néanmoins un contre-exemple à ce théorème qui lui interdisait en principe d'exister ; il ajouta au manuscrit une note capitale qui commence par cette phrase empreinte encore d'une légère hésitation : « L'existence de la théorie de l'onde-pilote semble montrer cependant qu'il existe une sorte de fissure dans le raisonnement de M. von Neumann. »

Et il montra ensuite, ainsi qu'on le verra dans l'ouvrage, que cette fissure se trouve dans l'hypothèse implicite que faisait von Neumann, selon laquelle les distributions de probabilités prévues par la Mécanique quantique seraient toutes simultanément réalisées, même lorsqu'elles se rapportent à des grandeurs qui ne sont pas simultanément mesurables. De Broglie était évidemment préparé à ce type d'analyse grâce à l'étude très claire qu'il avait fait paraître un peu auparavant sur le schéma probabiliste quantique (réf. V, 44 ; III, 9). Il a développé, plus tard, son argumentation dans plusieurs ouvrages (réf. II, 27, 29, 33) et elle constitue, à mon sens, la seule réfutation physique véritable du théorème de von Neumann. D'autres réfutations ont été données par la suite, car, le théorème une fois atteint, on lui a découvert d'autres faiblesses, qui sont toutes de caractère logique ou formel ; elles ne sont pas sans intérêt, mais seul, à mon avis, peut avoir une signification générale le raisonnement physique qui, en s'appuyant sur le schéma statistique de la théorie, fait appel au problème de fond qui est celui du dualisme onde-corpuscule ; c'est pourquoi il conserve sa valeur contre d'autres théorèmes du même type, même s'ils se présentent sous des formes très différentes⁽¹⁾.

Cette réfutation fut, pour de Broglie, tout à fait essentielle parce que, derrière le voile qu'il venait ainsi d'entrouvrir, il redécouvrit l'image du monde qui avait jadis été la sienne, mais qu'il avait presque laissée s'effacer de sa mémoire.

C'est cela son second revirement. C'est cette image, qu'on verra ici dans quelques courtes notes, se reformer peu à peu devant lui, trait par trait, encore exprimée avec la prudence des derniers doutes, mais en laquelle il recommence à croire et qu'il essaiera de parfaire et d'étendre durant tout son vieil âge.

Aucun physicien ne peut rester indifférent à cette conception, qu'il la partage ou qu'il ne la partage pas ; c'est une autre conception de la microphysique, complètement différente de celle qui est enseignée et chacun doit savoir qu'elle existe car c'est d'elle que la Mécanique ondulatoire est née.

Mais cette reprise tardive de la même théorie par le même homme contient-elle (au moins en germe) quelques nouvelles découvertes ? Pour ma part je le crois et je dirai plus loin lesquelles, mais je pense qu'il faut avant tout contem-

⁽¹⁾ Signalons également que dans le mémoire cité de Bohm, celui-ci écarte le théorème de von Neumann à l'aide d'un argument sur la mesure qui s'apparente à celui de de Broglie mais qu'il se contente d'esquisser.

pler ce travail d'un vieil et illustre physicien comme on peut le faire de la Pietà de Michel Ange exposée à Milan, elle aussi œuvre tardive : elle peut paraître un peu rude et inachevée si on la compare à la splendeur de la Pietà du Vatican, mais n'est-elle pas aussi une lointaine préfiguration de l'art de notre temps ?

Cette allusion à l'art est aussi naturelle, s'agissant de ce physicien homme de lettres qu'elle l'est à propos d'Einstein qui est l'homme de science qu'il a le plus passionnément admiré. Mais, tandis que le déroulement de l'œuvre d'Einstein suggère aussitôt l'idée d'une harmonie musicale, une telle métaphore serait, pour de Broglie, tout à fait hors de propos : la musique est le seul art auquel il soit resté étranger. Mais l'œuvre de de Broglie me paraît avoir deux clés.

La première, évidemment, est l'*Histoire*. Il l'a tant étudiée qu'il m'a dit un jour qu'il pensait avoir lu encore plus de livres d'*histoire* que de livres de physique. Mais plus particulièrement, l'*histoire* des idées en physique depuis le xvi^e et surtout depuis le xvii^e siècle, a joué dans son œuvre un rôle déterminant. Ce n'était aucunement, pour lui, une sorte de curiosité ou un passe-temps d'honnête homme, c'était à la fois la force motrice de son esprit de synthèse et la terre nourricière de sa pensée. Le premier mot de la fameuse thèse de 1924 était « *L'Histoire* », et ce n'est pas un fait du hasard.

Quant à la seconde clé de son œuvre, elle est de caractère visuel : c'est la recherche d'une image du monde qu'il désigne volontiers par le terme allemand de *Weltbild* en le citant de Planck. Pour de Broglie, comprendre c'est voir. Epris de modèles concrets, pour lui un modèle ne saurait être qu'une représentation visuelle dans l'espace physique. Dans sa langue, elle-même si transparente, on retrouve plus que chez quiconque des métaphores empruntées à l'optique et à la vision. En parlant d'une grande idée, il la qualifie le plus souvent de « trait de lumière » ou « d'éclair dans la nuit ». « Il n'y a que les visionnaires qui créent » aime-t-il à dire ; parlant de notre *vie intérieure*, « seul objet de connaissance », il précise que « tout ce que nous connaissons passe en effet par elle et se *réfracte* en elle » (réf. III, 6, p. 250) ; évoquant la découverte de la Mécanique ondulatoire, il raconte : « Une grande lumière se fit alors soudain dans mon esprit » (réf. III, 6 ; p. 180). La joie, pour lui, c'est de *voir* : à propos de la découverte de l'atomisme et des statistiques, il s'écrie : « Ce jour-là le voile s'est déchiré et nous avons enfin aperçu avec soulagement la réalité physique qui se cachait derrière les formes si abstraites de la Thermodynamique classique » (réf. III, 3, p. 93).

Relativiste dans l'âme, son imagination se développe dans une sorte de continuum quadridimensionnel, empruntant à l'*histoire* sa dimension temporelle et s'exprimant en images spatiales. « Seul, dit-il, a une réalité physique le déplacement d'éléments localisés dans l'espace au cours du temps ⁽¹⁾. » Une grande idée, pour de Broglie, c'est rendre compte, en une seule image spatiale, d'une synthèse résultant de l'analogie subitement aperçue entre des lois physiques différentes ou entre des représentations longtemps réputées

⁽¹⁾ *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 1, 1976, p. 116.

contradictoires. La création, pour lui, a forcément la fulgurance d'une vision poétique, après quoi il ne peut retenir quelque tristesse à la voir entre ses propres mains, ou dans d'autres, s'étoiler et perdre de son éclat par l'expression mathématique qu'il faut bien lui donner. Et son besoin d'images est si grand, qu'en évoquant « Le savant à son dernier quart d'heure » (réf. III, 6) son rêve suprême est que, peut-être, ce que nous apercevons dans l'espace-temps n'est encore pas la vision véritable et que le physicien serait comme un ouvrier tissant une tapisserie de haute lice face au revers de son ouvrage, qui ne saurait se rendre compte de l'œuvre réelle que « le jour où il pourrait retourner cet ouvrage et le contempler de face ».

Ainsi de Broglie reprit donc son œuvre et retrouva la vision du monde de sa jeunesse. En quelques mois, il en réexamina les différents aspects, il se remit à en parler avec de plus en plus d'assurance, il balaya de son esprit les conceptions qu'il s'était laissé imposer et il entreprit d'en faire la critique, en même temps qu'il s'attaquait aux difficultés techniques soulevées par sa propre théorie.

Aidé par une nouvelle équipe de jeunes élèves, il s'attaqua au problème du guidage des singularités, des paquets d'ondes indéformables dans les équations non linéaires (ce qu'on appelle maintenant les *solitons*), il étendit ses idées à la théorie de Dirac, à l'optique des milieux réfringents et, au moins en partie, aux systèmes de particules ; il élabora une nouvelle théorie quantique de la mesure ; il développa une dynamique à masse propre variable et la thermodynamique relativiste ; enfin il lança l'idée d'une thermodynamique de la particule isolée. Le tout se trouve dans une cinquantaine de mémoires et quatorze livres en comptant celui-ci.

Si je puis me permettre un choix dans tout cela, j'avancerai deux idées qui me paraissent les plus importantes.

La première est celle des *solitons*, que nous appelions des *ondes à bosse*, à l'Institut Henri-Poincaré. Cette idée de de Broglie, jadis regardée comme désuète et trop classique, jouit aujourd'hui d'un certain prestige, comme je l'ai dit plus haut, et elle a sans doute beaucoup d'avenir mais à condition d'avoir conscience du véritable obstacle, qui reste le même depuis 25 ans, à savoir l'absence d'un *principe général* au nom duquel nous saurions choisir une équation d'onde non linéaire parmi l'infini possible. Si, un jour, nous savons trouver une telle équation, une nouvelle microphysique naîtra.

La seconde idée est la thermodynamique de la particule isolée, proposée par de Broglie en s'appuyant d'une part sur l'analogie de variance relativiste entre une fréquence d'horloge et une température⁽¹⁾ et, d'autre part, sur un

(¹) La variance de la température reste un sujet de controverse car la formule de Planck-Einstein-Laue qu'utilise de Broglie a été contestée (voir : H. Arzeliès, Thermodynamique relativiste et quantique, Gauthier-Villars, 1968) ; mais à vrai dire, même la variance de la fréquence d'une horloge peut être discutée (L. Brillouin, Relativity reexamined, Ac. Press, 1971), ce qui n'a pas empêché, en son temps, la Mécanique ondulatoire de naître à partir de la variance généralement admise ! Le débat sur ces problèmes n'est pas terminé.

rapprochement entre les trois grands principes extrêmaux de la physique : les principes de Fermat, de Maupertuis et de Carnot.

Cela non plus, n'est pas encore une théorie véritable, ce n'est que l'aperçu d'une synthèse que nous saurons peut-être, un jour, réaliser et utiliser : dans un an, dans un siècle ? Qui sait ? N'oublions pas qu'au temps de Laplace, on doutait encore du principe de Fermat et qu'un siècle après Huygens, son fameux principe restait à l'abandon.

Les grandes idées cheminent lentement et ce n'est pas facilement admis, en notre époque trépidante qui ne laisse guère de place à la méditation poétique... C'est sans doute l'une des raisons pour lesquelles, en dehors d'un cercle d'élèves, de Broglie, dans ces dernières années, est resté si ignoré en même temps qu'on le pétrifiait sous les honneurs. Peut-être est-ce également parce que, face à une école majoritaire sûre d'elle, soudée sur ses dogmes et peu disposée à laisser entamer ses positions, il incarnait d'une façon intransigeante et austère une certaine tradition de la science française, celle de Fermat, Laplace, Fresnel, Poincaré, souvent délaissée aujourd'hui au profit de manières plus pragmatiques et formelles, mais aussi plus internationales et collectives. Or, quels que soient les nécessités et les résultats du travail en équipe, on ne doit pas oublier que jamais une grande équipe n'a émis une grande idée ; ce sont les hommes qui émettent les idées : les équipes ne font que les développer. Si on écrase les individus, il n'y aura plus d'idées. De même quels que soient les bienfaits de la coopération internationale, on doit se rappeler que, s'il est vrai que les résultats de la science sont internationaux (nous nous accordons même tous à espérer qu'ils sont universels !) la tournure d'esprit des hommes, leur style de réflexion et de travail restent nationaux : c'est pourquoi il n'y a que les Américains qui sachent vraiment faire une grande science à l'américaine, les Allemands à l'allemande etc. ; et si les Français dédaignaient la tradition française, personne ne la ranimerait pour eux. Autant chaque tradition doit s'enrichir de l'apport des autres et évoluer, autant, me semble-t-il, si les scientifiques d'un pays suivent trop les modes venues d'ailleurs, ils améliorent peut-être leur statut international, mais ils rapetissent leur destin.

Face à la puissance grandissante de la communauté scientifique et à l'influence anonyme des commissions de spécialistes, dans lesquelles il voyait des facteurs d'uniformisation de la pensée, Louis de Broglie a maintes fois réagi, s'élevant contre les dangers du dirigisme et soulignant l'importance de la liberté dans la recherche scientifique et d'un réexamen sans réticence des théories ou des principes en vigueur.

C'est là peut-être l'essentiel du flambeau qu'il a transmis à la Fondation Louis de Broglie à laquelle il a certes légué son idéal de clarté physique et de recherche d'images théoriques intuitives et simples mais plus encore, peut-être, cette croyance profonde qui est la sienne, que le pouvoir d'aucune théorie ni d'aucune hypothèse n'est établi à jamais et donc qu'aucune critique ni aucune idée nouvelle ne doit être enterrée sans débat.

J'avoue que c'est d'une main quelque peu tremblante que j'achève cette préface pour un maître que je sens à la fois si supérieur et si proche. Lui qui

a fait tant de préfaces !... Nonagénaire épuisé par le travail et par les ans, il n'écrira pas celle-ci, mais je voudrais au moins lui laisser le dernier mot, avec le texte d'une note présentée par lui devant l'Académie des Sciences à l'occasion du cinquantenaire de la Mécanique ondulatoire et que nous pouvons regarder comme son testament scientifique.

SUR LES VÉRITABLES IDÉES DE BASE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Note ⁽¹⁾ de M. Louis de Broglie, Membre de l'Académie

A l'occasion du cinquantième anniversaire de la découverte de la Mécanique ondulatoire, l'auteur rappelle les idées qui l'avaient guidé à cette époque et expose les raisons pour lesquelles il lui paraît aujourd'hui nécessaire de reprendre ces idées bien oubliées dans l'enseignement de l'actuelle Mécanique quantique.

J'ai exposé les premiers principes de la Mécanique ondulatoire dans trois Notes aux *Comptes rendus* en septembre-octobre 1923, puis d'une façon plus développée dans ma Thèse de Doctorat soutenue le 25 novembre 1924. Mon idée essentielle était d'étendre à toutes les particules la coexistence des ondes et des particules découverte par Einstein en 1905 dans le cas de la lumière et des photons. Conformément aux idées claires de la Physique classique, je cherchais à me représenter une onde physique réelle transportant de très petits objets localisés dans l'espace au cours du temps. Deux manières de le faire se sont alors présentées à mon esprit. La première, tout à fait oubliée aujourd'hui dans l'enseignement usuel et que je considère maintenant comme de beaucoup la plus profonde, se trouve esquissée dans une de mes Notes de 1923 et développée dans le premier chapitre de ma Thèse. Elle consistait à partir de la différence des transformations relativistes de la fréquence d'une onde et de la fréquence d'une horloge. Admettant que la particule possède une vibration interne qui permet de l'assimiler à une petite horloge, je supposais que cette horloge se déplaçait dans son onde de façon que sa vibration interne reste constamment en phase avec celle de l'onde : c'est le postulat de « l'accord des phases ». Ces hypothèses me paraissaient être rendues nécessaires par le fait que la relation $W = hv$, appliquée à la particule implique l'existence d'une fréquence v intérieure à la particule, tandis que l'on sait depuis les travaux de Planck et d'Einstein que v est aussi la fréquence de l'onde qui transporte la particule. Celle-ci apparaît alors comme incorporée dans l'onde où elle constitue une très petite région où l'amplitude est très grande. On peut en déduire la formule bien connue $p = h/\lambda$. Dans le second chapitre de ma Thèse, j'avais ensuite montré que, dans le cas où la propagation de l'onde s'effectue à l'approximation de l'optique géométrique, on est ainsi conduit à identifier le principe de Fermat avec le principe de moindre action de Maupertuis et à retrouver la formule $p = h/\lambda$.

(¹) Séance du 25 juin 1973.

Il convient de souligner les différences qui existent entre les deux modes de raisonnements que je viens de rappeler. Le premier, le postulat de la concorde des phases, est de nature essentiellement relativiste puisqu'il repose sur la différence entre deux formules de transformation relativiste, tandis que le second, l'identification des principes de Fermat et de Maupertuis n'a rien d'essentiellement relativiste puisque ces deux principes sont valables aussi bien en théorie classique et en théorie relativiste. La seconde différence entre les deux méthodes est que la première est valable pour toutes les propagations d'ondes tandis que la seconde n'a de sens que pour les propagations s'effectuant à l'approximation de l'optique géométrique.

Après ma Thèse, on a souvent interprété faussement mes idées en disant que, d'après moi, l'électron *était* une onde, ce qui escamotait la particule. C'est, semble-t-il, en adoptant cette idée que Schrödinger, en 1926, dans de très beaux travaux, a écrit le premier pour l'électron, mais seulement à l'approximation newtonienne et sans tenir compte du spin, l'équation de propagation d'une onde qu'il a nommée l'onde ψ . Il a pu ainsi calculer exactement les processus ondulatoires qui correspondent aux états quantifiés d'un système atomique conçu à la manière classique depuis les travaux de Bohr et de ses continuateurs. Certainement Schrödinger pensait alors que son onde ψ était une onde physique, mais il abandonnait toute idée de localisation de la particule dans l'onde de sorte qu'en réalité dans l'image qu'il se formait de l'atome et plus généralement des ondes ψ il n'y avait plus de particules localisées. Ceci était très grave et rendait paradoxal l'emploi qu'il faisait de l'espace de configuration dans le cas des systèmes de particules. Peu après, Born a introduit la normalisation de l'onde ψ qui, en modifiant arbitrairement l'amplitude de l'onde, lui enlève toute réalité physique. L'onde ψ normalisée est ainsi transformée en une simple représentation de probabilités qui conduit à un très grand nombre de prévisions exactes, mais ne fournit aucune représentation compréhensible de la coexistence des ondes et des particules.

Les travaux de Schrödinger avaient eu le mérite de bien faire voir que la Mécanique ondulatoire, quand on l'applique aux systèmes atomiques, conduit à des problèmes où l'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable. Il en résulte que le principe de Fermat n'est plus applicable et ne permet plus de définir un « rayon » assimilable à la trajectoire d'une particule. Si donc on se refuse à faire intervenir le postulat de l'accord des phases, l'on est amené à dire qu'il est impossible d'attribuer une trajectoire à la particule dans son onde et à affirmer qu'elle ne peut avoir que des localisations isolées *sans positions intermédiaires*. Mais une telle conception soulève de grandes difficultés et notamment celle qui fut signalée par Einstein au Conseil de Physique Solvay de 1927. On peut la résumer de la façon suivante : soit une source qui émet une onde sphérique transportant une particule. Un instant après, la particule manifeste sa présence en un point de l'onde sphérique par un effet localisé sur un détecteur. Il est évidemment certain que l'émission de la particule par la source est la *cause* de son arrivée sur le détecteur. Or, le lien causal entre les deux phénomènes ne peut être établi que par l'existence

d'une trajectoire et nier cette existence, c'est renoncer à la causalité, c'est se condamner à ne pas comprendre.

Faisons maintenant une remarque importante. Comme la normalisation, qui modifie arbitrairement l'amplitude de l'onde, ne modifie pas sa phase, la Mécanique quantique usuelle peut définir la même fréquence v et la même longueur d'onde λ que ma théorie et c'est là ce qui lui permet d'être une théorie puissante conduisant à un très grand nombre de résultats exacts. Mais, contrairement à ce que l'on admet d'habitude, la Mécanique quantique n'a pas le droit de poser $W = hv$ et $p = h/\lambda$ parce que l'énergie W et la quantité de mouvement p d'une particule sont des grandeurs liées à la conception d'un objet localisé qui se déplace dans l'espace le long d'une trajectoire. Si j'ai pu autrefois établir ces formules, c'est que j'admettais que la particule est localisée dans son onde.

Appelé en 1928 à des fonctions d'enseignement, j'ai exposé les idées qui avaient prévalu en Mécanique quantique et pendant de longues années j'ai renoncé à développer mes idées primitives.

Mais depuis environ 20 ans j'ai été de nouveau convaincu qu'il fallait revenir à l'idée que la particule est un très petit objet localisé décrivant une trajectoire. Comme je l'ai montré dans toute une série de travaux de plus en plus approfondis⁽¹⁾, c'est ce que permet de faire, tout en conservant la signification statistique de l'onde ψ normée, ma conception du guidage de la particule par son onde quand on la complète par une Thermodynamique cachée dont le développement ouvre des perspectives très nouvelles. Une conséquence de cette thermodynamique me paraît très importante : le principe de moindre action ne serait qu'un aspect du second principe de la Thermodynamique⁽²⁾.

Il est important de remarquer combien il est étonnant qu'en optique de la lumière et des particules, on puisse prévoir, avec une extrême précision, un nombre énorme de phénomènes en partant de propagations d'ondes sans faire nullement intervenir la structure corpusculaire, cependant certaine, de l'énergie qu'elles transportent. Dans le cas des phénomènes d'interférences et de diffraction, le postulat statistique de Born suffit à expliquer les phénomènes. Mais en théorie quantique usuelle, on admet arbitrairement ce postulat, tandis que je puis en donner une justification. Mais là où le postulat de l'accord des phases me semble fournir une explication que la théorie usuelle ne paraît pas pouvoir donner, c'est quand on considère l'action d'une onde hertzienne de fréquence v sur un circuit oscillant ou un dispositif analogue accordé sur cette fréquence. Il est, en effet, naturel de penser que certains des photons apportés par l'onde cèdent leur énergie au circuit oscillant sous forme d'une brusque impulsion qui compense l'amortissement. Mais l'énergie ainsi apportée au circuit oscillant ne peut entretenir son oscillation régulière que si ces impulsions sont rythmées à la fréquence du circuit qui est celle de l'onde. Ceci me semble prouver que les photons incidents possèdent une fréquence

(1) *La réinterprétation de la Mécanique ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

(2) *La Thermodynamique de la particule isolée*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

d'oscillation interne égale à celle de l'onde et c'est bien ce qu'affirme le postulat de l'accord des phases, alors que la théorie usuelle ne peut introduire aucune idée analogue.

En conclusion, je pense que mes idées primitives, telles que je les ai reprises et développées dans ces dernières années, permettent de comprendre la véritable nature de la coexistence des ondes et des particules dont la Mécanique quantique usuelle et ses prolongements ne nous donnent qu'une vue statistique exacte sans nous en révéler la véritable nature. Le postulat de l'accord des phases nous apprend, en effet, qu'il existe une Dynamique corpusculaire ayant le caractère d'une Dynamique *à masse propre variable* qui est sous-jacente à toute propagation d'ondes, même quand celle-ci s'effectue en dehors de l'approximation de l'optique géométrique. Et je crois que c'est là ce que la Mécanique quantique actuelle n'a pas su voir.

Parvenu à un âge qui ne me permet plus d'espérer pouvoir continuer long-temps mes travaux personnels, je dois exprimer l'espoir que de jeunes chercheurs se consacrent à développer, dans le sens que j'ai indiqué dans ces dernières années, les idées qui ont permis, il y a un demi-siècle, la naissance en France de la Mécanique ondulatoire.

C.R. Acad. Sc. Paris, t. 277 (16 juillet 1973)

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos de Louis de Broglie	V
Le problème du déterminisme caché	IX
Préface de Georges Lochak	XIII
Sur les véritables idées de base de la Mécanique ondulatoire par Louis de Broglie ..	XXXV

PREMIÈRE PARTIE (1950-1951)

SUR LES INCERTITUDES D'HEISENBERG ET L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Chapitre I. Principes de la Mécanique ondulatoire

1. Dynamique classique du point matériel. Théorie de Jacobi	3
2. Propagation des ondes dans un milieu isotrope	8
3. Passage de la Mécanique classique à la Mécanique ondulatoire	10
4. Équation générale de la Mécanique ondulatoire du point matériel	13
5. Procédé automatique permettant de retrouver l'équation des ondes	14

Chapitre II. L'interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire

1. Interprétation de l'onde ψ	16
2. Principe des interférences	17
3. Enoncé précis du principe des interférences. Fluide de probabilité	18
4. Les relations d'incertitude d'Heisenberg	20
5. Le principe de décomposition spectrale (Born)	22
6. Idées nouvelles résultant des considérations précédentes	23
7. Retour de la Mécanique ondulatoire à la Mécanique classique. Théorème d'Ehrenfest, vitesse de groupe	24

Chapitre III. La Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules

1. Ancienne dynamique des systèmes de points matériels	30
2. Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules	32
3. Interprétation de la Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules	33

Chapitre IV. Formalisme général de la Mécanique ondulatoire

1. Nouvelle conception des grandeurs attachées à un corpuscule (ou à un système)	36
2. Valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur linéaire hermitien.....	38
3. Le spectre continu de l'hamiltonien d'un corpuscule libre. La fonction δ de Dirac	41

Chapitre V. Principes généraux de l'interprétation probabiliste de la Mécanique ondulatoire

1. Idées générales	44
2. Les matrices algébriques et leurs propriétés	48
3. Opérateurs et matrices en Mécanique ondulatoire	50
4. Valeurs moyennes et dispersions en Mécanique ondulatoire	52
5. Intégrales premières en Mécanique ondulatoire	54
6. Moment cinétique (moment de rotation ou de quantité de mouvement) en Mécanique ondulatoire	56

Chapitre VI. Théorie de la commutation des opérateurs en Mécanique ondulatoire

1. Théorèmes généraux	58
2. Corollaires des théorèmes précédents	63
3. Mesure simultanée de deux grandeurs d'après la Mécanique ondulatoire	67
4. Exemples de grandeurs non simultanément mesurables. Distinction de deux sortes de non-commutation	70

Chapitre VII. Impossibilité physique de mesurer simultanément les grandeurs canoniquement conjuguées

1. Nécessité d'examiner l'impossibilité de mesurer simultanément avec précision deux grandeurs canoniquement conjuguées	72
2. Le microscope d'Heisenberg	73
3. Mesure de la vitesse d'un électron au moyen de l'effet Doppler	75
4. Passage d'un corpuscule au travers d'un diaphragme rectangulaire	77
5. Remarque importante sur la mesure de la vitesse	80
6. Cas de deux grandeurs dont le commutateur est un opérateur non nul	81
7. La complémentarité au sens de Bohr	83
8. Calcul de Bohr pour les trous de Young	85

Chapitre VIII. Forme précise des relations d'incertitude

1. Théorème sur les dispersions des grandeurs non commutantes	89
2. Caractère optimum du paquet d'onde gaussien	95
3. Comparaison du théorème sur les dispersions avec les relations qualitatives d'incertitude d'Heisenberg	98
4. Considérations diverses sur les incertitudes. Incertitudes à « bords nets »	99

Chapitre IX. La quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg

1. L'absence de symétrie entre l'espace et le temps en Mécanique ondulatoire	107
2. Enoncé correct de la quatrième relation d'incertitude	109
3. Illustration de la définition précédente	109
4. Remarques diverses sur la quatrième relation d'incertitude	112
5. Méthode de variation des constantes et probabilité de transition	115
6. Probabilités de transition	119
7. Relations d'incertitude et théorie de la Relativité	122
8. Formules de Mandelstam et Tamm	125

Chapitre X. Examen de quelques points difficiles de la Mécanique ondulatoire

1. Réduction du paquet de probabilité par la mesure	128
2. Impossibilité de remonter de l'état postérieur à la mesure vers l'état antérieur à la mesure. Effacement des phases par la mesure	129
3. Possibilité de remonter vers le passé à partir d'une mesure faite à l'instant t (post vision)	131
4. Interférences des probabilités	133
5. Quelques conséquences de la disparition de la notion de trajectoire	136
6. Discussions au sujet des systèmes « corrélés »	141
7. Compléments sur la controverse Einstein-Bohr	148

DEUXIÈME PARTIE (1951-1952)**SUR L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE
DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE
ET SUR DIVERSES QUESTIONS QUI S'Y RATTACHENT*****Chapitre XI. Rappel de quelques notions générales de calcul des probabilités***

1. Lois de probabilité à une variable. Fonction de répartition. Fonction caractéristique	159
2. Lois de probabilité à deux variables	165
3. Remarques importantes sur les résultats précédents	173

Chapitre XII. Rappel des conceptions générales de la Mécanique ondulatoire

1. Principe des interférences. Théorie de l'onde pilote	180
---	-----

Chapitre XIII. Introduction de la fonction caractéristique dans le formalisme probabiliste de la Mécanique ondulatoire

1. Fonction caractéristique dans le cas d'une seule grandeur	187
2. Fonction caractéristique pour deux grandeurs commutantes	194

3. Coefficient de corrélation, lois marginales	196
4. Les théorèmes généraux de la Mécanique ondulatoire envisagés du point de vue de la fonction caractéristique	199
5. Cas de deux grandeurs non commutantes	205
a) Rappel sur la réduction du paquet de probabilité par la mesure	205
b) Interférence des probabilités	206
c) La fonction de répartition $\rho(x, p_x)$ de Wigner-Bass	208
d) La densité $\rho(x, p_x)$ de Wigner-Bass et l'interprétation hydrodynamique de la Mécanique ondulatoire	216
e) Travaux de M. Jacques Yvon	222

Chapitre XIV. Théorie des mélanges et théorie de la mesure de von Neumann

1. Mélanges et cas purs	229
2. La matrice statistique de von Neumann pour un cas pur	232
3. La matrice statistique pour un mélange de cas purs	235
4. Irréductibilité des cas purs	238
5. Impossibilité de ramener les lois de la Mécanique ondulatoire à un déterminisme caché (J. von Neumann)	240

Chapitre XV. Théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire

1. Généralités	246
2. Statistique de deux systèmes en interaction	248
3. Coefficients de corrélation dans l'interaction entre deux systèmes quantiques	251
4. Mesure d'une grandeur	252
5. Exemple d'une expérience de mesure	257
6. Remarques diverses sur la mesure	261
7. Considérations thermodynamiques (von Neumann)	267
8. Evolutions réversibles et irréversibles	271
9. La matrice statistique P_0	274

Chapitre XVI. Le rôle du temps en Mécanique ondulatoire

1. Prévision au sens de M. Costa de Beauregard. Probabilité des mesures	276
2. Rôle particulier du temps en Mécanique quantique. La quatrième relation d'incertitude	281
3. Enoncé correct de la quatrième relation d'incertitude	284
4. La quatrième relation d'incertitude et la théorie des perturbations	285
5. Les opérateurs H et $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$	287
6. Application du formalisme d'Arnous aux opérateurs opérant sur le temps	288
7. Formalisme multitemporel. Multiplicités courbes dans l'espace temps	290

Œuvres de Louis de Broglie 293

PREMIÈRE PARTIE
(1950-1951)

SUR LES INCERTITUDES
D'HEISENBERG
ET L'INTERPRÉTATION
PROBABILISTE
DE LA MÉCANIQUE
ONDULATOIRE

CHAPITRE I

PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. DYNAMIQUE CLASSIQUE DU POINT MATÉRIEL. THÉORIE DE JACOBI

Nous allons résumer les principes généraux de la Mécanique ondulatoire dans le cas d'un corpuscule unique soumis à l'action d'un champ de force dérivant d'une fonction potentielle connue $V(x, y, z, t)$. Nous devons commencer par rappeler quelques grandes lignes de la Dynamique classique du point matériel.

Avec les conceptions anciennes, le corpuscule a à chaque instant une position bien déterminée dans l'espace et, au cours du temps, il décrit une certaine courbe, la trajectoire, sous l'influence du champ de force. On peut donc à tout instant attribuer au corpuscule trois coordonnées rectangulaires x, y, z qui fixent sa position. Les équations classiques du mouvement sont les suivantes :

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x} \dots$$

m étant une constante caractéristique du corpuscule nommée sa masse. Ces trois équations différentielles du second ordre définissent entièrement les variations des coordonnées du corpuscule au cours du temps, c'est-à-dire son mouvement, quand on se donne 6 constantes arbitraires représentant les coordonnées et les composantes de la vitesse à un instant donné, l'instant dit initial. Le déterminisme de l'ancienne Mécanique consistait en ce que, l'état initial de position et de vitesse étant supposé connu, les états ultérieurs étaient rigoureusement déterminés.

Nous renvoyons aux traités de Mécanique rationnelle pour la démonstration des théorèmes généraux de la Dynamique du point matériel et pour

Note des éditeurs : dans les notes qui suivent, Louis de Broglie sera désigné par L. B. et Georges Lochak par G. L.

la théorie des équations de Lagrange, de Hamilton, etc. (¹). Nous nous bornerons à énoncer le théorème fondamental de Jacobi qui nous sera utile dans la suite.

Théorème : Si l'on parvient à trouver une intégrale complète (c'est-à-dire une solution contenant 3 constantes arbitraires non additives) $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ de l'équation aux dérivées partielles (équation de Jacobi)

$$(2) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z, t) = \frac{\partial S}{\partial t}$$

les équations

$$(3) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = a \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = b \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = c$$

où a, b, c sont trois nouvelles constantes arbitraires, définissent un des mouvements possibles dans le champ de force ; et les composantes de la quantité de mouvement du corpuscule quand, en exécutant ce mouvement, il occupe à l'instant t la position x, y, z sont données par les relations

$$(4) \quad p_x = mv_x = - \frac{\partial S}{\partial x}; \quad p_y = mv_y = - \frac{\partial S}{\partial y}; \quad p_z = mv_z = - \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Nous voyons donc que d'après ce théorème de Jacobi, les mouvements possibles du corpuscule se divisent en classes, les mouvements d'une même classe correspondant à une intégrale complète $S(x, y, z, t, \alpha, \beta, \gamma)$ avec des valeurs données de α, β, γ . Chacune de ces classes contient une infinité de mouvements possibles, chacun d'eux étant caractérisé par la valeur des constantes secondaires abc .

Rappelons aussi que l'équation de Jacobi peut s'obtenir en partant de l'expression de l'énergie et en fonction des coordonnées et des moments conjugués

$$(5) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t)$$

et en y remplaçant p_x, p_y, p_z respectivement par $- \partial S / \partial x, - \partial S / \partial y$ et $- \partial S / \partial z$ et en égalant l'expression obtenue à $\partial S / \partial t$.

(¹) Note G. L. : parmi les nombreux traités, citons : J. M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris, 1970 ; H. Goldstein, Classical mechanics, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953. Notons que ce n'est pas par souci de simplicité que Louis de Broglie énonce le théorème de Jacobi dans R^3 , mais parce que l'analogie optique-mécanique n'a de sens véritable à ses yeux que dans l'espace physique, en dehors duquel elle n'est plus que formelle.

Le théorème de Jacobi prend une forme qui nous sera particulièrement utile dans le cas où la fonction potentielle V ne dépend pas du temps. On sait que dans ce cas, il y a conservation de l'énergie, c'est-à-dire que pendant le cours du mouvement, la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}mv^2 + V$ garde une valeur constante E . La constante E joue alors le rôle d'une des constantes primaires du mouvement, par exemple γ . On pose

$$(6) \quad S(x, y, z, t, \alpha, \beta, E) = Et - S_1(x, y, z, \alpha, \beta, E)$$

où S_1 ne dépend plus du temps et l'on cherche une intégrale complète dépendant de la constante E et des deux constantes arbitraires α et β de l'équation aux dérivées partielles (équation de Jacobi raccourcie)

$$(7) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] + V(x, y, z) = E.$$

Le théorème de Jacobi appliqué à ce cas particulier nous apprend que, si l'on a trouvé une telle intégrale complète, le mouvement défini par les équations

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} &= a & \frac{\partial S_1}{\partial \beta} &= b \\ \frac{\partial S}{\partial E} &= t - \frac{\partial S_1}{\partial E} = c \end{aligned}$$

où a, b, c sont trois constantes arbitraires est un des mouvements possibles du corpuscule dans le champ de force constant et que la quantité de mouvement lors du passage au point x, y, z est donnée par

$$p_x = mv_x = \frac{\partial S_1}{\partial x}; \quad p_y = mv_y = \frac{\partial S_1}{\partial y}; \quad p_z = mv_z = \frac{\partial S_1}{\partial z}.$$

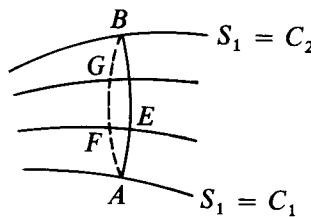
Les mouvements possibles se divisent en classes correspondant à une même valeur de l'énergie E et des deux constantes primaires α et β et chaque classe contient une infinité de mouvements caractérisés chacun par les valeurs des trois constantes secondaires a, b, c .

Les deux premières équations (8) ne contenant pas le temps définissent une courbe de l'espace qui est la trajectoire du corpuscule. La troisième équation qu'on peut écrire $\partial S_1 / \partial E = t - t_0$ donne le mouvement le long de la trajectoire (équation de l'horaire). On voit ainsi que dans le cas des champs constants, l'étude de la trajectoire peut se faire indépendamment de l'étude du mouvement : ceci n'a pas lieu dans le cas général des champs variables avec le temps.

Un autre théorème important valable dans le cas des champs constants est le suivant : « Les trajectoires d'une même classe qui correspondent à une même intégrale complète $S_1(x, y, z, \alpha, \beta, E)$ sont orthogonales aux surfaces $S_1 = Cte.$ » Ceci résulte immédiatement du fait exprimé par les équations $\vec{p} = \overrightarrow{\text{grad}} S_1$ que la vitesse est proportionnelle au gradient de S_1 en chaque point.

La propriété des trajectoires d'être normales aux surfaces $S_1 = Cte$ permet de retrouver le principe de moindre action de Maupertuis. Considérons pour cela toutes les surfaces $S_1 = Cte$ correspondant à des valeurs infiniment voisines de la constante comprises entre les valeurs c_1 et c_2 et représentons-en quelques-unes par la trame.

Soit AEB une trajectoire de la classe correspondant à $S_1 = Cte$ et AFB une courbe infiniment voisine de AEB .



Si l'on nomme dn l'élément de normale aux surfaces $S_1 = Cte$, l'intégrale $\int \frac{\partial S_1}{\partial n} ds$ prise le long de AEB est égale à $c_2 - c_1$ puisqu'alors on a $ds = dn$.

Prenons la même intégrale le long de la courbe AFB . La contribution à cette intégrale d'un petit élément tel que FG est supérieure ou au moins égale à la variation de S_1 de F en G : en effet si FG est normal aux surfaces $S_1 = Cte$ qui passent par ces extrémités, alors $FG = dn$ et $\frac{\partial S_1}{\partial n} \cdot \overline{FG} = S_1(G) - S_1(F)$, tandis que si \overline{FG} n'est pas normal aux surfaces $S_1 = Cte$, on a $\overline{FG} > dn$ et $\frac{\partial S_1}{\partial n} \cdot \overline{FG}$ est supérieure à $S_1(G) - S_1(F)$. Or tous les éléments de AFB ne peuvent être normaux aux surfaces $S_1 = Cte$ sans quoi AFB coïnciderait avec la trajectoire AEB . Donc l'intégrale $\int_A^B \frac{\partial S_1}{\partial n} ds$ est plus grande le long de AFB que le long de AEB .

D'après l'équation à laquelle satisfait S_1 , on a

$$(9) \quad \frac{\partial S_1}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{2m(E - V(xyz))}.$$

Nous parvenons donc à l'énoncé suivant : « La trajectoire passant par deux

points A et B de l'espace est caractérisée par le fait que l'intégrale $\int_A^B \sqrt{2 m(E - V)} ds$ est plus petite pour la trajectoire que pour toute courbe voisine. » C'est là le principe de moindre action de Maupertuis.

[Le raisonnement fait ci-dessus est en défaut quand les trajectoires ont une enveloppe et que la trajectoire AEB touche cette enveloppe entre A et E . L'intégrale de Maupertuis peut alors être maximum au lieu de minimum, mais elle est toujours stationnaire.]

Un exemple très simple permet d'illustrer les considérations précédentes. Envisageons le mouvement du corpuscule en l'absence de champ. Alors $V = 0$ et, comme il y a conservation de l'énergie, on peut écrire l'équation de Jacobi raccourcie sous la forme

$$(10) \quad \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 \right] = E .$$

Une intégrale complète est obtenue par exemple en posant

$$(11) \quad S_1 = \sqrt{2mE} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z)$$

et d'après le théorème de Jacobi, on obtient les trajectoires

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \sqrt{2mE} \left[x - \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} z \right] = a, \\ \frac{\partial S_1}{\partial \beta} = \sqrt{2mE} \left[y - \frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} z \right] = b. \end{cases}$$

Ce sont les droites de cosinus directeurs α , β et $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ normales aux plans $S_1 = Cte$. Le mouvement le long de ces droites est défini par l'équation

$$(13) \quad \frac{\partial S_1}{\partial E} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} [\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z] = t - t_0 .$$

Il est rectiligne et uniforme et s'effectue avec la vitesse $v = \sqrt{2E/m}$. Enfin on vérifie aisément les relations $p_x \equiv mv_x = m\alpha v = \sqrt{2mE}\alpha = \partial S_1 / \partial x$... L'intégrale complète envisagée définit donc la classe des mouvements rectilignes et uniformes de direction α , β , γ et de vitesse $\sqrt{2E/m}$.

On définirait de même la classe des mouvements rectilignes et uniformes émanant d'un point O de coordonnées $x_0 y_0 z_0$ en considérant l'intégrale complète de l'équation en S

$$(14) \quad S = -\frac{m}{2t} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2].$$

2. PROPAGATION DES ONDES DANS UN MILIEU ISOTROPE

Pour amorcer le passage à la Mécanique ondulatoire, faisons maintenant une rapide étude de la propagation des ondes monochromatiques dans un milieu isotrope, réfringent et dispersif.

Nous admettrons que cette propagation est régie par l'équation

$$(15) \quad \Delta\psi = \frac{1}{\mathcal{V}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

ψ étant la fonction d'ondes et \mathcal{V} une grandeur généralement fonction des points xyz et de la fréquence v de l'onde. \mathcal{V} est la vitesse de propagation de la phase ou simplement vitesse de propagation. Nous écrirons l'onde monochromatique sous la forme complexe

$$(16) \quad \psi = u(x, y, z) e^{2\pi i vt}$$

et nous poserons $\frac{1}{\mathcal{V}} = \frac{n(x, y, z, v)}{\mathcal{V}_0}$.

\mathcal{V}_0 étant la vitesse de propagation dans un milieu de référence pour lequel l'indice de réfraction est égal à 1. On a alors

$$(17) \quad \Delta\psi + \frac{4\pi^2 n^2 v^2}{\mathcal{V}_0^2} \psi = 0.$$

Rigoureusement l'étude de la propagation de l'onde monochromatique dans le milieu dispersif devra se faire en cherchant les solutions de cette équation, mais il arrive souvent en pratique que l'on puisse résoudre le problème par un procédé approximatif qui est à la base de l'optique géométrique.

Pour bien comprendre le sens de cette approximation, considérons d'abord le cas où l'indice ne dépend pas de x, y, z (milieu homogène). On obtient alors une solution rigoureuse de l'équation en posant

$$(18) \quad \psi = a \exp \left\{ 2\pi i v \left[t - \frac{n(v)}{\mathcal{V}_0} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z) \right] \right\}$$

a est une constante appelée l'amplitude de l'onde plane. Nous nommerons « phase de l'onde » la fonction linéaire

$$(19) \quad \varphi = v \left[t - \frac{n}{\mathcal{V}_0} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z) \right].$$

Les surfaces d'égale phase $\varphi = Cte$ nommées aussi surfaces d'onde sont les plans perpendiculaires à la direction $\alpha, \beta, \gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$. Au cours du temps, les valeurs de la phase, et par suite de la fonction ψ , progressent dans cette direction avec la vitesse

$$(20) \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}_0/n(v).$$

A un instant donné, on retrouve la même valeur de ψ sur des plans d'égale phase séparés les uns des autres par la distance

$$(21) \quad \lambda = \frac{\mathcal{V}_0}{nv} = \frac{\mathcal{V}}{v}$$

nommée « longueur d'onde » et en un point donné, on retrouve les mêmes valeurs de ψ à des intervalles de temps égaux à la période $T = 1/v$.

Considérons maintenant un milieu où l'indice n varie d'un point à un autre. Une onde monochromatique pourra toujours s'écrire sous la forme

$$(22) \quad \psi = a(x, y, z) \exp \{ 2\pi i [vt - \varphi_1(x, y, z)] \}$$

les fonctions a et φ_1 étant réelles. On peut toujours définir une longueur d'onde λ par la formule $\lambda = \mathcal{V}_0/nv$, mais cette longueur est « locale » en ce sens qu'elle varie d'un point à l'autre. Si, dans une région de l'espace, l'indice varie peu d'un point à l'autre à l'échelle de la longueur d'onde, on voit aisément que les dérivées de a sont négligeables devant celles de φ_1 et en substituant dans l'équation de propagation, on obtient l'équation approximative dite « équation de l'optique géométrique »

$$(23) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 = \frac{v^2 n^2(x, y, z)}{\mathcal{V}_0^2}.$$

Elle permet de déterminer les variations de la phase sans avoir à se préoccuper des variations lentes de l'amplitude a .

Soit $\varphi_1(x, y, z, v, \alpha, \beta)$ une intégrale complète de l'équation de l'optique géométrique. La fonction $\psi = a \exp \{ 2\pi i [vt - \varphi_1(x, y, z, v, \alpha, \beta)] \}$ où a est une fonction lentement variable à grande échelle est une solution approximative de l'équation de propagation. Par définition, les courbes orthogonales aux sur-

faces $\varphi_1 = Cte$ sont les « rayons » de l'onde. Comme on a justifié plus haut le principe de moindre action de Maupertuis pour les trajectoires normales aux surfaces $S_1 = Cte$, nous pourrions ici démontrer le principe de Fermat suivant lequel, si la courbe C est un rayon de la propagation d'ondes passant

par les points A et B de l'espace, l'intégrale $\int_A^B \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = \int_A^B \frac{nv}{\mathcal{V}_0} ds$ prise le long du rayon C est plus petite que la même intégrale prise le long d'une courbe infiniment voisine de C et joignant A et B .

L'optique géométrique n'est qu'une approximation valable seulement si l'indice n varie peu à l'échelle de la longueur d'onde. Si la longueur d'onde tendait vers zéro, cette approximation tendrait à devenir rigoureuse.

La présence de la fréquence v dans l'équation de propagation (17) doit attirer l'attention. Au lieu de considérer une onde monochromatique, on peut avoir à considérer le cas plus général d'une superposition d'ondes monochromatiques, chacune d'elles satisfaisant à l'équation de propagation avec la valeur de n qui correspond à la fréquence. Mais il est désirable d'avoir une forme de l'équation de propagation où la fréquence ne figure pas et à laquelle doive satisfaire la fonction d'ondes même quand elle est formée par une superposition d'ondes monochromatiques.

Supposons, pour donner un exemple, que l'indice soit défini par la loi de dispersion

$$n(x, y, z, v) = \sqrt{1 - \frac{F(x, y, z) r_0^{-2}}{4 \pi^2 v^2}}$$

où F est une certaine fonction du lieu. Alors on pourra adopter comme équation générale de propagation

$$\Delta \psi - \frac{1}{\mathcal{V}_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = F(x, y, z) \psi$$

car pour une onde monochromatique, on aura $\partial^2 \psi / \partial t^2 = -4 \pi^2 v^2 \psi$ et l'on retrouvera l'équation (17). Nous trouverons un cas de ce genre en Mécanique ondulatoire ⁽¹⁾.

3. PASSAGE DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE A LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

La grande analogie de forme entre la théorie de Jacobi et la théorie des ondes déjà aperçue il y a plus d'un siècle par Hamilton peut aujourd'hui nous conduire à la synthèse réalisée par la Mécanique ondulatoire.

⁽¹⁾ Note G. L. : On lira avec profit, à propos de l'optique géométrique, les références (I, 27) et (I, 29) de l'auteur.

Commençons par comparer le mouvement d'un corpuscule en l'absence de champ ($V = 0$) avec la propagation d'une onde dans un milieu homogène où l'indice n est indépendant de xyz . Pour le corpuscule en l'absence de champ, nous avons trouvé

$$(11) \quad S_1 = \sqrt{2mE}[\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z] \\ = mv[\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z].$$

D'autre part, pour l'onde monochromatique dans un milieu homogène, puisque la longueur d'onde λ est alors constante, on peut écrire l'équation de l'optique géométrique sous la forme

$$(24) \quad \varphi_1 = \frac{1}{\lambda}[\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z].$$

Les fonctions complètes S et φ sont alors

$$(25) \quad \begin{cases} S = Et - mv[\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z], \\ \varphi = vt - \frac{1}{\lambda}[\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z], \end{cases}$$

en faisant coïncider la direction du mouvement avec celle de la propagation de l'onde. Il est dans l'esprit de la théorie des quanta de poser $E = h\nu$, c.-à.-d. d'associer au mouvement du corpuscule d'énergie E la propagation d'une onde de fréquence $\nu = E/h$ ⁽¹⁾. Ceci nous conduit à poser

$$(26) \quad \varphi = S/h.$$

Si nous posons par hypothèse cette relation, il en résulte les deux formules

$$(27) \quad E = h\nu \quad \lambda = h/mv.$$

En d'autres termes, au mouvement rectiligne et uniforme du corpuscule d'énergie E et de quantité de mouvement mv , nous faisons correspondre la propagation dans la direction du mouvement d'une onde plane mono-

⁽¹⁾ Note G. L. : A cette époque, sous la pression ambiante, Louis de Broglie s'était écarté du point de vue strictement relativiste de sa Thèse, auquel il allait revenir par la suite. En réalité seule la relativité fixe ν , en fixant la constante de l'énergie, ce qu'il n'indique pas, alors qu'il y attachait pourtant une importance fondamentale.

chromatique ayant la fréquence E/h et la longueur d'onde h/mv , onde dont l'expression est

$$\psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} S} \quad (a \text{ constant})$$

S ayant la valeur écrite ci-dessus.

Cette correspondance entre onde et mouvement se généralise dans le cas du mouvement d'un corpuscule dans un champ constant défini par la fonction potentielle $V(x, y, z)$. Il faut alors comparer le mouvement à la propagation d'une onde dans un milieu non homogène où l'indice n et par suite la longueur d'onde λ varient d'un point à l'autre.

Les expressions à comparer de la fonction de Jacobi S et de la phase φ sont alors

$$(28) \quad \begin{cases} S = Et - S_1(x, y, z) \\ \varphi = vt - \varphi_1(x, y, z) \end{cases}$$

les fonctions S_1 et φ_1 étant respectivement des intégrales complètes des équations

$$(29) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z} \right)^2 &= 2m[E - V(xyz)] \\ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 &= \frac{1}{\lambda^2(xyz)}. \end{aligned}$$

Il est tout naturel de faire encore ici l'hypothèse exprimée par $\varphi = S/h$ et par suite de poser $E = hv$, $S_1 = h\varphi_1$. La seconde formule donne aisément

$$(30) \quad \lambda = \frac{1}{|\operatorname{grad} \varphi_1|} = \frac{h}{|\operatorname{grad} S_1|} = \frac{h}{\sqrt{2m[E - V(x, y, z)]}}$$

et comme en chaque point on doit avoir $E = 1/2 mv^2 + V(x, y, z)$, on trouve encore

$$\lambda = h/mv.$$

mais ici v et λ sont variables d'un point à l'autre.

Comment s'écrira l'équation de propagation de l'onde qui correspond au mouvement dans un champ constant ? Ecrivons l'équation (17) sous la forme

$$(31) \quad \Delta\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda^2(x, y, z)} \psi = 0$$

et substituons-y la valeur de λ : il vient

$$(32) \quad \Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [E - V(x, y, z)] \psi = 0.$$

En faisant $V = 0$, on retrouve l'équation valable en l'absence de champ.

Chaque fois que l'optique géométrique sera valable pour la propagation de l'onde ψ , nous pourrons poser

$$\psi = a \exp\left(\frac{2\pi i}{h} S\right) = a \exp\left\{\frac{2\pi i}{h} [Et - S_1(x, y, z)]\right\}$$

et les trajectoires prévues par l'ancienne Dynamique du point matériel, normales aux surfaces $S_1 = Cte$, ne seront autres choses que les rayons de l'onde ψ normaux aux surfaces $\varphi_1 = Cte$.

Nous arrivons ainsi à l'une des idées essentielles de la nouvelle Mécanique. Tandis que la Mécanique ancienne attribuait à ses équations un caractère rigoureux et les considérait comme toujours valables, la nouvelle Mécanique donne à l'onde ψ le rôle essentiel : elle ne considère plus l'ancienne Mécanique que comme une approximation valable quand l'approximation de l'optique géométrique est suffisante pour décrire la propagation de l'onde ψ .

La Dynamique classique n'apparaît donc plus que comme une approximation : elle n'est utilisable que quand l'indice n relatif à l'onde ψ varie peu à l'échelle de la longueur d'onde ou, ce qui revient au même quand le potentiel varie peu à cette échelle. Si la longueur d'onde de l'onde ψ était infiniment petite, la Dynamique ancienne serait rigoureusement valable. D'après la formule (27) donnant λ , l'on voit que ceci serait toujours réalisé (pour v non nulle) si h était infiniment petit : pour $h \rightarrow 0$, la Mécanique classique doit toujours reprendre sa valeur.

4. ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DU POINT MATÉRIEL

Nous venons d'être conduits à substituer aux équations classiques de la Dynamique du point matériel dans un champ constant l'équation de propagation d'une onde monochromatique. Mais, comme nous le verrons bientôt, nous serons souvent amenés à considérer des trains d'ondes ψ formés par une superposition d'ondes monochromatiques. Il est donc utile de chercher à obtenir une équation de propagation à laquelle satisfasse la fonction ψ quand elle représente une telle superposition d'ondes monochromatiques. L'équation ⁽¹⁾

$$(33) \quad \Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z) \psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

satisfait à cette condition, car pour une onde plane monochromatique de fréquence E/h , elle nous ramène à l'équation (32). Mais cette nouvelle forme

⁽¹⁾) Note G. L. : L'auteur a coutume d'utiliser l'équation conjuguée de l'équation habituelle.

d'équation nous permet de ne pas nous borner aux ondes planes monochromatiques et de considérer une superposition de telles ondes. De plus, elle nous suggère la manière d'étendre la nouvelle Mécanique au cas des champs variables avec le temps. En effet, comme elle nous permet de ne plus nous borner aux ondes monochromatiques, le temps n'y joue plus un rôle particulier et il est donc naturel d'admettre que la forme de l'équation se conserve quand V dépend du temps, donc d'écrire

$$(34) \quad \Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t) \psi = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

comme forme générale de l'équation des ondes en Mécanique ondulatoire non relativiste du corpuscule unique.

5. PROCÉDÉ AUTOMATIQUE PERMETTANT DE RETROUVER L'ÉQUATION DES ONDES

Nous allons indiquer un moyen formel qui permet de retrouver automatiquement l'équation des ondes.

En Mécanique classique, on appelle « fonction hamiltonienne » la fonction qui exprime l'énergie à l'aide des coordonnées et des moments de Lagrange. Avec les coordonnées rectangulaires, l'expression bien connue de cette fonction est

$$(35) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t).$$

Si, dans le second membre de cette expression, nous remplaçons p_x par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, p_y par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}$, p_z par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$, nous obtenons un opérateur, l'opérateur Hamiltonien

$$(36) \quad H(x, y, z, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}, t) = \\ = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z, t).$$

En appliquant cet opérateur à la fonction ψ (c'est-à-dire en multipliant ψ en avant par l'opérateur Hamiltonien) et en égalant à $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t}$, on a

$$(37) \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \Delta\psi + V(x, y, z, t) \psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

équation identique à l'équation générale obtenue plus haut.

Nous voyons ainsi que l'équation générale de propagation peut s'écrire sous la forme

$$(38) \quad H(x, y, z, P_x, P_y, P_z, t) \psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

où P_x, P_y, P_z sont respectivement les opérateurs

$$-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}$$

que nous faisons correspondre aux composantes de la quantité de mouvement.

Il importe de remarquer que le procédé automatique pour obtenir l'équation d'ondes qui vient d'être indiqué ne réussirait pas en général si l'on employait des coordonnées curvilignes. Ainsi, en coordonnées sphériques, on n'obtiendrait pas ainsi la forme correcte de l'opérateur Laplacien Δ figurant dans l'équation. Cette difficulté est liée au fait qu'alors on ne peut déduire univoquement de la fonction hamiltonienne classique la forme de l'opérateur Hamiltonien parce qu'un terme de la forme qp_q par exemple de la fonction classique peut donner naissance suivant l'ordre des facteurs à des termes

$qP_q, P_q q, \frac{P_q q + qP_q}{2} \dots$ qui ne sont pas équivalents.

CHAPITRE II

L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. INTERPRÉTATION DE L'ONDE ψ

Nous avons obtenu les équations générales de la Mécanique ondulatoire. Il nous faut maintenant apprendre à nous en servir et, en particulier, quel sens attribuer à la fonction ψ .

Si on se laissait guider par les analogies classiques, on serait conduit à considérer la fonction ψ comme représentant une grandeur physique, peut-être liée à la vibration de quelque milieu. Une circonstance nous avertit tout de suite qu'une telle interprétation est impossible. L'équation générale contenant dans ses coefficients le facteur $i = \sqrt{-1}$, la fonction d'onde doit être considérée comme une grandeur essentiellement complexe, contrairement à ce qui se passait dans la théorie classique des ondes et vibrations où l'emploi de fonctions complexes apparaissait toujours comme un simple artifice mathématique.

En Mécanique ondulatoire, la fonction d'onde apparaît non comme donnant la valeur d'une grandeur physique, mais comme constituant un « élément de prévision » à l'aide duquel on peut évaluer la probabilité de certains résultats de mesure⁽¹⁾. La fonction ψ est complexe, mais on peut, nous le verrons, former à partir d'elle des grandeurs réelles qui ont une signification physique en tant que probabilités. Que la fonction ψ soit essentiellement liée à des probabilités explique pourquoi comme nous le verrons sa valeur n'est jamais entièrement déterminée : il subsiste d'abord toujours dans son expression un

(¹) Note G. L. : Tout ce paragraphe aurait été écrit par l'auteur, plus tard, avec beaucoup plus de précautions. Ce qu'il dit ici n'est vrai que de la fonction d'onde continue et normée de Schrödinger, mais il a repris, par la suite, l'idée de la double solution d'après laquelle, à chaque solution continue, de signification probabiliste, doit être associée une solution singulière de même phase qu'elle, mais dont l'amplitude comporte une région singulière qui représente le corpuscule. Cette onde singulière est alors considérée comme une onde physique et représente la coexistence entre l'onde et le corpuscule.

facteur de phase e^{ix} qui disparaît quand on forme les grandeurs réelles ayant un sens de probabilités et qui, par suite, n'a pas d'importance : ensuite son module n'est déterminé qu'à une constante près et l'on profite de cette indétermination, comme nous le verrons, pour « normer » la fonction d'ondes, ce qui permet d'exprimer à partir d'elle des probabilités « en valeur absolue ». Tout ceci serait incompréhensible si le ψ représentait une vibration ayant un caractère physique car alors l'amplitude et la phase auraient des valeurs bien déterminées. Nous reviendrons plus loin sur certains caractères de la fonction ψ .

2. PRINCIPE DES INTERFÉRENCES

Pour utiliser la connaissance de la fonction ψ , la Mécanique ondulatoire a été rapidement amenée à énoncer un premier principe auquel nous donnerons le nom de « principe des interférences » ou encore « principe de localisation ». En voici l'énoncé :

« Le carré du module de la fonction ψ mesure en chaque point et à chaque instant la probabilité pour que la présence du corpuscule soit observée en ce point à cet instant. »

La fonction ψ étant une quantité complexe peut s'écrire sous la forme $\psi = a e^{i\varphi}$, a et φ étant le module et l'argument. a et φ sont des quantités réelles généralement fonctions de x, y, z, t . Désignons par ψ^* la quantité $a e^{-i\varphi}$ complexe conjuguée de ψ . On a

$$(1) \quad a^2 = \psi\psi^* = |\psi|^2.$$

C'est cette grandeur réelle qui intervient dans le principe des interférences.

Il est facile de rattacher le principe des interférences à des idées qui sont classiques en théorie de la lumière. Dans toutes les théories de la lumière, on admet que l'intensité de l'onde mesure en chaque point et à chaque instant la quantité d'énergie qu'on peut y recueillir : c'est cette règle qui permet une prévision exacte des interférences. Mais nous savons aujourd'hui que tout se passe, dans les échanges énergétiques entre la matière et la lumière comme si la lumière était formée de corpuscules d'énergie hv . Ce sont les « photons ». Si nous nous représentons une onde lumineuse comme entraînant avec elle un grand nombre de photons, l'explication des interférences exige que l'intensité de l'onde mesure en chaque point la densité en photons. Mais cette interprétation « statistique » est insuffisante et doit être transformée en une interprétation « probabiliste ». En effet, on a pu obtenir (expériences de Taylor, de Dempster et Batho) des phénomènes d'interférences du type usuel, même en employant pendant un temps très long une lumière d'intensité très faible, si faible qu'il ne devait jamais y avoir plus d'un photon à la fois dans l'appareil d'interférences. De plus, nous verrons qu'il n'est guère possible d'attribuer au corpuscule une position bien définie dans l'espace. On est ainsi nécessairement amené à dire que l'intensité de l'onde lumineuse mesure la probabilité pour qu'un photon produise en un point de l'espace un effet observable. On retrou-

vera ainsi parfaitement, même dans le cas des irradiations très faibles, l'expression classique des interférences.

L'extension du principe des interférences de la lumière aux particules matérielles est justifiée par le fait qu'avec les particules matérielles, comme avec la lumière, on peut obtenir des phénomènes d'interférences et de diffraction. Par exemple, pour les électrons que l'on peut facilement employer dans les expériences (électrons de quelques dizaines à quelques centaines de mille électron-volts), l'onde associée a, d'après la formule $\lambda = h/mv$, une longueur d'onde de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-9} cm. On doit donc pouvoir avec des électrons obtenir des phénomènes de diffraction analogues à ceux que l'on obtient avec des rayons X dont la longueur d'onde est du même ordre. C'est ce qu'ont montré en 1927 les célèbres expériences de Davisson et Germer, bientôt reprises par G. P. Thomson, Rupp, Ponte, Kikuchi, etc. (¹). Ces expériences prouvent qu'un faisceau d'électrons monochromatiques peuvent en se diffractant sur un cristal donner naissance à des phénomènes tout à fait analogues à ceux qu'on observe avec les rayons X (expériences de Laue-Bragg). M. Rupp a pu même obtenir la diffraction des électrons par un réseau ordinaire sous incidence très rasante et en 1940 M. Börsch (²), répétant une expérience fondamentale de Fresnel sur la lumière, a pu obtenir la diffraction des électrons par le bord d'un écran. Toutes ces expériences permettent d'obtenir une excellente confirmation des idées générales de la Mécanique ondulatoire et en particulier de la formule $\lambda = h/mv$: elles apportent aussi un appui décisif à l'idée qu'il convient d'étendre aux particules matérielles le principe des interférences puisque ce principe est à la base de toutes les interprétations dans le domaine des interférences et de la diffraction.

3. ÉNONCÉ PRÉCIS DU PRINCIPE DES INTERFÉRENCES. FLUIDE DE PROBABILITÉ

Pour préciser le principe des interférences, nous remarquerons que l'onde ψ qui est la solution d'une équation aux dérivées partielles et qui n'a pas le caractère d'une grandeur physique mesurable n'est déterminée qu'à un facteur constant multiplicatif près, ce facteur pouvant être complexe. Nous pouvons le choisir de manière à avoir

$$(2) \quad \iiint \psi\psi^* d\tau = 1$$

(¹) C. J. Davisson et L. H. Germer, *Phys. Rev.*, 30, 705, 1927.

G. P. Thomson, *Nature*, 120, 802, 1927.

E. Rupp, *Naturwiss.*, 16, 556, 1928.

M. Ponte, *C.R. Ac. Sc.*, 244, 909, 1929.

(²) M. Boersch, *Naturwiss.*, 28, 709, 1940.

l'intégrale étant étendue à tout l'espace. Tout au moins le choix du facteur arbitraire nous permet de « normer » la fonction par la relation précédente à un instant donné t_0 et nous allons montrer qu'alors la fonction ψ reste normée à tout instant t . On peut alors préciser l'énoncé du principe des interférences en disant : « La probabilité pour qu'une observation permette de localiser un corpuscule dont la fonction d'onde normée est $\psi(x, y, z, t)$ dans un élément de volume $d\tau$ à l'instant t est égale à

$$\psi(x, y, z, t) \psi^*(x, y, z, t) d\tau = |\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau. \text{ »}$$

Pour nous représenter visuellement les variations dans le temps de la probabilité de présence $|\psi|^2$, nous imaginerons un fluide fictif⁽¹⁾ dont, par définition, la densité en chaque point à chaque instant serait donnée par

$$(3) \quad \rho(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) \psi^*(x, y, z, t).$$

Nous définissons le mouvement de ce fluide en posant que sa vitesse au point xyz à l'instant t est donnée par la formule

$$(4) \quad \vec{v} = \frac{1}{\psi\psi^*} \frac{h}{4\pi im} (\psi \overrightarrow{\text{grad}} \psi^* - \psi^* \overrightarrow{\text{grad}} \psi) = - \frac{h}{2\pi m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

Or les fonctions ψ et ψ^* obéissent aux équations complexes conjuguées

$$(5) \quad \begin{aligned} \Delta\psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t) \psi &= \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t}; \\ \Delta\psi^* - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V(x, y, z, t) \psi^* &= - \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$(6) \quad \psi^* \Delta\psi - \psi \Delta\psi^* = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\psi\psi^*) = \frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

ce qu'on peut écrire

$$(7) \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{h}{4\pi im} (\psi^* \Delta\psi - \psi \Delta\psi^*) = - \frac{h}{4\pi im} \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)$$

ou

$$(8) \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

⁽¹⁾ Note G. L. : On donne à ce fluide le nom de fluide de Madelung. Il jouera, par la suite, un grand rôle dans l'interprétation causale de la mécanique ondulatoire.

Cette équation bien connue en hydrodynamique sous le nom d'équation de continuité exprime que le fluide fictif de densité ρ se conserve au cours du temps, c'est-à-dire que l'intégrale $\iiint |\psi|^2 d\tau$ reste constante. La normalisation de ψ a donc un caractère permanent.

4. LES RELATIONS D'INCERTITUDE D'HEISENBERG

L'ancienne Mécanique admettait qu'il était possible d'attribuer au corpuscule une position et une vitesse bien définies à chaque instant : en d'autres termes, on attribuait aux coordonnées x, y, z du corpuscule ainsi qu'à son énergie E et à sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ des valeurs bien déterminées à chaque instant. Nous allons voir qu'on ne peut plus faire de même en Mécanique ondulatoire.

Etudions le cas simple du mouvement rectiligne uniforme en dehors de tout champ. Nous savons qu'au mouvement rectiligne et uniforme d'énergie E et de quantité de mouvement \vec{p} s'opérant dans la direction de cosinus directeurs α, β et $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ correspondait l'onde plane monochromatique

$$(9) \quad \psi = a \exp \left\{ \frac{2\pi i}{h} [Et - \sqrt{2mE} (\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z)] \right\}$$

de fréquence E/h et de longueur d'onde h/mv . Cette onde monochromatique correspond donc à un état de mouvement bien déterminé, mais elle ne donne aucune indication sur la position du corpuscule, car elle est homogène, c'est-à-dire a même amplitude en tout point de l'espace. La probabilité de présence $|\psi|^2$ est donc la même en tous les points.

Mais, au lieu d'être une onde plane monochromatique, la solution ψ de l'équation d'onde qui convient à l'état du corpuscule peut être une superposition d'ondes planes monochromatiques représentant un train d'ondes de dimensions limitées. Alors l'intensité $|\psi|^2$ ne sera différente de zéro que dans une région limitée de l'espace et le corpuscule, d'après le principe des interférences, ne pourra être décelé que dans cette région. L'incertitude sur la position est donc moins grande que dans le cas de l'onde plane monochromatique. Par contre, si à chaque composante monochromatique de fréquence v et de longueur d'onde λ nous faisons correspondre l'état de mouvement défini par

$$(10) \quad E = hv \quad p_x = \alpha(h/\lambda) \quad p_y = \beta(h/\lambda) \quad p_z = \gamma(h/\lambda)$$

on ne pourra plus attribuer au corpuscule un état de mouvement bien déterminé. En passant du cas de l'onde plane monochromatique à celui du train d'ondes limité, nous avons donc diminué l'incertitude sur la position, mais nous avons augmenté l'incertitude sur l'état de mouvement. Nous pouvons passer au cas limite d'un train d'ondes de dimensions infiniment petites. Il est alors nécessaire de faire intervenir pour la représentation analytique de ce train

d'ondes une superposition d'ondes monochromatiques ayant toutes les fréquences, toutes les longueurs d'onde et toutes les directions possibles. Ce cas limite symétrique de celui de l'onde plane monochromatique correspond à une localisation bien déterminée du corpuscule, mais à une ignorance complète de son état de mouvement.

En résumé, mieux la position du corpuscule est définie, plus grande est l'incertitude sur son état de mouvement et inversement. Nous arrivons ainsi à un premier énoncé qualitatif des relations d'incertitude d'Heisenberg que nous allons maintenant préciser.

Pour cela, étudions la représentation d'une onde ψ par une superposition d'ondes planes monochromatiques. Posons

$$(11) \quad v = \frac{E}{\hbar} \quad \mu_x = \frac{p_x}{\hbar} = \frac{\alpha}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad \mu_y = \frac{p_y}{\hbar} = \frac{\beta}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad \mu_z = \frac{p_z}{\hbar} = \frac{\gamma}{\hbar} \sqrt{2mE}.$$

L'onde monochromatique plane correspondante peut s'écrire

$$(12) \quad a \exp(2\pi i[vt - \mu_x x - \mu_y y - \mu_z z]).$$

On pourra représenter l'onde ψ par une intégrale de Fourier

$$(13) \quad \psi(x, y, z, t) = \iiint a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \times \\ \times \exp[2\pi i(vt - \mu_x x - \mu_y y - \mu_z z)] d\mu_x d\mu_y d\mu_z$$

formule dans laquelle on doit poser

$$(14) \quad v = \frac{E}{\hbar} = \frac{h}{2m} (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2).$$

Les coefficients $a(\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ sont en général complexes, c'est-à-dire contiennent un facteur de la forme e^{ix} , car les diverses composantes monochromatiques dans le développement de ψ n'ont pas la même phase.

Envisageons maintenant le train d'ondes ψ à un instant quelconque que nous prendrons comme instant initial $t = 0$. La fonction

$$(15) \quad \psi(x, y, z, 0) = \iiint_{-\infty}^{\infty} a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) \times \\ \times \exp[-2\pi i(\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z)] d\mu_x d\mu_y d\mu_z$$

ne doit différer de zéro que dans un domaine limité R . Nous désignerons par les symboles $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les variations maxima des coordonnées dans R , c.-à.-d. les longueurs des arêtes parallèles aux axes d'un rectangle circonscrit à R . Nous pouvons choisir l'origine des coordonnées en l'un des sommets

du parallélépipède de sorte que x, y, z dans R varient dans les intervalles $(0, \Delta x)$, $(0, \Delta y)$, $(0, \Delta z)$.

La théorie des intégrales de Fourier nous fournit la relation

$$(16) \quad a(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = \iiint_R \psi(x, y, z, 0) \times \\ \times \exp[2\pi i(\mu_x x + \mu_y y + \mu_z z)] dx dy dz.$$

Comme tous les a ne peuvent être infiniment petits, il y a au moins un ensemble de valeurs des μ , disons $\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0$, tel que $a(\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0)$ ait une valeur notable. Faisons varier μ_x, μ_y, μ_z de $\delta\mu_x, \delta\mu_y, \delta\mu_z$ à partir de $\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0$, les variations n'étant pas nécessairement infiniment petites. On a

$$a(\mu_x^0 + \delta\mu_x, \mu_y^0 + \delta\mu_y, \mu_z^0 + \delta\mu_z) - a(\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0) = \\ = \int_0^{\Delta x} dx \int_0^{\Delta y} dy \int_0^{\Delta z} dz \psi(x, y, z, 0) [\exp[2\pi i(\delta\mu_x x + \delta\mu_y y + \delta\mu_z z)] - 1] \times \\ \times \exp[2\pi i(\mu_x^0 x + \mu_y^0 y + \mu_z^0 z)] dx dy dz.$$

L'exponentielle entre crochets ne peut différer sensiblement de 1 que si l'un au moins des produits $\delta\mu_x \Delta x, \delta\mu_y \Delta y, \delta\mu_z \Delta z$ est supérieure à une fraction η qui n'est pas très petite devant l'unité. Donc, si l'on a à la fois $\delta\mu_x \Delta x \leq \eta$; $\delta\mu_y \Delta y \leq \eta$; $\delta\mu_z \Delta z \leq \eta$, $a(\mu_x^0 + \delta\mu_x, \mu_y^0 + \delta\mu_y, \mu_z^0 + \delta\mu_z)$ différera peu de $a(\mu_x^0, \mu_y^0, \mu_z^0)$ et aura donc d'après l'hypothèse une valeur notable. On peut donc dire que l'étendue du domaine de variation des trois paramètres μ_x, μ_y, μ_z dans la représentation de Fourier du train d'ondes ψ est mesurée par trois quantités $\Delta\mu_x, \Delta\mu_y, \Delta\mu_z$ satisfaisant aux inégalités

$$\Delta\mu_x, \Delta x \geq \eta \quad \Delta\mu_y, \Delta y \geq \eta \quad \Delta\mu_z, \Delta z \geq \eta$$

ou d'après la définition de μ_x, μ_y et μ_z

$$(17) \quad \Delta p_x, \Delta x \geq h \quad \Delta p_y, \Delta y \geq h \quad \Delta p_z, \Delta z \geq h$$

les inégalités étant valables en ordre de grandeur. Nous avons ainsi obtenu les inégalités d'incertitude d'Heisenberg : elles nous apprennent que le produit de l'incertitude sur une coordonnée par l'incertitude sur la composante conjuguée de la quantité de mouvement est toujours de l'ordre de h .

5. LE PRINCIPE DE DÉCOMPOSITION SPECTRALE (BORN)

Dans les raisonnements que nous venons d'exposer, nous avons implicitement admis un principe qu'il importe maintenant d'énoncer nettement. Le principe qui s'est imposé lors du développement de la Mécanique ondulatoire et qui a été énoncé en premier par M. Born peut s'énoncer en disant : « si l'onde ψ

est formée par la superposition d'un certain nombre d'ondes planes monochromatiques, chacune de ces composantes correspond à un état de mouvement possible du corpuscule, c'est-à-dire qu'une observation ou mesure peut permettre d'attribuer cet état de mouvement au corpuscule ». D'une façon plus précise, on peut dire avec M. Born : « si l'onde ψ est formée par la superposition d'ondes planes monochromatiques formant un spectre discontinu, c'est-à-dire si l'on a :

$$(18) \quad \psi = \sum_{\alpha, \beta, E} a(\alpha, \beta, E) \exp \left\{ \frac{2 \pi i}{h} [Et - \sqrt{2 mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z)] \right\}$$

la probabilité pour qu'une mesure conduise à attribuer au corpuscule un mouvement d'énergie E dans la direction définie par les cosinus directeurs α , β , $\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ est $a(\alpha, \beta, E) \cdot a^*(\alpha, \beta, E) = |a(\alpha, \beta, E)|^2$. Si l'onde ψ est formée par la superposition d'ondes planes formant un spectre continu (ce qui est le cas des trains d'onde usuels), c.-à.-d. si l'on a

$$(19) \quad \psi = \iiint a(\alpha, \beta, E) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2 \pi i}{h} [Et - \sqrt{2 mE}(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z)] \right\} d\alpha d\beta dE$$

la probabilité pour qu'une mesure conduise à attribuer au corpuscule un mouvement d'énergie comprise entre E et $E + \Delta E$ s'effectuant dans une direction correspondant aux intervalles $(\alpha, \alpha + \Delta \alpha)$ et $(\beta, \beta + \Delta \beta)$ est égale à

$$\iiint_{\Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta E} |a(\alpha, \beta, E)|^2 d\alpha d\beta dE.$$

On peut donc dire que la probabilité de chaque état de mouvement est mesurée par l'intensité de la composante spectrale correspondante. Les états de mouvement qui ne figurent pas dans le développement de Fourier de la fonction d'onde ont donc une probabilité nulle : c'est là, nous le verrons, la base de la théorie des états quantifiés en Mécanique ondulatoire.

Nous n'avons énoncé le principe de décomposition spectrale que dans le cas simple de l'absence de champ. Nous apprendrons bientôt à connaître un principe général applicable à tous les cas, le principe de décomposition spectrale généralisé, dont le principe de Born et même celui des interférences ne sont que des cas particuliers.

6. IDÉES NOUVELLES RÉSULTANT DES CONCEPTIONS PRÉ-CÉDENTES

Les considérations précédentes nous permettent déjà de préciser le sens de l'onde ψ et d'y rattacher des idées toutes nouvelles.

L'onde ψ n'est pas une grandeur physique au sens classique : elle est un instrument de prévision⁽¹⁾. Sa forme résulte des observations antérieures qui nous ont apporté des renseignements sur l'état du corpuscule et de son évolution à partir des dernières observations qui se fait conformément à l'équation d'ondes. Bien que cette évolution de l'onde ψ soit entièrement déterminée, il n'en résulte pas, nous le verrons, une prévisibilité rigoureuse des observations futures, car la connaissance de l'onde ψ ne nous permet pas de dire quelle valeur d'une grandeur donnée sera observée dans une nouvelle observation, mais quelles seront les valeurs possibles de la grandeur et leurs probabilités respectives.

Chaque fois que de nouvelles observations nous apportent de nouvelles connaissances sur l'état du corpuscule, la forme de l'onde ψ s'en trouve modifiée : ceci se conçoit aisément si l'on comprend bien que l'onde ψ n'est qu'une représentation de nos connaissances actuelles sur l'état du corpuscule et non la représentation d'une réalité objective.

Nous verrons que des observations faites simultanément au cours d'une même expérience ne peuvent jamais nous permettre d'avoir sur les grandeurs liées à un corpuscule des connaissances plus précises que ne le permettent les inégalités d'incertitude d'Heisenberg. Une partie (on pourrait dire la moitié) au moins des grandeurs caractérisant le corpuscule sont à tout instant affectées d'incertitude. Si nous mesurons avec précision la valeur de certaines grandeurs, la valeur des grandeurs canoniquement conjuguées nous reste totalement inconnue. Il y a donc des expériences de mesure « maximales » qui nous donnent la plus grande connaissance que nous puissions avoir sur l'état du corpuscule sans cependant nous le faire connaître entièrement. S'il existait des expériences nous permettant de connaître exactement toutes les grandeurs attachées à un corpuscule, les relations d'incertitude d'Heisenberg ne seraient évidemment plus satisfaites et il résulte des raisonnements faits précédemment qu'après une expérience de ce genre nous ne pourrions plus représenter l'état de nos connaissances par une onde ψ : mais nous verrons qu'aucune expérience de ce genre ne peut être réalisée et cela en raison même de l'existence du quantum d'action. Toutes ces considérations seront rendues plus claires et plus précises par ce qui suit.

7. RETOUR DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE A LA MÉCANIQUE CLASSIQUE. THÉORÈME D'EHRENFEST, VITESSE DE GROUPE

Nous voulons maintenant exposer comment on peut, du point de vue de la Mécanique ondulatoire, justifier le succès de la Mécanique classique dans le

⁽¹⁾ Note G. L. : C'est précisément pour cette raison que de Broglie avait introduit en 1927 l'idée, qu'il reprendra l'année qui suivit ce manuscrit, selon laquelle il doit exister *deux* solutions de l'équation de Schrödinger reliées entre elles mais non identiques : l'une physique et l'autre statistique.

domaine macroscopique. Une première méthode fait intervenir le théorème d'Ehrenfest que nous allons exposer.

Considérons à nouveau le fluide de probabilité de densité $\rho = |\psi|^2$. Pour un train d'ondes, il occupe une région finie R de l'espace et l'on peut définir son « centre de gravité » par les formules intuitives

$$(20) \quad \bar{x} = \iiint_R \rho x \, d\tau = \iiint_R x |\psi|^2 \, d\tau; \quad \bar{y} = \iiint_R y |\psi|^2 \, d\tau;$$

$$\bar{z} = \iiint_R z |\psi|^2 \, d\tau.$$

Plus généralement nous appellerons valeur moyenne d'une fonction $f(x, y, z)$ dans le fluide de probabilité la quantité

$$(21) \quad \bar{f} = \iiint_R f(x, y, z) |\psi|^2 \, d\tau.$$

Ces définitions posées, voici le théorème naguère démontré par M. Ehrenfest.

« Le centre de gravité du fluide de probabilité de coordonnées $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ se déplace au cours du temps comme le ferait d'après les lois de la Mécanique classique un point matériel de masse m qui serait soumis à la force \vec{f} . »

En effet, on trouve en employant l'équation d'ondes et des intégrations par parties (la fonction ψ étant supposée assez régulière et nulle aux limites de R).

$$(22) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \int_R x \frac{\partial \psi \psi^*}{\partial t} \, d\tau = -\frac{h}{4\pi im} \int_R x \sum_{x,y,z} \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \, d\tau$$

$$= \frac{h}{4\pi im} \int_R \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] \, d\tau$$

uis

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{h}{4\pi im} \int_R \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial t} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} \right] \, d\tau$$

$$= \frac{h}{2\pi im} \int_R \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \, d\tau$$

ce qui, en vertu de l'équation de propagation, donne encore

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \int_R \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \left(\Delta \psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \psi \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\Delta \psi^* - \frac{8\pi^2 m}{h^2} V \psi^* \right) \right] \, d\tau.$$

Or deux intégrations par parties donnent encore

$$\begin{aligned} \int_R \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta \psi^* \right) d\tau &= \int_R \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial x} \Delta \psi + \psi^* \frac{\partial}{\partial x} (\Delta \psi) \right] d\tau \\ &= \int_R \frac{\partial}{\partial x} [\psi^* \Delta \psi] d\tau = 0 \end{aligned}$$

et il reste

$$(23) \quad \begin{aligned} m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= \int_R V \frac{\partial}{\partial x} (\psi \psi^*) d\tau = - \int_R \frac{\partial V}{\partial x} \psi \psi^* d\tau \\ m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= - \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \bar{f}_x \end{aligned}$$

et deux équations analogues en y et z . Le théorème d'Ehrenfest en résulte.

Considérons maintenant une expérience macroscopique permettant d'observer le mouvement d'une particule, mettons d'un électron. La longueur d'onde de l'onde ψ est toujours extrêmement petite à notre échelle et l'on peut considérer un train d'ondes dont les dimensions sont très petites à notre échelle (train d'ondes quasi ponctuel) et dont les dimensions seront cependant grandes par rapport à la longueur d'onde. Le champ macroscopique auquel le corpuscule sera soumis variera toujours très peu à l'intérieur du train d'ondes de sorte que \bar{f} sera sensiblement égale à la valeur de la force au centre du train d'ondes.

Comme alors nous pouvons macroscopiquement confondre le train d'ondes avec son centre de gravité et que le corpuscule ne peut manifester sa présence qu'à l'intérieur du train d'ondes, nous pourrons décrire les choses, d'après le théorème d'Ehrenfest, en disant que le corpuscule est animé du mouvement prévu par la théorie classique. Assurément une expérience microscopique nous montrerait que le corpuscule peut avoir une position quelconque dans le train d'ondes, mais macroscopiquement toutes ces positions possibles sont confondues puisque le train d'ondes est ponctuel à notre échelle.

La question peut être reprise à un autre point de vue en employant le théorème de la vitesse de groupe.

Rappelons d'abord qu'un groupe d'ondes est un train d'ondes qui peut être représenté par une superposition d'ondes planes monochromatiques ayant des fréquences, des longueurs d'onde et des directions de propagation *très voisines*. On peut donc lui attribuer une fréquence, une longueur d'onde et une direction de propagation approximatives quoiqu'il ne soit pas rigoureusement équivalent à une onde monochromatique. Le groupe d'ondes a des dimensions limitées parce que les différentes ondes composantes en concordance de phase au centre du train d'ondes se détruisent par interférences en dehors de ces limites. Il est facile de prouver que les dimensions d'un groupe d'ondes sont toujours grandes par rapport à sa longueur d'onde moyenne λ_0 . Si en effet les

diverses composantes sont en concordance de phase au centre du groupe d'ondes représenté par une superposition d'ondes de longueurs d'onde comprises dans l'intervalle $(\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda)$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, pour que les composantes puissent se détruire par interférences en dehors de l'espace occupé par le groupe, il faut que le déphasage des ondes de longueurs d'onde λ_0 et $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$ soit au moins $\pi/2$ quand on va du centre du groupe aux limites de ce groupe. Si d est la distance du centre à la limite, on doit avoir

$$\frac{d}{\lambda_0} - \frac{d}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \simeq \frac{d \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \sim \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{d}{\lambda_0} \sim \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \gg 1 \quad \text{c.q.f.d.}$$

Retrouvons maintenant la formule de lord Rayleigh donnant la vitesse de groupe. Dans un milieu à indice variable une onde monochromatique de fréquence v_0 pourrait à l'approximation de l'optique géométrique être représentée par $a \exp\{2\pi i[v_0 t - \varphi_1(x, y, z, v_0)]\}$, φ_1 étant une intégrale complète de l'équation de l'optique géométrique. Un groupe d'ondes sera représenté par

$$(24) \quad \psi = \int_{v_0 - \Delta v}^{v_0 + \Delta v} a(v) \exp\{2\pi i[vt - \varphi_1(x, y, z, v)]\} dv, \quad \Delta v \ll v_0.$$

Posons $v = v_0 + \eta$, η variant de $-\Delta v$ à $+\Delta v$. Nous pourrons écrire approximativement

$$(25) \quad \psi = \exp\{2\pi i[v_0 t - \varphi_1(x, y, z, v_0)]\} \int_{-\Delta v}^{\Delta v} a(\eta) \times \\ \times \exp\left\{2\pi i\left[\eta t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)_0 \eta\right]\right\} d\eta$$

où $(\partial \varphi_1 / \partial v)_0$ est la dérivée partielle de φ_1 par rapport à v pour $v = v_0$. Dans cette dernière formule, l'intégrale est une fonction du paramètre $t - (\partial \varphi_1 / \partial v)_0$ et l'on peut donc écrire

$$(26) \quad \psi = F\left[t - \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right)_0\right] \exp\{2\pi i[v_0 t - \varphi_1(x, y, z, v_0)]\}.$$

Le train d'ondes se comporte donc approximativement comme une onde monochromatique dont l'amplitude serait fonction de $t - (\partial \varphi_1 / \partial v)_0$. On peut voir que cette approximation cesse d'être valable pour des temps très longs.

Si nous nous déplaçons le long d'un rayon c.-à.-d. d'une courbe orthogonale aux surfaces $\varphi_1 = Cte$ de façon que $dt - (\partial^2 \varphi_1 / \partial v \partial s) ds$ soit nul, nous accompagnerons une même valeur de l'amplitude. Nous pouvons donc dire que

pendant un temps qui n'est pas trop long, le groupe d'ondes se déplace en bloc le long des rayons avec la vitesse

$$(27) \quad U = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v \partial s} \right)^{-1}.$$

Mais nous avons vu que $\partial \varphi_1 / \partial s = |\text{grad } \varphi_1|$ est égal en chaque point à l'inverse de la longueur d'onde locale $\lambda(x, y, z, v)$; nous avons donc

$$(28) \quad \frac{1}{U} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\partial(v/\mathcal{V})}{\partial v} = \frac{1}{\mathcal{V}_0} \frac{\partial(nv)}{\partial v}.$$

Telle est la formule qui donne en chaque point la vitesse de groupe (formule de lord Rayleigh). Si le milieu est homogène, U est indépendante de x, y, z . Si de plus, il est sans dispersion ($\partial n / \partial v = 0$), on a $U = \mathcal{V}$ la vitesse de groupe se confond avec la vitesse de phase.

Appliquons la formule de lord Rayleigh à la propagation des ondes ψ en Mécanique ondulatoire. Pour le mouvement d'un corpuscule se mouvant dans un champ dérivant du potentiel $V(x, y, z)$, nous avons trouvé (p. 12 formule (30))

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m(E - V(x, y, z))}} \quad \text{avec} \quad E = hv$$

d'où

$$\frac{\partial(1/\lambda)}{\partial v} = \frac{(1/h) \partial \sqrt{2 m(E - V)}}{(1/h) \partial E} = \frac{m}{\sqrt{2 m(E - V)}} = \frac{1}{v}$$

car $\sqrt{2 m(E - V)} = mv$. La formule de Rayleigh donne donc

$$U = v.$$

D'où l'important théorème de la vitesse de groupe en Mécanique ondulatoire.

« La vitesse d'un groupe d'ondes ψ associé à un corpuscule est égale à la vitesse corpusculaire qui correspond à la fréquence centrale du groupe d'ondes. »

Revenons au raccord entre la Mécanique classique et la Mécanique ondulatoire dans le domaine macroscopique. Dans ce domaine, les champs et par suite l'indice de réfraction des ondes ψ varient peu à l'échelle de la longueur d'onde. De plus, les longueurs d'onde étant très petites, nous pouvons considérer des groupes d'ondes qui sont presque ponctuels à notre échelle. Considérons alors la propagation d'une onde monochromatique correspondant à la fréquence centrale v_0 du groupe. Nous aurons un ensemble de surfaces équiphases $\varphi_1(x, y, z, v_0) = Cte$ et les rayons ou courbes orthogonales à ces surfaces.

Le groupe d'ondes sera à l'échelle macroscopique analogue à un petit globule qui glisserait le long d'un tube de rayons. A l'échelle microscopique de la

longueur d'onde, il serait dans sa partie centrale assimilable à une onde monochromatique et c'est seulement sur les bords que l'interférence de ses diverses composantes ferait rapidement tomber à zéro son intensité. Le train d'ondes se transporte le long des rayons avec la vitesse U qui serait celle d'un corpuscule classique dans le champ. Comme à l'échelle macroscopique, nous ne savons pas distinguer les divers points du groupe d'ondes qui nous apparaît comme ponctuel et que le corpuscule ne peut se manifester qu'à l'intérieur du groupe, nous avons l'impression d'être en présence d'un corpuscule ponctuel animé du mouvement classique. L'on voit que nous retrouvons ainsi exactement les conclusions que nous avions tirées du théorème d'Ehrenfest. Le théorème d'Ehrenfest et celui de la vitesse de groupe sont intimement reliés et nous permettent, l'un et l'autre, de faire le raccord entre la Mécanique ondulatoire et la Mécanique classique dans le cas des phénomènes macroscopiques où la propagation de l'onde ψ peut être décrite par l'approximation de l'optique géométrique.

CHAPITRE III

LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES

1. ANCIENNE DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

Jusqu'ici, nous avons considéré un corpuscule placé dans un champ de force connu. Comment généraliser la méthode exposée plus haut dans le cas d'un système de corpuscules agissant les uns sur les autres ? Pour le voir, il faut d'abord rappeler quelques points de la Dynamique classique des systèmes de points matériels.

Considérons un système formé de N corpuscules. La masse du i^{e} est m_i , ses coordonnées sont x_i, y_i, z_i . L'énergie cinétique du système est

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{1}^N m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right].$$

Les moments conjugués des trois coordonnées sont

$$(2) \quad p_{x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}; \quad p_{y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}; \quad p_{z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}.$$

L'énergie potentielle du système $V(x_1, \dots, z_N, t)$ est formée de deux sortes de termes : 1) ceux qui expriment l'interaction mutuelle des corpuscules et sont supposés ne dépendre que de leurs distances : ils sont de la forme $V_{ij}\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$; 2) ceux qui expriment l'action éventuelle d'un champ extérieur sur chacun des corpuscules : ils sont de la forme $V(x_i, y_i, z_i, t)$.

L'expression hamiltonienne qui donne l'énergie en fonction des coordonnées et des moments est

$$(3) \quad H(x_1 \dots z_N, t) = \sum_{1}^N \frac{1}{2m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + V(x_1 \dots z_N, t).$$

Si le champ extérieur ne dépend pas du temps (ou est nul), V ne dépend pas de t

et l'on sait que H reste égal à une valeur constante E au cours du mouvement (système conservatif).

La théorie de Jacobi se laisse étendre aux systèmes. L'équation de Jacobi pour le système est

$$(4) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] + V(x_1, \dots, z_N, t) = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Si l'on parvient à trouver une intégrale complète de cette équation contenant $3N$ constantes arbitraires non additives $\alpha_1, \dots, \alpha_{3N}$, on obtiendra un mouvement possible en écrivant

$$(5) \quad \frac{\partial S(x_1, \dots, z_N, t, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N})}{\partial \alpha_i} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, 3N$$

où les a_i sont $3N$ nouvelles constantes arbitraires et les moments de Lagrange sont donnés par les formules

$$(6) \quad p_{x_i} = -\frac{\partial S}{\partial x_i}; \quad p_{y_i} = -\frac{\partial S}{\partial y_i}; \quad p_{z_i} = -\frac{\partial S}{\partial z_i} \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Dans le cas particulier où les actions extérieures sont indépendantes du temps (ou nulles), V est indépendant de t et l'on peut trouver des solutions de la forme $S = Et - S_1(x_1, \dots, z_N)$.

L'on est alors ramené à envisager l'équation de Jacobi « raccourcie »

$$(7) \quad \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial z_i} \right)^2 \right] + V(x_1, \dots, z_N) = E$$

et à en chercher une intégrale complète contenant $3N$ constantes arbitraires non additives $E, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1}$. Les équations du mouvement sont alors

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_i} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

équation de la trajectoire du point représentatif dans l'espace de configuration $x_1 \dots z_N$

$$\frac{\partial S_1}{\partial E} = t - t_0 \quad (\text{équation de l'horaire})$$

et l'on a

$$p_{x_i} = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}; \quad p_{y_i} = \frac{\partial S_1}{\partial y_i}; \quad p_{z_i} = \frac{\partial S_1}{\partial z_i}.$$

Comme dans le cas d'un point matériel unique, l'équation de Jacobi permet de définir des « classes » de mouvement du point représentatif du système dans l'espace de configuration, chaque classe correspondant à une fonction

$S_1(x_1, \dots, z_N, E, \alpha_1, \dots, \alpha_{3N-1})$ avec des valeurs données des constantes $E, \alpha_1 \dots \alpha_{3N-1}$, les divers mouvements d'une même classe étant caractérisés par la valeur des constantes $a_1 \dots a_{2N-1}$ et t_0 .

2. MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES

Pour obtenir une Mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules, on doit comme l'a montré M. Schrödinger, considérer la propagation d'une onde dans l'espace de configuration de ce système⁽¹⁾ et, pour pouvoir retrouver la Mécanique classique en première approximation, il faut que l'optique géométrique de cette propagation nous ramène à la théorie de Jacobi.

On admet que l'équation de propagation dans l'espace de configuration s'obtient par le procédé formel qui réussit dans le cas du corpuscule unique. On part de l'expression Hamiltonienne classique $H(x_1 \dots z_N p_{x_1} \dots p_{z_N})$ qui convient pour le système envisagé et on transforme cette fonction en un opérateur en remplaçant les moments $p_{x_k} p_{y_k} p_{z_k}$ par

$$(8) \quad P_{x_k} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad P_{y_k} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad P_{z_k} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

On obtient ainsi l'opérateur Hamiltonien

$$H\left(x_1 \dots z_N, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_N}, t\right)$$

et l'on adopte comme équation de propagation

$$(9) \quad H\left(x_1 \dots z_N, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z_N}, t\right) \psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

On trouve ainsi

$$(10) \quad \sum_{1k}^N \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_k^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} V(x_1, \dots, z_N, t) \psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

si $N = 1$, on retrouve l'équation valable pour un seul corpuscule.

(1) Note G. L. : C'est ce que de Broglie a refusé d'admettre en 1926 (voir réf. I, 29), considérant que les ondes associées aux différentes particules du système « ont une réalité physique et doivent s'exprimer par des fonctions des 3 coordonnées d'espace et du temps ». En 1927 (réf. I, 34) il a fait une première tentative de reconstruire la théorie des systèmes dans l'espace physique, tentative qu'il devait reprendre vingt-cinq ans plus tard avec Andrade e Silva. Mais à l'époque où il écrivit ce texte, il s'était résigné à adopter, sans plus le critiquer, le point de vue devenu habituel.

Pour les systèmes conservatifs ($\partial V / \partial t = 0$), on peut considérer des solutions monochromatiques ne dépendant du temps que par le facteur $\exp(2\pi i/h Et)$ et l'équation s'écrit

$$(11) \quad \sum_1^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} [E - V(x_1, \dots, z_N)] \psi = 0.$$

Si dans une région de l'espace de configuration V (et par suite l'indice) varie peu à l'échelle de la longueur d'onde locale, l'optique géométrique est valable et l'onde a la forme approximative

$$(12) \quad \psi = a \exp\left(\frac{2\pi i}{h} [Et - S_1]\right)$$

a étant une fonction lentement variable dont les dérivées sont très petites par rapport à celles de S_1 . En substituant cette forme dans l'équation de propagation, on voit que S_1 doit être une solution de l'équation de Jacobi pour le système, ce qui établit la jonction avec la Mécanique classique.

Un cas intéressant est celui où les corpuscules du système n'agissent pas les uns sur les autres. On peut alors les considérer aussi bien comme isolés que comme formant un système. La fonction V se réduisant aux termes en $V(x_i, y_i, z_i, t)$ qui expriment l'action d'un champ extérieur sur les divers corpuscules, l'équation du système se réduit à

$$(13) \quad \sum_1^N \frac{1}{m_k} \Delta_k \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} \sum_k V_k(x_k, y_k, z_k, t) \psi = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Posons $\psi(x_1 \dots z_N, t) = \psi_1(x_1, y_1, z_1, t) \dots \psi_N(x_N, y_N, z_N, t)$ nous trouvons que l'équation du système se décompose en N équation du type

$$(14) \quad \frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial y_k^2} + \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial z_k^2} \right) - \frac{8\pi^2}{h^2} V(x_k, y_k, z_k, t) \psi_k = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi_k}{\partial t}$$

et l'on voit que l'on peut considérer chaque corpuscule isolément. Néanmoins l'équation de propagation admet aussi comme solutions une combinaison linéaire quelconque des fonctions $\prod_k \psi_k(x_k, y_k, z_k, t)$. Ces combinaisons représentent les cas où les corpuscules ont été antérieurement en interaction de sorte que leurs états actuels ne sont pas indépendants. Les solutions $\prod_k \psi_k$ représentent les cas où l'état des corpuscules sont tous indépendants.

3. INTERPRÉTATION DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES SYSTÈMES DE CORPUSCULES

Il est aisément de transposer le principe des interférences au cas des systèmes de corpuscules. On l'énonce alors comme suit : « si l'état d'un système de

corpuscules est représenté dans l'espace de configuration par la fonction d'ondes $\psi(x_1 \dots z_N t)$, la probabilité pour qu'une expérience permette au temps t de localiser le point figuratif du système dans l'élément de volume $d\tau = dx_1 \dots dz_N$ de l'espace de configuration est

$$|\psi|^2 d\tau = \psi(x_1, \dots, z_N, t) \cdot \psi^*(x_1, \dots, z_N, t) dt \gg.$$

S'il n'y a qu'un seul corpuscule, on retombe évidemment sur la forme précédemment étudiée du principe des interférences. Pour N corpuscules qui ne réagissent pas entre eux et n'ont jamais réagi entre eux (états indépendants), on a $\psi = \prod_1^N \psi_k(x_k, y_k, z_k, t)$ et par suite

$$(15) \quad |\psi|^2 d\tau = |\psi_1(x_1, y_1, z_1, t)|^2 dx_1 dy_1 dz_1 \times \dots \times |\psi_N(x_N, y_N, z_N, t)|^2 dx_N dy_N dz_N.$$

La probabilité pour que le point figuratif du système soit dans l'élément de volume $dx_1 \dots dz_N$ de l'espace de configuration est donc alors le produit de la probabilité pour que le 1^{er} corpuscule soit dans l'élément de volume $dx_1 dy_1 dz_1$... le N-ième dans l'élément de volume $dx_N dy_N dz_N$. Ce résultat est d'accord avec le théorème des probabilités composées car les présences des divers corpuscules dans les divers éléments de volume de l'espace sont des événements indépendants. Nous voyons bien ainsi pourquoi la fonction d'onde ψ doit alors avoir la forme $\prod_1^N \psi_k$.

Pour que la grandeur $|\psi|^2 dt$ donne en valeur absolue la probabilité de présence du point figuratif dans l'élément dt de l'espace de configuration, il faut normer la fonction d'onde en posant

$$\int_{3N} \dots \int |\psi|^2 dx_1 \dots dz_N = 1$$

ce qui détermine ψ à une constante de phase de la forme $e^{i\alpha}$ près.

Il faut démontrer que la normalisation effectuée à un instant t subsiste ensuite. Pour cela, on considérera un fluide fictif de probabilité dans l'espace de configuration défini par les relations

$$(16) \quad \begin{aligned} \rho &= |\psi|^2 \\ \rho \vec{v}_k &= \frac{\hbar}{4\pi m_k} [\psi \overrightarrow{\text{grad}}_k \psi^* - \psi^* \overrightarrow{\text{grad}}_k \psi] \end{aligned}$$

\vec{v}_k ayant comme composantes $\frac{dx_k}{dt}, \frac{dy_k}{dt}, \frac{dz_k}{dt}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}_k$ ayant comme composantes $\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial z_k}$.

En multipliant l'équation de propagation par ψ^* , l'équation conjuguée par ψ et en soustrayant, on obtient alors

$$\sum_{1^k}^N \frac{1}{m_k} [\psi^* \Delta_k \psi - \psi \Delta_k \psi^*] = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial}{\partial t} (\psi \psi^*)$$

ou

$$\sum_{1^k}^N \frac{1}{m_k} \overrightarrow{\text{grad}}_k (\psi^* \overrightarrow{\text{grad}}_k \psi - \psi \overrightarrow{\text{grad}}_k \psi^*) = \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ou encore d'après les définitions du fluide fictif de probabilité

$$(17) \quad \sum_{1^k}^N \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_{xk}) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\rho v_{yk}) + \frac{\partial}{\partial z_k} (\rho v_{zk}) \right] + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Cette équation est la généralisation à $3 N$ dimensions de l'équation de continuité hydrodynamique $\text{div}(\rho \vec{v}) + \partial \rho / \partial t = 0$; elle exprime que le fluide fictif de probabilité se conserve pendant son mouvement dans l'espace de configuration. La normalisation de ψ a donc un caractère permanent.

Le principe de décomposition spectrale s'énonce comme pour un corpuscule unique. Si le système est conservatif, l'onde ψ peut toujours être représentée par une superposition d'ondes monochromatiques et l'intensité de chaque composante spectrale donne la probabilité pour qu'une expérience permette d'assigner au système l'énergie correspondante.

En étudiant la représentation d'un train d'ondes dans l'espace de configuration par une intégrale de Fourier, on retrouve les relations d'incertitude de la forme

$$\Delta x_k \cdot \Delta p_{xk} \geq h$$

en ordre de grandeur. Ces relations ont la même signification que pour le corpuscule unique.

Dans la théorie précédente, nous avons supposé les corpuscules libres de se mouvoir dans tout l'espace (systèmes sans liaisons) et nous avons employé les coordonnées cartésiennes rectangulaires des corpuscules pour repérer la configuration du système. Si l'on veut employer des coordonnées curvilignes, ce qui est normal dans le cas où il existe des liaisons si bien que le nombre des degrés de liberté est inférieur à $3 N$, il faut développer un peu différemment la théorie qui précède. Nous n'insistons pas sur ce point⁽¹⁾. De même, si le système contient des corpuscules de même nature, l'indiscernabilité de ces corpuscules amène à n'accepter que certaines des solutions de l'équation de propagation. Nous laissons également de côté ce genre de questions.

⁽¹⁾ Voir Réf. (II, 22).

CHAPITRE IV

FORMALISME GÉNÉRAL DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Nous allons maintenant nous placer à un point de vue différent et développer sous un aspect plus formel les principes généraux de la Mécanique ondulatoire. Pour faire cet exposé avec une rigueur mathématique très grande, il faudrait introduire souvent des considérations mathématiques assez complexes et d'ailleurs certains points resteraient encore douteux.

La théorie deviendrait ainsi plus satisfaisante pour les esprits rigoureux, mais elle ne différerait guère dans ses résultats pratiques de la théorie plus sommaire que je vais exposer et, puisque celle-ci suffit actuellement aux besoins de la Physique théorique, je m'y tiendrai dans cet exposé.

1. NOUVELLE CONCEPTION DES GRANDEURS ATTACHÉES A UN CORPUSCULE (OU A UN SYSTÈME)

Nous allons développer le formalisme général de la Mécanique ondulatoire en nous en tenant au cas du corpuscule dans un champ de force connu. La généralisation au cas des systèmes de corpuscules se fait aisément en suivant les mêmes lignes que précédemment.

Dans le procédé automatique qui fournit l'opérateur Hamiltonien à partir de l'expression Hamiltonienne de l'énergie dans le problème classique correspondant, on remplace les variables x, y, z par les opérateurs $x \times, y \times, z \times$ et les variables p_x, p_y, p_z par les opérateurs

$$-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Nous voyons ainsi apparaître l'idée de substituer ou de faire correspondre des « opérateurs » aux « grandeurs » de la Mécanique classique. Cette idée a été érigée en principe général au cours du développement de la Mécanique ondulatoire. On a admis qu'à toute grandeur mesurable (observable) définie par la Mécanique ou la Physique anciennes doit correspondre dans la nouvelle

Mécanique un opérateur. Pour parvenir à former à partir de l'expression classique d'une grandeur observable l'opérateur qui lui correspond, on a été amené à admettre une règle qui est la simple généralisation de celle déjà admise pour la formation de l'opérateur Hamiltonien et traduite par les symboles

$$q \rightarrow q \times p \rightarrow -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}.$$

Tandis que les variables d'espace sont ainsi transformées en opérateurs, la variable t garde son caractère de variable numérique : cette hypothèse qui rompt la symétrie entre les variables d'espace et de temps est l'origine des difficultés que l'on éprouve à concilier la théorie quantique et la théorie de la Relativité.

Comme la Mécanique classique nous fournit pour chaque problème l'expression de toute grandeur mécanique attachée à un corpuscule en fonction des variables canoniques x, y, z, p_x, p_y, p_z et du temps t , nous n'avons dans cette expression qu'à remplacer chacune des variables canoniques par l'opérateur correspondant pour obtenir l'opérateur cherché. Cet opérateur peut d'ailleurs contenir le temps comme paramètre si l'expression classique le contenait. Si les coordonnées employées sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, l'opérateur obtenu est bien déterminé quel que soit l'ordre des facteurs dans l'expression classique. Quand on emploie d'autres coordonnées, il peut ne pas en être de même, il faut alors pour trouver le bon opérateur, appliquer certaines règles de « symétrisation » de l'expression classique de la grandeur.

Pour donner un exemple, appliquons la méthode à la formation de l'opérateur qui correspond à la composante z du moment de quantité de mouvement (moment cinétique) du corpuscule par rapport à l'origine. On trouve aisément

$$(1) \quad (M_z)_{op} = (xp_y - yp_x)_{op} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

φ étant l'azimut compté autour de Oz .

Les opérateurs qui correspondent ainsi en Mécanique ondulatoire à des grandeurs mesurables sont des opérateurs, en général complexes, appartenant à la catégorie des opérateurs linéaires donc tels que

$$(2) \quad A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2); \quad A(c\varphi) = cA(\varphi). \\ (\text{c constante complexe})$$

De plus ces opérateurs sont hermitiens (ou hermitiques), c'est-à-dire que l'on a

$$(3) \quad \int_D f^* A(g) d\tau = \int_D g A^*(f^*) d\tau$$

f et g étant deux fonctions finies, uniformes et continues dans le domaine D de variation des variables que l'on peut choisir arbitrairement. Ces fonctions

doivent s'annuler aux limites du domaine D de telle façon que les intégrales de surface qui apparaissent par intégration par parties dans la vérification de l'équation précédente soient nulles. On peut vérifier dans chaque cas particulier que les opérateurs correspondant à des grandeurs observables sont toujours hermitiens. La raison physique de ce fait nous apparaîtra plus loin.

Parmi les opérateurs de la Mécanique ondulatoire, il nous sera utile de distinguer les « opérateurs complets » qui intéressent toutes les variables du domaine D et les « opérateurs incomplets » qui n'intéressent qu'une partie de ces variables ⁽¹⁾. Pour un corpuscule libre de se mouvoir dans les trois dimensions de l'espace, l'opérateur $(p_x)_{op}$ est visiblement incomplet, tandis que l'opérateur H_{op} est complet.

En résumé, à toute grandeur mesurable attachée à un corpuscule, la Mécanique ondulatoire fait correspondre un opérateur linéaire et hermitien, en général complexe, dont elle sait former l'expression à partir des expressions classiques. Mais il est évident que si l'on effectue la mesure précise d'une grandeur, on obtiendra un nombre réel. La Mécanique ondulatoire doit donc pouvoir prévoir à partir de l'opérateur les valeurs possibles essentiellement réelles que peut fournir la mesure de la grandeur.

De l'opérateur linéaire et hermitique que la nouvelle Mécanique fait correspondre à une grandeur mesurable, nous devons pouvoir déduire une liste de nombres réels représentant tous les résultats possibles de la mesure de cette grandeur. Ceci est précisément rendu possible par le fait que les opérateurs linéaires et hermitiens possèdent une suite de « valeurs propres » réelles. Etudions ce point d'une façon générale.

2. VALEURS PROPRES ET FONCTIONS PROPRES D'UN OPÉRATEUR LINÉAIRE HERMITIEN

Soit A un opérateur linéaire hermitien. Ecrivons l'équation

$$A\varphi = \alpha\varphi$$

où φ est une fonction des variables intéressées par A et α une constante. Le temps t peut figurer dans A , φ et α comme paramètre numérique. Par définition, nous appellerons « valeurs propres de l'opérateur A dans un domaine D » les valeurs de la constante α telles qu'il existe au moins une solution $\varphi(x, y, z, \alpha)$ dite « fonction propre », jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue dans le domaine et l'intégrale du carré de son module dans D est convergente, cette dernière condition entraînant évidemment que, si D est infini, φ doit décroître suffisamment vite à l'infini. Enfin si D est fini, φ doit de plus être nulle aux limites de D .

⁽¹⁾ Note L.B. : Dans le plan xOy , l'opérateur $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ n'est pas complet parce qu'il est égal à $\partial/\partial\varphi$.

Remarquons que nous ne considérons comme solutions distinctes de l'équation aux valeurs propres $A\varphi = \alpha\varphi$ que les solutions linéairement indépendantes.

Nous admettrons (voilà un point délicat au point de vue de la rigueur) que pour les opérateurs de la Mécanique ondulatoire les valeurs propres existent. Nous allons montrer qu'elles sont réelles. En effet de l'équation aux valeurs propres et de sa conjuguée, on tire aisément

$$\int_D [\varphi^* A(\varphi) - \varphi A^*(\varphi^*)] d\tau = (\alpha - \alpha^*) \int_D \varphi \varphi^* d\tau$$

A étant hermitien, le premier membre est nul et, comme l'intégrale du second membre est essentiellement positive, on doit avoir $\alpha = \alpha^*$, donc α est une constante réelle.

L'ensemble des valeurs propres forme le « spectre » de l'équation $A\varphi = \alpha\varphi$ (ou spectre de l'opérateur A dans le domaine D). Si les valeurs propres sont isolées, le spectre est discontinu : c'est un spectre de raies. Si les valeurs propres forment une suite continue, on a un spectre continu ou spectre de bande. Le spectre peut d'ailleurs être en partie continu, en partie discontinu. Les spectres continus n'apparaissent que pour D infini.

Occupons-nous des spectres discontinus. Désignons par α_i une valeur propre isolée : il existe au moins une fonction propre $\varphi_i(x, y, z, t)$ qui lui correspond.

Montrons que l'ensemble des fonctions propres du spectre discontinu forme un système orthogonal, c.-à.-d. que si φ_i et φ_j sont deux fonctions propres correspondant à des valeurs propres distinctes α_i et $\alpha_j \neq \alpha_i$, on a

$$(4) \quad \int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau = 0.$$

En effet, nous avons puisque les α_i sont réelles

$$\int_D [\varphi_i^* A(\varphi_j) - \varphi_j A^*(\varphi_i^*)] d\tau = 0 = (\alpha_j - \alpha_i) \int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau.$$

Le premier membre étant nul par suite de l'hermiticité de A , on en tire la formule annoncée.

Toutefois la démonstration précédente est en défaut pour deux fonctions propres qui se trouveraient correspondre à une même valeur propre. Quand ce cas se présente, on dit qu'on a affaire à une valeur propre « multiple » ou « dégénérée ». Soit α_i une telle valeur propre à laquelle correspondent p fonctions propres linéairement indépendantes $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_p}$. L'opérateur A étant toujours linéaire, toute combinaison linéaire de ces p fonctions propres est encore une fonction propre. On peut donc remplacer $\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_p}$ par p combi-

naisons linéaires linéairement indépendantes de ces fonctions et il est possible de choisir ces combinaisons de façon qu'elles soient orthogonales entre elles. On peut donc toujours supposer que l'ensemble des fonctions propres d'un opérateur linéaire hermitien est orthogonal.

Les fonctions propres ne sont évidemment déterminées qu'à une constante multiplicative complexe près car, si φ_i est solution de $A\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$, $C\varphi_i$ est aussi solution à cause du caractère linéaire de A . On convient de toujours choisir le module de la constante complexe C de façon à avoir

$$(5) \quad \int_D \varphi_i \varphi_i^* d\tau = \int_D |\varphi_i|^2 d\tau = 1.$$

La fonction φ_i est alors dite « normée » : elle contient encore un « facteur de phase » arbitraire $e^{i\alpha}$ de module unité.

Les fonctions φ_i étant à la fois normées et orthogonales (orthonormales) on peut écrire

$$\int_D \varphi_i^* \varphi_j d\tau = \delta_{ij}$$

δ_{ij} étant le « symbole de Kronecker » égal à 1 si $i = j$ et à 0 si $i \neq j$.

Nous avons jusqu'ici raisonné sur le cas d'un spectre discret. Si A possède un spectre continu, à toute valeur propre de ce spectre correspondra une fonction propre $\varphi(x, y, z, \alpha)$ où nous écrivons α comme une variable continue au lieu de l'inscrire en indice. On démontre aisément, comme ci-dessus, que toute fonction propre du spectre continu est orthogonale à toute fonction propre du spectre discontinu s'il y en a un. Pour montrer que les fonctions propres du spectre continu sont normées et orthogonales entre elles, on peut, pour éviter certaines difficultés de convergence, employer au lieu des fonctions

propres elles-mêmes $\varphi(x, y, z, \alpha)$ les expressions $\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$ dites

« différentielles propres », l'intervalle $(\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$ étant un intervalle extrêmement petit du spectre continu. Cette substitution a un sens physique : elle correspond à celle qu'on opère en théorie classique des ondes quand on considère à la place de l'onde plane monochromatique qui est une abstraction le « groupe d'ondes » formé par la superposition d'ondes de fréquences très voisines. On exprime alors que les différentielles propres sont normées et orthogonales en écrivant

$$(6) \quad \frac{1}{\Delta\alpha} \int_D d\tau \left[\int_{\alpha'}^{\alpha' + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right]^* \left[\int_{\alpha''}^{\alpha'' + \Delta\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right] = \delta_{\alpha'\alpha''}.$$

Les fonctions propres des opérateurs complets de la Mécanique ondulatoire possèdent la propriété importante de former un système « complet ». Cela veut dire que, sous certaines conditions très larges, une fonction définie dans le

domaine D des variables intéressées par l'opérateur A se laisse développer en une somme de fonctions propres de cet opérateur. (Pour plus de rigueur, il y aurait lieu d'introduire ici la notion de « convergence en moyenne », ce que nous ne ferons pas dans cet exposé sommaire.) Si, par exemple, $f(x, y, z)$ est une fonction des variables x, y, z , elle se laisse très généralement développer suivant les fonctions propres d'un opérateur hermitien complet A sous la forme

$$f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \int c(\alpha) \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$$

la somme \sum étant étendue au spectre discontinu et l'intégrale au spectre continu. Nous pouvons mettre en évidence les différentielles propres en écrivant

$$(7) \quad f(x, y, z) = \sum_i c_i \varphi_i(x, y, z) + \sum_{A\alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + A\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha .$$

En utilisant les formules exprimant l'orthonormalité des fonctions propres du spectre discontinu et des différentielles propres, on trouve les formules

$$(8) \quad c_i = \int_D \varphi_i^* f(x, y, z) d\tau ; \\ c(\alpha) = \frac{1}{A\alpha} \int_D dt \left[\int_{\alpha}^{\alpha + A\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha \right]^* f(x, y, z) .$$

Les coefficients c_i et $c(\alpha)$ sont souvent appelés les coefficients de Fourier du développement de la fonction $f(x, y, z)$ suivant les fonctions propres de l'opérateur A . La série et l'intégrale de Fourier sont des cas particuliers simples de ce type de développements. Il est à noter que le temps peut figurer comme paramètre numérique dans l'expression des c_i et des $c(\alpha)$.

Nous noterons encore que si $\alpha_1 \dots \alpha_i \dots$ sont les valeurs propres d'un opérateur linéaire A , $\alpha''_1 \dots \alpha''_i \dots$ sont les valeurs propres de A'' . La vérification est immédiate.

3. LE SPECTRE CONTINU DE L'HAMILTONIEN D'UN CORPUSCULE LIBRE. LA FONCTION δ DE DIRAC

L'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien peut s'écrire

$$(9) \quad H(\varphi) = E\varphi$$

(E remplaçant ici α). Pour un corpuscule libre $V = 0$, $H = (- h^2/8 \pi^2 m) \Delta$ et l'on a

$$(10) \quad - \frac{h^2}{8 \pi^2 m} \Delta \varphi = E\varphi .$$

Soit \vec{p} le vecteur impulsion du corpuscule. On trouve les fonctions propres

$$(11) \quad \varphi(x, y, z, \vec{p}) = a \exp\left[-\frac{2\pi i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)\right] = a \exp\left[-\frac{2\pi i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r})\right]$$

avec

$$(12) \quad \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{p^2}{2m} = E.$$

On voit donc 1) que toute valeur positive de E est une valeur propre, 2) qu'à toute valeur positive de E correspond une infinité de fonctions propres du type précédent obtenues en donnant à p_x, p_y, p_z toutes les valeurs compatibles avec l'équation précédente. Donc pour l'énergie, on trouve un spectre continu allant de 0 à $+\infty$ avec dégénérescence d'ordre infini pour toute valeur de E autre que 0.

A chaque fonction propre correspond une onde plane monochromatique solution de l'équation des ondes ayant la forme

$$(13) \quad \psi(x, y, z, \vec{p}, t) = \varphi(x, y, z, \vec{p}) \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} Et\right) = a \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar}[Et - \vec{p} \cdot \vec{r}]\right).$$

Nous retrouvons ainsi des résultats connus. On pose souvent

$$(14) \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\hbar} \vec{p} \quad k = \frac{2\pi}{hc} E$$

et l'on écrit

$$(15) \quad \psi(x, y, z, t, \vec{k}) = a \exp[i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

avec la relation

$$(16) \quad kc = \frac{1}{2m} |\vec{k}|^2 \frac{\hbar}{2\pi}.$$

Le vecteur \vec{k} est nommé le « vecteur de propagation » de l'onde plane qui est entièrement spécifiée par cette seule donnée.

Remarquons qu'on peut indifféremment prendre comme fonctions propres de H soit les $\psi_{\vec{k}}$, soit les $\varphi_{\vec{k}}$ qui ne diffèrent que par le facteur e^{ikct} puisque les fonctions propres ne sont définies qu'à un facteur de module 1 près.

On peut exprimer l'orthonormalité des ondes planes en introduisant les différentielles propres. Au cours de ce calcul que nous ne reproduirons pas, on est amené à introduire la fonction « impropre » ou « singulière » $\delta(x)$ de Dirac définie par les 2 propriétés suivantes :

- 1) C'est une fonction paire de l'argument x .

2) On a toujours

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0) & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de signes contraires,} \\ 0 & \text{si } x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont de même signe.} \end{cases}$$

On peut représenter $\delta(x)$ par la fonction singulière de Dirichlet en posant

$$(17) \quad \delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin 2 \pi N x}{\pi x}.$$

Finalement le calcul de normalisation en question montre que les fonctions propres normées du spectre continu d'un corpuscule libre doivent s'écrire

$$(18) \quad \varphi(x, y, z, \vec{k}) = \frac{1}{(2 \pi)^{3/2}} \exp[-i(\vec{k} \cdot \vec{r})];$$

$$\psi(x, y, z, t, \vec{k}) = \frac{1}{(2 \pi)^{3/2}} \exp[i(kct - \vec{k} \cdot \vec{r})].$$

Le caractère complet de l'ensemble de ces fonctions propres se traduit par le fait que sous des conditions très générales une fonction $f(x, y, z)$ peut se développer en intégrale de Fourier sous la forme

$$(19) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{(2 \pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\vec{k}) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d\vec{k}$$

$d\vec{k}$ signifiant $dk_x dk_y dk_z$. Les $c(\vec{k})$ sont données par

$$(20) \quad c(\vec{k}) = \frac{1}{(2 \pi)^{3/2}} \int_D f(x, y, z) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ désignant $dx dy dz$. C'est la formule classique des coefficients de l'intégrale de Fourier.

On peut aussi écrire

$$(21) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{(2 \pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\vec{k}, t) \psi(x, y, z, t, \vec{k}) d\vec{k}$$

avec

$$(22) \quad c(\vec{k}, t) = c(\vec{k}) e^{-iket}.$$

CHAPITRE V

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. IDÉES GÉNÉRALES

La Mécanique ondulatoire doit pouvoir calculer les valeurs propres des grandeurs mesurables (ou observables) attachées à un corpuscule (ou par généralisation naturelle à un système). Or elle représente l'état d'un corpuscule (ou plus exactement l'état de nos connaissances sur un corpuscule) par une fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$, solution de l'équation de propagation, fonction que nous supposerons toujours normée. En outre, elle fait correspondre à toute grandeur mesurable attachée à un corpuscule un opérateur linéaire et hermitien qui permet de définir un ensemble de nombres réels, ses valeurs propres, et un système complet de fonctions, ses fonctions propres. Nous sommes ainsi en mesure d'énoncer les 2 principes fondamentaux de l'interprétation physique de la Mécanique ondulatoire.

1^{er} *principe*⁽¹⁾. Les valeurs possibles d'une grandeur mesurable, c'est-à-dire les divers résultats possibles d'une mesure de cette grandeur sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitien correspondant à cette grandeur. (Principe de quantification.)

2^e *principe*. Quand l'état du corpuscule est représenté par une certaine fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$, solution de l'équation de propagation, la proba-

(1) Note G. L. : On remarquera que, contrairement à beaucoup d'auteurs, de Broglie ne pose pas ces principes comme des a priori, mais cherche à les induire à partir de la théorie des ondes. Il ne prétend pas que tout opérateur hermitien représente une observable, mais suppose seulement que, si nous connaissons celle-ci, alors elle sera ainsi représentée. Le lecteur actuel, nourri dès ses années d'étude de mécanique quantique, aurait tort de lire ces pages d'un œil distrait parce qu'allant de soi : c'est ici, en fait, qu'il peut comprendre l'origine du formalisme quantique.

bilité pour qu'une mesure précise de la grandeur mesurable correspondant à l'opérateur linéaire et hermitien A , complet et à valeurs propres non dégénérées, fournit à l'instant t une certaine valeur propre est égale au carré du module du coefficient de la fonction propre correspondante dans le développement de la fonction d'onde ψ suivant les fonctions propres normées de A . (Principe de décomposition spectrale généralisée.)

Plus précisément, si la fonction ψ se développe suivant les fonctions propres et différentielles propres de A par la formule

$$(1) \quad \psi(x, y, z, t) = \sum_i c_i \varphi_i + \sum_{A\alpha} c(\alpha) \int_{\alpha}^{\alpha + A\alpha} \varphi(x, y, z, \alpha) d\alpha$$

la probabilité de la valeur propre α_i est $|c_i|^2$ et la probabilité d'une valeur propre comprise entre α et $\alpha + A\alpha$ est $|c(\alpha)|^2 A\alpha$.

On vérifiera aisément que, la fonction d'onde ψ étant par hypothèse normée, la probabilité totale de toutes les hypothèses possibles est bien égale à l'unité. Naturellement les probabilités des valeurs possibles peuvent être fonction du paramètre t .

Si l'opérateur A a des valeurs propres multiples, l'énoncé du second principe doit être complété. Soit α_i une valeur propre multiple à laquelle correspondent p fonctions propres $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{ip}$ normées, orthogonales et linéairement indépendantes. La probabilité de trouver, par une mesure faite à l'instant t , la valeur α_i pour la grandeur A est alors la somme des carrés des modules des coefficients de $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$, dans le développement du ψ , soit $\sum_1^p |c_{ij}|^2$. On vérifie que cette expression est, comme cela doit être, indépendante de la manière, en partie arbitraire dont sont choisies les fonctions propres $\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{ip}$.

Quand l'opérateur A est incomplet, l'énoncé du 2^e principe doit subir une modification. Alors, en effet, les fonctions propres de A ne sont pas fonctions de toutes les variables xyz et par suite les coefficients c_i et $c(\alpha)$ sont fonctions des variables non intéressées par l'opérateur A . La probabilité d'une valeur propre ne peut donc pas alors être le $|c_i|^2$ correspondant, quantité qui dépend encore de certaines variables. Pour obtenir cette probabilité, il faut intégrer les expressions indiquées plus haut par rapport aux variables non intéressées par A . On vérifiera qu'après cette modification, la probabilité totale de toutes les valeurs possibles est bien égale à l'unité.

Un exemple simple d'application de nos 2 principes est fourni par le cas de l'opérateur H qui est complet. Si H est indépendant du temps, il admet des valeurs propres *constantes* E_i et des fonctions propres φ_i . Une mesure de l'énergie ne peut fournir que l'une des valeurs E_i et si l'on a $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$, la probabilité de E_i est $|c_i|^2$. On retrouve ainsi l'idée de quantification des systèmes atomiques et le principe de décomposition spectrale de Born. Si le spectre est discret, on a une suite discrète d'états stationnaires à énergies quantifiées.

Prenons un autre cas : celui d'une coordonnée x du corpuscule qui correspond à l'opérateur « multiplication par x ». L'équation aux valeurs propres est $x\varphi = \alpha\varphi$. Cette équation peut être considérée comme vérifiée pour toute valeur réelle de x en posant $\varphi(x, \alpha) = \delta(x - \alpha)$, $\delta(x - \alpha)$ étant une fonction singulière de Dirac nulle pour $x \neq \alpha$. Donc d'après le premier principe, une mesure de x peut nous fournir n'importe quelle valeur réelle comprise entre $-\infty$ et $+\infty$. De plus, les différentielles propres de ce spectre continu

$$\int_{\alpha}^{\alpha + \Delta\alpha} \delta(x - \alpha) dx$$

forment un système complet satisfaisant à la relation d'orthonormalité. Comme on a évidemment

$$(2) \quad \psi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\alpha, y, z, t) \delta(x - \alpha) d\alpha$$

la probabilité pour qu'une mesure de x fournit à l'instant t une valeur comprise entre α et $\alpha + \Delta\alpha$ est $\Delta\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(\alpha, y, z, t)|^2 dy dz$ et l'on en déduit aisément que la probabilité pour que le corpuscule manifeste sa présence à l'instant t dans l'élément de valeur dt entourant le point x, y, z est égale à $|\psi(x, y, z, t)|^2 dt$. La probabilité totale de la présence d'un corpuscule en un point quelconque de l'espace D qui lui est accessible est bien égale à 1 puisque $\int_D |\psi|^2 dt = 1$ ⁽¹⁾.

Nous étudierons plus loin d'une manière approfondie la façon dont les incertitudes d'Heisenberg peuvent se déduire des principes généraux énoncés plus haut⁽²⁾,⁽³⁾.

(¹) Note L. B. : C'est la raison physique pour laquelle on doit normer le ψ . Nous verrons que l'on peut déduire des principes généraux que 2 grandeurs A et B ne peuvent être simultanément mesurées que si $AB = BA$. Ainsi, les variables canoniquement conjuguées p et q ne sont pas simultanément mesurables.

(²) Note L. B. : Notion de superposition. Chaque fonction propre φ_i d'un opérateur A décrit un état du système où la grandeur A a certainement la valeur précise α_i . En général le ψ du système ne se réduit pas à un seul φ_i , mais est égal à une somme de φ_i $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$.

On dit alors aussi que le ψ est une « superposition » de φ_i , ce terme venant du « principe de superposition des petits mouvements » dans les théories vibratoires classiques. Mais ici la superposition n'a plus du tout le même sens que dans les théories classiques. Il ne s'agit plus de la vibration d'un milieu qui s'obtiendrait en ajoutant plusieurs vibrations élémentaires. Il s'agit de l'affirmation suivante : si la fonction ψ d'un système est de la forme $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$

et si l'on cherche à lui attribuer un état φ_i en mesurant la grandeur A , on a la probabilité $|c_k|^2$ d'être conduit à lui attribuer l'état φ_k . Donc avant la mesure le système dans l'état $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$ se trouve *potentiellement* dans plusieurs états φ_i chacun possédant une probabilité non nulle $|c_i|^2$. C'est là une idée entièrement nouvelle, tout à fait étrangère aux théories classiques dans lesquelles l'état d'un système est caractérisé par des valeurs bien définies des grandeurs de ce système. Cette notion nouvelle de superposition est peut-être la plus importante de celles qui ont été introduites par la Mécanique nouvelle.

Si dans la théorie classique des vibrations, on considère une vibration donnée par $\psi = \sum_i c_i \exp\left[2\pi i\left(v_i t - \frac{z}{\lambda_i}\right)\right]$, cela veut dire que la valeur du ψ à chaque instant en chaque point est donnée par la somme des termes de la série : les vibrations composantes s'ajoutent avec les valeurs des c_i qui leur correspondent. En Mécanique ondulatoire la forme envisagée pour le ψ est soumise à la condition $\sum_i |c_i|^2 = 1$ liée à l'interprétation probabiliste du ψ et l'on ne peut plus regarder le ψ comme fourni par l'addition de termes ayant une amplitude prédéterminée. Ainsi dans la théorie classique 2 mouvements ondulatoires $\psi_1 = c_1 \exp\left[2\pi i\left(vt - \frac{z}{\lambda}\right)\right]$ et $\psi_2 = c_2 \exp\left[2\pi i\left(vt - \frac{z}{\lambda}\right)\right]$ donnent par superposition une onde $\psi = \psi_1 + \psi_2$ d'amplitude $c_1 + c_2$. Au contraire en Mécanique ondulatoire les 2 états ψ_1 et ψ_2 considérés isolément satisfont aux conditions $|c_1| = 1/\sqrt{v}$ et $|c_2| = 1/\sqrt{v}$. Si on les superpose, on a l'état $\psi = \psi_1 + \psi_2$ mais avec la condition $|c_1 + c_2| = 1/\sqrt{v}$ de sorte qu'il n'y a plus du tout addition des amplitudes. Ceci montre l'abîme qui sépare la notion de fonction d'onde dans la théorie classique des ondes et en Mécanique ondulatoire.

(³) Note G. L. (au sujet de la note précédente de l'auteur) : Louis de Broglie n'envisage ici que l'onde continue et normée sur laquelle est fondée l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire. S'étant rallié au point de vue orthodoxe, il considérait, à l'époque où il écrivait ces lignes, que cette onde était la seule possible et on le voit, dans cette note, insister sur ce point avec d'autant plus de force qu'il avait été, jadis, convaincu du contraire. C'est à cette ancienne conviction qu'il devait, nous le savons, bientôt revenir, en développant la théorie de la double solution et en distinguant soigneusement l'onde ψ ayant les propriétés qu'il décrit ici, de l'onde v (partie régulière de l'onde singulière u) qui a la même phase que ψ mais pas la même amplitude, qui n'est pas normée, qui n'est pas soumise à la réduction du paquet d'ondes, mais qui, par contre, obéit à la loi ordinaire d'addition des composantes de la théorie classique des vibrations. Louis de Broglie la considérera désormais comme la véritable onde physique, contrairement à ψ qui n'est qu'un instrument de prévision.

2. LES MATRICES ALGÉBRIQUES ET LEURS PROPRIÉTÉS

On appelle « matrice » un tableau de nombres contenant un nombre fini ou infini de lignes et de colonnes. Si ce tableau est de dimensions finies, nous le supposerons carré pour simplifier. Chaque nombre figurant dans le tableau (ou « élément de matrice ») peut être repéré à l'aide de 2 indices qui spécifient respectivement la ligne et la colonne du tableau auquel appartient l'élément. Nous désignerons donc par a_{ijk} l'élément situé à l'intersection de la i -ième ligne et de la k -ième colonne. L'ensemble de la matrice sera désigné par la lettre A . Les éléments a_{ii} sont les éléments diagonaux et une matrice dont seuls les éléments diagonaux sont différents de zéro est dite une « matrice diagonale ». Deux matrices A et B sont dites égales ($A = B$) si tous leurs éléments correspondants sont égaux $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et tout j .

Les matrices se présentent en Algèbre quand on étudie les transformations linéaires. En effet, si des variables x'_i sont des combinaisons linéaires de variables x_i , on a des formules de transformation du type $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$ qu'on écrit symboliquement $X' = AX$ avec la convention $(AX)_i = \sum_j a_{ij} x_j$. On est ainsi aisément conduit à définir la somme et le produit de 2 matrices par les règles suivantes :

- 1) La somme des 2 matrices A et B est par définition la matrice $A + B$ de composantes $a_{ij} + b_{ij}$.
- 2) Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice AB de composante d'indices ik égale à $\sum_j a_{ij} b_{jk}$.

De cette dernière définition résulte qu'en général la matrice AB n'est pas égale à la matrice BA . Si par exception $AB = BA$, on dit que A et B commutent. On désigne souvent sous le nom de « commutateur » des matrices A et B la matrice $AB - BA = [A, B]$ qui, si elle n'est pas nulle, sert à mesurer le défaut de commutation de A et de B .

Parfois, on introduit aussi la matrice $AB + BA = [A, B]_+$ ou « anticommutateur » de A et B . Si cette matrice est nulle $AB = -BA$ et l'on dit que A et B anticommutent : si elle n'est pas nulle, elle mesure le défaut d'anticommulation de A et B .

Les matrices sont réelles ou complexes suivant que leurs éléments sont réels ou complexes. Nous envisageons le cas général des matrices complexes.

Une matrice est dite hermitienne si l'on a $a_{ik} = a_{ki}^*$ pour tout i et tout k . Une matrice hermitienne réelle est donc symétrique par rapport à sa diagonale et les éléments diagonaux d'une matrice hermitienne sont toujours réels.

Une matrice est antihermitienne si l'on a $a_{ik} = -a_{ki}^*$ pour tout i et tout k . Les éléments diagonaux d'une matrice antihermitienne sont imaginaires purs.

Le produit de 2 matrices hermitiennes A et B est lui-même hermitien si les deux matrices commutent et dans ce cas seulement : il est antihermitien si A et B anticommutent.

La matrice \tilde{A} est la matrice « transposée » de A si l'on a $\tilde{a}_{ki} = a_{ik}$ et l'on appelle matrice « adjointe » A^+ de A la matrice définie par $a_{ik}^+ = a_{ki}^*$ ou $A^+ = \tilde{A}^*$. Si A est hermitienne, $A = A^+$: A est alors sa propre adjointe.

On a évidemment $(A^+)^+ = A$ et l'on démontre aisément que $(AB)^+ = B^+ A^+$.

Une matrice hermitienne diagonale est nécessairement réelle. En particulier la matrice hermitienne diagonale $a_{ik} = \delta_{ik}$ est la « matrice unité » souvent représentée par 1.

Etant donnée une matrice A , s'il existe une matrice A^{-1} telle que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$, la matrice A^{-1} est dite l'inverse de A . Si A a un nombre fini de lignes et de colonnes, A^{-1} existe toujours quand le déterminant déduit du tableau A des a_{ik} est différent de zéro. Si A a un nombre infini de lignes et de colonnes, A^{-1} peut exister ou ne pas exister suivant les cas. Quand A^{-1} et B^{-1} existent, on a toujours $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Quand A est une matrice réelle et que l'on a

$$(3) \quad \sum_j a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}; \quad \sum_l a_{jl} a_{kl} = \delta_{jk}$$

on dit que la matrice est orthogonale. La transformation linéaire qui lui correspond représente alors dans l'espace une transformation orthogonale qui laisse invariante la somme $\sum_i x_i^2$. On généralise cette définition pour une matrice complexe A en disant que si l'on a

$$(4) \quad \sum_j a_{ji} a_{jl}^* = \delta_{il}; \quad \sum_l a_{jl} a_{kl}^* = \delta_{jk}$$

la matrice A définit une transformation orthogonale complexe ou « unitaire » et l'on vérifie aisément que pour une telle transformation la quantité $\sum_i x_i^* x_i$ reste invariante. La matrice A est alors dite « unitaire » et l'on a

$$\sum_i a_{ki}^+ a_{ij} = \delta_{kj}; \quad \sum_l a_{jl} a_{lk}^+ = \delta_{jk}$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad A^+ A = A A^+ = 1 \quad \text{d'où} \quad A^+ = A^{-1}.$$

Donc l'adjointe d'une matrice unitaire coïncide avec son inverse.

Par définition, la « trace » d'une matrice A est la somme de ses termes diagonaux $\text{Tr } A = \sum_i a_{ii}$. On démontre de suite que

$$(6) \quad \text{Tr } AB = \text{Tr } BA = \sum_{ik} a_{ik} b_{ki}.$$

Soient encore deux matrices carrées, l'une A quelconque, l'autre S unitaire ayant les mêmes nombres de lignes et colonnes. La matrice

$$(7) \quad B = S^{-1} AS$$

est dite obtenue à partir de A par une « transformation canonique ». On vérifie facilement que si A est hermitienne, B l'est aussi. Les transformations canoniques conservent donc le caractère hermitien des matrices : il est aisément de voir qu'elles conservent également leur trace. De plus, si 2 matrices carrées A et A' sont transformées par une transformation canonique en B et B' , leur produit AA' est transformé en BB' par cette même transformation car

$$S^{-1} AS \cdot S^{-1} A' S = S^{-1} AA' S.$$

3. OPÉRATEURS ET MATRICES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Supposons que nous connaissons un système de fonctions orthonormales $\varphi_1 \dots \varphi_i \dots$ dans un domaine D de variation de certaines variables. Nous les appellerons des fonctions de base. Ce système pourra être par exemple celui de fonctions propres normées d'un opérateur linéaire hermitien de la Mécanique ondulatoire. Avec ce système de base, à tout opérateur linéaire nous pouvons faire correspondre une matrice. Soit en effet A un opérateur linéaire. L'application de cet opérateur à une des fonctions de base φ_i nous fournira une nouvelle fonction qui pourra se développer suivant le système des fonctions de base et nous aurons des relations de la forme

$$(8) \quad A\varphi_i = \sum a_{ji} \varphi_j$$

avec

$$(9) \quad a_{ji} = \int_D \varphi_j^* A\varphi_i d\tau$$

D étant le domaine de variation des variables figurant dans les φ_i . Par définition, les a_{ij} sont les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système de base des φ_i . Nous désignerons cette matrice par le même symbole A que l'opérateur, ou si nous voulons préciser le système de base employé par A . Il est aisément de vérifier que les matrices ainsi définies satisfont aux règles d'addition et de multiplication des matrices algébriques indiquées plus haut.

Si le système de base est formé par les fonctions propres d'un opérateur de la Mécanique ondulatoire et si l'opérateur A lui-même est un opérateur linéaire

et hermitien de cette Mécanique, nous dirons que la matrice A est une matrice de la Mécanique ondulatoire. On voit immédiatement qu'elles sont toujours elles-mêmes hermitiennes car avec la définition des a_{ij} le caractère hermitien de A entraîne $a_{ij} = a_{ji}^*$. Plus généralement, on voit d'ailleurs que la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice engendrée par un opérateur A dans un système de base soit hermitienne est que l'opérateur soit lui-même hermitien. L'hermitianité est donc une propriété intrinsèque des opérateurs en ce sens qu'un opérateur hermitien engendre des matrices hermitiennes dans tous les systèmes de base. Toutes les matrices de la Mécanique ondulatoire sont donc hermitiennes.

Nos définitions établissent donc une corrélation étroite entre les opérateurs et les matrices. En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices commutent (ou anticommutent) est que les opérateurs correspondants commutent (ou anticommutent) ou vice versa. Ceci amène à définir le commutateur et l'anticommuteur de 2 opérateurs A et B par

$$(10) \quad [A, B] = AB - BA; \quad [A, B]_+ = AB + BA.$$

Une catégorie particulièrement importante de matrices de la Mécanique ondulatoire est obtenue en prenant toujours comme fonctions de base les fonctions propres de l'opérateur Hamiltonien correspondant au problème considéré. Soient ψ_1, \dots, ψ_n les fonctions propres de l'opérateur H . Les matrices A^ψ engendrées par un opérateur linéaire et hermitien A dans le système de base des ψ_i dont les éléments sont

$$(11) \quad a_{jk} = \int_D \psi_j^* A \psi_k \, d\tau$$

peuvent être appelées « matrices d'Heisenberg » car ce sont celles que M. Heisenberg a mises à la base de sa Mécanique quantique. Si dans la définition des ψ_k on comprend le facteur exponentiel $\exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t\right)$ et si l'on pose

$$\psi_k = a_k(x, y, z) \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t\right)$$

on aura

$$(12) \quad a_{jk} = \int_D a_j^* A a_k \, d\tau \cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k - E_j) t\right).$$

Ces éléments définissent la matrice d'Heisenberg proprement dite qui dépend du temps. Parfois on supprime dans l'expression des ψ_k le facteur exponentiel et l'on pose $a'_{jk} = \int_D a_j^* A a_k \, d\tau$: on définit ainsi une matrice A' d'éléments a'_{jk} qui est indépendante du temps. C'est la matrice de Schrödinger correspondant

à la précédente matrice d'Heisenberg. Nous nous servirons généralement des matrices d'Heisenberg.

Avec les matrices d'Heisenberg, la matrice H correspondant à l'énergie est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de l'énergie (c.-à.-d. les énergies stationnaires quantifiées). Toutefois, dans le cas où l'opérateur H possède des valeurs propres multiples, la propriété précédente n'est vraie que si l'on a eu soin de choisir les fonctions propres correspondant aux valeurs propres multiples de façon qu'elles soient orthogonales. La vérification est immédiate car

$$H_{jk} = \int_D \psi_j^* H \psi_k d\tau = E_k \int_D \psi_j^* \psi_k d\tau = E_k \delta_{jk}.$$

Le résultat précédent n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du théorème suivant dont la démonstration est immédiate : « Si l'on construit la matrice engendrée par un opérateur A dans le système des fonctions propres orthonormales de cet opérateur, cette matrice est diagonale et ses éléments diagonaux sont égaux aux vecteurs propres de l'opérateur A (les vecteurs propres multiples figurant avec leur ordre de multiplicité) ».

4. VALEURS MOYENNES ET DISPERSIONS EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Pour tout état d'un corpuscule (ou d'un système) caractérisé par une certaine forme de la fonction d'onde ψ , toute grandeur A a une série de valeurs possibles (résultats possibles de la mesure de A) affectées de probabilité. On peut donc définir la « valeur moyenne » de la grandeur, \bar{A} qui sera l'espérance mathématique correspondant à une mesure de A .

Si α_i et f_i sont les valeurs propres et les fonctions propres de A , la valeur moyenne \bar{A} sera donc d'après les principes généraux définie par $\bar{A} = \sum_i \alpha_i |c_i|^2$. En remplaçant ψ par $\sum_i c_i \varphi_i$ et en tenant compte de l'orthonormalité des φ_i , on vérifie que l'on peut aussi écrire

$$(13) \quad \bar{A} = \int_D \psi^* A \psi d\tau$$

ce qui permet de déduire immédiatement \bar{A} de la connaissance du ψ .

Ayant défini la valeur moyenne de la variable aléatoire A , on peut également définir la « dispersion » (au sens du Calcul des probabilités) qui lui correspond,

c'est-à-dire la racine carrée du carré moyen de l'écart. Si l'on désigne par σ_A cette dispersion, on aura

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \sqrt{\langle A - \bar{A} \rangle^2} = \sqrt{\bar{A}^2 - 2 \langle \bar{A}A + A\bar{A} \rangle} \\ &= \sqrt{\bar{A}^2 - \bar{A}^2}\end{aligned}$$

d'où

$$(14) \quad \sigma_A^2 = \int_D \psi^* A^2 \psi d\tau - \left(\int_D \psi^* A \psi d\tau \right)^2.$$

Considérons maintenant 2 grandeurs A et B attachées à un corpuscule. À A correspondent les valeurs propres et fonctions propres α_i et φ_i , à B les valeurs propres et fonctions propres β_k , χ_k . Si la fonction d'onde ψ se développe sous la forme $\psi = \sum_i d_i \varphi_i$, on trouve par substitution de ce développement dans l'expression de \bar{B}

$$(15) \quad \bar{B} = \sum_{ik} d_i^* d_k b_{ik}^\varphi$$

où b_{ik}^φ est l'élément d'indices i, k de la matrice engendrée par l'opérateur B dans le système des φ_k . Donc la valeur moyenne de B peut toujours s'exprimer linéairement à l'aide des éléments de la matrice qu'engendre l'opérateur B dans le système des fonctions propres d'un autre opérateur A .

En particulier, si le corpuscule (ou le système) se trouve dans l'un des états propres relatifs à la grandeur A (et c'est ce qui arrive après une mesure précise de la grandeur A), on a $\psi = d_i \varphi_i$ avec $|d_i| = 1$ et on en tire

$$(16) \quad \bar{B} = b_{ii}^\varphi$$

d'où le théorème : « L'élément diagonal d'indices ii de la matrice engendrée par l'opérateur B dans le système des fonctions propres de l'opérateur A représente la valeur moyenne de la grandeur B quand on sait que la grandeur A a la valeur précise α_i ».

Ce théorème donne un sens physique aux éléments diagonaux des matrices de la Mécanique ondulatoire. Un autre théorème va nous fournir une signification physique des éléments non diagonaux.

Supposons toujours que le corpuscule soit dans l'état $\psi = \varphi_i$. Nous venons de voir qu'alors b_{ii}^φ est la valeur moyenne de B dans cet état. La valeur moyenne de B^2 est alors

$$(17) \quad \bar{B}^2 = \int_D \varphi_i^* B^2 \varphi_i d\tau = (B^2)_{ii}^\varphi = (b^2)_{ii}^\varphi$$

mais la loi de multiplication des matrices nous donne

$$\begin{aligned}(b^2)_{ii}^\varphi &= \sum_j b_{ij}^\varphi b_{ji}^\varphi = (b_{ii}^\varphi)^2 + \sum_{j \neq i} b_{ij}^\varphi b_{ji}^\varphi \\ &= (b_{ii}^\varphi)^2 + \sum_j |b_{ij}^\varphi|^2 \quad \text{car } B \text{ est hermitienne}\end{aligned}$$

d'où

$$(18) \quad \sigma_B^2 = \overline{B^2} - (\overline{B})^2 = \sum_j |b_{ij}^\varphi|^2 = \sum_j |b_{ji}^\varphi|^2$$

d'où le théorème :

« Si l'on construit la matrice d'une grandeur B dans le système des fonctions propres φ_i d'une autre grandeur A , la somme des carrés des modules des éléments *non diagonaux* figurant dans la i -ième ligne (ou la i -ième colonne) de la matrice B est égale au carré de la dispersion σ_B relative à la grandeur B quand on sait que la grandeur A a la valeur précise α_i . » Cet énoncé donne un sens physique aux éléments non diagonaux.

Si les fonctions propres χ_i de B coïncident avec celles φ_i de A (nous verrons que la condition nécessaire pour que cela se produise est $[A, B] = 0$), dans l'état $\psi = \varphi_i = \chi_i$ la grandeur B a la valeur précise β_i qui correspond à χ_i et la matrice B^φ est diagonale. Alors $\sigma_B = 0$.

5. INTÉGRALES PREMIÈRES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Considérons la matrice d'Heisenberg A dont les éléments sont définis par $a_{jk} = \int_D \psi_j^* A \psi_k d\tau$. L'élément a_{jk} peut dépendre du temps t par l'intermédiaire de ψ_j^* et de ψ_k et aussi de A si cet opérateur dépend explicitement du temps. Dérivons donc a_{jk} par rapport à t en tenant compte du fait que ψ_j et ψ_k obéissent à l'équation des ondes et que l'opérateur est hermitien. Il vient aisément

$$(19) \quad \frac{da_{jk}}{dt} = \int_D \psi_j^* \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} (AH - HA) \right] \psi_k d\tau$$

où $\partial A / \partial t$ est l'opérateur obtenu en dérivant formellement A par rapport au paramètre t . Nous pouvons interpréter la formule précédente en disant : la matrice d'Heisenberg dont l'élément d'indice jk est da_{jk}/dt est engendrée dans le système des ψ_i par l'opérateur symbolique dA/dt tel que

$$(20) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} [AH - HA].$$

Il arrive très fréquemment que l'opérateur A ne dépende pas explicitement du temps. Alors $\frac{\partial A}{\partial t} \equiv 0$ et $\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{\hbar} [A, H]$ ⁽¹⁾.

Par définition, dans un problème où l'Hamiltonien H est donné, la grandeur observable correspondant à un opérateur A est dite « intégrale première » ou « constante de mouvement » pour le problème considéré si dA/dt est nul, c'est-à-dire si

$$(21) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2\pi i}{\hbar} [A, H] \equiv 0.$$

Si A ne dépend pas explicitement du temps, la grandeur A est intégrale première quand l'opérateur A commute avec l'opérateur Hamiltonien.

On peut aussi définir les intégrales premières de la façon suivante : une grandeur, dont l'opérateur est A , est intégrale première si, ψ étant une solution quelconque de l'équation des ondes, $A\psi$ en est également solution. En effet par hypothèse $\partial\psi/\partial t = (2\pi i/\hbar) H\psi$ et l'on a

$$(22) \quad A \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\hbar} AH\psi \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} A\psi = \frac{\partial A}{\partial t} \psi + A \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \psi + \frac{2\pi i}{\hbar} AH\psi.$$

Pour que $A\psi$ soit solution de l'équation des ondes, il faut donc que

$$(23) \quad \frac{\partial A}{\partial t} \psi + \frac{2\pi i}{\hbar} (AH - HA) \psi = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit satisfaite quelle que soit la solution ψ de l'équation des ondes est précisément la relation (21). c.q.f.d.

Voici quelques exemples classiques d'intégrales premières.

Si le champ extérieur agissant sur le corpuscule (ou le système) est indépendant du temps, l'opérateur H ne contient pas t et, comme il commute évidemment avec lui-même, l'énergie est alors intégrale première : nous retrouvons l'analogue de la conservation de l'énergie pour les systèmes conservatifs en Mécanique classique. De même si la composante x du champ est nulle, l'opérateur H ne dépend pas de x ($\partial V/\partial x = 0$) et il commute avec $(p_x)_{op}$ la composante de la quantité de mouvement est donc alors intégrale première, résultat analogue à un théorème de la Mécanique classique.

Enfin si le champ de force a un moment nul par rapport à un axe Oz c.-à.-d.

⁽¹⁾ Note L. B. : Il est facile d'en déduire que, pour A indépendant du temps on a

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{2\pi i}{\hbar} \overline{[A, H]}.$$

si l'énergie potentielle V ne dépend pas de l'azimut φ compté autour de Oz , l'Hamiltonien H ne dépend pas de φ et par suite commute avec l'opérateur correspondant à la composante z du moment de quantité de mouvement car

$$(M_z)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

La grandeur M_z est donc alors intégrale première comme en Mécanique classique. Si le champ de force est central, les trois composantes du moment cinétique \vec{M} par rapport à des axes passant par le centre sont intégrales premières et il en est de même de la grandeur $M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$ (carré de la longueur du moment cinétique). Ceci nous amène à dire quelques mots du moment cinétique.

6. MOMENT CINÉTIQUE (MOMENT DE ROTATION OU DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT) EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Dans le présent exposé, nous laisserons de côté le spin et nous nous bornerons au moment cinétique orbital. Le moment cinétique orbital d'un corpuscule par rapport à un centre O (pris comme origine des coordonnées) est le vecteur moment de la quantité de mouvement du corpuscule par rapport à O , soit

$$(24) \quad \vec{M} = [\vec{r} \wedge \vec{p}].$$

Les composantes sont $M_x = yp_z - zp_y \dots$

Nous venons de voir que si le champ agissant sur le corpuscule a un moment nul par rapport à l'un des axes, la composante de M sur cet axe est intégrale première.

La longueur du moment cinétique est définie par son carré

$$(25) \quad M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = r^2 p^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2$$

d'après l'identité de Lagrange.

Cette quantité est intégrale première si le champ de force est central.

En Mécanique ondulatoire on remplace M_x M_y et M_z par des opérateurs qui sont

$$(26) \quad (M_x)_{op} = -\frac{h}{2\pi i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_x} \dots$$

$\varphi_x \dots$ étant les azimuts comptés autour des axes $Ox \dots$. L'un quelconque des opérateurs M_k a pour valeurs propres $m(h/2\pi)$ et pour fonctions propres normées $(1/\sqrt{2\pi}) e^{-im\varphi_k}$ comme on le vérifie aisément.

D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, on doit en conclure que la mesure exacte de l'une des composantes du moment cinétique doit toujours fournir une valeur multiple entier de $h/2\pi$. Cette quantité

peut donc être considérée comme l'unité quantique de moment de rotation.

On s'aperçoit alors que la représentation du moment de rotation par un vecteur a quelque chose de trompeur à l'échelle quantique. En effet, les 3 composantes du moment cinétique ne sont pas, en général, simultanément mesurables à l'échelle quantique car les opérateurs M_x , M_y et M_z ne commutent pas. Si donc on effectue avec précision la mesure d'une composante rectangulaire de \vec{M} , la valeur exacte des 2 autres composantes de \vec{M} restera inconnue : il y aura seulement une distribution de probabilité pour les valeurs possibles de ces composantes. On ne pourra donc construire exactement le vecteur \vec{M} puisqu'on ne connaîtra jamais exactement plus d'une de ces composantes. Il est d'ailleurs évident qu'on ne peut supposer que le vecteur \vec{M} ait simultanément 3 composantes rectangulaires multiples entier de $h/2\pi$ quelle que soit l'orientation du repère Cartésien autour du point O .

La non-commutation des opérateurs M_x , M_y , M_z est facile à prouver. On trouve en effet

$$(27) \quad [M_x, M_y] = \frac{\hbar}{2\pi i} M_z \dots .$$

Nous aurons à nous servir de ces relations.

A la grandeur M^2 de la Mécanique classique, la Mécanique ondulatoire fait correspondre l'opérateur

$$(28) \quad (M^2)_{op} = (M_x^2)_{op} + (M_y^2)_{op} + (M_z^2)_{op} = \\ = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

en employant des coordonnées polaires autour de Oz . $(M^2)_{op}$ au facteur $\hbar^2/4\pi^2$ près n'est pas autre chose que le Laplacien à la surface d'une sphère de rayon 1.

L'équation aux valeurs propres

$$(29) \quad (M^2)_{op} f = \alpha f$$

n'admet comme solutions finies, uniformes et continues sur la sphère de rayon 1 que les fonctions de Laplace $Y_k(\theta, \varphi)$, la valeur propre correspondant à la fonction Y_l , où l est un entier positif ou nul, étant $\frac{\hbar^2}{4\pi^2} l(l+1)$. On voit donc que finalement les valeurs propres de M^2 sont

$$(30) \quad M^2 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2} l(l+1) \quad l = 0, 1, 2 \dots .$$

Il est aisément vérifiable que M^2 commute avec M_x , M_y et M_z . On peut donc mesurer simultanément M^2 et l'une des composantes de \vec{M} .

CHAPITRE VI

THÉORIE DE LA COMMUTATION DES OPÉRATEURS EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

1. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Soient deux opérateurs A et B de la Mécanique ondulatoire. En général, ils ne commutent pas et $AB \neq BA$. Exceptionnellement, on peut avoir $AB = BA$. Nous allons montrer qu'en Mécanique ondulatoire, la propriété pour les opérateurs correspondants à deux grandeurs mesurables de commuter a une grande importance. Cette importance repose essentiellement sur le théorème suivant : « La condition nécessaire et suffisante pour que 2 opérateurs linéaires et hermitiens A et B admettent un même système de fonctions propres est que $AB \equiv BA$. »

Pour démontrer ce théorème avec rigueur il faut distinguer 3 cas : 1) les 2 opérateurs sont complets ; 2) l'un est complet, l'autre incomplet ; 3) tous les deux sont incomplets. Dans chacun des cas, la démonstration et même l'énoncé correct du théorème diffèrent légèrement.

1^{er} Cas. Théorème : La condition nécessaire et suffisante pour que deux opérateurs complets A et B admettent un même système de fonctions propres est qu'ils commutent.

En effet, supposons d'abord que les 2 opérateurs admettent un même système de fonctions propres $\varphi_1 \dots \varphi_i \dots$. On a alors $A\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$; $B\varphi_i = \beta_i \varphi_i$ pour tout i , d'où l'on tire $BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = \alpha_i \beta_i \varphi_i$ et $AB\varphi_i = \beta_i A\varphi_i = \beta_i \alpha_i \varphi_i$. Donc $AB\varphi_i = BA\varphi_i$ pour tous les φ_i : comme ceux-ci forment un système complet, on a $ABf = BAf$, f étant une fonction quelconque développable suivant les φ_i . On en conclut $AB \equiv BA$ et la condition énoncée est nécessaire.

Démontrons qu'elle est suffisante. Nous admettons alors que $AB \equiv BA$. Si φ_i sont les fonctions propres de A et χ_i celles de B , on a $A(\varphi_i) = \alpha_i \varphi_i$ et $B(\chi_i) = \beta_i \chi_i$. De la 1^{re} équation nous tirons $BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = AB\varphi_i$ (puisque $BA = AB$). $B\varphi_i$ est donc fonction propre de A avec la valeur propre α_i . Supposons d'abord que α_i ne soit pas une valeur propre multiple : alors $B\varphi_i$ est

nécessairement proportionnelle à φ_i et l'on a $B\varphi_i = Cte \varphi_i = \beta_i \varphi_i$. Mais φ_i est une fonction finie, uniforme et continue dans le domaine D et nulle aux limites. D'après la dernière équation, elle est donc fonction propre de B . Toutes les fonctions propres de A sont donc fonctions propres de B si aucun α_i n'est multiple. En appliquant l'opérateur A à l'équation $B(\chi_i) = \beta_i \chi_i$, on démontrerait de même que toute fonction propre de B est fonction propre de A si aucun des β_i n'est multiple. Donc si tous les α_i et tous les β_i sont des valeurs propres simples, le système des φ_i coïncide avec celui des χ_i et la condition énoncée est suffisante.

La démonstration est en défaut si certains des α_i ou des β_i sont des valeurs propres multiples.

Supposons par exemple qu'à une certaine valeur propre α_i de A correspondent p fonctions propres $\varphi_{i1} \dots \varphi_{ip}$. Alors on aura p relations de la forme $AB\varphi_{ij} = BA\varphi_{ij} = \alpha_i B\varphi_{ij}$ d'après le raisonnement précédent. On peut seulement en conclure que $B\varphi_{ij}$ est une fonction linéaire de $\varphi_{i1} \dots \varphi_{ip}$ c.-à-d. que $B\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^p c_j^k \varphi_{ik}$, les c_j^k étant des constantes complexes. Les p fonctions $B\varphi_{ij}$ doivent pouvoir s'exprimer linéairement à l'aide de p fonctions propres χ_i de l'opérateur B . Les p fonctions $B\varphi_{ij}$ sont en effet linéairement indépendantes et elles ne pourraient l'être si elles s'exprimaient à l'aide d'un nombre de fonctions χ_i inférieures à p : d'autre part, si elles s'exprimaient à l'aide d'un nombre de fonctions χ_i supérieur à p , les χ_i ne pourraient être linéairement indépendantes. Les $B\varphi_{ij}$ s'expriment donc linéairement à l'aide de $p\chi_i$ et de p seulement ; et inversement ces $p\chi_i$ s'expriment linéairement à l'aide des $pB\varphi_{ij}$. Comme dans les cas de dégénérescence on peut remplacer les p fonctions propres par p combinaisons linéaires linéairement indépendantes de ces fonctions propres, on peut remplacer les $B\varphi_{ij}$ par les χ_i en question et ceux-ci seront à la fois fonctions propres de A et de B pour la valeur propre α_i . On peut raisonner de même si l'un des β_i est multiple et l'on arrive à la conclusion qu'il est toujours possible de choisir les fonctions propres de façon que A et B aient le même système de fonctions propres. Le théorème se trouve ainsi complètement démontré dans le cas 1.

2^e Cas : L'un des opérateurs est incomplet, l'autre complet.

Théorème : Soient un opérateur complet A et un opérateur incomplet B . Si les deux opérateurs commutent, chaque fonction propre de A est égale au produit d'une fonction propre de B par une fonction des variables qui n'interviennent pas dans B . Inversement si cette propriété se vérifie, les opérateurs commutent.

Proposition directe. Nous supposons $AB \equiv BA$. Soient $x \dots$ les variables qui interviennent dans B , $y \dots$ celles qui n'y interviennent pas. Les fonctions propres de A sont des fonctions $\varphi_i(x, y \dots)$, celles de B des fonctions $\chi_i(x \dots)$. L'on a $A\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$ et par suite $BA\varphi_i = \alpha_i B\varphi_i = AB\varphi_i$ (car $AB \equiv BA$). Si α_i n'est pas multiple, on voit que $B\varphi_i$ doit être proportionnelle à φ_i , $B\varphi_i = \beta\varphi_i$:

φ_i est donc fonction propre de B . Mais le système des χ_i étant complet pour les variables $x \dots$, φ_i ne peut être fonction propre de B que si elle est égale à une fonction χ_k multipliée par un facteur ne dépendant que des y . On doit avoir

$$(1) \quad \varphi_i(x \dots y \dots) = f_{ik}(y \dots) \chi_k(x \dots)$$

et c'est la proposition annoncée.

La démonstration est en défaut si A admet des valeurs propres multiples. Alors à la valeur propre α_i correspondent p fonctions propres $\varphi_{i1} \dots \varphi_{ip}$ linéairement indépendantes.

Soit A' un opérateur complet ayant des valeurs propres simples et commutant avec B . D'après ce qui a été démontré, toute fonction propre de A' , $\varphi'_i(x \dots y \dots)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi'_i(x \dots y \dots) = f_{ik}(y \dots) \chi_k(x \dots)$. Pour les raisons exposées ci-dessus, les p fonctions propres φ_{ij} doivent s'exprimer linéairement à l'aide de p fonctions φ_i et de p seulement et inversement. On peut donc remplacer dans la liste des fonctions propres de A les p φ_{ij} par p φ'_i . Nous voyons donc que s'il existe des valeurs propres α_i multiples, on peut s'arranger, en profitant de l'indétermination des fonctions propres correspondantes, pour choisir ces fonctions propres de façon que le théorème soit encore vérifié.

Proposition inverse. Nous supposons que toute fonction propre de A soit de la forme

$$(2) \quad \varphi_i(x \dots y \dots) = f_{ik}(y \dots) \chi_k(x \dots).$$

De $A\varphi_i = \alpha_i \varphi_i$ nous tirons

$$\begin{aligned} BA\varphi_i &= \alpha_i B\varphi_i = \alpha_i f_{ik}(y \dots) B\chi_k = \alpha_i f_{ik} \beta_k \chi_k \\ &= \alpha_i \beta_k \varphi_i \end{aligned}$$

et, de même, de

$$B\chi_k = \beta_k \chi_k,$$

nous tirons d'abord

$$B(f_{ik} \chi_k) = \beta_k f_{ik} \chi_k$$

puis

$$AB(f_{ik} \chi_k) = \beta_k A(f_{ik} \chi_k) = \beta_k A(\varphi_i) = \beta_k \alpha_i \varphi_i.$$

D'où

$$(3) \quad AB(\varphi_i) = BA(\varphi_i).$$

Cette relation étant vraie pour toutes les fonctions qui forment un système complet, on en déduit $AB \equiv BA$ et le théorème inverse est démontré.

Nous devons faire une remarque importante sur la formule

$$(2) \quad \varphi_i(x \dots y \dots) = f_{ik}(y \dots) \chi_k(x \dots).$$

En général, à une même fonction propre χ_k de l'opérateur incomplet B correspondent plusieurs fonctions propres φ_i de l'opérateur complet A . C'est cette circonstance qui nous oblige à mettre 2 indices à la fonction $f_{ik}(y \dots)$ puisqu'en général pour une valeur donnée de k , il y a plusieurs valeurs de i . Autrement dit, il n'y a pas correspondance biunivoque entre les fonctions propres de A et celles de B , les premières étant beaucoup plus nombreuses que les secondes. Comme exemple, on peut prendre comme opérateur l'opérateur Hamiltonien H d'un système à symétrie sphérique tel que l'atome d'hydrogène et comme opérateur B l'opérateur incomplet M_z .

En prenant des coordonnées polaires autour de Oz , $(M_z)_{op} = (-\hbar/2\pi i)(\partial/\partial\varphi)$. Ecrivons l'équation aux valeurs propres de H

$$(4) \quad -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \varphi_i + V(r) \varphi_i = E_i \varphi_i.$$

En posant $\varphi_i = f(r, \theta) \chi(\varphi)$, on trouve aisément que les fonctions propres de $A = H$ sont de la forme $\varphi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = f_{nl}(r, \theta) e^{im\varphi}$ où n, l, m sont des nombres quantiques, m en particulier un entier positif ou négatif.

Or les fonctions propres de $B = M_z$ sont les solutions uniformes de l'équation aux valeurs propres $-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \beta \chi$, c'est-à-dire $\chi_m(\varphi) = e^{-im\varphi}$ (m entier), les valeurs propres correspondantes étant $\beta_m = m \frac{\hbar}{2\pi}$. On voit donc que notre théorème est bien vérifié. A une valeur donnée du nombre entier m correspond une fonction propre χ_m de M_z et toute une série de fonctions propres de H qui sont les produits de χ_m par les fonctions $f_{nl}(r, \theta)$ correspondant aux diverses valeurs possibles de n, l .

Nous pouvons encore ajouter une remarque en quelque sorte inverse de la précédente. A toute fonction propre $\chi_k(x \dots)$ de B , correspond au moins une fonction propre $\varphi_i(x \dots y \dots)$ de A qui lui est proportionnelle. En effet, si dans les φ_i on donne aux y des valeurs constantes, toutes les fonctions φ_i qui sont proportionnelles à un χ_k sont équivalentes. Le système des φ_i qui est complet pour l'ensemble des variables $x \dots$ et $y \dots$ doit encore rester complet pour les variables $x \dots$ et pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment qu'au moins l'une des fonctions φ_i se réduise, à un facteur constant près, à l'une des χ_k quand on donne aux y des valeurs constantes. Donc à toute fonction χ_k correspond au moins une fonction φ_i de la forme $f_{ik}(y \dots) \chi_k(x \dots)$.

3^e Cas : Les deux opérateurs sont incomplets.

Nous diviserons les variables en quatre catégories : 1) les variables $x \dots$

qui figurent dans A sans figurer dans B ; 2) les variables $y \dots$ qui figurent dans A et B ; 3) les variables $z \dots$ qui figurent seulement dans B ; 4) les variables $u \dots$ qui ne figurent ni dans A , ni dans B . Nous appellerons α_i et $\varphi_i(x \dots y \dots)$ les valeurs propres et fonctions propres de A , β_i et $\chi_i(y \dots z \dots)$ les valeurs propres et fonctions propres de B . On a alors le théorème suivant

Théorème : Si la relation $AB \equiv BA$ est satisfaite, il existe entre les φ_i et les χ_k des relations de la forme

$$(5) \quad \omega_j(x \dots y \dots z \dots u \dots) = f_{ji}(z \dots u \dots) \varphi_i(x \dots y \dots) = g_{jk}(x \dots u \dots) \chi_k(y \dots z \dots)$$

les fonctions ω_j formant un système complet pour l'ensemble des variables $x \dots y \dots z \dots u \dots$. Réciproquement si les relations précédentes sont vérifiées, les opérateurs A et B commutent.

Proposition directe. Nous supposons que $AB = BA$. Soit alors C un opérateur hermitien ne portant que sur les variables $u \dots$. Cet opérateur commute évidemment avec A et avec B . Considérons alors l'opérateur ABC : c'est un opérateur complet qui commute avec C et aussi avec A et B puisque A par hypothèse commute avec B . D'ailleurs ABC est hermitien comme étant le produit d'opérateurs hermitiens commutables. En appliquant le théorème du 2^e cas à ABC et à A , on a en désignant par $\omega_j(x \dots y \dots z \dots u \dots)$ les fonctions propres de ABC qui forment un système complet pour l'ensemble des variables

$$(6) \quad \omega_j(x \dots y \dots z \dots u \dots) = f_{ji}(z \dots u \dots) \varphi_i(x \dots y \dots).$$

En appliquant le même théorème à ABC et à B , on obtient de même

$$(7) \quad \omega_j(x \dots y \dots z \dots u \dots) = g_{jk}(x \dots u \dots) \chi_k(y \dots z \dots).$$

Les relations (5) sont donc démontrées. Si nous nous reportons aux remarques faites à la fin de l'étude du cas 2, nous voyons que toute fonction φ_i satisfait au moins à une relation de la forme (5) et qu'il en est de même pour toute fonction χ_k .

Proposition inverse. Nous supposons vraies les relations (5), les ω_j formant un système complet. Nous avons alors

$$A(\omega_j) = A(f_{ji} \varphi_i) = \alpha_i f_{ji} \varphi_i = \alpha_i \omega_j$$

et par suite

$$BA(\omega_j) = \alpha_i B(\omega_j) = \alpha_i B(g_{jk} \chi_k) = \alpha_i \beta_k \omega_j.$$

De même on a

$$B(\omega_j) = B(g_{jk} \chi_k) = \beta_k g_{jk} \chi_k = \beta_k \omega_j$$

et par suite

$$AB(\omega_j) = \beta_k A(\omega_j) = \beta_k A(f_{ji} \varphi_i) = \beta_k \alpha_i \omega_j.$$

Donc

$$AB(\omega_j) = BA(\omega_j)$$

et comme les ω_j forment un système complet, $AB = BA$. c.q.f.d.

Un cas particulier intéressant est celui où il n'y a aucune variable du type y , c.-à-d. aucune variable figurant à la fois dans A et dans B . Nous dirons alors que les opérateurs A et B sont indépendants et naturellement ils commutent. Si alors nous désignons par $\lambda_l(u)$ les fonctions propres de l'opérateur C introduit dans le raisonnement précédent, tous les produits

$$\varphi_i(x \dots) \chi_k(z \dots) \lambda_l(u \dots)$$

sont fonctions propres de ABC et l'on aura

$$(8) \quad \omega_j(x \dots z \dots u \dots) = \varphi_i(x \dots) \chi_k(z \dots) \lambda_l(u \dots)$$

ce qui revient à dire que dans (5),

$$f_{ji}(z \dots u \dots) = \chi_k(z \dots) \lambda_l(u \dots)$$

et

$$g_{jk}(x \dots u \dots) = \varphi_i(x \dots) \lambda_l(u \dots).$$

Il est à remarquer aussi que l'opérateur C introduit dans la démonstration précédente est entièrement arbitraire à cela près qu'il doit porter exclusivement sur les variables u . Quand A et B commutent, il existe donc une infinité de manières d'écrire les relations (5) suivant le choix arbitraire de C .

2. COROLLAIRES DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS

Un premier corollaire important des théorèmes précédents est le suivant : « Si 2 opérateurs complets A et B commutent, on peut, en prenant comme fonctions de base leurs fonctions propres communes φ_i , ramener simultanément les matrices A et B à la forme diagonale. »

En effet, les deux opérateurs commutant par hypothèse admettent un même système de fonctions propres φ_i telles que

$$A\varphi_i = \alpha_i \varphi_i; B\varphi_k = \beta_k \varphi_k.$$

L'élément d'indices i, k de la matrice correspondant à l'opérateur A dans le système des φ_i est

$$a_{ik} = \int_D \varphi_i^* A\varphi_k d\tau = \alpha_k \int_D \varphi_i^* \varphi_k d\tau = \alpha_k \delta_{ik}$$

et de même l'élément d'indices i, k de la matrice correspondant à l'opérateur B est

$$b_{ik} = \int_D \varphi_i^* B\varphi_k d\tau = \beta_k \int_D \varphi_i^* \varphi_k d\tau = \beta_k \delta_{ik}.$$

Les formules montrent immédiatement que les deux matrices A et B ont la forme diagonale, les éléments diagonaux étant respectivement les valeurs propres des opérateurs A et B .

Réciproquement, si pour un certain choix des fonctions de base φ_i , les matrices A et B correspondant aux opérateurs complets A et B prennent la forme diagonale, ces opérateurs commutent.

En effet on a alors par hypothèse

$$(9) \quad \int_D \varphi_i^* A\varphi_k d\tau = a_k \delta_{ik} \quad \int_D \varphi_i^* B\varphi_k d\tau = b_k \delta_{ik}.$$

Donc toutes les composantes de Fourier des fonctions $A\varphi_k$ et $B\varphi_k$ dans le système de base des φ_i sont nulles sauf les composantes d'indices k qui sont respectivement égales à a_k et b_k . On a donc

$$(10) \quad A\varphi_k = a_k \varphi_k \quad B\varphi_k = b_k \varphi_k.$$

Les fonctions φ_k sont donc à la fois fonctions propres de A et de B et, en vertu du théorème fondamental $AB \equiv BA$.

Le corollaire que nous venons de démontrer se généralise dans le cas où l'un au moins des 2 opérateurs A et B est incomplet. Les raisonnements sont faciles à faire. Nous considérons seulement le cas de 2 opérateurs incomplets. Voici alors l'énoncé du corollaire : « Si deux opérateurs incomplets A et B commutent, il est possible par un choix convenable du système de base de ramener les matrices A et B à la forme diagonale. »

Prenons, en effet, pour fonctions de base le système complet défini dans la démonstration du cas 3 à l'aide d'un opérateur C portant sur les variables

qui ne figurent ni dans A , ni dans B . Comme A et B commutent, par hypothèse, on a les relations (5) et par suite

(11)

$$a_{ik} = \int_D \omega_i^* A \omega_k d\tau = \int_D \omega_i^* f_{kl}(z \dots u \dots) A \varphi_l d\tau = \alpha_l \int_D \omega_i^* \omega_k d\tau = \alpha_l \delta_{ik}$$

et de même

(12)

$$b_{ik} = \int_D \omega_i^* B \omega_k d\tau = \int_D \omega_i^* g_{kj}(x \dots u \dots) B \chi_j d\tau = \beta_j \int_D \omega_i^* \omega_k d\tau = \beta_j \delta_{ik}$$

et la proposition est démontrée.

Réciproquement si l'on peut, par un choix convenable des fonctions de base, amener simultanément les matrices A et B à la forme diagonale, les opérateurs incomplets A et B commutent.

En effet, l'hypothèse est ici qu'il est possible de trouver un système complet de fonctions ω_i de toutes les variables $x \dots y \dots z \dots u \dots$ tel que

$$\int_D \omega_i^* A \omega_k d\tau = a_k \delta_{ik} \quad \int_D \omega_i^* B \omega_k d\tau = b_k \delta_{ik}.$$

On voit alors que toutes les composantes des fonctions $A \omega_k$ et $B \omega_k$ dans le système des ω_i sont nulles sauf les composantes d'indices k , d'où

$$(13) \quad A \omega_k = a_k \omega_k \quad B \omega_k = b_k \omega_k.$$

Les fonctions ω_k sont donc à la fois fonctions propres de A et de B et par suite, en profitant de l'indétermination des fonctions propres de A et de B s'il y a dégénérescence, elles peuvent être considérées comme proportionnelles à une fonction propre de A et aussi à une fonction propre de B , ce qui nous permet de poser

$$\omega_j(x \dots y \dots z \dots u \dots) = f_{jk}(z \dots u \dots) \varphi_k(x \dots y \dots) = g_{jl}(x \dots u \dots) \chi_l(y \dots z \dots)$$

et il résulte alors du cas 3 (proposition inverse) que A et B commutent.

De ce qui précède résulte naturellement que si deux opérateurs A et B ne commutent pas entre eux, il est impossible de ramener simultanément les matrices correspondantes à la forme diagonale. Ceci permet de démontrer l'élegant théorème suivant :

Théorème : « Si deux opérateurs F_1 et F_2 commutent avec un troisième opérateur complet A , mais ne commutent pas entre eux, alors l'opérateur A a nécessairement des valeurs propres multiples ».

En effet, comme A et F_1 commutent, il est possible de choisir un système de fonctions propres de A comme système de base ramenant simultanément les matrices A et F_1 à la forme diagonale : soit $\varphi_1 \dots \varphi_i \dots$ ce système de fonctions propres. De même, A et F_2 commutant, on peut trouver un système de fonctions propres de A , soit $\varphi'_1 \dots \varphi'_i \dots$, qui, pris comme de base, permet de ramener simultanément les matrices A et F_2 à la forme diagonale. Mais si l'opérateur A n'avait pas de valeurs propres multiples, le système de ces fonctions propres serait déterminé sans ambiguïté et les fonctions φ'_i coïncideraient avec les fonctions φ_i . Il serait alors possible par un même choix du système des fonctions de base de ramener simultanément à la forme diagonale les matrices A , F_1 et F_2 . Or ceci ne peut pas être exact puisque par hypothèse F_1 et F_2 ne commutent pas. Il faut donc que A ait des valeurs propres multiples.

Comme exemple d'application de ce théorème, considérons un système à symétrie sphérique dont l'Hamiltonien H ne dépend que de la distance r à un point central O pris comme origine des coordonnées. Nous avons vu que les opérations M_x et M_y correspondant aux moments de rotation autour des axes Ox et Oy ne commutent pas. Par contre ces opérateurs incomplets commutent tous deux avec l'opérateur H comme on le vérifie aisément. On en conclut que H admet des valeurs propres multiples : les états quantifiés d'un système à symétrie sphérique sont donc dégénérés, résultat bien connu dans l'étude de la quantification.

Opérateurs ayant une fonction propre commune

Considérons 2 opérateurs A et B ayant en commun une fonction propre φ . Nous avons $A(\varphi) = \alpha\varphi$; $B\varphi = \beta\varphi$ d'où

$$(14) \quad (AB - BA)\varphi \equiv [A, B]\varphi = \beta A\varphi - \alpha B\varphi = 0.$$

Or cette équation $[A, B]\varphi = 0$ ne peut être vérifiée que dans 2 cas :

1) $[A, B] \equiv 0$. Alors A et B commutent et admettent tout un système de fonctions propres communes dont φ fait partie.

2) L'opérateur $[A, B]$ n'est pas nul, mais il admet la valeur propre 0.

Alors A et B , bien que non commutants, pourront avoir en commun une (ou plusieurs) fonction propre φ si φ est fonction propre de $[A, B]$ pour la valeur propre 0.

Comme exemple de ce 2^e cas, considérons encore les opérateurs M_x et M_y . On a

$$[M_x, M_y] = \frac{\hbar}{2\pi i} M_z \neq 0.$$

Ils ne commutent pas, mais M_z a pour valeur propre $m(h/2\pi)$ avec $m=0, 1, 2 \dots$ et admet donc la valeur propre 0. Donc $[M_x, M_y]$ admet la valeur propre 0. M_x

et M_y ont en commun la fonction propre $\varphi = Cte$ comme on le vérifie immédiatement ($\varphi = \exp(-im\varphi_x)/\sqrt{2\pi}$ pour $m = 0$).

Un cas important est celui où $[A, B]$ est de la forme $Cte \times$ l'opérateur 1. C'est le cas des grandeurs canoniquement conjuguées pour lesquelles $[A, B] = (h/2\pi)i$ 1. Comme la matrice unité n'admet évidemment aucune valeur propre nulle, les opérateurs A et B ne peuvent admettre aucune fonction propre commune.

Notons que les considérations précédentes sont valables pour les spectres continus.

3. MESURE SIMULTANÉE DE DEUX GRANDEURS D'APRÈS LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Nous allons maintenant nous servir des théorèmes et corollaires démontrés plus haut pour étudier la question de la mesure simultanée de deux grandeurs.

Dans la nouvelle Mécanique, nous faisons correspondre un opérateur hermitien à toute grandeur mécanique. Etant donnés une grandeur et l'opérateur A qui lui correspond, il est très important de distinguer les grandeurs dont les opérateurs commutent avec A de celles dont les opérateurs ne commutent pas avec A . L'importance de cette distinction vient de ce que deux grandeurs mécaniques peuvent être mesurées simultanément quand leurs opérateurs commutent et dans ce cas seulement. C'est ce que nous voulons maintenant montrer.

Nous partirons du postulat essentiel en Mécanique ondulatoire que tout état d'un corpuscule ou d'un système doit pouvoir à tout instant être représenté par une fonction d'onde ψ qui en réalité représente l'état de nos connaissances sur ce corpuscule ou ce système à cet instant. Toute opération de mesure ou d'observation des éléments microscopiques modifie l'état de nos connaissances sur le corpuscule ou le système et par suite modifie brusquement la forme du ψ , mais aussi bien *avant* l'acte de mesure qu'*après*, nous devons pouvoir représenter l'état du corpuscule par une onde ψ : voilà le postulat fondamental qu'admet la Mécanique ondulatoire et qu'il est essentiel de noter. Immédiatement *après* une mesure ou une observation qui nous révèle quelque chose sur l'état des éléments inaccessibles à nos sens de la Physique atomique, nous pouvons adopter une certaine forme d'onde ψ qui représente l'état de nos connaissances et à partir de ce moment tant qu'on ne fait pas d'autres observations ou mesures, l'onde ψ évolue à partir de cette forme initiale conformément à l'équation des ondes de la Mécanique ondulatoire et cette évolution est rigoureusement déterminée.

Si à une époque ultérieure une nouvelle mesure ou observation nous permet d'assigner à une grandeur A une valeur précise α_i , cette valeur est d'après nos principes généraux une des valeurs propres de l'opérateur A et la fonction d'onde ψ *après* la mesure devra être proportionnelle à une fonction propre φ_i correspondant à α_i . Si l'on recommençait immédiatement après la mesure de A

une nouvelle mesure de A , on serait certain d'après les principes généraux de lui retrouver la valeur α_i (répétabilité de la mesure). Donc pour qu'on puisse mesurer simultanément avec exactitude la grandeur A et une autre grandeur B de valeur propre β_i et de fonction propre χ_i , il est nécessaire qu'après la mesure la fonction d'onde ψ puisse être à la fois proportionnelle à une des φ_i et à une des χ_i sans quoi la représentation par une onde ψ de l'état de nos connaissances après la mesure ne serait pas possible.

Appliquons d'abord cette idée à 2 opérateurs A et B complets. Pour que les grandeurs correspondantes puissent être simultanément mesurées avec précision, il faut qu'après la mesure on puisse avoir $\psi = a_i \varphi_i = b_i \chi_i$ avec $|a_i| = |b_i| = 1$, une correspondance biunivoque convenable ayant été établie entre les α_i et les β_i (de façon que les quantités de même indice se correspondent).

Il faut donc que le système des φ_i coïncide avec celui des χ_i et nous savons que la condition nécessaire et suffisante de cette coïncidence est $AB = BA$. La mesure précise et simultanée de A et de B n'est possible que si leurs opérateurs commutent. Les deux mesures sont alors entièrement liées l'une à l'autre : la connaissance du résultat de l'une entraîne celle du résultat de l'autre, tout au moins quand il n'y a pas de valeurs propres multiples.

Prenons ensuite le cas où A est complet et B incomplet (cas 2, p. 59). Nous voulons qu'on puisse avoir après la mesure $\psi = a_i \varphi_i = f_{ik}(y \dots) \chi_k(x \dots)$ avec $|a_i| = 1$ et $\int \dots \int |f_{ik}|^2 dy = 1$ quel que soit i . Or nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est encore $AB = BA$. Mais ici les 2 mesures simultanées ne sont jamais entièrement liées. En effet, nous avons vu qu'à une valeur de k peuvent correspondre plusieurs valeurs de i . Si donc on connaît le résultat β_k de la mesure de B , cette connaissance n'entraîne pas en général la connaissance de la valeur α_i de A .

Prenons encore le cas où A et B sont tous deux incomplets. Nous reprenons ici les notations du cas 3 (p. 61). Pour que A et B soient simultanément mesurables avec précision, il faut avoir après la mesure

$$(15) \quad \psi = f_{ji}(z \dots u \dots) \varphi_i(x \dots y \dots) = g_{jk}(x \dots u \dots) \chi_k(z \dots y \dots)$$

quel que soit i avec les conditions

$$(16) \quad \int \dots \int |f_{ji}(z \dots u \dots)|^2 du dz = 1 \quad \text{et} \quad \int \dots \int |g_{jk}(x \dots u \dots)|^2 du dx = 1.$$

Dans le 3^e cas étudié, p. 61, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que $AB = BA$. Ici les deux mesures sont moins liées que dans le cas précédent car il peut exister plusieurs valeurs de j correspondant à une même valeur de i et plusieurs valeurs de j correspondant à une même valeur de k . La connaissance du résultat d'une des mesures n'entraîne pas en général le résultat de la connaissance de l'autre mesure.

Enfin supposons que A et B soient des opérateurs indépendants. Ils sont alors nécessairement commutables et en leur adjoignant un opérateur C portant sur

les variables non contenues dans A et B , on obtient un système complet de fonctions de base pour toutes les variables en prenant les fonctions propres ω_j de l'opérateur complet ABC . Après la mesure, la fonction ψ pourra se réduire à une quelconque des ω_j , c.-à-d. être de la forme

$$(17) \quad \psi = c_j \omega_j = c_j \lambda_l(u \dots) \varphi_i(x \dots) \chi_k(y \dots)$$

avec $|c_j| = 1$; i, k, l ayant des valeurs entières quelconques. Ceci signifie qu'il est toujours possible de mesurer simultanément les grandeurs A et B et que les résultats des 2 mesures simultanées sont totalement indépendants. La connaissance du résultat de l'une n'apprend rien sur le résultat de l'autre.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que deux grandeurs A et B soient simultanément mesurables est que leurs opérateurs commutent. Les résultats de la mesure simultanée de A et B , quand elle est possible, sont plus ou moins liés l'un à l'autre suivant le caractère complet ou incomplet des opérateurs.

La considération des cas des opérateurs indépendants conduit à la notion de « mesure maximale ». Supposons que le corpuscule ou le système soit défini par n coordonnées $x_1 \dots x_n$. A chaque coordonnée x_i faisons correspondre une grandeur mesurable dont l'opérateur A_i n'intéresse que la variable x_i . Soient $\alpha_k^{(i)}$ et $\varphi_k^{(i)}$ les valeurs propres et fonctions propres de A_i .

Nous obtenons un opérateur complet en considérant le produit de tous les A_i soit $\prod_1^n A_i$, les fonctions propres de cet opérateur sont les produits

$$\omega_j = \prod_1^n \varphi_k^{(i)}(x_i).$$

Les A_i étant indépendants, les grandeurs correspondantes sont simultanément mesurables : supposons que nous les mesurions toutes dans un même acte de mesure. Après cette mesure, le ψ aura la forme

$$\omega_j = \prod_1^n \varphi_k^{(i)}(x_i),$$

en supposant que la mesure de A_i a fourni la valeur propre $\alpha_k^{(i)}$ correspondant à la fonction propre $\varphi_k^{(i)}$. On aura alors effectué une observation ou mesure « maximale » déterminant complètement la fonction ψ et par suite la probabilité des valeurs possibles de toutes les grandeurs mesurables attachées au système. La mesure d'une autre grandeur mesurable B en même temps que celle des A_i est ou bien impossible si B ne commute pas avec le produit de A_i , ou bien possible, mais sans intérêt dans le cas contraire car alors cette mesure ne nous apprend rien de plus sur l'état du système dont la mesure simultanée de tous les A_i nous fournit une connaissance « maximale ».

4. EXEMPLES DE GRANDEURS NON SIMULTANÉMENT MESURABLES. DISTINCTION DE DEUX SORTES DE NON-COMMUTATION

L'exemple le plus connu de grandeurs non simultanément mesurables est celui d'une coordonnée q et de la composante conjuguée p de quantité de mouvement. Si Q et P désignent les opérateurs correspondants, on a

$$(18) \quad Q = q \times \quad P = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} \quad QP - PQ = \frac{h}{2\pi i}$$

car

$$q\left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial f(q)}{\partial q} - \left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial q}[qf(q)] = \frac{h}{2\pi i}f(q).$$

Les grandeurs q et p ne sont donc pas simultanément mesurables. S'il y a plusieurs q soit $q_1 \dots q_i \dots$ on a naturellement $Q_k P_i = P_i Q_k$ et comme

$$Q_i Q_k = Q_k Q_i \quad \text{et} \quad P_i P_k = P_k P_i,$$

on voit qu'on peut toujours mesurer simultanément deux coordonnées ou deux composantes de quantité de mouvement ainsi qu'une coordonnée et une composante non conjuguée de quantité de mouvement. Seule la mesure simultanée d'une coordonnée et de la composante correspondante de quantité de mouvement est impossible.

Dans le cas d'un corpuscule défini par trois coordonnées x, y, z auxquelles sont conjuguées les trois composantes rectangulaires de quantité de mouvement p_x, p_y, p_z , on retrouve l'impossibilité de connaître simultanément les quantités conjuguées x et p_x etc. que nous avions précédemment pu déduire de la représentation des ondes ψ par des intégrales de Fourier. Les relations d'incertitude d'Heisenberg se déduisent, nous reviendrons sur ce point, des relations $QP - PQ = h/2\pi i$. Plus généralement si dans un problème mécanique, p et q sont des variables canoniquement conjuguées, on a toujours $QP - PQ = h/2\pi i$. Ainsi l'angle d'azimut autour d'un axe polaire Oz est canoniquement conjugué de la composante M_z du moment cinétique autour de Oz . Comme à M_z correspond l'opérateur $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \varphi_z}$, on a bien en opérateurs $\varphi M_z - M_z \varphi = h/2\pi i$

Dans le cas que nous venons d'étudier les deux opérateurs non commutants sont tels que $[A, B] = c$, c étant une constante ici égale à $h/2\pi i$. Les grandeurs canoniquement conjuguées appartiennent à la catégorie générale des grandeurs non simultanément mesurables dont le commutateur est égal à une constante. Mais il existe une autre catégorie de grandeurs non simultanément mesurables : celles dont le commutateur est égal à un opérateur non nul.

C'est le cas des grandeurs M_x et M_y par exemple puisqu'on a

$$[M_x, M_y] = \frac{h}{2\pi i} M_z.$$

La différence essentielle entre ce type d'opérateurs non commutants et le type précédent provient du théorème énoncé p. 66. En effet, deux opérateurs non commutants A et B ne peuvent avoir aucune fonction propre commune si le commutateur est égal à une constante c car l'opérateur $c \cdot 1$ n'a pas de valeurs propres nulles : les grandeurs correspondant à deux tels opérateurs ne sont jamais simultanément mesurables.

Au contraire, si les deux grandeurs non commutantes ont leur commutateur égal à un opérateur, A et B pourront avoir des fonctions propres communes si $[A, B]$ a des valeurs propres nulles. Il pourra alors accidentellement arriver que la mesure simultanée de A et de B puisse s'effectuer et elle fournira alors pour valeurs de A et de B des valeurs propres correspondant à l'une des fonctions propres communes. Par exemple, dans le cas de M_x et de M_y , comme le commutateur $[M_x, M_y] \sim M_z$ admet la valeur propre 0 avec la fonction propre $\varphi_0 = Cte = 1/\sqrt{2} \pi$, une mesure simultanée de M_x et de M_y peut exceptionnellement permettre de leur attribuer les valeurs $M_x = 0$ et $M_y = 0$ qui correspondent aussi à la fonction propre $\varphi_0 = 1/\sqrt{2} \pi$. Mais en général il est impossible de mesurer simultanément M_x et M_y ⁽¹⁾.

Lorsque nous étudierons le théorème relatif à la dispersion de deux grandeurs non commutantes, nous verrons à nouveau l'intérêt qu'il y a à distinguer les grandeurs non commutantes dont le commutateur est une constante des grandeurs non-commutantes dont le commutateur est égal à un opérateur.

Nota : On peut noter que si l'on a $[A, B] = c \cdot 1$ la constante c est toujours proportionnelle à \hbar car pour $\hbar \rightarrow 0$ A et B doivent commuter puisqu'on revient alors à la Mécanique classique. Dans ce cas, on peut donc toujours se ramener au cas de grandeurs canoniquement conjuguées.

⁽¹⁾ En réalité la fonction propre de M_z pour la valeur propre 0 est $f(\rho + z)$ en coordonnées cylindriques autour de Oz et les fonctions propres de M_x et M_z pour les valeurs propres 0 ont des expressions analogues de sorte que la fonction propre commune à M_x , M_y , M_z pour les valeurs propres 0 est $F(r) = F(\rho^2 + z^2)$: elle représente un état à symétrie sphérique.

CHAPITRE VII

IMPOSSIBILITÉ PHYSIQUE DE MESURER SIMULTANÉMENT LES GRANDEURS CANONIQUEMENT CONJUGUÉES

1. NÉCESSITÉ D'EXAMINER L'IMPOSSIBILITÉ DE MESURER SIMULTANÉMENT AVEC PRÉCISION DEUX GRANDEURS CANONIQUEMENT CONJUGUÉES

Nous avons montré que, suivant la Mécanique ondulatoire, il doit être impossible de mesurer simultanément avec précision deux grandeurs non commutantes et, en particulier, deux grandeurs canoniquement conjuguées. Cette impossibilité est déduite du postulat fondamental suivant lequel il doit être possible de représenter l'état de nos connaissances sur un système par une onde ψ , aussi bien après qu'avant une expérience de mesure. Si deux grandeurs canoniquement conjuguées pouvaient être simultanément mesurées avec précision, il serait impossible de représenter l'état du système après la mesure par une onde ψ et il faudrait abandonner la Mécanique ondulatoire.

Mais l'on peut se demander si réellement il est impossible d'effectuer une telle mesure simultanée de deux grandeurs conjuguées et quelle est l'origine physique de cette impossibilité. De fines analyses développées tout d'abord par MM. Bohr et Heisenberg ont montré qu'effectivement il ne paraît pas possible d'imaginer des expériences permettant de mesurer simultanément deux grandeurs conjuguées avec une précision supérieure à celle que permettent les inégalités d'incertitude d'Heisenberg. Les longues discussions que soulevèrent les raisonnements de MM. Bohr et Heisenberg ont tourné à leur avantage et aujourd'hui leur thèse paraît admise par tous les physiciens qui ont sérieusement étudié la question.

Ces raisonnements ont de plus l'intérêt de montrer que l'impossibilité de la mesure simultanée précise de deux grandeurs conjuguées a son origine dans l'existence même du quantum d'action mesuré par la constante h de Planck.

Comme la constante h de Planck est négligeable du point de vue macroscop-

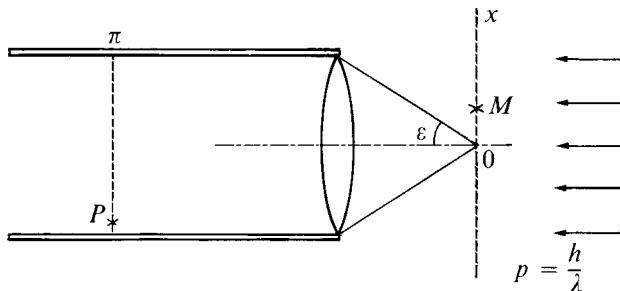
pique, la mesure simultanée de deux grandeurs conjuguées est pratiquement possible dans les phénomènes macroscopiques parce qu'alors l'imprécision des mesures masque les incertitudes quantiques : mais à l'échelle des phénomènes corpusculaires élémentaires, h n'est plus du tout négligeable et les incertitudes quantiques jouent un rôle essentiel.

Nous allons étudier quelques-uns des exemples donnés par Bohr et Heisenberg.

2. LE MICROSCOPE D'HEISENBERG

M. Heisenberg a développé le célèbre argument connu sous le nom de microscope d'Heisenberg en supposant qu'on observe dans un microscope optique un électron placé sur le porte-objet. Cette expérience est évidemment irréalisable, mais on peut la présenter sous une forme qui se rapproche davantage de ce qui est réalisable en pratique.

Considérons un microscope optique ou corpusculaire (électronique) et supposons que nous examinions à l'aide de cet instrument un objet de masse M suffisamment petit pour être considéré comme ponctuel et qui est placé sur le porte-objet du microscope.



L'objet est « éclairé » par des corpuscules de même énergie arrivant parallèlement à l'axe du microscope. Soit p leur quantité de mouvement ; la longueur associée est $\lambda = h/p$. Les corpuscules incidents sont des photons si le microscope est un microscope optique, des électrons (ou éventuellement des protons) si le microscope est un microscope corpusculaire.

Si le microscope était parfait, c'est-à-dire si les aberrations et les effets de diffraction étaient négligeables, au point objet M correspondrait dans le plan objet π une image ponctuelle P . Les aberrations peuvent être rendues très faibles (en microscopie optique par un choix convenable des lentilles, en microscopie corpusculaire par l'emploi d'une ouverture 2ϵ très petite). Mais on ne peut jamais supprimer le phénomène de diffraction dû au passage de l'onde ψ associée aux corpuscules éclairant à travers l'ouverture limitée de l'appareil. La théorie du pouvoir séparateur du microscope nous apprend que l'observation du point image ne permet de déterminer la position du point objet sur l'axe des x qu'avec une incertitude égale à $\delta x = \lambda/2 \sin \epsilon$. S'il n'y avait

pas de diffraction (ni d'aberrations), l'arrivée d'un corpuscule en P (phénomène observable en principe) permettrait d'assigner une position précise au point M . Mais l'intervention inévitable de la diffraction a pour résultat que l'arrivée d'un corpuscule en P ne permet de localiser M sur l'axe des x qu'avec l'incertitude $\delta x = h/2 \sin \varepsilon$. On voit que cette incertitude existe indépendamment de l'intensité du faisceau éclairant puisqu'on peut l'évaluer en considérant un seul corpuscule diffusé par l'objet ponctuel.

La diffusion des corpuscules incidents par l'objet est le résultat d'une brève interaction, d'un choc, entre l'objet et le corpuscule. Au cours de cette interaction, l'échange de quantité de mouvement entre le corpuscule en mouvement et l'objet supposé primitivement immobile doit être faible, sans quoi l'onde associée au corpuscule diffusé aurait une longueur d'onde différente de celle du corpuscule incident et l'on n'aurait plus d'image régulière. Pour traiter le problème, il faudrait même considérer le système formé par l'objet et le corpuscule et envisager l'espace de configuration du système. On peut donc admettre que la quantité de mouvement $|\vec{p}'|$ du corpuscule diffusé est égale à $|\vec{p}| = h/\lambda$.

Après le choc, le corpuscule diffusé a une quantité de mouvement \vec{p}' qui fait l'angle α avec la direction primitive du mouvement (direction de l'axe du microscope) et comme, pour que le corpuscule diffusé puisse intervenir dans la mesure il faut qu'il pénètre dans le microscope, on a $|\alpha| < \varepsilon$. Soit enfin P_x la composante le long de Ox de la quantité de mouvement de l'objet après le choc. On peut écrire la conservation de la quantité de mouvement le long de Ox pour le système objet + corpuscule incident, ce qui donne

$$(1) \quad P_x = p' \sin \alpha \simeq p \sin \alpha = (h/\lambda) \sin \alpha$$

P_x a donc une valeur comprise entre

$$- (h/\lambda) \sin \varepsilon \quad \text{et} \quad + (h/\lambda) \sin \varepsilon.$$

L'incertitude sur la valeur de P_x est donc $(2h/\lambda) \sin \varepsilon$. Après avoir constaté l'arrivée d'un corpuscule en P , l'observateur ne connaît donc l'abscisse x et la composante de quantité de mouvement P_x de l'objet qu'avec les incertitudes

$$(2) \quad \delta x = \lambda/2 \sin \varepsilon \quad \delta P_x = 2(h/\lambda) \sin \varepsilon$$

d'où

$$\delta x, \delta P_x \geq h.$$

Nous mettons \geq parce que le signe d'égalité suppose que toutes les observations soient parfaites, que les aberrations soient nulles, etc.

Nous avons retrouvé ainsi la relation d'incertitude pour les grandeurs conjuguées x et P_x et nous voyons que ces grandeurs ne peuvent, du moins dans le cas étudié, jamais être déterminées avec une entière précision.

Le raisonnement montre que cette circonstance est due à la valeur finie de la constante h . Si l'on voulait augmenter la précision sur x , il faudrait diminuer λ

en prenant des corpuscules incidents plus rapides. Mais alors (et c'est ici qu'intervient la valeur finie du quantum d'action), la quantité de mouvement $|\vec{p}|$ des corpuscules incidents augmente puisque $|\vec{p}| = h/\lambda$ et que h est fini. D'où augmentation de δP_x et l'on a toujours la relation d'Heisenberg. L'impossibilité d'enfreindre la liaison créée entre δx et δP_x par l'existence du quantum d'action apparaît comme l'origine profonde de la relation d'Heisenberg et ceci porte à croire qu'on doit la retrouver quel que soit le dispositif de mesure utilisé.

3. MESURE DE LA VITESSE D'UN ÉLECTRON AU MOYEN DE L'EFFET DOPPLER

Etudions maintenant la mesure de la vitesse d'un électron par l'effet Doppler. Supposons qu'un électron se déplace avec la vitesse v dans la direction positive d'un axe Ox . On envoie sur cet électron un train d'ondes lumineuses de longueur d'onde moyenne λ qui se propage le long de Ox dans le sens négatif. S'il y a diffusion le photon diffusé pourra subir un renversement de sa vitesse et être renvoyé dans le sens des x positifs. Supposons que cela se produise et que nous puissions mesurer exactement la fréquence v' diffusée. Pour simplifier supposons la vitesse de l'électron très inférieure à celle de la lumière et écrivons les équations qui traduisent la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement :

$$(3) \quad hv + \frac{1}{2} m_0 v^2 = hv' + \frac{1}{2} m_0 v'^2 \quad m_0 v - \frac{hv}{c} = m_0 v' + \frac{hv'}{c}$$

v' étant la vitesse finale de l'électron. En éliminant v' entre les deux équations il vient

$$(4) \quad h(v - v') = \frac{1}{2 m_0} \left[\frac{h^2}{c^2} (v + v')^2 - 2 m_0 v \frac{h}{c} (v + v') \right].$$

Posons $v' = v - \varepsilon$ en remarquant que ε est faible et que par suite $\varepsilon \frac{v}{c}$ et ε^2

sont négligeables ainsi que

$$\varepsilon \frac{hv}{m_0 c^2} \quad \text{car} \quad \frac{hv}{m_0 c^2} \sim \frac{10^{-13}}{10^{-6}}$$

est aussi petit. Finalement on trouve

$$\varepsilon = 2 \frac{hv^2}{m_0 c^2} - 2 \frac{v}{c} v$$

d'où

$$(5) \quad v' = v - \varepsilon = v \left[1 - \frac{2 hv}{m_0 c^2} + \frac{2 v}{c} \right].$$

Cette formule résume dans le cas considéré avec les approximations admises à la fois l'effet Doppler représenté par le terme $2 v/c$ et l'effet Compton représenté par le terme $-2 h v/m_0 c^2$. L'effet Compton perturbe la vitesse de l'électron et si nous voulons mesurer celle-ci avec précision par l'effet Doppler, il nous faut rendre l'effet Compton négligeable devant l'effet Doppler, ce qui conduit à prendre $\frac{h v/m_0 c^2}{v/c} = \frac{h}{m_0 v \lambda}$ très petit. Alors l'effet Doppler sera seul notable et nous pourrons poser

$$v' = v[1 + 2 v/c] \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda(1 - 2 v/c).$$

Mais le train d'ondes a forcément une longueur finie l : par suite, il n'est pas rigoureusement monochromatique et si nous introduisons le nombre d'ondes $1/\lambda$, ce nombre d'ondes variera pour les diverses ondes monochromatiques du train de la quantité $\delta(1/\lambda)$ avec $\delta(1/\lambda) \simeq 1/l$ d'après la théorie de la représentation des trains d'ondes par des intégrales de Fourier. Donc, même en mesurant λ' sans aucune erreur expérimentale, il restera encore une incertitude sur la valeur de v car celle-ci est donnée par $v = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda}\right)$ et l'incertitude sur λ entraîne par suite une incertitude sur v égale à

$$\delta v = \frac{c}{2} \lambda' \delta \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

de sorte que l'incertitude sur la quantité de mouvement de l'électron le long de Ox après la mesure est

$$(6) \quad \delta p_x \simeq mc\dot{\lambda}/2l.$$

Mais la mesure simultanée de la coordonnée est, elle aussi, affectée d'une incertitude. En effet, l'effet Compton, bien que faible par hypothèse devant l'effet Doppler, existe néanmoins et provoque, nous l'avons vu, une variation de vitesse égale à $v' - v \simeq -2 h v/m_0 c = -2 h/m_0 \lambda$. Supposons la position initiale du corpuscule bien connue, ce qui est nous placer dans le cas le plus favorable. Il subsistera une cause d'incertitude sur la position après la mesure due au fait suivant : on ne sait pas à quel instant de la durée l/c du passage du train d'ondes sur l'électron on doit rapporter la diffusion et il en résulte une incertitude δx sur la position finale de l'électron égale à

$$(7) \quad \delta x = (v - v') \frac{l}{c} = \frac{2 h}{m\lambda} \frac{l}{c}.$$

On a donc dans le cas le plus favorable

$$\delta x \cdot \delta p_x \simeq \frac{mc\dot{\lambda}}{2l} \cdot \frac{2h}{m\lambda} \cdot \frac{l}{c} = h$$

et l'on retrouve l'incertitude d'Heisenberg.

4. PASSAGE D'UN CORPUSCULE AU TRAVERS D'UN DIAPHRAGME RECTANGULAIRE

Comme autre exemple, nous prendrons encore la détermination de la position d'un corpuscule, grâce à son passage à travers une ouverture rectangulaire de côtés $2a$ et $2b$ percée dans un écran plan. Pour définir les coordonnées du corpuscule, on sera amené à prendre une ouverture très petite, mais plus on diminue les côtés $2a$ et $2b$ de l'ouverture rectangulaire, plus on augmente l'importance des phénomènes de diffraction que la traversée de cette ouverture provoque suivant les idées de la Mécanique ondulatoire.

Pour introduire ici la quatrième relation d'incertitude dont nous n'avons pas encore parlé et que nous étudierons plus complètement plus tard, nous pourrions supposer qu'à l'effet de déterminer l'instant du passage du corpuscule dans l'ouverture, on emploie un volet mobile permettant de découvrir ou d'obturer instantanément l'ouverture. Plus on diminuera par une manœuvre rapide du volet le temps d'ouverture, mieux sera déterminé l'instant du passage, mais en même temps le train d'ondes associé au corpuscule se trouvera raccourci en proportion; la monochromatique du train d'ondes en sera diminuée et l'énergie du corpuscule sera de moins en moins bien définie. D'où la quatrième relation d'incertitude $\delta W \cdot \delta t \geq h$.

Pour examiner mathématiquement le problème, prenons le centre de l'ouverture rectangulaire comme origine des coordonnées, les axes Ox et Oy parallèles aux côtés $2a$ et $2b$ de l'ouverture, l'axe des z normal à l'ouverture avec son sens positif dans le sens de la propagation de la lumière. Soient M de coordonnées X, Y, O un point de l'ouverture et $dX dY$ un petit rectangle entourant ce point. Le principe d'Huygens permet, on le sait, de calculer la valeur de l'onde élémentaire envoyée par le petit rectangle $dX dY$ dans une direction dont les cosinus directeurs sont α, β, γ et qui fait un très petit angle avec Oz . Si x, y, z désignent les coordonnées d'un point très éloigné dans la direction $\alpha\beta\gamma$, l'onde élémentaire en question a pour expression

$$(8) \quad d\psi_{\alpha\beta} = K dX dY \exp\left(2\pi i \left[vt - \frac{\alpha(x-X) + \beta(y-Y) + z}{\lambda}\right]\right)$$

où K est un coefficient qui varie avec la direction $\alpha\beta\gamma$, mais beaucoup plus lentement que l'exponentielle. Nous avons posé $\gamma \approx 1$. L'onde résultante envoyée dans la direction $\alpha\beta\gamma$ est donc

$$(9) \quad \psi_{\alpha\beta} = C \exp\left(2\pi i \left[vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda}\right]\right)$$

avec

$$(10) \quad C = A + iB = \iint K \exp\left(2\pi i \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda} dX dY\right)$$

l'intégrale étant étendue à l'ouverture rectangulaire. La symétrie de l'ouverture montre de suite que B est nulle de sorte que C se réduit à

$$(11) \quad C = A = \iint K \cos 2\pi \frac{\alpha X + \beta Y}{\lambda} dX dY.$$

Le cosinus peut se remplacer par la somme d'un produit de cosinus et d'un produit de sinus et le produit de sinus donne une intégrale nulle. On a donc

$$(12) \quad A = 4K \int_0^a dX \cos \frac{2\pi\alpha X}{\lambda} \int_0^b dY \cos 2\pi \frac{\beta Y}{\lambda} = \frac{K\lambda^2}{\pi^2 \alpha \beta} \sin \frac{2\pi\alpha a}{\lambda} \sin \frac{2\pi\beta b}{\lambda}$$

d'où

$$(13) \quad \psi_{\alpha\beta} = \frac{K\lambda^2}{\pi^2 \alpha \beta} \sin \frac{2\pi\alpha a}{\lambda} \sin \frac{2\pi\beta b}{\lambda} \exp \left(2\pi i \left[vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right] \right).$$

$\psi_{\alpha\beta}$ est donc nul pour $2\pi \frac{\alpha a}{\lambda} = k\pi$ et pour $2\pi \frac{\beta b}{\lambda} = k\pi$ avec k entier, c'est-à-dire dans les directions pour lesquelles on a soit $\alpha = \frac{k\lambda}{2a}$, soit $\beta = \frac{k\lambda}{2b}$.

$\psi_{\alpha\beta}$ est, au contraire, maximum dans les directions pour lesquelles on a,

$$\alpha = \frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{2b}.$$

On obtient donc ce que l'on nomme un phénomène de diffraction localisé à l'infini. Pour l'observer, du moins dans le domaine optique, on placera une lunette dont l'axe optique coïncidera avec Oz . S'il n'y avait pas de diffraction, on observerait seulement une image de l'ouverture rectangulaire située dans le plan focal de la lunette sur l'axe optique. Mais à cause de l'existence d'ondes planes monochromatiques inclinées sur l'axe, on obtient aussi une série d'autres images correspondant aux maxima de $\psi_{\alpha\beta}$. L'intensité de ces images décroît quand k s'élève (puisque α et β figurent au dénominateur dans l'expression de $\psi_{\alpha\beta}$).

En résumé, l'onde plane qui tombe sur l'écran est de la forme

$$(14) \quad \psi = a \exp \left[2\pi i \left(vt - \frac{z}{\lambda} \right) \right]$$

mais le passage à travers l'ouverture rectangulaire la transforme en un ensemble d'ondes planes de normales peu inclinées sur l'axe des z et de la forme

$$(15) \quad \psi = \sum_{\alpha\beta} a(\alpha, \beta) \exp \left(2\pi i \left[vt - \frac{\alpha x + \beta y + z}{\lambda} \right] \right)$$

les amplitudes partielles $a(\alpha, \beta)$ présentant en fonction de α et de β des maxima et des minima successifs. Comme l'intensité des ordres successifs diminue rapidement, on voit que l'extension du groupe d'ondes par rapport à la variable α est mesurée par $\delta\alpha = k_1(\lambda/2 a) \geq \lambda/2 a$, k_1 désignant un petit entier positif qui correspond à l'ordre de diffraction le plus élevé dont l'intensité soit sensible. De même l'extension du groupe en β sera $\delta\beta = k_2(\lambda/2 b) \geq \lambda/2 b$.

Si alors $\vec{\mu}$ désigne le vecteur « nombre d'ondes » correspondant à l'onde diffractée de direction de propagation $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire le vecteur de longueur $1/\lambda$ porté dans la direction $\alpha\beta\gamma$, on a

$$(16) \quad \mu_x = \alpha/\lambda \quad \mu_y = \beta/\lambda \quad \mu_z = \gamma/\lambda \simeq 1/\lambda.$$

Les variations maximales de μ_x et μ_y sont $\delta\mu_x = \delta\alpha/\lambda$ et $\delta\mu_y = \delta\beta/\lambda$ d'où

$$(17) \quad \delta\mu_x \geq 1/2a \quad \delta\mu_y \geq 1/2b.$$

Or la position du corpuscule quand il traverse l'ouverture est connue avec des incertitudes $\delta x = 2a$ et $\delta y = 2b$, d'où

$$\delta\mu_x \cdot \delta x \geq 1 \quad \delta\mu_y \cdot \delta y \geq 1.$$

Mais la relation fondamentale $|\vec{p}| = h/\lambda$ peut s'écrire

$$\vec{p} = h\vec{\mu}$$

d'où

$$\delta p_x \cdot \delta x \geq h \quad \delta p_y \cdot \delta y \geq h$$

et nous retrouvons encore les inégalités d'Heisenberg.

D'autre part, si nous voulons déterminer la coordonnée z du corpuscule et l'époque t de son passage à travers l'écran, nous devons employer un volet mobile comme cela a été expliqué plus haut. Soit τ le temps pendant lequel le volet est enlevé. L'incertitude sur t est évidemment égale à τ , celle sur z à $U\tau$, U étant la vitesse de groupe des ondes ψ qui, nous le savons, est égale à celle du corpuscule. Donc

$$\delta t = \tau \quad \delta z = U\tau.$$

Mais en n'ouvrant l'ouverture que pendant le temps τ , nous ne laissons passer à travers l'ouverture qu'un train d'ondes limité et ce train d'ondes est composé d'ondes monochromatiques occupant un intervalle spectral au moins de l'ordre de $1/\tau$: $\delta\nu \geq 1/\tau$. On a donc

$$\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\partial(1/\lambda)}{\partial\nu} \delta\nu \geq \frac{1}{U\tau} \quad \text{car} \quad \frac{1}{U} = \frac{\partial(1/\lambda)}{\partial\nu}.$$

Pratiquement on aura donc $\delta\nu \geq 1/\tau$ et $\delta(1/\lambda) \geq 1/U\tau$. Or, d'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, l'incertitude sur l'énergie

finale du corpuscule sera $h \delta v$ et l'incertitude sur la composante p_z de quantité de mouvement est $h \delta \mu_z \simeq h \delta(1/\lambda)$. On a donc

$$\delta W \cdot \delta t \geq h \quad \delta p_z \cdot \delta z \geq h.$$

Ce sont les deux autres relations d'incertitude d'Heisenberg.

5. REMARQUE IMPORTANTE SUR LA MESURE DE LA VITESSE

Nous venons de constater sur quelques exemples que les procédés de mesure de deux grandeurs canoniquement conjuguées conduisent aux inégalités d'Heisenberg.

On peut être cependant tenté de faire l'objection suivante. A l'instant t_1 , on peut effectuer une expérience montrant que le corpuscule est situé au voisinage d'un point A de l'espace, puis à une époque postérieure t_2 une autre expérience montrant que le corpuscule se trouve alors au voisinage d'un autre point B de l'espace. Si le temps $t_2 - t_1$ est suffisamment long, on aura semble-t-il une très bonne détermination de la vitesse en posant $v = \overline{AB}/(t_2 - t_1)$ et l'on pourra dire que l'on connaît à la fois la position et la quantité de mouvement du corpuscule d'une façon précise, ce qui est contraire aux relations d'Heisenberg.

Mais ce n'est là qu'une apparence. On doit, en effet, d'abord remarquer que si l'on effectuait la mesure de vitesse envisagée pour un grand nombre de corpuscules dans le même état initial, on trouverait des résultats différents. En effet, on peut démontrer que le train d'ondes ψ de très petites dimensions qui correspond à la localisation du corpuscule près de A par la première expérience, s'étale rapidement pendant sa propagation et occupe une grande étendue au bout du temps, par hypothèse très long, $t_2 - t_1$. D'après le principe des interférences, il y aura au temps t_2 une grande région de l'espace où le corpuscule pourrait se trouver et l'ensemble des expériences envisagées fournit une série de points B différents.

De même, et ceci est le point capital, on ne peut pas dire que l'on connaisse simultanément par la mesure envisagée la position et la quantité de mouvement du corpuscule. En effet, tout d'abord la vitesse $v = \overline{AB}/(t_2 - t_1)$ n'est évidemment connue qu'après la 2^e observation : on ne peut donc pas dire qu'il y ait connaissance simultanément à l'instant t_1 de la position et de la vitesse. Cette connaissance existe-t-elle à l'instant t_2 ? La 2^e observation nous donne bien la position B du mobile et permet, si l'on veut, de lui attribuer dans l'intervalle de temps une trajectoire rectiligne AB décrite avec la vitesse $v = \overline{AB}/(t_2 - t_1)$, mais ce qui importerait ce serait de connaître après la 2^e observation la quantité de mouvement du mobile, mais l'observation de la position B trouble complètement l'état de mouvement de sorte qu'on ne peut aucunement attribuer au corpuscule localisé en B la vitesse v calculée et l'on ne peut pas se servir de celle-ci pour prévoir l'évolution postérieure du mouvement. La vitesse v n'est connue qu'au moment où elle ne représente plus rien. La Mécanique ondu-

latoire, comme toutes les théories physiques, a pour but la prédition et est donc toujours *tournée vers l'avenir*. Ce qui l'intéresse, c'est l'état de nos connaissances après chaque observation : or, *après la 2^e observation* comme après la 1^{re}, si nous connaissons exactement la position du corpuscule, nous ignorons complètement sa vitesse. L'hypothèse même d'attribuer *rétrospectivement* à la vitesse la valeur v dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) est arbitraire car, aucune observation n'ayant eu lieu dans cet intervalle de temps, affirmer que le corpuscule a décrit la droite AB d'un mouvement uniforme est une affirmation arbitraire.

6. CAS DE DEUX GRANDEURS DONT LE COMMUTATEUR EST UN OPÉRATEUR NON NUL

Nous avons examiné le cas des tentatives de mesures simultanées de deux quantités canoniquement conjuguées et nous avons vu que la précision obtenue est toujours limitée par les relations d'Heisenberg. Mais les quantités conjuguées appartiennent à la première catégorie de grandeurs non commutantes : celles dont le commutateur est une constante. Peut-on arriver à des conclusions analogues pour les grandeurs non commutantes de la 2^e espèce : celles dont le commutateur est égal à un opérateur non nul ? Nous allons examiner cette question dans le cas le plus important au point de vue physique, celui des composantes M_x, M_y, M_z du moment cinétique \vec{M} .

Pour raisonner sur un cas très simple, considérons un électron qui tourne sur une trajectoire circulaire quantifiée à un magnéton de Bohr avec une vitesse constante v . Le moment magnétique \mathcal{M} et le moment cinétique M de ce courant particulaire sont

$$(18) \quad \mathcal{M} = \frac{e}{c} \frac{v}{2\pi R} \cdot \pi R^2 = I \cdot S = \frac{evR}{2c} \quad M = m_0 v R$$

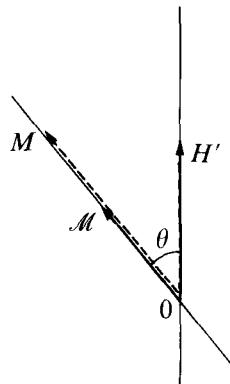
(en supposant $v \ll c$). D'où la formule bien connue qui est valable pour tout système de charges en mouvement (quand on néglige le spin) ainsi qu'Einstein l'a démontré

$$(19) \quad \frac{\mathcal{M}}{M} = \frac{e}{2m_0 c} \quad \text{d'où si} \quad M = \frac{\hbar}{2\pi} \quad \mathcal{M} = \frac{eh}{4\pi m_0 c}.$$

Nous voulons mesurer M en mesurant \mathcal{M} par l'action du courant particulaire sur un magnétomètre placé à la distance r du courant particulaire.

Si $\vec{\mu}$ est le moment magnétique de l'aiguille du magnétomètre, le champ produit par le magnétomètre à l'endroit où se trouve le courant particulaire sera de l'ordre μ/r^3 . D'autre part, pour mesurer exactement \mathcal{M} , nous devons à l'aide du magnétomètre évaluer exactement le champ magnétique exercé par le courant particulaire à l'endroit où se trouve le magnétomètre, champ qui est de l'ordre de \mathcal{M}/r^3 . Il faudra donc connaître ce champ avec une incertitude

$\Delta H = (\mathcal{M}/r^3) \eta$ avec $\eta \ll 1$, donc connaître l'énergie du magnétomètre $\vec{\mu} \cdot \vec{H}$ avec une incertitude de l'ordre de $\Delta E = \mu \Delta H = \mu(\mathcal{M}/r^3) \eta$. La 4^e relation d'incertitude d'Heisenberg exige alors que la durée de l'expérience soit au moins égale à $\Delta t = h/\Delta E = hr^3/\mu\mathcal{M}\eta$. Or, pendant cette durée, le courant particulier soumis au champ magnétique $\sim \mu/r^3 = H'$ du magnétomètre va précesser autour de ce champ avec la vitesse angulaire de précession de Larmor $\omega = eH'/2m_0c$. En effet, si nous représentons le petit aimant équivalent au



courant particulier placé dans le champ H' , on aura d'après le théorème du mouvement cinétique $d\vec{M}/dt = \text{moment par rapport à } 0$ de la force exercée par \vec{H}' sur \vec{M} . Le moment de la force étant normal à \vec{H}' , l'angle θ entre \vec{M} et \vec{H}' est constant car $\frac{d}{dt}(M \cos \theta) = 0$, et en projetant sur le plan normal à \vec{H}' :

$$(20) \quad \frac{d}{dt} \left[M \sin \theta \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \right] = H' \mathcal{M} \sin \theta \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

ou

$$(21) \quad M \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} \omega = H' \mathcal{M} \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix},$$

ω étant la vitesse angulaire de précession de l'aimant \mathcal{M} autour de la direction \vec{H}' . On a donc bien

$$\omega = H' \frac{\mathcal{M}}{M} = \frac{eH'}{2m_0c} \quad \text{c.q.f.d. .}$$

La rotation effectuée par l'axe du courant particulier, c.-à.-d. par le vecteur \mathcal{M} autour de \vec{H}' pendant la durée de l'expérience sera

$$\alpha = \omega \Delta t \simeq \frac{e}{2m_0c} \frac{\mu}{r^3} \frac{hr^3}{\mu\mathcal{M}\eta} = \frac{eh}{2m_0c} \frac{1}{\mathcal{M}} \frac{1}{\eta} = \frac{2\pi}{\eta} \gg 2\pi.$$

L'axe du circuit particulaire accomplit donc pendant l'expérience un grand nombre de tours autour de la direction de H' et seule la composante de \overrightarrow{M} , et donc celle de \overrightarrow{M} le long de $\overrightarrow{H'}$ peut être mesurée. On voit donc que la mesure d'une composante de \overrightarrow{M} ne peut se faire en même temps que celle d'une autre composante, conformément au fait que les composantes de \overrightarrow{M} ne commutent pas. Cependant si \overrightarrow{M} et \overrightarrow{M} sont nuls, le magnétomètre permettra de vérifier que les 3 composantes de ces vecteurs sont nulles : dans ce cas exceptionnel, la mesure simultanée des composantes sera possible, et ceci est encore en accord avec les prévisions de la théorie générale.

7. LA COMPLÉMENTARITÉ AU SENS DE BOHR

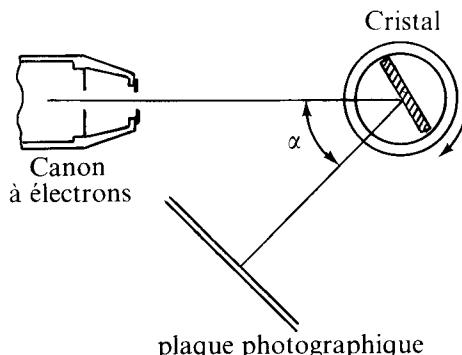
Nous allons maintenant préciser un point qu'il est important de noter pour bien pouvoir suivre certains exposés. Dans les traités élémentaires d'optique, on donne généralement le nom d'onde aux ondes planes monochromatiques parce que les trains d'ondes lumineuses usuels, bien que limités, sont assez longs pour que dans leur partie centrale, on puisse les confondre avec une onde monochromatique plane. Une « onde » ainsi définie aura une fréquence, une longueur d'onde et une direction de propagation déterminées : la Mécanique ondulatoire lui fait correspondre un vecteur \vec{p} qui pointe dans la direction de propagation et dont la longueur $|\vec{p}|$ donne la longueur d'onde $\lambda = h/|\vec{p}|$ dont on déduit la fréquence. L'onde associée sera donc définie par le vecteur \vec{p} . Cette onde plane monochromatique qui est homogène et ne permet aucune localisation du corpuscule est l'idéalisatoin de l'idée de mouvement pur sans aucune idée de localisation spatio-temporelle.

Au contraire les coordonnées x, y, z du corpuscule correspondent à l'idée d'une localisation spatio-temporelle à un instant t . Les variables canoniquement conjuguées p_x, p_y, p_z et x, y, z correspondent respectivement à l'aspect ondulatoire de l'entité « corpuscule », aspect qui est purement dynamique sans localisation et à l'aspect granulaire du corpuscule qui en un certain sens exclut l'idée de mouvement (Zénon d'Elée). Si alors on se reporte aux inégalités d'Heisenberg, on voit que les corpuscules élémentaires de la Physique ne peuvent être décrits par une onde plane ou par un grain localisé que dans des cas extrêmes : en général l'aspect onde plane et l'aspect grain localisé existent tous deux, mais sont tous deux un peu flous, l'onde ψ associée étant formée par la superposition d'un certain nombre d'ondes planes monochromatiques et la localisation restant incertaine dans une région plus ou moins étendue de l'espace.

Les relations d'incertitude d'Heisenberg nous apprennent même que, plus une observation permet de préciser l'un des aspects du corpuscule, plus l'autre s'estompe. Ceci permet d'expliquer comment la Mécanique ondulatoire permet d'utiliser simultanément ces deux conceptions, en apparence contradictoires, d'onde plane homogène indéfiniment étendue et de grain localisé : c'est que ces deux images si différentes ne peuvent jamais entrer en contradiction fla-

grante, chacune d'elles tendant à s'effacer dès que l'autre s'affirme. C'est là un aspect très intéressant des conceptions modernes de la Microphysique. M. Bohr l'a exprimé en disant : « L'onde et le corpuscule sont des « aspects complémentaires » de la réalité. » Chaque fois que le comportement de l'entité « corpuscule » peut se représenter par la propagation d'une onde plane monochromatique, son aspect granulaire disparaît et chaque fois que ce comportement peut se représenter par le déplacement d'un grain localisé dans l'espace son aspect ondulatoire disparaît. Le concept de « complémentarité » ainsi introduit par Bohr est très curieux : il se pourrait, comme Bohr l'a lui-même indiqué, qu'il ait des applications en dehors du domaine de la Physique⁽¹⁾.

Pour illustrer l'idée de complémentarité, prenons l'exemple concret du phénomène de la diffraction des électrons par un cristal. Les électrons sont produits dans un « canon à électrons », dispositif comprenant un fil chaud qui émet les électrons et un système de grilles portées à des potentiels appropriés, qui imprime à tous les électrons une même accélération dans une même direction : on obtient donc ainsi un faisceau cylindrique d'électrons monocinétiques. Le faisceau d'électrons est projeté sur la surface d'un cristal : les électrons diffusés sont recueillis sur une plaque photographique où ils produisent des impressions ponctuelles sur la couche sensible.



⁽¹⁾ Note G.L. : Est-il besoin de rappeler que l'opinion de de Broglie sur la complémentarité a, par la suite, évolué ? On trouve, par exemple, dans « Certitudes et incertitudes de la science », le passage suivant : « Si l'emploi du mot « complémentarité » sert seulement à traduire l'apparition successive d'apparences corpusculaires et d'apparences ondulatoires dans des phénomènes indéniables, cet emploi est entièrement légitime, mais en revanche, il ne constitue en aucune façon une explication réelle de la dualité des ondes et des corpuscules. On peut comparer la complémentarité à la « vertu dormitive » de l'opium dont s'est moqué Molière : il est parfaitement légitime de traduire les propriétés soporifiques de l'opium en attribuant à cette substance une « vertu dormitive », mais il faut bien se garder de voir dans ces mots une explication de ces propriétés » (réf. III, 8, p. 20).

La section droite du canon à électrons est supposée infiniment grande par rapport à la longueur d'onde de l'onde associée à chaque électron. Chaque électron sortant du canon a donc une quantité de mouvement parfaitement déterminée puisqu'il a subi une chute de potentiel connue, mais sa position est entièrement indéterminée à l'échelle de la longueur d'onde : on peut donc le représenter par une onde plane monochromatique. Cette onde vient frapper la surface du cristal et pénétrer même dans ses premières couches d'atomes. La régularité de la disposition des atomes dans le cristal provoque alors le phénomène de diffraction grâce auquel la probabilité de trouver ensuite l'électron dans telle ou telle direction varie avec la direction envisagée et présente des maxima intenses dans certaines directions privilégiées (théorie de Laue-Bragg). Ce processus de diffusion ne peut se décrire qu'en employant l'image ondulatoire car il suppose que toute une portion étendue du cristal participe au phénomène et il fait intervenir les différences de phase (notion essentiellement ondulatoire !) entre les ondelettes diffusées par les divers atomes régulièrement distribués du cristal. Si l'on cherchait à représenter la diffusion des électrons à l'aide de l'image granulaire, il faudrait considérer une trajectoire électronique venant frapper le cristal en un point, telle que la ligne brisée indiquée plus haut sur la figure. Mais alors la réflexion de l'électron sur le cristal ne pourrait dépendre que des propriétés physiques de la surface cristalline au point d'impact et non de toute la structure régulière du cristal ; de plus, il serait impossible d'expliquer avec cette image corpusculaire l'intervention des différences de phase.

Donc, dans la diffraction des électrons par le cristal, c'est l'aspect ondulatoire de l'électron qui se manifeste : son aspect granulaire disparaît complètement. Mais voici ensuite l'électron diffusé qui vient produire dans la couche sensible de la plaque photographique une impression bien localisée, comme une balle qui vient percer en un point déterminé la cible qu'elle atteint. Dans ce second phénomène, l'électron se manifeste comme un corpuscule localisé, comme un grain, et rien ne décèle plus son aspect ondulatoire.

Voici donc une même expérience où se produisent *successivement* deux processus dont l'explication exige pour l'un l'intervention de l'image ondulatoire et pour l'autre celle de l'image granulaire. Mais pour chaque processus une seule des deux images intervient de sorte qu'il n'y a jamais contradiction flagrante.

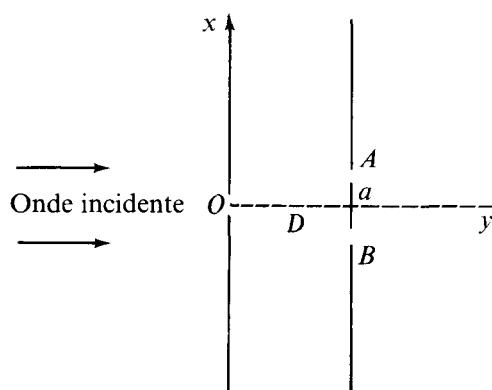
8. CALCUL DE BOHR POUR LES TROUS D'YOUNG

Voici une illustration de la complémentarité donnée par Bohr et qui est d'un type un peu différent. On sait en quoi consiste l'expérience des trous d'Young. On envoie normalement sur l'une des faces d'un écran percé de deux trous un faisceau cohérent de lumière monochromatique. Du côté postérieur de l'écran, les deux trous qui sont très rapprochés laissent passer la lumière incidente et jouent le rôle de deux petites sources de lumière cohérente : les ondes lumi-

neuses envoyées derrière l'écran par ces deux petites sources se superposent et cette superposition donne par le jeu des interférences des franges brillantes et obscures. En évaluant la différence de phase des ondes parvenant de chaque trou en un point donné, on peut calculer la position des franges, position qui naturellement dépend de la longueur d'onde de l'onde employée. L'observation confirme entièrement les prévisions de la théorie ondulatoire et c'est pourquoi l'expérience des trous d'Young a été l'une de celles qui ont apporté, il y a environ 150 ans, des preuves décisives en faveur de la théorie ondulatoire de la lumière.

Nous avons donc ici une expérience où l'aspect ondulatoire de la lumière se manifeste très clairement. Mais, si nous voulons introduire dans la description de cette expérience l'idée de photon considéré comme un grain localisé, nous rencontrons d'insurmontables difficultés. La trajectoire du photon devrait avoir passé par l'un ou l'autre trou, ce qui détruirait la symétrie du rôle des deux trous, symétrie qui est indispensable pour l'interprétation du phénomène. Comment d'ailleurs expliquer que la trajectoire du photon qui passe par l'un des trous soit influencée par la présence de l'autre trou ? Et cependant une telle influence serait nécessaire pour rendre compte d'un phénomène qui dépend de la situation réciproque des deux trous. Comment faire intervenir dans une image purement granulaire la différence de phase provenant de l'écartement des trous, différence de phase sans laquelle on ne peut effectuer une prévision correcte du phénomène observé ?

L'idée de complémentarité de Bohr vient lever ces difficultés. Les interférences produites par le dispositif d'Young constituent un phénomène où se manifeste l'aspect ondulatoire de la lumière : l'aspect granulaire de celle-ci ne pourrait ici se manifester sans amener à des contradictions. Serrant la question de plus près, M. Bohr a montré que tout dispositif permettant de dire par lequel des trous d'Young a passé le photon ferait nécessairement disparaître le phénomène d'interférences : permettant de préciser l'aspect granulaire de la lumière, ce dispositif ferait nécessairement disparaître son aspect ondulatoire. Voici dans ses grandes lignes le raisonnement de Bohr.



Nous supposerons pour préciser, que la lumière monochromatique envoyée sur la face antérieure de l'écran d'Young provient d'une fente percée dans un premier écran et jouant le rôle de source de lumière. Nous désignerons par a la distance des trous d'Young et nous choisirons des axes des x et des y comme il est indiqué dans la figure page 86.

D désignera la distance des écrans supposés parallèles, λ la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Supposons que la position dans le sens des x de la première fente soit connue avec une incertitude Δx . Pratiquement a et Δx sont toujours petits devant D .

La différence des phases des ondes lumineuses qui atteignent les 2 trous d'Young sera égale à

$$(22) \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + \Delta x\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} - \Delta x\right)^2} \right]$$

soit approximativement $\Delta\varphi = 2\pi(a\Delta x/\lambda D)$.

Pour qu'après le second écran nous puissions avoir des franges nettes, il faut que la différence de phase des ondes lumineuses émanant des 2 trous d'Young soit bien déterminée, c.-à-d. que l'incertitude dont la différence de phase peut être affectée doit être très inférieure à 2π , ce qui nous donne

$$(23) \quad \Delta x \ll \lambda D/a.$$

D'autre part, pour que nous puissions dire par lequel des trous d'Young le photon qui a traversé la première fente ira ensuite passer, il faudrait connaître avec une précision suffisante la direction de la quantité de mouvement de ce photon à la sortie de la première fente. Si p_x et p_y sont les composantes de cette quantité de mouvement, le point du second écran atteint par le photon aura une abscisse égale à $D(p_x/p_y)$ et si p_x est affectée d'une incertitude Δp_x , cette abscisse sera elle-même affectée de l'incertitude $D(\Delta p_x/p_y)$. Pour que l'on puisse affirmer que le photon a passé par l'un des trous d'Young, il faut donc, on s'en rend compte aisément, que l'on ait

$$(24) \quad a \gg D \frac{\Delta p_x}{p_y}.$$

Mais le faisceau de lumière issue de la première fente est à peu près parallèle à l'axe des y de sorte que l'on a approximativement $p_y = p = h/\lambda$ et par suite la condition précédente s'écrit approximativement

$$(25) \quad a \gg D (\Delta p_x/p) = D \Delta p_x (\lambda/h).$$

Mais nous savons que, quels que soient les dispositifs employés pour mesurer la coordonnée x du photon et la composante p_x de sa quantité de mouvement quand il traverse le premier écran, on a toujours l'inégalité d'Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq h$.

La condition (25) donne donc a fortiori

$$(26) \quad \Delta x \gg \lambda D/a.$$

Maintenant il est évident que les inégalités (23) et (26) sont contradictoires. On en conclut que si l'on peut préciser par lequel des trous d'Young a passé le photon il est impossible d'observer le phénomène d'interférences et qu'inversement s'il est possible d'observer les interférences, on ne peut dire par quel trou a passé le photon. L'aspect granulaire et l'aspect ondulatoire de la lumière jouent ici en quelque sorte à cache-cache et n'entrent jamais en conflit direct : c'est là l'essentiel de l'idée de complémentarité de Bohr (¹).

Le raisonnement précédent s'appliquerait aussi bien aux électrons et aux autres corpuscules matériels. L'expérience des trous d'Young doit en effet, du moins en principe, être réalisable pour ces corpuscules. Le même genre de considérations pourrait d'ailleurs être étendu à d'autres dispositifs interférentiels.

(¹) Note G.L. : Louis de Broglie a, par la suite, critiqué ce raisonnement et lui en a substitué un autre (voir réf. II, 29, p. 65). Il observe notamment : « La façon dont intervient la relation d'incertitude est un peu singulière car elle suppose implicitement qu'on puisse mesurer la composante p_x de la quantité de mouvement du corpuscule par le recul le long de l'axe des x du premier écran, ce qui est impossible puisque cet écran a une masse macroscopique et peut être solidement fixé. De plus, le raisonnement ne fait pas intervenir la largeur de la fente du premier écran (qui ne se confond pas avec l'incertitude Δx), largeur qui joue un rôle essentiel dans le phénomène de diffraction qui permet à l'onde, après son passage à travers la fente du premier écran, d'atteindre les deux trous d'Young. » Et de Broglie retrouve le résultat de Bohr en montrant que pour viser l'un des trous d'Young, il faudrait augmenter le diamètre de ce premier trou, mais que ceci aurait pour effet de faire disparaître le phénomène d'interférences.

CHAPITRE VIII

FORME PRÉCISE DES RELATIONS D'INCERTITUDE

1. THÉORÈME SUR LES DISPERSIONS DES GRANDEURS NON COMMUTANTES

En prenant comme postulat fondamental la possibilité de représenter à tout instant l'état de nos connaissances sur un corpuscule par une *fonction* d'onde ψ , nous avons montré, en nous appuyant sur les propriétés des développements de Fourier, que les incertitudes sur deux quantités canoniquement conjuguées p et q obéissent aux inégalités

$$(1) \quad \Delta q \cdot \Delta p \geq h$$

qui sont exactes en ordre de grandeur. C'est là l'énoncé « qualitatif » des relations d'Heisenberg et nous avons vu qu'aucune expérience ne peut nous fournir pour des grandeurs canoniquement conjuguées des valeurs plus précises que ne le permettent lesdites relations.

Nous avons aussi montré que la mesure simultanée de deux grandeurs dont les opérateurs ne commutent pas est en général impossible, même si ces grandeurs ne sont pas canoniquement conjuguées (exemple des composantes du moment cinétique) : cependant en ce cas, il peut arriver *exceptionnellement* que la mesure simultanée soit possible (si les grandeurs ont la valeur 0).

Nous allons retrouver ces résultats d'une manière plus précise en démontrant un théorème sur la dispersion des grandeurs non commutantes qui paraît dû à M. Pauli. Nous allons en donner deux démonstrations d'une forme un peu différente.

Première démonstration :

Nous introduirons d'abord une définition nouvelle. Soit F un opérateur linéaire défini pour certaines variables dans un domaine D . Nous appellerons « opérateur adjoint » de F l'opérateur F^+ défini également dans D tel que

$$\int_D f^* Fg dt = \int_D (F^+ f)^* g dt$$

pour toutes fonctions f et g qui sont finies, uniformes et continues dans D et s'annulent aux limites de D de telle façon que les intégrales de surfaces venant de l'intégration par parties de \int_D soient nulles. Si l'on compare la définition de F^+ avec la définition d'un opérateur hermitien

$$\int_D f^* A g \, d\tau = \int_D g A^* f^* \, d\tau,$$

on voit que si F est hermitien $F^+ = F$ de sorte qu'un opérateur hermitien est son propre adjoint (hermitien = self adjoint).

Que l'opérateur linéaire soit ou non hermitien, la valeur moyenne de FF^+ au sens de la Mécanique ondulatoire est toujours réelle et positive (ou nulle) car

$$(2) \quad \overline{FF^+} = \int_D \psi^* FF^+ \psi \, d\tau = \int_D (F^+ \psi)^* F^+ \psi \, d\tau = \int_D |F^+ \psi|^2 \, d\tau \geqslant 0.$$

Ceci posé, nous sommes en état de démontrer le théorème annoncé qui s'énonce :

Théorème : Si deux grandeurs physiques observables correspondent respectivement aux deux opérateurs linéaires et hermitiens A et B , on a

$$(3) \quad \sigma_A \sigma_B \geqslant \frac{1}{2} |[A, B]|$$

$[A, B]$ étant le commutateur de A et de B et σ_A , σ_B étant les dispersions (écart quadratiques) définis par les formules

$$(4) \quad \sigma_A = \sqrt{(A - \bar{A})^2} \quad \sigma_B = \sqrt{(B - \bar{B})^2}.$$

Pour démontrer ce théorème fondamental, nous considérerons l'opérateur linéaire (non hermitien) $A + i\lambda B$ où λ est une constante réelle : son adjoint est $A - i\lambda B$ et, par application de la formule (2), nous voyons que la valeur moyenne

$$\overline{(A + i\lambda B)(A - i\lambda B)} = \overline{A^2 + \lambda^2 B^2 - i\lambda [A, B]}$$

est réelle, positive ou nulle. Donc la fonction de λ

$$f(\lambda) = \overline{A^2} + \lambda^2 \overline{B^2} - i\lambda \overline{[A, B]}$$

est réelle et non négative. On en conclut que $\overline{[A, B]}$ est purement imaginaire.

De plus, $f(\lambda)$ est minimum pour $\lambda_0 = \frac{i}{2} \frac{[\overline{A}, \overline{B}]}{\overline{B}^2}$ et a alors pour valeur

$$f(\lambda_0) = \overline{A^2} + \frac{1}{4} \frac{([\overline{A}, \overline{B}])^2}{\overline{B}^2}.$$

Comme cette valeur doit être positive ou nulle, on a

$$(4bis) \quad \overline{A^2} \cdot \overline{B^2} \geq - \frac{1}{4} ([\overline{A}, \overline{B}])^2.$$

Posons

$$\delta A = A - \overline{A} \quad \delta B = B - \overline{B}$$

\overline{A} et \overline{B} sont des nombres, A et B des opérateurs : donc δA et δB sont des opérateurs. On trouve aisément

$$[\delta A, \delta B] \equiv [A - \overline{A}, B - \overline{B}] = [A, B].$$

Nous pouvons appliquer l'inégalité (4) aux opérateurs δA et δB et compte tenu de la dernière relation, nous obtenons

$$\overline{(\delta A)^2} \cdot \overline{(\delta B)^2} \geq - \frac{1}{4} ([\overline{A}, \overline{B}])^2.$$

Comme $[A, B]$ est imaginaire pure, nous avons donc

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \equiv \sqrt{(\overline{(\delta A)^2})} \cdot \sqrt{(\overline{(\delta B)^2})} \geq \frac{1}{2} | [\overline{A}, \overline{B}] |$$

ce qui est le théorème annoncé.

Appliquons le théorème à deux grandeurs canoniquement conjuguées pour lesquelles $[A, B] = -h/2\pi i$, il vient

$$(5) \quad [\overline{A}, \overline{B}] = \int_D \psi^* \left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \psi d\tau = -\frac{h}{2\pi i},$$

quantité purement imaginaire comme cela doit être.

Le théorème nous donne alors

$$(6) \quad \boxed{\sigma_A \cdot \sigma_B \geq h/4\pi}.$$

Cette formule constitue une forme tout à fait précise des relations d'incertitudes d'Heisenberg. En particulier nous aurons

$$(7) \quad \sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq h/4\pi.$$

Appliquons encore le théorème à deux grandeurs observables non commutantes dont le commutateur est égal à un opérateur C ($[A, B] = C$), on aura $\overline{[A, B]} = \overline{C}$ et par suite

$$(8) \quad \sigma_A \cdot \sigma_B \geq |\overline{C}|/2.$$

En particulier pour

$$A = M_x \text{ et } B = M_y, \quad [A, B] = \frac{\hbar}{2\pi i} M_z,$$

on aura

$$(9) \quad \sigma_{M_x} \cdot \sigma_{M_y} \geq \frac{\hbar}{4\pi} |\overline{M_z}|.$$

Généralement le produit des dispersions sera supérieur à zéro. Il pourra cependant être nul dans le cas exceptionnel où $\overline{M_z} = 0$.

Deuxième démonstration :

Nous allons donner une deuxième démonstration de la formule $\sigma_x \cdot \sigma_{p_x} \geq h/4\pi$ pour les grandeurs canoniquement conjuguées.

Soient q_k une coordonnée et p_k le moment conjugué. On a

$$(10) \quad \overline{q_k} = \int_D \psi^* q_k \psi d\tau.$$

Prenons $\overline{q_k}$ comme origine des q_k de sorte que la moyenne de q_k soit zéro. Nous aurons alors

$$\overline{\sigma_{q_k}^2} = \overline{(q - \overline{q_k})^2} = \overline{q_k^2} = \int_D \psi^* q_k^2 \psi d\tau.$$

D'autre part

$$(11) \quad \overline{p_k} = \int_D \psi^* \left(-\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} \right) d\tau$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{p_k}^2} &= \overline{(p_k - \overline{p_k})^2} = \overline{p_k^2} - (\overline{p_k})^2 \\ &= \int_D \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_k^2} \right) d\tau - (\overline{p_k})^2. \end{aligned}$$

Posons par définition

$$(12) \quad \psi' = \psi \exp \left(\frac{2\pi i}{\hbar} \frac{1}{p_k} q_k \right).$$

La fonction ψ' est, comme la fonction ψ , finie, continue et uniforme dans D et nulle aux limites de D . On peut écrire

$$(13) \quad \sigma_{q_k}^2 = \int_D \psi'^* q_k^2 \psi' d\tau; \quad \sigma_{p_k}^2 = \int_D \psi'^* \left(-\frac{h^2}{4\pi^2} \right) \frac{\partial^2 \psi'}{\partial q_k^2} d\tau$$

en tenant compte de $\psi'^* \psi' = |\psi'|^2$ de sorte que ψ' comme ψ est normée. On vérifie facilement la seconde formule en remplaçant ψ' par $\psi \exp\left(\frac{2\pi i}{h} \frac{p_k}{q_k}\right)$.

Comme ψ est nulle aux limites de D , une intégration par parties nous permet d'écrire

$$\sigma_{p_k}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \int_D \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau.$$

Je dis maintenant que l'on a

$$(14) \quad \frac{1}{4} \left(\int_D \psi'^* \psi' d\tau \right)^2 \leq \int_D q_k^2 \psi'^* \psi' d\tau \cdot \int_D \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau.$$

Pour le démontrer considérons deux séries de grandeurs complexes $a_1 \dots a_n; b_1 \dots b_n$. On a évidemment

$$\left| \sum_i a_i b_i \right| \leq \sum_i |a_i b_i| \leq \sum_i |a_i| |b_i|$$

d'où

$$\left| \sum_i (a_i b_i) \right|^2 \leq \left(\sum_i |a_i| |b_i| \right)^2$$

et par suite

$$\sum_i |a_i|^2 \cdot \sum_i |b_i|^2 - \left| \sum_i a_i b_i \right|^2 \geq \sum_i |a_i|^2 \sum_i |b_i|^2 - \left(\sum_i |a_i| |b_i| \right)^2.$$

Or le dernier membre de cette inégalité se trouve égal à

$$\sum_{i>j} (|a_i| |b_j| - |b_i| |a_j|)^2$$

c'est-à-dire à une somme de carrés. On a donc

$$\sum_i |a_i|^2 \cdot \sum_i |b_i|^2 \geq \left| \sum_i a_i b_i \right|^2$$

ou plus explicitement

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots|^2 \leq (|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots) (|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots).$$

(15)

Divisons maintenant le domaine D en éléments $\Delta\tau$ et considérons les deux suites de quantités complexes

$$[q_k \psi']_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; \quad [q_k \psi'^*]_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; \quad [q_k \psi']_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2}; \quad [q_k \psi'^*]_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2} \dots$$

$$\left[\frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; \quad \left[\frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_1} \sqrt{\Delta\tau_1}; \quad \left[\frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2}; \quad \left[\frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_2} \sqrt{\Delta\tau_2} \dots$$

la quantité $[q_k \psi']_{\Delta\tau_1}$ étant la valeur moyenne de $q_k \psi'$ dans l'élément $\Delta\tau_1$, etc... Appliquons à ces deux suites de quantités la formule précédente : il vient

$$\begin{aligned} \left| \sum_i \left[q_k \psi' \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i + \sum_i \left[q_k \psi'^* \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i \right|^2 &\leqslant \\ &\leqslant 2 \sum_i [q_k^2 \psi' \psi'^*]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i \cdot 2 \sum_i \left[\frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \right]_{\Delta\tau_i} \Delta\tau_i. \end{aligned}$$

Si l'on augmente indéfiniment le nombre des éléments $\Delta\tau_i$ en faisant tendre chacun d'eux vers zéro, on obtient à la limite

$$\begin{aligned} (16) \quad & \left| \int_D q_k \psi' \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} d\tau + \int_D q_k \psi'^* \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau \right|^2 \leqslant \\ & \leqslant 4 \int_D q_k^2 \psi' \psi'^* d\tau \cdot \int_D \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} d\tau. \end{aligned}$$

La fonction ψ' étant nulle aux limites de D , l'intégration par parties donne

$$\left| \int_D q_k \frac{\partial}{\partial q_k} (\psi' \psi'^*) d\tau \right|^2 = \left| - \int_D \psi'^* \psi' d\tau \right|^2 = \left(\int_D \psi'^* \psi' d\tau \right)^2$$

et la formule (14) annoncée se trouve ainsi démontrée.

On a alors

$$\sigma_{q_k}^2 \cdot \sigma_{p_k}^2 = \frac{h^2}{4 \pi^2} \int_D q_k^2 \psi'^* \psi' d\tau \cdot \int_D \frac{\partial \psi'^*}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \psi'}{\partial q_k} d\tau.$$

puis par (14),

$$\sigma_{q_k}^2 \cdot \sigma_{p_k}^2 \geqslant \frac{h^2}{16 \pi^2} \left[\int_D \psi'^* \psi' d\tau \right]^2 = \frac{h^2}{16 \pi^2}$$

puisque ψ' est normée dans D . Donc

$$\sigma_{q_k} \cdot \sigma_{p_k} \geqslant h/4 \pi$$

et nous retrouvons le théorème sur la dispersion des grandeurs canoniquement conjuguées.

2. CARACTÈRE OPTIMUM DU PAQUET D'ONDE GAUSSIEN

La seconde démonstration que nous venons d'obtenir du théorème des dispersions va nous permettre de démontrer que pour obtenir le signe d'égalité dans l'inégalité $\sigma_{q_k}, \sigma_{p_k} \geq h/4 \pi$, il faut que le $|\psi|$ dépende de q_k seulement par l'exponentielle Gaussienne

$$\exp\left(-\frac{(q_k - \bar{q}_k)^2}{2 a^2}\right).$$

On a alors un train d'ondes ou paquet d'ondes Gaussien : ce paquet d'ondes correspond à la plus petite dispersion et, en ce sens, il est « optimum ».

Pour le montrer, reportons-nous au raisonnement (p. 126) qui nous a fourni la formule

$$\sum_i |a_i|^2 \cdot \sum_i |b_i|^2 \geq \left| \sum_i a_i b_i \right|^2.$$

Nous voyons que, pour avoir dans cette formule le signe d'égalité, il faut et il suffit que tous les quotients $|a_i|/|b_i|$ aient la même valeur, quel que soit l'indice i .

Le raisonnement fait pour obtenir l'inégalité (14) montre alors que pour avoir dans cette formule (14) le signe d'égalité tous les quotients $\left[\frac{\partial |\psi'|}{\partial q_k} \right]_{\Delta t} / [q_k |\psi'|]_{\Delta t}$ doivent avoir la même valeur dans tous les éléments Δt_i .

Il en résulte que pour avoir le signe d'égalité dans la formule

$$\sigma_{q_k}, \sigma_{p_k} \geq h/4 \pi$$

il est nécessaire que

$$\frac{1}{q_k |\psi'|} \cdot \frac{\partial |\psi'|}{\partial q_k}$$

ait la même valeur quel que soit q_k .

$|\psi'|$ considérée comme fonction de q_k doit donc obéir à l'équation différentielle

$$(17) \quad \frac{\partial |\psi'|}{\partial q_k} = C q_k |\psi'|$$

qui a pour intégrale générale

$$|\psi'| = C' \exp(C q_k^2/2).$$

Puisque $|\psi'|$ doit être nul pour $q_k = \pm \infty$, C doit être négatif et l'on peut poser $C = -1/a^2$. On trouve alors

$$(18) \quad |\psi'| = C' \exp(-q_k^2/2 a^2).$$

Ce résultat est obtenu avec l'hypothèse faite plus haut (p. 92) que \bar{q}_k est nul. S'il n'en est pas ainsi, on doit écrire

$$(19) \quad |\psi'| = |\psi| = C' \exp(-q_k - \bar{q}_k)^2/2a^2.$$

La constante C' peut d'ailleurs dépendre des variables q autres que q_k . On voit d'ailleurs aisément que $\sigma_{q_k} = a/\sqrt{2}$. En effet

$$(20) \quad \begin{aligned} \sigma_{q_k}^2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (q_k - \bar{q}_k)^2 \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/a^2) dq_k}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/a^2) dq_k} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-u^2/a^2) du}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/a^2) du} = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Si la fonction d'onde est un paquet d'ondes Gaussien en q_k , la probabilité de présence correspondant à l'intervalle $(q_k, q_k + dq_k)$ est proportionnelle à $|\psi'|^2 \sim \exp(-(q_k - \bar{q}_k)^2/2\sigma_{q_k}^2)$. Cette probabilité obéit donc à une loi de Gauss.

L'état ψ considéré est celui qui résulte d'une mesure de q_k affectée d'une erreur possible à répartition Gaussienne. Ce cas est le plus favorable en ce qui concerne les incertitudes d'Heisenberg puisqu'alors le produit des dispersions est égal à $h/4\pi$ au lieu d'être supérieur à ce nombre et atteint ainsi sa valeur minimum.

Remarque sur les paquets Gaussiens.

La propriété que nous venons d'indiquer montre l'intérêt que présente en Mécanique ondulatoire la considération des paquets d'ondes Gaussiens considérés précédemment. Ces paquets d'ondes possèdent une autre propriété remarquable que l'on peut énoncer ainsi : un paquet d'ondes Gaussien en q_k est également Gaussien en p_k .

Supposons en effet que nous ayons

$$|\psi| = C \exp(-q_k^2/2a^2) = C \exp(-q_k^2/4\sigma_{q_k}^2)$$

(en supposant $\bar{q}_k = 0$). Alors $|\psi|^2 = C^2 \exp(-q_k^2/2\sigma_{q_k}^2)$. C peut dépendre des q autres que q_k . La fonction d'onde ψ sera développable en intégrale de Fourier sous la forme

$$(21) \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} C(p_k) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) dp_k$$

ψ et les $C(p_k)$ peuvent dépendre des variables q autres que q_k . Nous ne les inscrivons pas dans nos équations car elles n'interviennent pas dans le raisonnement.

La théorie des intégrales de Fourier nous apprend que

$$(22) \quad C(p_k) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) dq_k$$

d'où, comme

$$\begin{aligned} \psi &= C \exp\left(-\frac{q_k^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} \bar{p}_k q_k\right) \\ C(p_k) &= \frac{C}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{q_k^2}{2a^2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} \bar{p}_k q_k\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{h} p_k q_k\right) dq_k \\ C(p_k) &= \frac{C}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left[\frac{q_k}{a\sqrt{2}} - \frac{2\pi i(p_k - \bar{p}_k)a}{h\sqrt{2}}\right]^2\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{(p_k - \bar{p}_k)^2 a^2}{2}\right) dq_k \\ C(p_k) &= C' \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} (p_k - \bar{p}_k)^2 \frac{a^2}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |C(p_k)|^2 &= |C'|^2 \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} (p_k - \bar{p}_k)^2 a^2\right) = \\ &= |C'|^2 \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{(p_k - \bar{p}_k)^2}{a'^2}\right) \\ (23) \quad |C(p_k)|^2 &= |C'|^2 \exp\left(-\frac{4\pi^2}{h^2} \frac{(p_k - \bar{p}_k)^2}{2\sigma_{p_k}^2}\right) \end{aligned}$$

avec $a' = 1/a$. Comme $|C(p_k)|^2$ est la probabilité de la valeur p_k , on voit que la distribution de probabilité de p_k est Gaussienne et que l'on a

$$\sigma_{p_k}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a' h}{2\pi} \right)^2 = \frac{h^2}{8\pi^2 a^2} = \frac{h^2}{16\pi^2} \frac{2}{a^2}$$

d'où

$$\sigma_{q_k} \cdot \sigma_{p_k} = h/4\pi \quad \text{puisque} \quad a = \sqrt{2} \sigma_{q_k}.$$

Nous retrouvons la relation des dispersions avec le signe d'égalité, mais nous voyons que le paquet d'ondes est Gaussien à la fois en p_k et en q_k .

3. COMPARAISON DU THÉORÈME SUR LES DISPERSIONS AVEC LES RELATIONS QUALITATIVES D'INCERTITUDE DE HEISENBERG (PAULI, ROBERTSON)

Nous sommes maintenant en possession de deux énoncés relatifs aux incertitudes. Tout d'abord nous avons démontré en nous appuyant sur les propriétés des développements de Fourier que l'on a en *ordre de grandeur*

$$(24) \quad \delta p \cdot \delta q \geq h.$$

Cet énoncé est quelque peu qualitatif car il n'est vrai qu'en ordre de grandeur. On le voit en se reportant aux considérations sur les développements et, plus nettement encore peut-être, en reprenant l'argument du microscope d'Heisenberg où la démonstration de la relation d'incertitude fait intervenir la définition optique du pouvoir séparateur (deux points voisins de l'objet ne peuvent être séparés par un instrument d'optique que si le centre de l'image de diffraction due à l'un des points coincide avec le premier minimum de l'image de diffraction due à l'autre point) et cette définition du pouvoir séparateur a quelque chose d'un peu arbitraire et n'est vraie que d'une façon approchée.

En second lieu, nous avons obtenu l'énoncé tout à fait précis

$$(7) \quad \sigma_q \cdot \sigma_p \geq h/4\pi$$

qui provient de l'application aux quantités canoniquement conjuguées q et p de la relation générale

$$(3) \quad \sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} \overline{AB - BA}.$$

Nous avons vu que les relations d'Heisenberg sous leur forme qualitative signifient qu'à tout moment et en particulier quand on vient d'effectuer une mesure, il existe sur la valeur de deux quantités canoniquement conjuguées p et q des incertitudes dont le produit est toujours en ordre de grandeur supérieur ou égal à h . La même conclusion s'obtient d'une façon plus précise à partir de la relation sur les dispersions. A tout instant et en particulier tout de suite après une opération de mesure, nos connaissances sur l'état d'un système sont représentées par une fonction d'onde ψ et deux grandeurs conjuguées p et q ont des valeurs aléatoires correspondant à des distributions de probabilités telles que le produit des dispersions soit toujours supérieur ou égal à $h/4\pi$.

Le théorème sur les dispersions conduit donc, tout comme les relations qualitatives d'Heisenberg, à la conclusion qu'il est impossible dans une même opération de mesure de mesurer avec précision deux quantités conjuguées p et q , sans quoi après la mesure p et q seraient connues avec certitude et l'on aurait $\sigma_q = 0$, $\sigma_p = 0$ ce qui est en contradiction avec la relation $\sigma_q \cdot \sigma_p \geq h/4\pi$. Après la mesure, l'état de nos connaissances ne serait plus représentable par une fonction ψ car cette représentation entraîne, nous l'avons vu, la relation $\sigma_q \cdot \sigma_p \geq h/4\pi$.

Si j'insiste sur ce point, c'est qu'on pourrait être tenté de raisonner comme il suit. Considérons un grand nombre de systèmes dans un même état, c.-à-d. représentés par une même fonction ψ et cherchons à mesurer simultanément deux grandeurs conjuguées p et q . Nous savons que pour chaque système nous pouvons obtenir des valeurs différentes avec diverses probabilités que la connaissance de ψ nous permet de calculer. On pourrait alors croire que la loi de dispersion exige que les dispersions sur p et sur q seront toujours telles que leur produit soit supérieur ou égal à $h/4\pi$, mais qu'elle ne s'oppose pas à ce que dans certaines mesures on obtienne simultanément des valeurs précises pour p et q . L'erreur que l'on commet ainsi vient de ce que l'on considère seulement l'état des probabilités avant la mesure (représentée par le ψ antérieur à la mesure). Or il faut aussi que l'état qui suit la mesure soit représentable par une fonction d'onde ψ et que la relation des dispersions s'applique à la distribution de probabilité qui lui correspond. C'est ceci qui permet de déduire de la relation des dispersions l'impossibilité de mesurer simultanément p et q .

4. CONSIDÉRATIONS DIVERSES SUR LES INCERTITUDES. INCERTITUDES « A BORDS NETS »

Pour bien préciser la nature des incertitudes δp et δq qui interviennent dans les relations qualitatives d'Heisenberg, nous allons regarder les choses de plus près.

Soit une grandeur observable A . Pour un système dans un état ψ donné, les diverses valeurs de A ont des probabilités bien définies calculables à partir du ψ par les principes généraux de la Mécanique ondulatoire. Nous préciserons la notion d'incertitude au sens d'Heisenberg en appelant « incertitude de la grandeur A dans l'état ψ » le plus petit intervalle δA des valeurs de A qui contient toutes les valeurs de A dont la probabilité totale est supérieure à $1 - \varepsilon$, ε étant une grandeur très petite (par exemple $\varepsilon = 1/1\,000$). Une mesure de A conduira *presque* certainement à une valeur comprise dans l'intervalle δA . Cette définition des incertitudes dépend de la valeur choisie pour ε ; mais, une fois ε choisie, les incertitudes sont bien définies.

Cette définition adoptée, l'étude des décompositions de Fourier montrera ce qui suit : si δA et δB sont les incertitudes dans l'état ψ sur deux quantités canoniquement conjuguées A et B , on a

$$(25) \quad \delta A \cdot \delta B \geq \alpha(\varepsilon) h$$

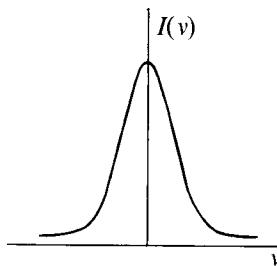
$\alpha(\varepsilon)$ étant un nombre au moins de l'ordre de grandeur de l'unité dont la valeur exacte est variable avec ε . Plus ε est choisi petit, plus α sera grand. Avec les petites valeurs de ε pratiquement (souvent implicitement) admises, $\alpha(\varepsilon)$ est voisin de l'unité. Nous retrouvons ainsi avec quelques précisions supplémentaires les relations d'Heisenberg.

On peut imaginer que l'un des intervalles δA ou δB précédemment définis soit « à bords nets », c'est-à-dire que la probabilité de trouver des valeurs de A (ou B) en dehors de δA (ou δB) soit nulle : alors on peut prendre $\varepsilon = 0$.

Dans ce cas on peut montrer que $\alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = \infty$ et $\delta A \cdot \delta B = \infty$. On peut justifier ce résultat en reprenant l'analyse des développements de Fourier : nous en donnerons un exemple tout à l'heure. Ainsi, si l'onde ψ n'est différente de 0 que dans un intervalle Δx de la variable x (intervalle à bords nets), la décomposition de Fourier de ψ fait intervenir toutes les valeurs de p_x et $\Delta p_x = \infty$. Donc $\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \times \infty = \infty$.

Mais en fait ce résultat, parfaitement exact du point de vue mathématique n'a qu'un intérêt pratique très limité, car en général dès que la probabilité tombe au-dessous d'une certaine valeur ε , elle est pratiquement nulle. C'est pourquoi la relation d'Heisenberg $\delta A \cdot \delta B \geq \alpha h$ avec α voisin de 1 est toujours pratiquement vérifiée, même si l'un des intervalles δA ou δB est à bords nets.

La question est analogue à la suivante. Dans la théorie de la largeur des raies spectrales, on démontre que le profil des raies dans l'échelle des fréquences est le suivant :



Théoriquement les raies ont une largeur infinie, mais ce résultat mathématiquement exact n'a pas de sens réel, car dès que l'intensité $I(v)$ tombe au-dessous d'une certaine valeur, elle est *pratiquement* nulle parce qu'inobservable. Pratiquement les raies spectrales ne s'étendent pas sur toute l'échelle des fréquences, mais elles ont une largeur assez bien définie.

Exemples d'incertitude à bords nets

Pour illustrer les considérations précédentes, nous allons étudier un exemple simple d'incertitude à bords nets. Nous supposons une onde ψ telle que

$$\psi = 0 \quad \text{pour } x < a \quad \text{et} \quad x > b; \quad \psi = \frac{\exp(-ik_0 x)}{\sqrt{b-a}} \quad \text{pour } a < x < b. \quad (26)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{b-a}}$ assure la normalisation de l'onde $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \right)$.

Entre $x = a$ et $x = b$, l'onde a la forme d'une onde monochromatique : en dehors de cet intervalle « à bords nets » $\psi = 0$. Si l'on mesure la coordonnée x , on a la certitude de la trouver comprise entre a et b ($\delta x = b - a$ avec $\varepsilon = 0$).

Posons $k_0 = (2\pi/h)p_0$ et $k = (2\pi/h)p$ et cherchons le développement de Fourier du ψ . On a

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) \exp(-ikx) dk \text{ avec } c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \frac{\exp[i(k - k_0)x]}{\sqrt{b-a}} dx \quad (27)$$

d'où

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(b-a)}} \frac{1}{i(k - k_0)} [\exp[i(k - k_0)b] - \exp[i(k - k_0)a]]$$

et par suite

$$\begin{aligned} |c(k)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{b-a} \frac{1}{(k-k_0)^2} 2[1 - \cos(k - k_0)(b-a)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{4}{(b-a)(k-k_0)^2} \sin^2 \left[\frac{(k-k_0)(b-a)}{2} \right] \\ (28) \quad |c(k)|^2 &= \frac{b-a}{2\pi} \frac{\sin^2 u}{u^2} \text{ avec } u = \frac{(k-k_0)(b-a)}{2} \quad (1). \end{aligned}$$

On voit donc que $|c(k)|^2$ n'est rigoureusement nul qu'à l'infini sur l'axe des k . A un intervalle à bords nets en x , correspond donc un intervalle en k (ou p) infini. Si donc on prend $\varepsilon = 0$, on a $\Delta x = b - a$ et $\Delta p_x = \infty$, d'où

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \infty.$$

$|c(k)|^2$ diminue rapidement quand k s'éloigne de k_0 , mais est encore notable pour $u > \pi$ c'est-à-dire pour $\Delta k > 2\pi/(b-a)$. On a donc certainement $\Delta x \cdot \Delta k > 2\pi$, soit $\Delta x \cdot \Delta p > h$. Mais si k s'éloigne de k_0 davantage, la valeur de $|c(k)|^2$ diminue rapidement. On calcule que $|c(k)|^2 \sim \frac{1}{100} |c(k_0)|^2$ pour $\Delta p \cdot \Delta x = 3h$ et $|c(k)|^2 \sim \frac{1}{1000} |c(k_0)|^2$ pour $\Delta p \cdot \Delta x = 9h$. Donc, bien que $|c(k)|^2$ ne s'annule que pour $k = \infty$, pratiquement une mesure de p

(1) Note L.B. : On vérifie que $\int_{-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 dk = 1$.

conduira toujours à une valeur de p comprise dans un intervalle Δp (autour de la valeur $p = p_0 = \frac{h}{2\pi} k_0$) telle que $\Delta p \cdot (b - a) = \Delta p \cdot \Delta x = \alpha h$ avec $\alpha \sim 1$ et c'est tout ce qui importe pour l'application pratique des relations d'Heisenberg.

Microscope d'Heisenberg. Reprenons l'exemple du microscope d'Heisenberg. Ici le Δp_x est à bords nets parce qu'il est défini par l'ouverture du microscope. Par contre le Δx n'est pas à bords nets, mais s'étend théoriquement à l'infini parce qu'il est défini par le phénomène de diffraction intervenant dans la définition du pouvoir séparateur. En principe, l'onde parvenant en un point P' du plan image ne provient pas uniquement d'un point P du plan objet : elle peut venir de tout point du plan objet et Δx est en principe illimité, mais en pratique, comme le montre la théorie du pouvoir séparateur, l'incertitude Δx sur la position de P est limitée à l'entourage immédiat du point dont P' est l'image géométrique.

Ecran percé d'un trou. Passons à l'exemple de l'écran percé d'un trou. Ici l'incertitude Δx est définie par le contour de l'ouverture et est donc à bords nets. Derrière l'écran, il y a de la lumière diffractée dans toutes les directions de sorte que Δp_x est en principe infini, mais les franges brillantes *observables* sont toutes au voisinage de l'ombre géométrique et par suite le Δp_x est *pratiquement* très limité.

Paquet d'ondes Gaussien. Pour le paquet d'ondes Gaussien, nous avons

$$(29) \quad |\psi|^2 = C^2 \exp(-q^2/2 \sigma_q^2) \quad |c(p)|^2 = C'^2 \exp(-p^2/2 \sigma_p^2)$$

avec $\sigma_q, \sigma_p = h/4\pi$. Le paquet d'ondes Gaussien n'est donc « à bords nets » ni en q , ni en p .

Posons $\delta q = m\sigma_q$ et $\delta p = m\sigma_p$ et soit

$$\varepsilon = 2 \int_{m\sigma_q/2}^{\infty} |\psi|^2 dq = 2 \int_{m\sigma_p/2}^{\infty} |c(p)|^2 dp .$$

δq et δp sont alors les incertitudes correspondant à la valeur précédente de ε d'après notre définition des incertitudes, ε étant fonction de m et inversement. Pour ε donné, m est fixé et l'on a

$$(30) \quad \delta q \cdot \delta p = m^2 \sigma_q \sigma_p = m^2 \frac{h}{4\pi} .$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$ $m \rightarrow \infty$ et $\delta q \cdot \delta p \rightarrow \infty$. Mais en pratique, il suffit de supposer ε très petit. Ceci sera déjà réalisé pour $m = \sqrt{4\pi}$ car

$$|\psi(\sqrt{4\pi} \sigma_q)|^2 = e^{-2\pi} |\psi(0)|^2 \ll |\psi(0)|^2$$

$$|c(\sqrt{4\pi} \sigma_p)|^2 = e^{-2\pi} |c(0)|^2 \ll |c(0)|^2 \text{ car } e^{-6} \sim 1/350 .$$

On aura donc pratiquement $\delta q \cdot \delta p \sim h$.

En résumé : Pour définir avec précision les incertitudes d'Heisenberg, il est nécessaire de définir l'incertitude δA sur une grandeur A comme étant l'intervalle des valeurs de A telle que la probabilité de trouver une valeur en dehors de δA soit inférieure à une petite quantité ε . On a alors pour deux grandeurs A et B canoniquement conjuguées $\delta A \cdot \delta B \sim \alpha(\varepsilon) h$ où $\alpha(\varepsilon)$ dépend du choix de ε . $\alpha(\varepsilon)$ est infini pour $\varepsilon = 0$ de sorte qu'alors $\delta A \cdot \delta B = \infty$: de là résulte que, si l'intervalle δA est fini, δB est infini (cas des intervalles à bords nets). Mais en pratique, il suffit de choisir ε très petit, *mais non nul*, et alors le produit $\delta A \cdot \delta B$ pourra dans les cas favorables s'abaisser jusqu'à l'ordre de h , mais pas au-dessous. Pratiquement on a donc $\delta A \cdot \delta B \geq h$ en ordre de grandeur. La question est analogue à celle que l'on rencontre dans l'étude de la diffraction et du pouvoir séparateur.

Le théorème sur la dispersion qui s'énonce pour les grandeurs conjuguées sous la forme $\sigma_A \cdot \sigma_B \geq h/4\pi$ est plus précis que les relations d'incertitudes d'Heisenberg. Il entraîne, comme ces relations elles-mêmes, l'impossibilité d'obtenir pour les grandeurs conjuguées des valeurs précises dans une même opération de mesure ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Note L.B. : Cas où la relation d'incertitude est applicable bien que le produit des dispersions soit infini.

Soit le train d'ondes défini par

$$\psi(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0; \quad \psi(x) = \exp(-\gamma x/2) \exp(2\pi i k_0 x)$$

pour $x > 0$ ($\gamma > 0$).

Si nous posons

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{2\pi i k x} dk$$

nous trouvons

$$c(k) = \frac{1}{2\pi i(k - k_0) + \gamma/2}.$$

On a donc

$$|\psi(x)|^2 = e^{-\gamma x}; \quad |c(k)|^2 = \frac{1}{4\pi^2(k - k_0)^2 + \gamma^2/4}.$$

Si N est un nombre très grand, nous pouvons définir les incertitudes δx et δk en posant :

$$e^{-\gamma \delta x} = \frac{1}{N}; \quad \frac{1}{4\pi^2(\delta k)^2 + \gamma^2/4} = \frac{4}{N\gamma^2}$$

Cas des composantes du moment cinétique

Nous venons d'étudier le cas des grandeurs canoniquement conjuguées qui est un cas particulier des grandeurs non commutantes dont le commutateur est égal à une constante. Nous savons qu'il existe un autre type de grandeurs non commutantes réelles dont le commutateur est égal à un opérateur. Tel est le cas des composantes du moment cinétique pour lesquelles on a

$$[M_x, M_y] = \frac{h}{2\pi i} M_z \quad \text{etc.}$$

Le théorème des dispersions donne

$$\sigma_{M_x} \cdot \sigma_{M_y} \geq \frac{1}{2} |[\overline{M_x}, \overline{M_y}]| = \frac{h}{4\pi} \overline{M_z} \quad \text{etc.}$$

Existe-t-il pour M_x, M_y, M_z des relations d'incertitude ?

Naturellement, on peut, à l'aide d'un nombre très petit ϵ définir comme plus haut des incertitudes $\delta M_x, \dots$. A priori, on ne sait rien sur la valeur d'un produit tel que $\delta M_x \cdot \delta M_y$. Mais comme la probabilité d'un écart type est toujours assez grande, il arrivera le plus souvent que δM_x sera supérieur à σ_{M_x} et δM_y à σ_{M_y} , d'où

$$\delta M_x \cdot \delta M_y \geq (h/4\pi) \overline{M_z}.$$

suite de la note de la page 103

d'où

$$\delta x = \frac{1}{\gamma} \log N; \quad \delta k \simeq \frac{\gamma}{4\pi} \sqrt{N}$$

et l'on a

$$\delta x \cdot \delta k = \frac{1}{4\pi} \sqrt{N} \log N$$

ou en posant $k = p_x/h$

$$\delta x \cdot \delta p_x = \frac{h}{4\pi} \sqrt{N} \log N.$$

Pour $N = 20$, on trouve

$$\delta x \cdot \delta p_x \simeq h.$$

Par contre $\sigma_{p_x} = \infty$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} p_x^2 c(p_x) dp_x$ diverge. On trouve pour σ_x la

valeur $1/\gamma$. D'où $\sigma_{p_x} \cdot \sigma_x = \infty$, ce qui est bien supérieur à $h/4\pi$. Ici la relation des dispersions ne donne rien, tandis que la relation d'incertitude est toujours valable.

Nous allons montrer autrement qu'on ne peut pas avoir $\overline{M_z} \neq 0$ et $\delta M_x, \delta M_y = 0$.

En effet, pour que $\overline{M_z} \neq 0$, il faut que le ψ contienne dans son développement suivant les fonctions propres de M_z au moins une fonction propre de valeur propre différente de zéro. Cette fonction propre de M_z ne peut pas être fonction propre de M_x ou de M_y puisque la seule fonction propre commune à M_z et à M_x (ou à M_y) est $f = 0$. Donc si l'on décompose le ψ suivant les fonctions propres de M_x (ou M_y), le développement contient au moins deux fonctions propres de M_x (ou M_y) de valeurs propres différentes. Il en résulte que δM_x et δM_y sont différents de zéro. Il est donc impossible d'avoir à la fois $M_z \neq 0$ et $\delta M_x, \delta M_y = 0$.

Voici *d'autres remarques* montrant la différence entre le cas des grandeurs non commutantes du premier type et le cas des grandeurs non commutantes du second type.

Soit un système qui se trouve initialement dans un état 1 représenté par une fonction d'onde ψ_1 et soient A et B deux grandeurs observables de ce système.

Supposons qu'une certaine opération de mesure fasse passer le système dans un état 2 représenté par une certaine fonction d'onde ψ_2 .

Avant la mesure, on a

$$\sigma_A^{(1)} \cdot \sigma_B^{(1)} \geq \frac{1}{2} | \overline{(AB - BA)} |_1 .$$

Après la mesure, on a

$$\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)} \geq \frac{1}{2} | \overline{(AB - BA)} |_2 .$$

Si A et B sont canoniquement conjuguées ou plus généralement si $[A, B]$ est un multiple de l'unité, $\overline{[A, B]}$ est une constante indépendante de l'état. Alors les produits $\sigma_A^{(1)} \cdot \sigma_B^{(1)}$ et $\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)}$ ont une même limite inférieure.

Si au contraire $AB - BA$ est égal à un opérateur C , $\overline{[A, B]}$ variera en général avec l'état considéré et si l'état 2 est tel que

$$| \overline{[A, B]}_2 | < | \overline{[A, B]}_1 |$$

il pourra se faire que l'on ait (bien que $\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)} > \frac{1}{2} | \overline{(AB - BA)}_2 |$)

$$\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)} < \frac{1}{2} | \overline{(AB - BA)}_1 | .$$

En d'autres termes, la borne inférieure du produit $\sigma_A^{(2)} \cdot \sigma_B^{(2)}$ après la mesure est déterminée par l'état qui existe après cette mesure et non par l'état antérieur.

Appliquons ceci au cas où $A = M_x$, $B = M_y$ avec $[A, B] = (h/2\pi i) M_z$. Si dans l'état 1, $\overline{M_z} \neq 0$, on a $\sigma_{M_x}^{(1)} \cdot \sigma_{M_y}^{(1)} > 0$. Mais une mesure peut conduire à

un état 2 où $\overline{M_z} = 0$ et où $\sigma_{M_x}^{(2)}, \sigma_{M_y}^{(2)} = 0$, c'est-à-dire à un état où M_x et M_y ont des valeurs précises qui sont d'ailleurs $M_x = M_y = 0$. C'est là une grande différence avec le cas des grandeurs canoniquement conjuguées où aucune mesure ne peut amener à un état où les deux grandeurs ont une valeur précise.

Dans l'état initial 1, il y a pour A et pour B certaines distributions de probabilité qui se déduisent de la connaissance de ψ_1 . Soient δA et δB deux intervalles de valeurs pour A et B choisis arbitrairement. En général, ces intervalles ne seront pas pour l'état 1 des incertitudes au sens précisé plus haut. Mais imaginons que nous fassions une mesure nous permettant d'affirmer que les probabilités de trouver la valeur A hors de δA et la valeur B hors de δB sont toutes deux inférieures à ε . Alors dans l'état ψ_2 qui suit la mesure, δA et δB sont devenues des incertitudes au sens admis et l'on aura

$$\delta A \cdot \delta B \geq \frac{1}{2} |[A, B]_2| \times \alpha$$

α étant un nombre fonction de ε et au moins de l'ordre de l'unité.

Si A et B sont canoniquement conjuguées, on retrouve les inégalités d'Heisenberg et l'on a ainsi prouvé qu'aucune mesure ne peut fournir les valeurs de A et de B avec plus de précision que ne le permettent ces inégalités, car s'il en était autrement, l'état 2 qui suit la mesure ne pourrait être représenté par la Mécanique ondulatoire.

Si A et B sont tels que $[A, B] = C$, on voit que la borne inférieure de $\delta A \cdot \delta B$ peut varier avec l'état et qu'après la mesure cette borne est déterminée par la valeur de $(AB - BA)_2$ ⁽¹⁾.

(1) Note G.L. : Louis de Broglie n'a jamais publié, par la suite, d'étude aussi exhaustive sur les relations d'incertitude et je doute qu'on trouve, dans la littérature, un autre exposé où l'on reprend pratiquement toutes les analyses de Heisenberg et de Bohr, auxquelles viennent s'ajouter ici celles de de Broglie lui-même. Notons cet aspect qui lui est propre : le soin qu'il met à bien séparer les informations qui concernent l'état du système *avant* la mesure, de celles qui concernent son état *après* la mesure. Cette distinction préparait l'interprétation qu'il a donnée plus tard des relations d'incertitude (voir réf. II, 27, 29 et 33). L'idée principale en est la suivante : la particule étant supposée toujours localisée en un certain point de l'onde, une éventuelle mesure de localisation ne ferait que révéler une position préexistante de la particule, si bien que l'incertitude Δx existe dans l'état initial du système, avant même toute mesure (qu'elle soit de localisation ou autre), c'est une incertitude *actuelle* ; au contraire, la mesure de p_x , nécessitant une préparation du système, ne révèle pas une valeur préexistante de l'impulsion mais une valeur créée lors de cette préparation, si bien que Δp_x n'est pas une incertitude actuelle, c'est une « incertitude *prévue* dans l'état initial sur la valeur que peut avoir p_x après l'action d'un dispositif permettant la mesure de p_x , quand on ne connaît pas encore le résultat de cette mesure ».

CHAPITRE IX

LA QUATRIÈME RELATION D'INCERTITUDE D'HEISENBERG

1. L'ABSENCE DE SYMÉTRIE ENTRE L'ESPACE ET LE TEMPS EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Quand on se place au point de vue des idées relativistes, la quatrième relation d'incertitude d'Heisenberg $\delta W \cdot \delta t \sim h$ apparaît comme un complément naturel des trois premières relations $\delta p_i \delta x_i \sim h$ car la théorie de Relativité considère l'énergie comme grandeur canoniquement conjuguée du temps au même sens que les composantes p_x, p_y, p_z de l'impulsion sont respectivement canoniquement conjuguées des variables x, y, z . On le voit par exemple en remarquant que l'élément de l'intégrale d'action Hamiltonienne

$$W dt - p_x dx - p_y dy - p_z dz$$

est un invariant d'espace-temps.

Mais, en Mécanique ondulatoire, la symétrie entre la quatrième relation d'incertitude et les trois premières, du moins dans l'état actuel de cette théorie, est plus apparente que réelle. En effet, la Mécanique ondulatoire, même sous la forme d'apparence relativiste due à M. Dirac, n'établit pas une symétrie véritable entre les variables d'espace et le temps. Tandis que les coordonnées x, y, z d'un corpuscule sont des grandeurs observables correspondant à un opérateur et dont les valeurs ont pour chaque état (défini par une fonction d'onde ψ) une certaine répartition de probabilité, le temps t est toujours considéré comme un paramètre ayant une valeur bien définie⁽¹⁾.

On peut préciser ceci de la façon suivante. Soit un observateur galiléen celui que nous supposons effectuer des mesures. Il emploie des coordonnées x, y, z, t qui lui servent à repérer les événements dans le cadre macroscopique de ses expériences. Les variables x, y, z, t sont des nombres, des paramètres, et ce sont ces nombres qui figurent dans l'équation d'ondes et dans la fonction

⁽¹⁾ Note G.L. : Signalons que, dans « L'électron magnétique » (réf. II, 11), on trouve un long développement sur la quatrième relation d'incertitude et sur le problème du temps en Relativité et en Mécanique ondulatoire. Dans « Certitudes et incertitudes de la science » (réf. III, 8), on pourra lire une analyse du rapport possible (mais contesté par l'auteur) entre la quatrième relation et la cinquième qui relie la phase d'une onde lumineuse au nombre d'occupation : $\delta N \delta \Phi \geq 1$.

d'onde. Mais à chaque corpuscule de la physique atomique, correspondent des « grandeurs observables » qui sont les coordonnées du corpuscule. La correspondance entre les grandeurs observables x, y, z et le cadre de l'espace des x, y, z de l'observateur galiléen considéré est statistique, chaque grandeur x, y, z pouvant avoir en général dans ce cadre toute une série de valeurs avec une répartition de probabilité. Au contraire, il n'y a pas dans la Mécanique ondulatoire actuelle de « grandeur observable » t attachée au corpuscule : il y a seulement une variable t qui est l'une des variables du cadre d'espace-temps de l'observateur définie par les horloges (essentiellement macroscopiques) qu'em-ploie cet observateur.

Il est nécessaire en Mécanique ondulatoire d'avoir une « variable d'évolution » permettant de suivre la variation de l'état des systèmes quantiques. Or cette évolution de l'état des systèmes, ou plus exactement de la connaissance que nous en avons, s'accomplice nécessairement dans le temps tel qu'il existe pour la conscience de l'observateur, temps dont nous ne savons repérer l'écoulement que par les horloges macroscopiques. C'est dans le cadre de ce temps de la conscience de l'observateur que s'opèrent notamment les brusques modifications de la forme du ψ dues aux opérations de mesure et aux renseignements que ces opérations nous fournissent. Mais le fait d'être obligé de prendre comme variable d'évolution le temps macroscopique (variable t de l'espace-temps relativiste) nous empêche d'attribuer aux corpuscules ou systèmes quantiques une « grandeur observable » t de nature aléatoire comme nous faisons correspondre aux coordonnées q une « grandeur observable » avec répartition de probabilité. Telles sont quelques-unes des raisons très profondes qui s'opposent, à mon avis, à l'établissement en Mécanique ondulatoire d'une symétrie entre espace et temps analogue à celle que postule la théorie de la Relativité. Ces difficultés sont en relation intime avec le fait que la Physique quantique crée une liaison d'une nature nouvelle entre l'objectif et le subjectif. « L'état » d'un système quantique n'a plus dans la nouvelle théorie une définition objective correspondant à une description « de ce qui est » : il est défini au contraire uniquement en fonction « de ce que nous savons », il est une représentation de nos connaissances et nous ne pouvons pas aller au-delà de cette représentation. C'est donc dans la conscience de l'observateur, par suite dans le cadre du temps macroscopique, qu'évolue « l'état » défini par l'onde ψ et ; si les théories quantiques ne parviennent pas à établir une symétrie entre espace et temps, cela semble bien dû au caractère particulier du temps perçu par la conscience, à son déroulement continu et à son irréversibilité⁽¹⁾.

(¹) Note L.B. : Si l'on voulait considérer l'énergie comme correspondant à l'opérateur $(\hbar/2\pi i)\partial/\partial t$, on aurait l'équation aux valeurs propres

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = E\varphi$$

et il n'y aurait pas de quantification de l'énergie, E pouvant prendre toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$.

2. ÉNONCÉ CORRECT DE LA QUATRIÈME RELATION D'INCERTITUDE

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer correctement la quatrième relation d'incertitude et nous allons ainsi retrouver la forme de cet énoncé que nous avions déjà été amenés à admettre implicitement.

Reprendons le cas du train d'ondes ψ de dimensions limitées occupant une région R de l'espace. La valeur de la coordonnée x du corpuscule est incertaine, elle peut se révéler à la suite d'une mesure comme correspondant à une position quelconque à l'intérieur de R , la probabilité correspondante variant comme $|\psi|^2$. La probabilité de trouver pour p_x une valeur donnée est d'autre part égale à $|c(p_x)|^2$ de sorte que la valeur de p_x est, aussi, incertaine. Nous savons que le produit, $\delta p_x \delta x$ des incertitudes au sens d'Heisenberg est de l'ordre de h . Mais si l'on peut déterminer par une mesure la coordonnée x du corpuscule, on ne peut parler de la mesure de son temps t car en Mécanique ondulatoire le temps t est le temps macroscopique de l'observateur et a toujours une valeur certaine.

Que signifie alors la relation $\delta E \cdot \delta t \sim h$? Elle signifie que pour pouvoir attribuer au corpuscule une énergie E avec une incertitude δE , il faut faire une observation, une opération de mesure, qui dure au moins le temps $\delta t \sim h/\delta E$. En effet, il résulte de nos analyses des développements de Fourier du train d'ondes que la durée δt du passage du train d'ondes en un point est au moins de l'ordre $\delta t = 1/\delta v$. Pour pouvoir affirmer que l'incertitude sur l'énergie est au plus $\delta E = h \delta v$, il faudra observer en un point P le passage du front avant et du front arrière du train d'ondes, ce qui exige une durée d'observation au moins égale à $\delta t \sim 1/\delta v$. En particulier pour affirmer que δE est nul, c.-à-d. que le train d'ondes est monochromatique, il faudrait faire une observation de durée infinie, puisque la longueur d'une onde monochromatique est infinie.

Ainsi, tandis que les trois premières relations d'incertitude traduisent l'existence d'une répartition de probabilité pour les grandeurs q et p , c'est-à-dire le fait que ces grandeurs sont des « variables aléatoires » au sens du calcul des probabilités, la quatrième relation d'incertitude doit s'interpréter différemment : le temps t n'est pas une variable aléatoire, mais la mesure de E ne peut s'effectuer qu'à l'aide d'observations d'une durée finie et plus la durée d'observation diminue, plus l'incertitude sur la valeur exacte de E augmente. Comme la variable t n'est pas une variable aléatoire, il n'y a pas de relation entre les dispersions de sorte qu'ici la relation qualitative d'incertitude $\delta E \cdot \delta t \gtrapprox h$ n'est pas doublée par un énoncé précis sur les dispersions du type $\sigma_E \sigma_t \geq h/4\pi$, car t étant une variable à valeur précise σ_t n'a pas de signification (σ_t serait toujours nul). On voit bien ici l'opposition qui existe entre ces conclusions et la symétrie relativiste entre espace et temps.

3. ILLUSTRATION DE LA DÉFINITION PRÉCÉDENTE

Pour illustrer le sens de la quatrième relation d'incertitude, nous donnerons un exemple qui a été indiqué, sous une forme un peu différente, par M. Lennuyer

[Annales de Physique 20 (1946), p. 91 à 110] dans un article sur la résonance optique.

Considérons un réseau optique comportant un nombre total de traits égal à N (N très grand), les traits étant équidistants à la distance a . Sur ce réseau, nous faisons tomber normalement un faisceau de lumière de longueur d'onde $\lambda (= c/v)$.

La lumière diffusée par deux traits consécutifs du réseau dans une direction faisant un angle θ avec la normale présente une différence de phase égale à $(2\pi/\lambda) a \sin \theta$ de telle sorte que la lumière diffusée à l'infini dans la direction θ a une amplitude proportionnelle à $\sum_{0}^{N-1} e^{inu}$ avec $u = (2\pi/\lambda) a \sin \theta$, soit à $(e^{iNu} - 1)/(e^{iu} - 1)$. L'intensité correspondante (carré du module de l'amplitude) est donc proportionnelle à

$$(1) \quad \left| \frac{e^{iNu} - 1}{e^{iu} - 1} \right|^2 = \frac{1 - \cos Nu}{1 - \cos u} = \frac{\sin^2(Nu/2)}{\sin^2(u/2)}.$$

Ce résultat classique montre qu'il y a des maxima dans les directions telles que $u/2 = m\pi$ (m entier), soit $\sin \theta_m = m(\lambda/a) = (m/a)(c/v)$. On pourra donc déterminer la fréquence v (donc l'énergie $E = hv$ des photons) en observant l'angle θ_m qui correspond au m -ième maximum. Mais, en procédant ainsi, il restera une certaine incertitude sur la valeur de v (ou de E) car on ne peut jamais déterminer exactement θ_m . Examinons ce point.

L'expression $I = \frac{\sin^2(Nu/2)}{\sin^2(u/2)}$ présente un maximum égal à N^2 quand $u/2 = m\pi$. Si $u/2$ prend la valeur $m\pi + \eta$, I devient égal à $\frac{\sin^2 N(m\pi + \eta)}{\sin^2 \eta}$.

Pour $\eta = \pi/N$ (N étant supposé grand), on a

$$I = \frac{\sin^2(Nm\pi + \pi)}{\sin^2(\pi/N)} = 0.$$

Donc I passe de la valeur élevée N^2 à la valeur 0. L'erreur que l'on peut commettre en mesurant θ_m est donc toujours telle que $\delta(u/2)$ puisse atteindre une fraction de π/N . Comme on a $\delta(u/2) = \pi(a \sin \theta/c) \delta v$, on voit que l'incertitude δv sur la valeur de v ainsi mesurée peut atteindre une fraction de $c/Na \sin \theta$. Donc $\delta v \sim c/Na \sin \theta$.

Soit maintenant δt la durée limitée de l'expérience. Pour que tous les traits du réseau entrent en action et que, par suite, la théorie précédente soit applicable, il faut que la lumière diffusée par le N -ième trait du réseau dans la direction θ ait pu dépasser le plan d'onde P , ce qui exige que

$$\delta t \geq Na \sin \theta/c$$

d'où

$$\delta v \cdot \delta t \geq \frac{c}{Na \sin \theta} \cdot \frac{Na \sin \theta}{c} = 1 \quad \text{en ordre de grandeur}$$

et

$$\delta E \cdot \delta t \geq h \quad \text{en ordre de grandeur .}$$

Nous voyons bien ici intervenir dans la mesure de l'énergie $E = h\nu$ du photon la durée δt de l'expérience et nous voyons que dans la quatrième relation d'incertitude la grandeur δt a essentiellement le sens d'une durée d'expérience pour l'observateur qui l'effectue.

Exemple de Darwin [Proc. Roy. Soc. A, vol. 130 (1931), p. 632]

Darwin considère un électron qui est au repos, mais peut se déplacer sur une droite. En un point de la droite, se trouve un électromètre qui permet, en mesurant le champ électrique, de déterminer la position x de l'électron. Pour analyser plus aisément le fonctionnement de l'électromètre, M. Darwin suppose qu'il est constitué par un atome subissant l'effet Stark. Cet atome est susceptible d'émettre une raie spectrale en passant du niveau d'énergie $E_1 + M_1 \mathcal{E}$ au niveau $E_2 + M_2 \mathcal{E}$. E_1 et E_2 sont les énergies des niveaux en l'absence du champ électrique \mathcal{E} , M_1 et M_2 les moments électriques de l'atome avant et après la transition.

Pour mesurer le champ \mathcal{E} avec la précision $\delta\mathcal{E}$, il faut pouvoir distinguer deux fréquences différente de $|M_1 - M_2|(\delta\mathcal{E}/h)$. Pour cela il faut attendre un temps δt tel que $\delta v \cdot \delta t \sim 1$ c.-à-d. tel que

$$(2) \quad \delta t \geq \frac{h}{|M_1 - M_2| \delta \mathcal{E}} .$$

Ainsi intervient la quatrième relation d'incertitude.

Continuons le raisonnement. À un certain instant inconnu, l'atome-électromètre saute d'un état 1 à un état 2. Ce saut exerce une réaction sur l'électron qui d'abord est soumis à l'action du moment électrique M_1 , puis à partir d'un instant inconnu à l'action du moment électrique M_2 . Nous ne pouvons mieux chercher à compenser cette variation d'action qu'en appliquant constamment à l'électron un champ équivalent à la présence au point où est l'électromètre d'un moment électrique égal à $(M_1 + M_2)/2$. Mais, même en faisant cette compensation, il y a encore à l'origine un moment résiduel égal à $\frac{1}{2}(M_1 - M_2)$

et à la fin un moment résiduel égal à $\frac{1}{2}(M_2 - M_1)$. Le moment électrique véritable de l'atome-électromètre à un instant quelconque est donc affecté d'une incertitude de l'ordre de $|M_2 - M_1|$. M. Darwin ajoute : « Le fait qu'il n'y a pas d'observation sans incertitude est illustré par les raies pour lesquelles $M_1 = M_2$. Pour celles-ci la réaction sur l'électron est exactement

compensée, mais justement, alors, la raie ne présente pas d'effet Stark et ne peut pas servir pour une mesure électrométrique. »

Pour mesurer la position x de l'électron avec une incertitude δx , il faut mesurer le champ électrique avec l'incertitude $\delta(e/r^2) = e \delta x / r^3$. Nous avons vu que pour cela il faut faire une observation d'une durée δt telle que

$$(3) \quad \delta t \geq \frac{h}{|M_1 - M_2| \delta \mathcal{E}} = \frac{hr^3}{e \delta x |M_1 - M_2|}.$$

Pendant ce temps, l'électron est soumis à une réaction équivalente à la présence dans l'électromètre d'un moment électrique M au moins de l'ordre de $|M_1 - M_2|$: il est donc soumis à une force $e(M/r^3) \geq e/r^3 |M_1 - M_2|$. Pendant le temps δt cette force fait varier la quantité de mouvement p_x de l'électron de

$$(4) \quad \delta p_x = \frac{eM}{r^3} \delta t \geq \frac{e}{r^3} |M_1 - M_2| \cdot \frac{hr^3}{e \delta x |M_1 - M_2|} = \frac{h}{\delta x}$$

d'où

$$\delta x \cdot \delta p_x \geq h \text{ en ordre de grandeur.}$$

On retrouve ainsi la première relation d'incertitude par l'intermédiaire de la quatrième.

4. REMARQUES DIVERSES SUR LA QUATRIÈME RELATION D'INCERTITUDE

Nous allons faire diverses remarques au sujet de la quatrième relation d'incertitude. Commençons par une remarque déjà très ancienne de M. Bohr.

On sait que, si l'on bombarde un système atomique à l'aide de particules rapides, on peut obtenir l'excitation ou même l'ionisation du système atomique. Or ce phénomène, quand on l'analyse avec les idées classiques, apparaît comme incompréhensible. En effet, la particule incidente traverse l'atome avec une vitesse v et, si a désigne le diamètre moyen de l'atome, le temps de transit de la particule à travers l'atome est au plus de l'ordre de a/v . C'est donc seulement pendant un temps de cet ordre que la particule incidente peut agir sur les constituants de l'atome et leur céder de l'énergie de façon à provoquer une excitation ou une ionisation. Pour qu'un constituant de l'atome absorbe de l'énergie, il faut qu'il se déplace appréciablement pendant le temps a/v . Ceci exige que le temps $\tau = a/v$ soit grand par rapport aux périodes d'oscillation des électrons dans l'atome. On le voit aisément en raisonnant sur un oscillateur linéaire : un tel oscillateur a une période T bien déterminée et, s'il est mis en mouvement par une action extérieure, il vibre avec cette période ; pour que l'action extérieure puisse lui communiquer de l'énergie, il faut qu'elle agisse sur lui pendant un temps qui soit d'un ordre de grandeur sensiblement supérieur à T . Il faut

donc avoir $\tau = a/v > T$ ou $a > vT$; $v < av$. Mais pour qu'il y ait possibilité d'excitation ou d'ionisation, il faut que l'énergie cinétique apportée par la particule incidente soit de l'ordre de hv . Si la vitesse v est assez petite pour qu'on puisse négliger les corrections de relativité (ce qui est ici le cas usuel), on devra avoir $mv^2 \sim hv$.

Considérons d'abord un électron atomique situé à la périphérie de l'atome et correspondant par suite à une fréquence de l'ordre de celles de la lumière. On a alors

$$a \sim 10^{-8} \text{ cm} \quad v \sim 10^{14} \text{ s}^{-1}.$$

La condition $v < av$ donne $v < 10^6 \text{ cm/s}$ tandis que la condition $mv^2 \sim hv$ donne $v \sim \sqrt{hv/m} = 2,7 \cdot 10^7 \text{ cm/s}$. Il y a donc contradiction. Considérons de même un électron situé dans les profondeurs de l'atome et correspondant à une fréquence de l'ordre de celles des rayons X. On aura $a \sim 10^{-9} \text{ cm}$, $v \sim 10^{18}$. La condition $v < v$ donne $v < 10^9 \text{ cm/s}$ tandis que $mv^2 \sim hv$ donne $v \sim 2,7 \cdot 10^9 \text{ cm/s}$. Il y a encore contradiction. On voit donc qu'avec les idées classiques les phénomènes d'excitation ou d'ionisation par choc restent inexplicables.

Il n'en est pas de même avec les conceptions nouvelles. Pour pouvoir appliquer au choc la conservation de l'énergie, il faut que l'énergie cinétique du corpuscule incident soit connue avec une incertitude δE beaucoup plus petite que sa valeur $E \sim hv$. D'où $\delta E \ll hv$. Mais alors le train d'ondes associé à la particule incidente est relativement long et, pour passer sur l'atome, ce train d'ondes met un temps $\delta t \geq h/\delta E$. Comme on peut fixer à l'intérieur du temps δt l'instant où la particule incidente entre dans l'atome, on ne peut attribuer au temps de transit τ une valeur inférieure à δt . Donc

$$\tau \sim h/\delta E \gg h/E = 1/v = T.$$

La condition $\tau \gg T$ peut être considérée comme réalisée parce que la durée d'interaction entre la particule incidente et les constituants de l'atome ne peut être considérée comme inférieure à la durée δt du passage sur l'atome du train d'onde associé à la particule.

Passons à une autre remarque. Soit un système quantifié dont la fonction d'onde est $\psi = \sum_k c_k a_k \exp[(2\pi i/h) E_k t]$. Nous avons dit que, si l'on faisait à l'instant t , une mesure de l'énergie, on doit trouver l'un des E_i et la probabilité pour que ce soit précisément E_k est $|c_k|^2$. Mais nous voyons maintenant que cet énoncé n'est pas tout à fait correct, car pour mesurer l'énergie il nous faut toujours un certain temps (et d'autant plus de temps que la mesure est plus précise). Nous ne pouvons donc pas parler d'une mesure de l'énergie faite à l'instant t , mais seulement d'une mesure faite dans un intervalle de temps δt entourant l'instant t . (Il n'en est pas de même pour les mesures de la quantité de mouvement ou de la position.)

Néanmoins la restriction que nous introduisons ainsi a *en pratique* peu d'importance car nous pourrons affirmer que E a la valeur E_k dès que δE sera

très inférieur à la plus petite des différences $|E_{k-1} - E_k|$ ou $|E_k - E_{k+1}|$. Or ces différences, même quand il s'agit d'états où les électrons sont très peu liés à l'atome, correspondent à des transitions où la fréquence émise est au moins égale à celle de l'infrarouge lointain, c.-à-d. est au moins de l'ordre de 10^{12} s^{-1} . Le temps d'observation nécessaire pour distinguer un état quantifié d'un état voisin sera donc au plus de l'ordre de

$$\delta t \sim h/\delta E \sim h/h \cdot 10^{12} = 10^{-12} \text{ s}.$$

Il sera donc toujours pratiquement très petit et nous pourrons considérer les mesures d'énergies quantifiées comme pouvant être pratiquement instantanées. Voici encore d'autres remarques dont nous verrons bientôt l'importance.

Soit un système ayant, entre autres, deux états quantifiés E_i et E_k . Supposons que le système soit perturbé par une action extérieure et que le calcul nous indique (nous préciserons bientôt comment) que, sous l'action de la perturbation, le système oscille entre les états E_i et E_k avec la fréquence $v_{ik} = (E_i - E_k)/\hbar$. Il ne faut pas en conclure que le système passe *physiquement* de l'état i à l'état k et inversement, car nous n'aurions le droit de le dire que si nous pouvions saisir le système dans l'un ou l'autre de ces états, c.-à-d. : mesurer son énergie dans l'un ou l'autre état. Or, comme il ne reste dans l'un des états que pendant un temps δt inférieur à $1/v_{ik} = \hbar/(E_i - E_k)$ aucune mesure ne nous permet de mesurer l'énergie de l'un des états avec une précision supérieure à

$$\delta E \sim h/\delta t \sim E_i - E_k$$

et nous ne pouvons distinguer les deux états l'un de l'autre. Pendant l'interaction, l'énergie du système reste indéterminée entre E_i et E_k et nous ne pouvons vérifier la conservation de l'énergie qu'à $|E_i - E_k|$ près.

Supposons encore que le système possède l'énergie E_1 jusqu'à un temps t_1 , puis qu'il subit une action extérieure de t_1 à t_2 qui le perturbe sans lui fournir finalement d'énergie, puis qu'il se trouve dans l'état E_2 pour $t > t_2$. Comme nous disposons pour mesurer E_1 et E_2 respectivement de tout le temps qui précède t_1 et de tout le temps qui suit t_2 , nous pouvons mesurer très exactement E_1 et E_2 et la conservation de l'énergie exige que $E_2 = E_1$. Mais pendant le temps de perturbation $t_2 - t_1$, le système peut passer dans un état intermédiaire E . Si $t_2 - t_1$ est petit devant $\hbar/(E - E_1)$, il sera impossible de saisir le système dans l'état E en mesurant cette énergie. On peut dire que le système passe par l'état « virtuel » E et en réalité l'énergie est durant l'interaction indéterminée à $E - E_1$ près. La conservation de l'énergie se vérifie pour le passage global $E_1 \rightarrow E_2$, mais non nécessairement pour les transitions virtuelles $E_1 \rightarrow E$ et $E \rightarrow E_2$.

Nous allons préciser ces considérations en développant rapidement l'étude des perturbations par la méthode de variation des constantes.

5. MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES ET PROBABILITÉ DE TRANSITION

Pour illustrer ces considérations, nous allons rappeler brièvement les grands traits de la méthode de variation des constantes et la notion de probabilité de transition.

Dans la méthode de variation des constantes, on considère un Hamiltonien non perturbé $H^{(0)}$ indépendant du temps auquel correspondent des états stationnaires du système envisagé en l'absence de la perturbation. On suppose connues les valeurs propres et fonctions propres $E_k^{(0)}$ et $\psi_k^{(0)}$ de cet Hamiltonien. On suppose le système soumis à des actions perturbatrices qui peuvent dépendre du temps : elles seront représentées par un terme V dans l'Hamiltonien de sorte que $H = H^{(0)} + V(t)$.

L'équation d'évolution du système en présence de la perturbation sera donc

$$(5) \quad [H^{(0)} + V(t)] \psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

A tout instant t , la fonction d'onde ψ du système peut être développée suivant le système complet des fonctions propres $\psi_k^{(0)}$ de l'Hamiltonien non perturbé $H^{(0)}$ sous la forme

$$(6) \quad \psi(t) = \sum_k c_k(t) \psi_k^{(0)} \exp[(2\pi i/\hbar) E_k^{(0)} t]$$

avec

$$(7) \quad c_k(t) = \int_D \psi_k^{(0)*} \psi_t \exp[-(2\pi i/\hbar) E_k^{(0)} t] dt.$$

D'après les principes généraux de la Mécanique ondulatoire, la probabilité pour qu'à l'instant t le système soit trouvé dans l'état $\psi_k^{(0)}$ est donnée par $|c_k(t)|^2$. Encore faut-il, comme nous l'avons remarqué plus haut, que le système demeure dans cet état pendant un temps assez long pour qu'on puisse reconnaître la valeur de son énergie. La fonction d'onde est toujours supposée normée et il s'ensuit que $\sum_k |c_k|^2 = 1$.

En substituant l'expression de ψ dans l'équation d'évolution et en tenant compte de ce que les $\psi_k^{(0)}$ sont fonctions propres de $H^{(0)}$, on trouve

$$(8) \quad \sum_k \frac{dc_k}{dt} \psi_k^{(0)} \exp[(2\pi i/\hbar) E_k^{(0)} t] = \frac{2\pi i}{\hbar} \sum_k c_k(t) V(t) \psi_k^{(0)} \exp[(2\pi i/\hbar) E_k^{(0)} t].$$

Multiplions par $\psi_l^{(0)*} \exp[-(2\pi i/h) E_l^{(0)} t]$ et intégrons dans D . Nous obtenons, en tenant compte de l'orthonormalité $\psi_k^{(0)}$, les équations fondamentales

$$(9) \quad \frac{dc_l}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \sum_k V_{lk}(t) c_k(t) \exp[(2\pi i/h)(E_k^{(0)} - E_l^{(0)}) t]$$

où

$$(10) \quad V_{lk}(t) = \int_D \psi_l^{(0)*} V(t) \psi_k^{(0)} d\tau.$$

Pour $V = 0$, les c_l sont constants et le ψ est une somme de fonctions propres de $H^{(0)}$ à coefficients constants, cas connu. Si la perturbation V n'est pas nulle, les coefficients c_l varient avec le temps : d'où le nom de « méthode de variation des constantes » donné à ce mode de calcul. (On vérifie aisément que

$$\frac{d}{dt} \sum_k c_k c_k^* = 0, \quad \text{d'où} \quad \sum_k |c_k|^2 = Cte = 1$$

à tout instant.)

L'intégration des équations de variation des constantes est difficile à effectuer dans le cas général ; on peut en tirer diverses conséquences que nous n'étudierons pas ici en détail. Nous nous bornerons au cas suivant : au temps $t = 0$, l'on sait que le système est dans l'état d'indice n de sorte que $c_n(0) = 1$ et $c_m(0) = 0$ pour $m \neq n$.

La perturbation représentée dans l'Hamiltonien par l'opérateur $V(t)$ étant faible par hypothèse, nous obtiendrons une solution des équations de variation des constantes qui sera valable approximativement pendant un certain temps en posant

$$(11) \quad \frac{dc_m}{dt} = \frac{2\pi i}{h} V_{mn} \exp[(2\pi i/h)(E_n - E_m) t] \quad m \neq n$$

(en supprimant l'indice supérieur 0 dans les E). La solution correspondant à la condition initiale $c_m(0) = 0$ est

$$c_m(t) = V_{mn} \frac{\exp[(2\pi i/h)(E_n - E_m) t] - 1}{E_n - E_m}$$

d'où

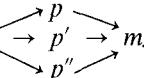
$$(12) \quad |c_m(t)|^2 = \frac{2|V_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{h} (E_n - E_m) t \right] = \frac{4|V_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2} \sin^2 \frac{\pi}{h} (E_n - E_m) t.$$

Cette quantité peut être considérée comme la probabilité pour que le système soit à l'instant t dans l'état m : elle est proportionnelle à $|V_{mn}|^2$, ce qui donne une importance particulière à ces éléments de matrice. Toutefois, conformément

à une remarque faite ci-dessus, tant que dure la perturbation, nous ne pouvons pas saisir physiquement le système dans l'état d'énergie E_m , car ceci exigerait une mesure de l'énergie affectée d'une incertitude inférieure à $E_m - E_n$ et le temps pendant lequel le système reste dans l'état E_m est inférieur à $\hbar/(E_m - E_n)$. C'est seulement si à l'instant t la perturbation $V(t)$ cesse brusquement que nous pourrions saisir le système dans l'état E_m (devenu un état final permanent), la probabilité de cette éventualité étant mesurée par $|c_m(t)|^2$. Comme l'énergie du système n'est pas mesurable pendant la durée de la perturbation, on ne peut alors lui appliquer la conservation de l'énergie qui n'est vérifiable qu'à la fin du processus de perturbation⁽¹⁾.

Il peut arriver que certains des V_{mn} soient nuls : ceci signifie que la transition $n \rightarrow m$ ne peut s'effectuer directement. Mais cette transition peut parfois s'effectuer indirectement par passage par un état intermédiaire p si V_{mp} et V_{pn} ne sont pas nuls. Plus généralement, il peut y avoir plusieurs états p, p', \dots

pouvant servir d'états intermédiaires suivant le schéma



(1) Note L.B. : Dans la théorie des perturbations, il se pose quelques questions délicates au sujet du potentiel perturbateur V . Plaçons-nous d'abord dans le cas d'un système à spectre discontinu. Dans ce cas, le potentiel V peut être un potentiel d'interactions intérieures (indépendant de t) ou un potentiel extérieur (qui peut dépendre de t). Dans le premier cas, on ne peut attribuer un commencement, ni une fin à l'interaction et il est impossible de mesurer les énergies $E_n^{(0)}, E_m^{(0)} \dots$ en l'absence d'interactions. Si, au contraire, V représente une action extérieure, on peut supposer que cette action ait un début et une fin (par exemple par rapprochement puis éloignement du système qui produit le champ extérieur). On peut alors mesurer l'énergie avant l'interaction et l'énergie après l'interaction. En général, les deux énergies ne seront pas égales mais l'on pourra sauver la conservation de l'énergie en disant que de l'énergie a été empruntée ou cédée par le système au système extérieur qui produit le champ.

Dans ce dernier cas, il est naturel de considérer le système Σ formé par l'ensemble du système S étudié et du système S' qui produit le champ. Mais, pour pouvoir appliquer la conservation de l'énergie, il faut pouvoir approcher puis éloigner le système S' du système S , ce qui exige que le système Σ possède un spectre continu. Ce sera alors la théorie des pages 119 et ss. qui s'appliquera et elle nous apprend comment apparaît la conservation de l'énergie. En résumé, chaque fois que la conservation est physiquement vérifiable, il semble qu'on puisse se ramener à la théorie des pages 119 et ss.

En utilisant l'approximation admise dans le calcul précédent on peut écrire

$$(13) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{dc_m}{dt} = \sum_p V_{mp} c_p \exp[(2\pi i/h)(E_p - E_m)t];$$

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{dc_p}{dt} = V_{pn} \exp[(2\pi i/h)(E_n - E_p)t]$$

valable pour p, p', \dots

L'intégration de la 2^e équation donne

$$(14) \quad c_p(t) = V_{pn} \frac{\exp[(2\pi i/h)(E_n - E_p)t] - 1}{E_n - E_p}$$

et la première équation donne alors

$$(15) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{dc_m}{dt} = \sum_p V_{mp} V_{pn} \frac{\exp[(2\pi i/h)(E_n - E_m)t] - \exp[(2\pi i/h)(E_p - E_m)t]}{E_n - E_p}$$

d'où, en intégrant avec la condition initiale $c_m(0) = 0$

$$(16) \quad c_m(t) = \sum_p \frac{V_{mp} V_{pn}}{E_n - E_p} \times$$

$$\times \left[\frac{\exp[(2\pi i/h)(E_n - E_m)t] - 1}{E_n - E_m} - \frac{\exp[(2\pi i/h)(E_p - E_m)t] - 1}{E_p - E_m} \right].$$

En introduisant la notation $V'_{mn} = \sum_p \frac{V_{mp} V_{pn}}{E_n - E_p}$, on trouve pour la probabilité de présence du système dans l'état E_m à l'instant t

$$(17) \quad |c_m(t)|^2 = \frac{2|V'_{mn}|^2}{(E_m - E_n)^2} \left[1 - \cos \frac{2\pi}{h}(E_n - E_m)t \right] + \text{termes en } (E_p - E_n).$$

En général, les termes en $(E_p - E_n)$ n'interviennent pas effectivement dans l'application de cette formule qui a une grosse importance dans la théorie des interactions entre matière et rayonnements.

Ici encore, pendant la durée de la perturbation, on ne peut physiquement saisir le système dans l'état E_p , ni appliquer la conservation de l'énergie. C'est seulement si la perturbation cesse à l'instant t que l'on peut trouver ensuite le système avec l'énergie E_m , la probabilité de cette éventualité étant $|c_m(t)|^2$. Mais, même dans ce cas, on ne peut jamais saisir le système dans un des états p, p', \dots et par suite la conservation de l'énergie ne s'applique jamais dans ces états intermédiaires. C'est ce que l'étude des probabilités de transition va nous montrer plus clairement.

Notons qu'on trouve des circonstances analogues quand la transition $n \rightarrow m$ peut s'effectuer avec étapes successives dans plusieurs états intermédiaires.

6. PROBABILITÉS DE TRANSITION

Jusqu'ici nous avons supposé que les états quantiques formaient une suite discontinue. Or il arrive souvent, et c'est un cas très important, qu'on ait affaire à des états formant un spectre continu (dans les problèmes de choc par exemple). Il faut alors reprendre les calculs précédents en supposant que le système se trouvant dans un état initial n connu puisse passer dans un état final appartenant à une suite continue. Nous supposerons donc que le nombre des états finaux possibles dont les énergies sont contenues dans un intervalle $(E, E + dE)$ est donné par une expression $\rho(E) dE$ où $\rho(E)$ est une fonction continue et assez lentement variable de E .

Nous allons donc transformer la théorie précédente pour l'appliquer au cas où l'état m final appartient à un petit intervalle ΔE d'un spectre continu. Supposons d'abord que la transition $n \rightarrow m$ soit directement possible ($V_{nm} \neq 0$). Alors d'après la formule (12), la probabilité totale du passage pendant le temps t de l'état initial n à l'un quelconque des états m appartenant à l'intervalle $(E, E + \Delta E)$ sera

$$(18) \quad P_{n,\Delta E}(t) = \frac{4\pi^2}{h^2} \int_E^{E+\Delta E} |V_{nm}|^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\hbar} (E - E_n) t}{\frac{\pi}{\hbar} (E - E_n)} \right)^2 \rho(E) dE .$$

On peut vérifier aisément que, si E_n n'appartient pas à l'intervalle ΔE , l'intégrale est très petite quel que soit t de sorte que $P(t)/t$ tend vers zéro pour $t \rightarrow \infty$: on peut dire que la probabilité de transition par unité de temps est nulle dans ce cas.

Il en est autrement si E_n appartient à l'intervalle ΔE . Dans ce cas, si t est assez grand, l'intégrale $\int_E^{E+\Delta E}$ croît proportionnellement à t et la probabilité de transition par unité de temps $P(t)/t$ prend une valeur finie : cette transition se produit donc d'une façon notable.

D'une façon plus précise, l'étude de l'intégrale montre que, pour pouvoir affirmer que la transition se produira entre l'état initial E_n et un état E compris dans l'intervalle δE , il faut attendre un temps de l'ordre de $\delta t = h/2\pi\delta E$, ce qui correspond à la quatrième relation d'incertitude $\delta E \cdot \delta t \sim h$. Ce n'est donc qu'au bout d'un temps suffisamment long que la conservation de l'énergie $E_m \simeq E_n$ se trouvera jouer, mais pratiquement en raison de la très petite valeur de h à notre échelle, ce temps sera pour nous très court.

Donc, au bout d'un temps δt pratiquement très court après le début de la perturbation, la conservation de l'énergie se trouvera établie et l'on pourra constater que le système a passé de son état initial E_n à un état final d'énergie E_m presque égale ($E_m - E_n \sim h/\delta t$). Alors on aura très approximativement

$$(19) \quad P_{n,\Delta E}(t) \simeq \frac{4\pi^2}{h^2} |V_{mn}|^2 \rho(E_n) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{h}(E - E_n) t}{\frac{\pi}{h}(E - E_n)} \right)^2 dE$$

car, l'élément $E = E_n$ de l'intégrale étant entièrement prépondérant, on peut sans erreur sensible y remplacer $\rho(E)$ par $\rho(E_n)$ et étendre l'intégration à toutes les valeurs de E . Posant $u = (\pi/h)(E - E_n) t$, il vient

$$(20) \quad \frac{P_{n,\Delta E}(t)}{t} = \frac{4\pi}{h} |V_{mn}|^2 \rho(E_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{4\pi^2}{h} |V_{mn}|^2 \rho(E_n).$$

La probabilité de transition par unité de temps de l'état n à un état m du spectre continu est donc égale à

$$(21) \quad P_{n \rightarrow m} = \frac{4\pi^2}{h} |V_{mn}|^2 \rho(E_n).$$

C'est la formule fondamentale (formule de Wentzel) valable quand la transition $n \rightarrow m$ est possible. V_{nm} , alors différent de zéro, est l'élément de matrice correspondant à la transition de l'état n à l'état m d'énergie E_m du spectre continu. L'analyse précédente montre clairement comment la conservation de l'énergie s'établit progressivement de plus en plus strictement quand le temps d'interaction s'écoule conformément à la quatrième relation d'incertitude.

Si le passage $n \rightarrow m$ n'est pas directement possible ($V_{nm} = 0$), le passage $n \rightarrow m$ peut parfois s'effectuer avec passage dans un état intermédiaire p et l'on devra alors partir de la formule (17). On peut vérifier qu'en dehors de certains cas exceptionnels où il y aurait résonance entre les états m et p , les termes en $E_p - E_m$ de la formule (17) ne donnent aucune contribution sensible à la probabilité de passage. Le calcul précédent est alors encore valable avec simple substitution de V'_{mn} à V_{mn} et l'on trouve

$$P_{n \rightarrow m} = \frac{4\pi^2}{h} |V'_{mn}|^2 \rho(E_n) \quad \text{avec} \quad V'_{mn} = \sum_p \frac{V_{mp} V_{pn}}{E_n - E_p},$$

m désignant un état du spectre continu d'énergie E_n .

Il y a encore conservation de l'énergie dans le processus global $n \rightarrow m$, mais non pas dans l'état intermédiaire p car E_p peut être différent de E_n et E_m .

Ici encore on ne peut pas saisir le système dans l'état intermédiaire p de sorte que l'écart par rapport à la conservation de l'énergie n'est pas constatable.

On dit qu'un tel état p est un état « virtuel » puisqu'il ne peut se manifester effectivement.

Pour les transitions s'effectuant avec plusieurs étapes intermédiaires, on trouverait des formules analogues, mais plus compliquées.

Exemple physique : Nous allons donner un exemple physique illustrant ce qui précède.

Considérons d'abord la diffusion de la lumière par un atome. L'atome a un état quantifié normal d'énergie minimum E_0 et une série d'états quantifiés excités d'énergies $E_1, E_2 \dots$ supérieures à E_0 . Soumis à l'irradiation d'une onde lumineuse de fréquence v , l'atome diffuse la lumière incidente sans changement de fréquence. L'analyse de ce phénomène, qui conduit à trouver la loi de « dispersion » pour le genre d'atomes considéré, amène à regarder l'atome comme oscillant pendant l'irradiation entre l'état E_0 et des états « virtuels » $E_1 \dots$ Plus exactement il y a passage avec conservation de l'énergie de l'état initial « photon incident de fréquence v + atome dans l'état E_0 » à l'état final « photon de fréquence v diffusé, en général, en dehors de la direction d'incidence + atome revenu dans l'état E_0 », ce passage s'opérant avec étape intermédiaire dans l'un des états $E_1, E_2 \dots$ suivant le schéma de la théorie ci-dessus indiquée. Comme, en dehors du cas exceptionnel de la résonance qui exige une étude particulière, les différences d'énergie $E_i - E_0$ sont différentes de $h\nu$, il n'y a pas conservation de l'énergie dans l'état intermédiaire E_i , mais cela importe peu puisque cet état intermédiaire est un état « virtuel » impossible à saisir expérimentalement.

Dans la théorie quantique des interactions entre particules électrisées, on est amené également à faire intervenir des passages par des états intermédiaires « virtuels » sans conservation de l'énergie (échanges virtuels de photons).

La théorie de la largeur des raies spectrales fournit une belle illustration de la quatrième relation d'incertitude. Considérons une raie spectrale correspondant au passage de l'atome d'un état excité E_i à l'état fondamental E_0 . L'expérience indique et le calcul quantique explique que la raie émise est large et que la répartition des intensités à l'intérieur de la raie large est donnée par la formule

$$(22) \quad I(v) = \frac{I_0 \gamma}{4 \pi^2 (\nu_{i0} - v)^2 + \gamma^2 / 4}$$

où $\nu_{i0} = (E_i - E_0)/h$ est la fréquence (centrale) de la raie et γ « le coefficient d'amortissement » de l'état initial d'énergie E_i , c.-à-d. que la probabilité de trouver l'atome dans l'état excité E_i au temps t après l'excitation diminue comme $e^{-\gamma t}$. On voit que $I(v)$, maximum pour $v = \nu_{i0}$, diminue rapidement quand on s'éloigne du centre de la raie : $I(v) = \frac{1}{2} I(\nu_{i0})$ pour $|v - \nu_{i0}| = \gamma/4\pi$.

On peut donc dire par convention que $\gamma/4\pi$ mesure la « largeur » de la raie. Or il est évident, d'après la définition de γ , que l'on ne peut suivre l'atome dans l'état E_i que pendant un temps δt de l'ordre de $1/\gamma$: il est donc impossible de

mesurer E_i avec une précision supérieure à $\delta E \sim h/\delta t \sim h\gamma$. La fréquence de la raie est donc affectée de l'incertitude $\delta v = \delta E/h \sim \gamma$ et ceci correspond bien à la largeur de la raie.

Pour une étude plus approfondie des questions effleurées dans ce paragraphe, on se reportera à « Une nouvelle théorie de la Lumière » tome II (réf. II, 16).

7. RELATIONS D'INCERTITUDE ET THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Dans le domaine où l'on doit tenir compte des corrections de Relativité (vitesses voisines de c), on peut trouver de nouvelles formes de relations d'incertitude qui ont été signalées par Landau et Peierls (Z. f. Phys. B. 69, p. 56 et ss.) et qui ont donné lieu à d'assez nombreuses discussions.

Dans le domaine relativiste, on doit définir l'énergie E , compte tenu de l'énergie interne de masse. Ainsi pour un corpuscule de masse propre m_0 , on devra poser $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Si p_x désigne l'une des composantes de l'impulsion, l'équation de Hamilton $\partial E/\partial p_x = v_x$ donne la relation

$$(23) \quad \delta E = v_x \delta p_x$$

facile à vérifier sur $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ et $p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$. Partant d'un état où l'énergie E_0 et l'impulsion p_0 sont connues, opérons une mesure de E qui dure un temps δt ; l'incertitude sera $\delta E \geq h/\delta t$. Or $\delta E = v_x \delta p_x$ et v_x est forcément inférieur à c . D'où

$$(24) \quad \delta p_x \geq h/(c \delta t)$$

relation d'incertitude d'une forme nouvelle qui lie une incertitude sur un moment de Lagrange à une durée de mesure, indépendamment de l'incertitude sur la coordonnée x correspondante. La mesure de l'impulsion exigerait, si l'on tient compte de la Relativité, toujours un certain temps si l'on veut qu'elle soit un peu précise.

On peut retrouver cette relation nouvelle par le raisonnement suivant. Supposons qu'une première mesure localise un corpuscule au voisinage immédiat d'un point O . Après la mesure, on a un train d'ondes ψ de dimensions infiniment petites et nous avons vu que l'analyse de Fourier nous apprend alors que le train d'ondes comprend des composantes de toutes les fréquences.

La formule relativiste $h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ montre que les fréquences infinies correspondent à des vitesses infiniment voisines de c . Donc si la mesure dure un temps δt , le front de l'onde ψ à la fin de la mesure pourra déjà être à la distance $c \delta t$ du point O et à la fin de la mesure $\delta x = c \delta t$. Alors la relation

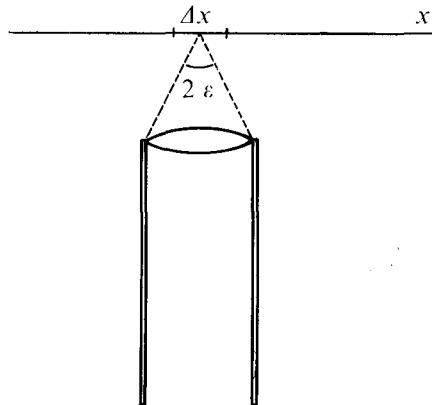
d'Heisenberg $\delta p_x \cdot \delta x \geq h$ donne $\delta p_x \geq h/(c \delta t)$ et nous retrouvons la nouvelle relation d'incertitude⁽¹⁾.

En théorie relativiste, on a entre l'énergie E et la quantité de mouvement p la relation $E^2/c^2 = p^2 + m_0^2 c^2$ d'où $E dE = c^2 p dp$ et comme $p = E/c$, on en conclut que $\delta E = v \delta p$, ce qui permet d'écrire la relation d'incertitude

$$(25) \quad \delta E = v \delta p \geq v h / \delta q \quad \text{ou} \quad \delta E \cdot \delta q \geq v h$$

reliant l'incertitude sur l'énergie à l'incertitude sur la position. On trouve un exemple physique de ce cas dans les expériences de Rausch von Traubenberg qui ont été analysées théoriquement par Schrödinger [Z. f. Phys. 78 (1932), p. 309].

Considérons des atomes qui se trouvent excités avec l'énergie E_i et qui se déplacent avec une vitesse uniforme v le long d'un axe Ox sur lequel règne un champ magnétique non homogène $H(x)$. La valeur de E_i varie avec x en raison de la variation de H . En revenant à leur état normal d'énergie E_0 , les atomes



⁽¹⁾ Note L.B. : On a $\delta t \geq h/\delta E$ et, comme on doit avoir aussi $\delta E < E$, on a

$$\delta t \geq h/E.$$

Comme en théorie relativiste les fronts d'onde peuvent atteindre la vitesse c , on doit poser $\delta q = c \delta t$ d'où

$$\delta q \geq \frac{hc}{E} = \frac{h}{m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}$$

ou encore

$$\delta q \geq \lambda \beta \quad \text{car} \quad \lambda = \frac{h}{m_0 \beta c} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Pour la lumière $\delta q \geq \lambda$, mais pour les particules matérielles, δq peut être inférieur à λ .

émettent une raie spectrale dont la fréquence varie suivant la position occupée par chaque atome à l'instant de la transition. On cherche à trouver les variations de E_i en observant la fréquence de la raie émise sur chaque élément de l'axe Ox . Malheureusement, comme l'a observé Schrödinger, on est gêné par les circonstances suivantes

D'abord, deux points de l'axe Ox ne sont « séparables » l'un de l'autre que si leur distance δx est supérieure à $\lambda(x)/\sin \varepsilon$, $\lambda(x)$ étant la longueur émise au point x et ε le demi-angle d'ouverture de l'appareil d'observation. D'autre part, pendant la durée δt de l'observation, l'atome émetteur est animé vers l'appareil d'observation d'une vitesse qui peut atteindre $v \sin \varepsilon$ et par suite de l'effet Doppler il y a une incertitude sur la longueur d'onde égale à $\delta \lambda = (v/c) \sin \varepsilon \lambda$, d'où $\delta v = (v/c) \sin \varepsilon v$ car $\left| \frac{\delta \lambda}{\lambda} \right| = \left| \frac{\delta v}{v} \right|$ et, comme $\delta x = \lambda/\sin \varepsilon$

$$(26) \quad \delta E = hv(\sin \varepsilon/\lambda) \geq hv/\delta x \quad \delta E \cdot \delta x \geq hv.$$

Nous retrouvons la relation d'incertitude annoncée.

Ecrivons encore

$$\delta x \geq h/\delta p_x = hv/\delta E.$$

Pour qu'on puisse localiser un corpuscule d'énergie E bien définie ($\delta E \ll E$) dans l'intervalle δx , il faut donc que

$$\delta x \geq hv/E = v/v \quad \text{car} \quad E = hv.$$

Or $\lambda = V/v = c^2/vv$ d'où $\delta x \geq \beta^2 \lambda$.

A l'approximation Newtonienne (particules de vitesse faible), β^2 est négligeable et cette inégalité ne donne rien. La localisation peut s'effectuer dans un domaine de dimensions petites par rapport à la longueur d'onde. Il n'en est plus de même si $v \rightarrow c$; alors $\beta \rightarrow 1$ et l'inégalité tend vers $\delta x \geq \lambda$. On ne peut plus localiser la particule dans un domaine de l'ordre de la longueur d'onde. Donc, pour les particules de vitesse voisine de c , et en particulier pour les photons, il n'y a pas de localisation possible à l'échelle de la longueur d'onde.

Les questions que nous venons d'exposer ont donné lieu à d'assez nombreuses discussions. Elles se rattachent à la question des états à énergie négative bien connue dans la théorie de Dirac et la théorie générale des particules à spin, ainsi qu'à la non-existence d'une densité de présence définie positive pour les photons et les particules de spin pair. Ces discussions n'ont pas abouti à des conclusions absolument claires et la question reste mal élucidée.

D'autres considérations relatives à la comparaison des relations d'incertitude et des conceptions relativistes ont été développées par divers auteurs, notamment par M. Schrödinger (Annales de l'I.H.P., vol. 2 (1932), p. 287 et ss.). Nous en rappellerons seulement quelques points se rapportant à la mesure des temps et des longueurs avec un raisonnement un peu plus court que celui de Schrödinger. Supposons que dans un système galiléen, où la synchronisation

a été établie, on veuille régler une horloge de masse propre M_0 . Pour cela, on suppose qu'elle émet un photon qui est recueilli au temps t pour un observateur situé à une distance l de l'horloge : le temps d'émission du photon sera alors $t - l/c$ et on pourra régler l'horloge. Mais pour éviter que l'horloge ne prenne lors de l'émission du photon un mouvement de recul qui troublerait la mesure, il faut que l'énergie du photon émis soit très petite par rapport à l'énergie propre de l'horloge : d'où $hv \ll M_0 c^2$. Mais la durée δt d'émission du train d'ondes associé au photon est $\geq h/v \delta v$, δv étant l'incertitude sur la valeur de v qui est forcément $\ll c$. D'où $\delta t \gg 1/v \gg h/M_0 c^2$. Comme l'enregistrement de l'arrivée du photon par l'observateur peut avoir lieu à n'importe quel instant de l'intervalle de temps δt pendant lequel le train d'ondes passe sur l'observateur, on voit que le réglage de l'horloge ne peut avoir lieu qu'avec une précision inférieure à $\tau_0 = h/M_0 c^2$.

De même si l'on veut dans un système de référence galiléen mesurer la longueur d'une règle, cette mesure ne pourra s'effectuer, à cause de la relation $\delta x \geq h/\delta p_x$, qu'avec l'incertitude $\delta x \geq \frac{h}{(E_0/c^2) \delta v_x}$ car

$$p_x = \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq \frac{E_0}{c^2} v_x \quad \text{et} \quad \delta p_x \geq \frac{E_0}{c^2} \delta v_x.$$

Comme $\delta v_x \leq c$, $\delta x \geq \frac{h}{E_0/c} = \frac{h}{M_0 c}$. Ainsi la longueur de la règle ne pourra jamais être connue avec une incertitude moindre que

$$\lambda_0 = h/M_0 c,$$

M_0 étant ici la masse de la règle.

On se reportera pour les détails à l'exposé de Schrödinger dont tous les raisonnements peuvent en fin de compte se ramener à la quatrième relation d'incertitude et aux relations données plus haut, mais qui contient sur le rôle du temps en Mécanique ondulatoire de très pénétrantes remarques.

8. FORMULES DE MANDELSTAM ET TAMM

Partant de considérations dont quelques-unes sont peut-être un peu discutables, MM. Mandelstam et Tamm sont parvenus à des formules intéressantes reliées à la quatrième relation d'incertitude [Journal of Physics, vol. IX, no 4 (1945), p. 249]. Nous allons les étudier.

Les auteurs remarquent que, si un système est dans un état stationnaire $\psi \sim e^{2\pi i \nu t}$ les répartitions de probabilités pour toutes les variables dynamiques sont indépendantes du temps, ce qui se vérifie facilement. Ils en concluent qu'il doit exister une relation générale entre la dispersion σ_E de l'énergie et la

variation dans le temps des coordonnées, moments, etc. Pour le voir, partons de la relation

$$(27) \quad \sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} |\overline{AB - BA}|$$

valable pour tout couple de grandeurs observables A et B . D'autre part, nous avons par définition $\overline{A} = \int \psi^* A \psi dt$ et l'on en tire aisément (si A est indépendant de t , ce que nous supposerons)

$$(28) \quad \frac{d\overline{A}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} \int \psi^* (AH - HA) \psi d\tau = \frac{2\pi i}{h} \overline{(AH - HA)} = \frac{2\pi i}{h} \overline{[A, H]}$$

où H est l'Hamiltonien du système. En prenant $B = H$ dans (27), nous obtenons

$$(29) \quad \sigma_H \cdot \sigma_A \geq \frac{h}{4\pi} \left| \frac{d\overline{A}}{dt} \right| \quad \sigma_H = \sigma_E = \text{dispersion de l'énergie}$$

ce qui est la relation cherchée (Relation de Mandelstam et Tamm). Si l'on a un état stationnaire à énergie connue $\sigma_H = 0$ et $d\overline{A}/dt = 0$.

On peut écrire la relation obtenue sous une forme différente. Le système étant supposé isolé, σ_H est constant, mais σ_A peut varier. Considérons un intervalle de temps δt et désignons par $\overline{\sigma}_A^{\delta t}$ la moyenne dans le temps pendant cet intervalle de σ_A (ce n'est pas le même genre de moyenne que celles qui sont jusqu'ici désignées par un surlignage). Si nous intégrons dans l'intervalle de temps δt en remarquant que l'intégrale de la valeur absolue d'une fonction est toujours supérieure ou égale à la valeur absolue de l'intégrale de la fonction, on trouve

$$(30) \quad \sigma_H \cdot \delta t \geq \frac{h}{4\pi} \frac{\overline{A(t + \delta t)} - \overline{A(t)}}{\overline{\sigma}_A^{\delta t}}.$$

Mandelstam et Tamm introduisent alors un « temps standard » δT_A défini comme il suit : c'est le temps le plus court pendant lequel la valeur moyenne de A varie de $\overline{\sigma}_A$. La dernière formule s'écrit alors

$$(31) \quad \sigma_H \cdot \delta T_A \geq h/4\pi.$$

De la formule (29) on déduit que pour que la valeur moyenne d'une grandeur A puisse varier, il faut non seulement que σ_H ne soit pas nulle, mais aussi que σ_A ne soit pas constamment nulle. Dans le cas où A a un spectre discontinu, ceci est évident, mais il n'en est pas de même si A a un spectre continu. On voit aussi sur la formule (30) que si à un certain instant σ_A s'annule sans que A cesse de varier, alors initialement c.-à-d. pour δt très petit, σ_A doit varier beaucoup plus rapidement que A .

On obtient une illustration intéressante des formules précédentes en considérant la propagation d'un « train d'ondes » le long de l'axe des x et en faisant $A = x$. Alors \bar{x} est la coordonnée x du centre de gravité du train d'ondes tandis que σ_A peut être regardé comme sa longueur moyenne et δT_A comme la durée moyenne de son passage en un point. La relation $\sigma_H \cdot \delta T_A \geq h/4\pi$ montre que cette durée moyenne est d'autant plus grande que σ_H est plus petite. Nous retrouvons ainsi une conclusion qui est bien connue, mais tandis que les raisonnements antérieurs ne fournissaient cette conclusion que dans le cas de l'absence de champ, elle est ici valable même s'il y a un champ extérieur, car les raisonnements qui conduisent aux formules de la page précédente n'impliquent nullement l'absence d'un champ extérieur.

Voici un autre exemple donné par Mandelstam et Tamm. Soit φ_n la fonction d'onde représentant un certain état d'un système où la dispersion sur l'énergie est σ_H ⁽¹⁾. ψ désignant un état quelconque du système, considérons l'opérateur L_n tel que $L_n \psi = c_n \varphi_n$ avec $c_n = \int \varphi_n^* \psi dt$. L_n est un opérateur qui isole dans le ψ la composante $c_n \varphi_n$: c'est un projecteur et il est évident que $L_n^2 = L_n$. Comme on a

$$(32) \quad \sigma_{L_n} = \sqrt{\overline{L_n^2} - (\overline{L_n})^2} = \sqrt{\overline{L_n} - (\overline{L_n})^2}$$

la relation de Mandelstam et Tamm nous donne

$$(33) \quad \sigma_H \sqrt{\overline{L_n} - (\overline{L_n})^2} \geq \frac{h}{4\pi} \left| \frac{d\overline{L_n}}{dt} \right|.$$

Cette inégalité qui ne contient plus que $\overline{L_n}$ peut facilement être intégrée. Supposons que dans l'état initial, on ait $\overline{L_n}(0) = 1$, ce qui signifie qu'à l'origine le système se trouve certainement dans l'état φ_n ; alors en intégrant de 0 à t , on trouve

$$(34) \quad \frac{2\pi}{h} \sigma_H t \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\overline{L_n}(t)}.$$

$$\text{Si } 0 < t < h/(4\sigma_H), \text{ on a } \overline{L_n(t)} \geq \cos^2 \left(\frac{2\pi}{h} \sigma_H t \right).$$

Si $t > h/(4\sigma_H)$, l'inégalité ne donne aucune restriction sur la valeur de $\overline{L_n(t)}$ qui est toujours compris dans l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Désignons par τ la vie moyenne de l'état φ_n telle que $\overline{L_n(\tau)} = 1/2$ si $\overline{L_n(0)} = 1$. Alors la dernière inégalité nous donne

$$(35) \quad \sigma_H \cdot \tau \geq h/8$$

un peu plus restrictive que $\sigma_H \cdot \tau \geq h/4\pi$.

Le mémoire de Mandelstam et Tamm contient aussi une application un peu moins claire aux cas des perturbations, sur laquelle nous n'insisterons pas.

(1) Note L.B. : φ_n peut être un état propre relatif à une grandeur A qui ne commute pas avec H .