

Reprinted From
Foundations of Quantum Mechanics
© 1971, IL Corso
Academic Press Inc. - New York

**L'interprétation de la mécanique ondulatoire
par la théorie de la double solution.**

L. DE BROGLIE

Académie des Sciences - Paris

1. — Les origines de la mécanique ondulatoire.

Quand j'ai eu en 1923-24 mes premières idées sur la Mécanique ondulatoire [1], j'ai été guidé par le désir d'obtenir une véritable image physique concrète, valable pour toutes les particules, de la coexistence des ondes et des particules découverte en 1905 par ALBERT EINSTEIN dans sa « théorie des quanta de lumière ». Je ne mettais alors pas un instant en doute le caractère de réalité physique des ondes et des particules.

Une remarque m'avait dès l'abord beaucoup frappé. La fréquence d'une onde plane monochromatique se transforme dans la théorie de la relativité suivant la formule $\nu = \nu_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$ alors que la fréquence d'une horloge se transforme suivant la formule différente $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ (avec $\beta = v/c$). J'avais ensuite remarqué que le quadrivecteur défini par le gradient de la phase d'une onde plane monochromatique pouvait être mis en relation avec le quadrivecteur impulsion-énergie d'une particule en introduisant la constante h conformément aux idées de Planck et en posant

$$(1) \quad W = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda},$$

pour relier l'énergie W à la fréquence ν et la quantité de mouvement p à la longueur d'onde λ . J'étais donc amené à me représenter la particule comme constamment localisée en un point de l'onde plane monochromatique avec l'énergie W et la quantité de mouvement p et comme décrivant l'un des rayons rectilignes de l'onde.

Mais, et ceci n'est jamais rappelé dans les exposés habituels de la Mécanique ondulatoire, j'avais aussi remarqué que, si la particule est considérée comme contenant, lorsqu'elle est au repos, une énergie interne $M_0 c^2 = h\nu_0$,

il était naturel de l'assimiler à une petite horloge de fréquence propre ν_0 de sorte que, quand elle est en mouvement avec la vitesse $v = \beta c$, sa fréquence, différente de celle de l'onde, est $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. J'avais alors facilement démontré qu'au cours de son mouvement dans l'onde la particule avait une vibration interne qui restait constamment en phase avec celle de l'onde.

L'exposé fait dans ma Thèse avait l'inconvénient de ne s'appliquer qu'au cas particulier de l'onde plane monochromatique qui n'est jamais rigoureusement réalisé dans la nature en raison de l'existence inévitable d'une largeur spectrale. Je voyais bien que, si une onde complexe est représentée par une intégrale de Fourier, c'est à dire par une superposition de composantes, ces composantes n'existent que dans l'esprit du théoricien et que, tant que ces composantes n'ont pas été séparées par un processus physique qui détruit la superposition initiale, *c'est la superposition qui est la réalité physique*. Je fus donc amené, peu de temps après ma Thèse, à généraliser les idées qui m'avaient guidé dans ce travail, d'une part en considérant une onde qui n'est pas monochromatique plane et d'autre part en distinguant l'onde physique réelle de ma théorie de l'onde fictive Ψ à signification statistique et arbitrairement normée qu'à la suite des travaux de Schrödinger et de Born on commençait à introduire systématiquement dans les exposés de la Mécanique ondulatoire. C'est ainsi que mes réflexions m'ont amené à exposer dans un article du *Journ. de Phys.*, Mai 1927 [2] sous le nom de « théorie de la double solution » une nouvelle interprétation de la Mécanique ondulatoire et à généraliser pour le cas d'une onde quelconque la loi du mouvement de la particule que je n'avais d'abord envisagé que dans le cas particulier de l'onde plane monochromatique.

En présence du succès de la Mécanique quantique telle qu'on l'a développée alors en liaison avec les idées de l'Ecole de Copenhague, j'ai longtemps abandonné ma tentative de 1927. Mais je l'ai reprise et beaucoup développée depuis une vingtaine d'années.

2. — La théorie de la double solution et la loi du guidage.

Je ne puis pas exposer ici dans tous ses détails l'état actuel de la théorie de la double solution. On pourra consulter à ce sujet les ouvrages indiqués dans la bibliographie [3]. Mais je voudrais bien préciser les deux idées principales sur lesquelles repose cette interprétation de la Mécanique ondulatoire.

a) L'onde étant, selon moi, une onde physique de très faible amplitude qui ne peut pas être arbitrairement normée doit être distincte de l'onde ψ normée à signification statistique du formalisme usuel de la Mécanique quantique. Je désigne par v cette onde physique et je relie l'onde statistique ψ à l'onde physique v par la relation $\psi = Cv$ où C est un facteur de normalisation. L'onde ψ a le caractère d'une représentation subjective de probabilités

construite à l'aide de l'onde objective v . C'est cette distinction, à mon avis essentielle, qui m'a fait donner à la théorie le nom de « théorie de la double solution » parce qu'ainsi v et Ψ se trouvent être deux solutions de la même équation d'ondes.

b) Pour moi, la particule toujours bien localisée dans l'espace au cours du temps constitue dans l'onde v une très petite région de haute concentration de l'énergie que l'on peut, en première approximation, assimiler à une singularité mobile. Des considérations sur lesquelles je reviendrai plus loin conduisent à admettre que le mouvement de la particule doit être défini comme il suit. Si la solution complexe de l'équation des ondes qui représente l'onde v (ou, si l'on préfère, l'onde Ψ , ce qui ici revient au même en raison de la relation $\Psi = Cv$) est écrite sous la forme

$$(2) \quad v = a(x, y, z, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \varphi(x, y, z, t) \right] \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

où a et φ sont des fonctions réelles, l'énergie W et la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ de la particule quand elle occupe la position x, y, z à l'instant t sont données par

$$(3) \quad W = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

ce qui donne bien dans le cas de l'onde plane monochromatique où l'on a

$$\varphi = h\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda} \right)$$

les expressions (1) de W et de $\mathbf{p}$. Si dans les formules (3) on écrit W et $\mathbf{p}$ sous la forme

$$W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

on obtient

$$(4) \quad \mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{W} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi}{\partial \varphi / \partial t}.$$

J'ai appelé cette formule qui détermine le mouvement de la particule dans l'onde « la formule du guidage ». Elle se généralise facilement quand la particule est soumise à un champ extérieur.

Introduisons maintenant l'idée qui remonte, nous l'avons rappelé, aux origines de la Mécanique ondulatoire, suivant laquelle la particule peut être assimilée à une petite horloge de fréquence $\nu_0 = M_0 c^2 / h$ et attribuons-lui la vitesse définie par la formule (4). Pour un observateur qui voit passer la particule

se déplaçant dans son onde avec la vitesse βc , la fréquence interne de la petite horloge est $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ d'après la formule du ralentissement des horloges en mouvement. Cela permet de démontrer facilement, comme nous le montrons plus loin, que, dans le cas général d'une onde qui n'est pas plane monochromatique, la vibration interne de la particule reste constamment en phase avec l'onde qui la porte. Ce résultat qui contient comme cas particulier celui qui avait été primitivement obtenu dans le cas de l'onde monochromatique plane peut être considéré comme le contenu essentiel de la loi du guidage.

Comme nous le verrons plus loin, la théorie montre alors facilement que la masse propre M_0 qui figure dans les expressions de W et de $\mathbf{p}$ n'est pas, en général, égale à la masse propre m_0 usuellement attribuée à la particule. On la trouve égale à

$$(5) \quad M_0 = m_0 + \frac{Q_0}{c^2}$$

où Q_0 est dans le système propre de la particule une variation positive ou négative de sa masse propre. La grandeur Q_0 est le « potentiel quantique » de la théorie de la double solution. Nous verrons qu'elle dépend des variations de l'amplitude de la fonction d'onde.

3. — Etude plus détaillée de la théorie de la double solution.

Après l'esquisse que nous venons de faire de la théorie de la double solution, nous allons développer les équations sur lesquelles elle repose en partant des équations d'onde de Schrödinger et de Klein-Gordon c'est à dire sans introduire le spin. L'extension des considérations qui suivent au cas des particules de spin $\frac{1}{2}$ comme l'électron et au cas des particules de spin 1 comme le photon se trouve dans certains des livres que j'ai publiés (*). Nous allons donc nous borner au cas où l'onde ψ obéit à l'équation non relativiste de Schrödinger ou à l'équation relativiste de Klein-Gordon dont l'équation de Schrödinger est la dégénérescence à l'approximation newtonienne (pour $c \rightarrow \infty$). On sait d'ailleurs que l'on obtient ainsi une représentation approximative des propriétés ondulatoires de l'électron.

Nous écrirons d'abord l'équation de Schrödinger pour l'onde ψ sous la forme suivante, où U est le potentiel de la force qui s'exerce sur l'électron

$$(6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im} \Delta \psi + \frac{i}{\hbar} U \psi.$$

(*) Voir [3a] chapitre XVI et [3d], p. 23.

Cette équation complexe implique que l'onde v est représentée par deux fonctions réelles liées l'une à l'autre par deux équations réelles. Nous sommes donc amenés à écrire

$$(7) \quad v = a \exp \frac{i\varphi}{\hbar},$$

avec a et φ réels. a est l'amplitude de l'onde et φ sa phase. En substituant (7) dans (6), nous obtenons aisément

$$(J) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} - U - \frac{1}{2m} (\text{grad } \varphi)^2 = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a},$$

$$(C) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \text{div} (a^2 \overrightarrow{\text{grad } \varphi}) = 0.$$

Pour des raisons qui apparaîtront mieux plus loin, nous appellerons l'équation (J) « équation de Jacobi généralisée » et l'équation (C) « équation de continuité ».

Si, pour obtenir une forme relativiste de la théorie, nous appliquons à l'onde v non pas l'équation de Schrödinger, mais l'équation de Klein-Gordon, nous obtenons à la place de (6) l'équation

$$(8) \quad \square v - \frac{2i}{\hbar} \frac{\varepsilon V}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2i}{\hbar} \sum_{xyz} \frac{\varepsilon}{c} A_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\hbar^2} \left[m_0^2 c^2 - \frac{\varepsilon^2}{c^2} (V^2 - A^2) \right] v = 0,$$

équation dans laquelle nous avons supposé que la particule porte une charge électrique ε et qu'elle est soumise à l'action d'un champ électromagnétique extérieur dérivant d'un potentiel scalaire $V(x, y, z, t)$ et d'un potentiel vecteur $A(x, y, z, t)$. En introduisant dans (8) la forme (7) de v , nous obtenons après quelques calculs une équation de Jacobi généralisée (J') et une équation de continuité (C') dont voici les expressions

$$(J') \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2 = m_0^2 c^2 + \hbar^2 \frac{\square a}{a} = M_0^2 c^2,$$

$$(C') \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial a}{\partial t} - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{a}{2} \square \varphi = 0$$

où nous avons introduit au dernier membre de (J') ce que nous appellerons la masse propre variable M_0 définie par

$$(9) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\square a}{a}}$$

grandeur dont nous verrons plus loin la très grande importance.

4. — Formule du guidage et potentiel quantique.

Nous allons maintenant étudier les équations (J) et (J') qui correspondent à l'équation non relativiste de Schrödinger et à l'équation relativiste de Klein-Gordon.

Occupons-nous d'abord de l'équation de Schrödinger et de la formule (J). Si dans (J) on néglige les termes du second membre où figure la constante $\hbar$ de Planck, ce qui revient à faire abstraction des quanta, et si on pose $\varphi = S$, l'équation (J) devient

$$(10) \quad \frac{\partial S}{\partial t} - U = \frac{1}{2m} (\text{grad } S)^2.$$

Nous retrouvons ici pour la fonction S , qui est la fonction de Jacobi, l'équation de Jacobi de la Mécanique classique. C'est donc uniquement la présence du terme en $\hbar^2$ dans (J) qui fait que le mouvement de la particule diffère du mouvement classique. Quelle est la signification de ce terme? Il peut s'interpréter en admettant qu'en dehors du potentiel classique U intervient un autre potentiel Q donné par la formule

$$(11) \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a}.$$

Par analogie avec les formules classiques $\partial S / \partial t = E$ et $\mathbf{p} = -\overrightarrow{\text{grad}} S$, où E et $\mathbf{p}$ sont l'énergie et la quantité de mouvement classiques, nous pouvons écrire

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E, \quad -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \mathbf{p}$$

et, comme en Mécanique non relativiste la quantité de mouvement P s'exprime en fonction de la vitesse par la formule $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, nous obtenons

$$(13) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = -\frac{1}{m} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi.$$

C'est là ce que nous avons appelé « la formule du guidage » qui nous donne la vitesse de la particule quand elle occupe la position x, y, z , à l'instant t en fonction de la variation locale de la phase à cet instant.

Il importe de préciser que a et φ sont l'amplitude et la phase de l'onde v telles qu'elles existeraient si la région très petite d'amplitude très élevée qui constitue la particule n'existait pas. Si l'on préfère, l'on peut dire que a et φ sont l'amplitude et la phase de l'onde v au voisinage immédiat de la région

presque ponctuelle u_0 d'une onde définie par $u = u_0 + v$. J'ai pu donner des justifications de la formule du guidage basées sur cette dernière idée. Je revien-
drai plus loin sur cette question.

La force quantique $\mathbf{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} Q$ qui s'exerce sur la particule courbe la trajectoire de cette particule. Mais dans le cas important, un peu schématique, de l'onde monochromatique plane, Q est constamment nul et il n'y a pas de force quantique: la particule décrit alors avec une vitesse constante une trajectoire rectiligne qui constitue l'un des rayons de l'onde plane monochromatique et l'on retrouve ainsi l'image que j'avais dans l'esprit au moment de ma Thèse.

Mais, quand la propagation de l'onde est soumise à des conditions aux limites, il peut y avoir apparition de phénomènes d'interférences ou de diffraction et alors, sous l'influence de la force quantique, le mouvement défini par la formule du guidage cesse d'être rectiligne et uniforme. Tout se passe alors comme si les obstacles qui entravent la propagation de l'onde exerçaient à distance sur la particule, par l'intermédiaire du potentiel quantique, une action déviante. Les partisans de l'ancienne « théorie de l'émission » pensaient que la lumière est entièrement formée de particules et, comme ils savaient déjà que la lumière peut contourner le bord d'un écran, ils disaient que le bord de l'écran exerce une force sur les particules de lumière qui passent à son voisinage. Sous une forme beaucoup plus élaborée, nous retrouvons ici une idée analogue.

Nous passons maintenant à l'étude de l'équation de Klein-Gordon et à la formule (J'). Remarquons d'abord que si, dans la formule (J'), nous négligeons les termes en $\hbar^2$, nous obtenons en posant $\varphi = S$

$$(14) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \varepsilon A_x \right)^2 = m_0^2 c^2.$$

Or cette équation est en Mécanique relativiste sans quanta l'équation de Jacobi pour une particule de masse propre m_0 et de charge électrique ε soumise à un champ électromagnétique dérivant du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur A , comme nous devons nous y attendre.

Si nous conservons les termes en $\hbar^2$ et si nous utilisons la masse propre variable M_0 définie par (9), nous sommes naturellement amenés à poser

$$(15) \quad \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V, \quad \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \varepsilon \mathbf{A})$$

avec $\beta = v/c$, ce qui conduit à la formule du guidage relativiste

$$(16) \quad \mathbf{v} = -c^2 \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \varepsilon \mathbf{A}}{\partial \varphi / \partial t - \varepsilon V}.$$

A l'approximation newtonienne, avec $\mathcal{A} = 0$ et $\partial\varphi/\partial t - \varepsilon V \simeq m_0 c^2$, nous retrouvons bien la formule (13).

La force quantique va ici résulter des variations de la quantité $M_0 c^2$ quand la particule se déplace dans son onde. Pour avoir toujours un potentiel quantique nul dans le cas de l'onde monochromatique plane, nous poserons

$$(17) \quad Q = M_0 c^2 - m_0 c^2.$$

A l'approximation non relativiste où $c \rightarrow \infty$ et où $\square a \simeq -\Delta a$, nous retrouvons la valeur

$$Q = \sqrt{m_0 c^4 + c^2 \hbar^2 \square a / a} - m_0 c^2 \simeq -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\Delta a}{a}.$$

Les formules relativistes que nous venons d'étudier sont très importantes pour tout ce qui suit car la Mécanique ondulatoire est, comme je l'avais senti dès ses débuts, une théorie essentiellement relativiste dont l'équation de Schrödinger, qui n'est pas relativiste, ne suffit pas à révéler la véritable nature.

5. — Interprétation du mouvement de guidage.

Il importe maintenant de mettre en évidence deux caractéristiques essentielles du mouvement de guidage.

La première d'entre elles, c'est que la particule en se déplaçant dans son onde reste constamment en phase avec cette onde. Pour le démontrer supposons d'abord que la particule n'est soumise à aucune force autre que la force quantique précédemment définie, ce qui revient à poser $V = \mathcal{A} = 0$ dans l'équation de Klein-Gordon. Si alors nous nous déplaçons le long de la trajectoire de guidage d'une longueur dl dans le temps dt , la variation correspondante de la phase de l'onde sera

$$(18) \quad d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right) dt = \\ = \left(\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dt = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt.$$

Or la particule ayant une fréquence interne $\nu_0 = M_0 c^2 / h$, sa phase interne φ , quand elle se déplace de dl pendant le temps dt varie de

$$(19) \quad d\varphi_t = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt = d\varphi.$$

Nous voyons donc bien que la particule se déplace dans son onde de façon que sa vibration (*) reste constamment en phase avec celle de l'onde.

On peut interpréter ce résultat en remarquant que la particule est définie dans cette théorie étant une très petite région de l'onde où l'amplitude est très grande et qu'il paraît par suite naturel que le rythme interne de la particule soit toujours le même que celui de l'onde à l'endroit où elle se trouve.

Nous ferons à ce sujet la seconde remarque très importante suivante. Pour que cette interprétation du guidage soit acceptable, il faut que les dimensions de la petite région singulière constituant la particule soient très petites par rapport à la longueur d'onde de l'onde v . On peut dire que toute la théorie que nous développons aurait une limite de validité pour les très courtes longueurs d'onde, c'est à dire pour les énergies très élevées. C'est là une remarque qui est sans importance pour les cas usuellement considérés, mais qui pourrait devenir capitale dans le cas des très hautes énergies.

Etendons maintenant la démonstration qui précède au cas où, dans l'équation de Klein-Gordon, V et A ne sont pas nuls. L'accord de phase entre l'onde et la particule s'exprime toujours par l'équation

$$(20) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \right) dt = \frac{d\varphi_i}{dt} dt.$$

Nous poserons ici $h\nu_0 = \partial \varphi / \partial t = M_0 c^2 + \varepsilon V_0 = M'_0 c^2$ avec $M'_0 c^2 = M_0 c^2 + \varepsilon V_0$ dans le système propre de la particule où celle-ci est momentanément en repos. D'autre part, on a

$$(21) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = h\nu = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M'_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = h\nu_i = h\nu_0 \sqrt{1-\beta^2} = M'_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2},$$

et la relation (20) se trouve encore bien vérifiée.

Il existe encore une autre caractéristique essentielle du mouvement de guidage. *C'est que le mouvement de la particule s'effectue suivant une Dynamique relativiste à masse propre variable.* Pour le voir, nous prendrons tout naturellement comme fonction de Lagrange de la particule en absence de champs classiques

$$(22) \quad \mathcal{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}.$$

Le principe de moindre action $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$ nous conduit alors aux équations de Lagrange

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

(*) Définie par l'expression $a_i \exp[i\varphi_i/\hbar]$, avec a_i et φ_i réels.

c'est à dire ici à

$$(24) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -c^2 \sqrt{1-\beta^2} \overrightarrow{\text{grad}} M_0,$$

ce qui montre bien que la dynamique de la particule est une dynamique relativiste à masse propre variable. La symétrie relativiste entre l'espace et le temps nous conduit à compléter l'équation (24) par la suivante

$$(25) \quad \frac{dW}{dt} = c^2 \sqrt{1-\beta^2} \frac{\partial M_0}{\partial t}.$$

Comme $dM_0/dt = \partial M_0/\partial t + \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} M_0$, les équations précédentes donnent

$$(26) \quad \frac{dW}{dt} - \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^2 \sqrt{1-\beta^2} \frac{dM_0}{dt}.$$

Or, on a

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})}{dt} - \mathbf{p} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) - \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \\ c^2 \sqrt{1-\beta^2} \frac{dM_0}{dt} = \frac{d}{dt} (M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}) + \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \end{array} \right.$$

d'où

$$(28) \quad \frac{d}{dt} (W - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2}) = 0,$$

et, comme nous supposons que si la particule est au repos on a $\beta = 0$ et $W = M_0 c^2$, il en résulte que

$$(29) \quad W = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + \frac{M_0 \mathbf{v}^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

relation qui est bien vérifiée puisque $W = M_0 c^2 / \sqrt{1-\beta^2}$.

La relation (29) que nous venons d'obtenir à partir de la dynamique du guidage à masse propre variable possède, nous le verrons, une signification thermodynamique très remarquable.

On obtiendrait la généralisation du raisonnement qui précède au cas de l'existence d'un champ électromagnétique extérieur en partant de la fonction de Lagrange

$$(30) \quad \mathcal{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} + e \left(V - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) = M'_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2},$$

compte tenu de la formule de transformation relativiste

$$V_0 = \frac{V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

6. — Interprétation des équations de continuité (C) et (C').

Cherchons maintenant la signification des équation (C) et (C') obtenues à la Section 3 qui correspondent respectivement à l'équation non relativiste de Schrödinger et à l'équation relativiste de Klein-Gordon.

Commençons par l'équation (C)

$$(C) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \operatorname{div} (a^2 \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi) = 0.$$

En vertu de la formule du guidage (4) et en posant $\varrho = Ka^2$, où K est une constante, l'équation (C) prend la forme

$$(31) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} (\varrho \mathbf{v}) = 0.$$

C'est ce qu'on nomme en Hydrodynamique l'équation de continuité où $\varrho d\tau$ est le nombre de molécules du fluide dans l'élément de volume $d\tau$ et où $\mathbf{v}$ est leur vitesse. Elle peut s'écrire $D(\varrho d\tau)/Dt = 0$ où la dérivée D/Dt est prise en suivant le mouvement des molécules et elle exprime la conservation du fluide. Mais ici nous n'avons qu'une particule et il semble alors naturel de considérer la grandeur $\varrho d\tau$ comme proportionnelle à la probabilité de présence de la particule dans l'élément de volume $d\tau$. Cependant, comme nous le montrerons plus loin, cette interprétation soulève une difficulté si l'on admet que la particule suit régulièrement sa trajectoire de guidage. Nous reviendrons sur cette difficulté et cela nous conduira à compléter la théorie du guidage, telle que nous l'avons développée jusqu'ici, par un élément aléatoire, ce qui nous ouvrira des horizons nouveaux.

Sans insister pour l'instant sur ce point, nous admettrons que la quantité $\varrho = a^2(x, y, z, t)$ multipliée par $d\tau$ nous donne, à un facteur de normalisation près, la probabilité de la présence de la particule à l'instant t dans l'élément de volume $d\tau$ de coordonnées x, y, z . Comme nous serons amenés à définir la fonction statistique ψ en fonction de l'onde réelle v par la relation $\psi = Cv$, ou C est une constante de normalisation telle que $\int |\psi|^2 d\tau = 1$, nous sommes conduits à dire que $|\psi|^2 d\tau$ représente en valeur absolue la probabilité de présence en question.

Examinons maintenant la relation (C') relative à l'équation relativiste de Klein-Gordon. Après multiplication par $2a$, elle peut s'écrire

$$(C') \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right) \frac{\partial a^2}{\partial t} - \left(\overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{A} \right) \overrightarrow{\text{grad}} a^2 + a^2 \square \varphi = 0.$$

Ici, nous définissons ϱ par la formule

$$(32) \quad \varrho = K a^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon V \right).$$

Avec cette définition de ϱ et en tenant compte de la définition (16) de la vitesse de guidage et de la relation de Lorentz entre les potentiels $(1/c)(\partial V/\partial t) + \text{div} \mathbf{A} = 0$, on retrouve la relation de continuité (31).

On peut donc admettre, avec les mêmes réserves que précédemment que, quand on peut utiliser l'équation d'ondes relativiste de Klein-Gordon, la quantité $\varrho d\tau = K a^2 ((\partial \varphi/\partial t) - \varepsilon V)$ donne la probabilité de la présence de la particule dans l'élément de volume $d\tau$ à l'instant t .

7. — Introduction de l'onde statistique ψ .

Jusqu'à présent, nous avons seulement introduit l'onde v qui, selon nous, contient une très petite région singulière, en général mobile, constituant la particule. Cette onde v qui aurait une très faible amplitude occuperait la presque totalité du domaine occupé par une onde $u = u_0 + v$ où u_0 représenterait l'onde dans la région extrêmement petite où l'amplitude est très grande. La structure de u_0 dans la région singulière pourrait être très complexe: c'est elle qui définirait la structure interne de la particule. Nous n'insisterons pas ici sur ce problème dont l'étude nous paraît encore prématurée. Il paraît très naturel que la propagation de l'onde v , onde physique réelle se propageant dans l'espace au cours du temps, puisse déterminer, comme nous l'avons admis dans la théorie du guidage, le déplacement de la particule qui lui est intégrée et aussi que les états stationnaires de cette onde v dans les systèmes tels que l'atome d'hydrogène puissent déterminer l'état quantique du système.

Mais, depuis les travaux de Schrödinger en 1926, on s'est habitué à considérer uniquement l'onde ψ dont l'amplitude est arbitrairement normée. Or, cette onde ne peut pas être considérée comme une onde physique d'abord parce que l'amplitude d'une onde physique a une valeur bien déterminée et ne peut être arbitrairement normée et aussi parce que, si ψ_1 et ψ_2 sont deux solutions particulières normées de l'équation linéaire des ondes ψ , la somme $\psi_1 + \psi_2$ de ces deux solutions n'est pas une solution normée de sorte que l'onde ψ normée ne possède pas la propriété de superposition qui caractérise les ondes physiques solutions d'une équation de propagation linéaire. Ainsi

a-t-on été amené à regarder l'onde ψ comme une représentation de probabilités, un simple instrument de prévision, permettant de prévoir les résultats possibles de la mesure des grandeurs attachées à une particule ou à un ensemble de particules. Or il est impossible qu'une simple représentation de probabilités puisse provoquer des phénomènes physiques tels que manifestation localisée d'une particule, phénomènes d'interférence ou de diffraction etc., ou imposer des valeurs aux énergies des états stationnaires des atomes. Seule une réalité objective peut provoquer de pareils effets et une représentation de probabilités n'a pas ce caractère.

Cependant il est certain que l'utilisation de l'onde ψ et de ses généralisations a conduit à un très grand nombre de prévisions exactes et de théories fructueuses. C'est là un fait qu'il ne saurait être question de contester. La situation s'éclaire si l'on fait intervenir à côté de l'onde ψ statistique l'onde v qui, réalité physique objective, peut, elle, provoquer les phénomènes dont l'onde ψ donne l'aspect statistique. Il importe donc d'établir une relation entre l'onde ψ et l'onde v .

En introduisant une constante C qui peut être complexe, nous introduisons cette relation en écrivant

$$(33) \quad \psi = Cv = Ca \exp[i\varphi/\hbar],$$

C étant un facteur de normalisation tel que $\int_V |\psi|^2 d\tau = 1$ où V est le volume occupé par l'onde v . Comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe précédent, en théorie de Schrödinger où $|\psi|^2 d\tau$ donne la probabilité de la présence de la particule dans l'élément de volume $d\tau$, la grandeur $|\psi|^2 d\tau$ donne cette probabilité *en valeur absolue* et c'est là la raison de l'introduction de la fonction statistique ψ normée à partir de l'onde réelle v par la relation (33).

Une première remarque à faire au sujet de la relation (33) est la suivante. Comme $|\psi| = |C|a$ et que la phase de ψ ne peut différer de celle de v que par une constante additive, nous voyons que les formules de guidage et les expressions du potentiel quantique données précédemment sont insensibles à la substitution de ψ à v .

Une autre remarque est la suivante: $|C|$ doit être très supérieur à 1. En effet, considérons une grandeur attachée à la particule dont on connaît la valeur g . La théorie actuelle, qui utilise uniquement la fonction ψ , admet que cette grandeur est répandue dans toute l'onde avec une densité $|\psi|^2 d\tau$ de sorte que $\int |\psi|^2 g d\tau = g$. Mais, dans la théorie de la double solution, la grandeur g est certainement concentrée dans la très petite région occupée par la particule et l'intégrale de $a^2 g d\tau$ étendue à l'onde v dans tout le volume V doit être beaucoup plus petite que g , d'où l'on tire

$$(34) \quad \int_V a^2 g d\tau \ll \int_V |\psi|^2 g d\tau,$$

d'où, d'après (33)

$$(35) \quad |C| \gg 1.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la théorie statistique actuelle considère comme répandu dans toute l'onde sans singularité ce qui est en réalité presque entièrement concentré dans la singularité.

C'est parce que l'interprétation précédente m'avait amené à considérer simultanément deux solutions distinctes de l'équation de propagation reliées par la solution (33), l'une v à caractère physique et non normée l'autre ψ normée et à caractère stastistique, que j'avais été amené à désigner cette réinterprétation de la mécanique ondulatoire sous le nom de « théorie de la double solution ». Par la distinction des deux ondes v et ψ , le mystère du double caractère subjectif et objectif de l'onde dans la théorie causale disparaît et l'on ne peut plus attribuer à une simple représentation de probabilités l'étrange propriété de provoquer des phénomènes physiques observables.

De plus la distinction de l'onde v et de l'onde ψ permet d'aborder sous une forme nouvelle toute une série d'importants problèmes tels que l'interprétation des phénomènes d'interférences, la théorie de la Mesure, les corrélations à distance, la définition des cas purs et des mélanges, la réduction des paquets de probabilité etc. Les résultats que nous avons obtenus dans ces dernières années sur ces problèmes, M. ANDRADE E SILVA et moi, nous font penser que ces résultats sont plus clairs et sans doute plus exacts que ceux des théories actuellement admises. Je n'insisterai pas ici sur ces questions et je me bornerai à noter que M. ANDRADE E SILVA a été récemment amené dans l'étude des cas purs et des mélanges à définir une fonction statistique $\psi = Cv$ qui dans certains cas peut différer de la fonction ψ usuelle.

8. — La localisation de la particule dans l'onde et la loi du guidage.

Jusqu'ici nous nous sommes bornés à définir l'insertion de la particule dans son onde en disant que l'onde physique réelle doit comporter une très petite région de très grande amplitude qui est la particule. En dehors de cette région singulière, l'onde physique se réduit à l'onde v de très petite amplitude obéissant aux équations linéaires usuelles. Nous avons déjà dit qu'il nous paraissait prématuré de chercher à décrire la structure interne de la région singulière, c'est à dire de la particule; il est d'ailleurs probable que cette description devrait faire intervenir des équations non-linéaires d'un type compliqué.

Une question qui peut être abordée avec plus de sécurité est celle de la justification de la loi du guidage par l'examen de la façon dont la région singulière doit se déplacer dans l'onde régulière qui l'entoure. J'ai exposé, il y a quelques années, des raisonnements permettant de justifier ainsi la loi du

guidage (*). Ils reposent essentiellement sur l'étude de la manière dont doivent se raccorder à la périphérie de la région singulière les grandeurs qui caractérisent respectivement l'onde régulière v et l'onde u_0 intérieure à la particule, celle-ci devant se mettre à croître très rapidement quand on pénètre dans la région singulière.

Ces raisonnements présentent une grande analogie avec ceux qu'EINSTEIN et ses collaborateurs avaient utilisé en Relativité générale pour justifier l'affirmation qu'une particule matérielle a un mouvement représenté par une géodésique de l'espace-temps. Cette question qui avait préoccupé EINSTEIN a été traitée d'une façon approfondie par DARMOIS et LICHNÉROWICZ. Le principe de leur méthode de démonstration est de considérer le tube d'univers très délié qui représente dans l'espace-temps le mouvement de la particule et d'écrire qu'il y a raccordement continu à la périphérie du tube des géodésiques du champ intérieur au tube avec les géodésiques du champ extérieur. Transposée en théorie de la double solution, la méthode consiste à écrire que la particule se déplace dans l'espace à l'intérieur d'un tube très étroit dont les parois sont formés par un ensemble de lignes de courant de l'onde v , considérée comme définissant un écoulement hydrodynamique. Comme ces lignes de courant sont définies par la vitesse v de la théorie du guidage, la particule reste enfermée dans le tube au cours de son mouvement et la loi du guidage de la particule par l'onde v en résulte. Bien que la nature physique du problème en Relativité générale et en Théorie de la double solution soit différente, la méthode de démonstration est analogue.

Mais il existe une autre manière plus schématique d'aborder le problème. Il consiste à représenter la particule par une singularité au sens mathématique du mot au sein de l'onde et à chercher des solutions à singularité mobile des équations d'onde. J'avais déjà esquissé cette méthode dans mon article du *Journ de Phys.* de 1927 [2]. J'avais, en effet, montré que l'on peut trouver avec l'équation de Klein-Gordon des solutions ayant la phase d'une onde plane monochromatique et possédant une singularité mobile. Mais il était important de généraliser ce résultat au delà du cas très particulier que j'avais étudié. Ce problème a été abordé par FRANCIS FER dans sa *Thèse de doctorat*, puis repris d'une façon plus étendue par THOUNN dans toute une série de travaux [4]. THOUNN a démontré qu'aussi bien dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, applicable aux particules de spin 0 que dans le cas des équations de Dirac applicables aux particules de spin $\hbar/2$ (en particulier aux électrons) et dans le cas des équations de Maxwell avec termes de masse applicables aux particules de spin $\hbar$ (en particulier aux photons), il existe des solutions à singularité ponctuelle *se déplaçant suivant la loi du guidage*. Assurément la représentation de la particule par une simple singularité mobile dans l'onde

(*) Voir bibliographie [3a] chapitre IX, p. 101 et appendice p. 287.

n'est pas une véritable représentation de la structure de la particule et n'en constitue qu'une image très schématique. Néanmoins, je considère les travaux de Thiounn comme très importants et comme constituant une très remarquable confirmation de la théorie du guidage.

9. - La thermodynamique cachée des particules.

Je vais maintenant présenter les principales idées de la Thermodynamique cachée des particules que j'ai développée comme prolongement de la théorie de la double solution depuis 1960 [5].

L'idée de considérer une particule comme une petite horloge conduit assez naturellement à penser que l'énergie de masse propre $M_0 c^2$ d'une particule peut être considérée comme une chaleur cachée dans la particule. En effet, une petite horloge contient dans son système propre une énergie d'agitation périodique interne qui ne s'accompagne d'aucune quantité de mouvement d'ensemble, énergie qui est assimilable à celle d'un corps contenant de la chaleur en état d'équilibre interne.

Nous introduirons alors la formule de transformation relativiste de la chaleur connue depuis les travaux anciens de Planck et de Laue vers 1908. Si dans le système propre d'un corps en équilibre intérieur homogène, la chaleur contenue dans le corps est Q_0 , dans un système de référence où ce corps a la vitesse d'ensemble βc , la chaleur Q qu'il contient est

$$(36) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Bien que cette formule longtemps incontestée ait été récemment mise en doute, je suis arrivé dans ces dernières années à la conviction qu'elle est bien exacte (*) et certainement applicable à un corps très petit comme une particule. Si donc une particule contient dans son système propre une quantité de chaleur $Q_0 = M_0 c^2$, la quantité de chaleur qu'elle transporte dans un système de référence où elle a la vitesse βc est

$$(37) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2} = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = h\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Ainsi la particule nous apparaît comme étant à la fois une petite horloge de fréquence $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ et comme un petit réservoir de chaleur de contenu calorifique $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ en mouvement avec la vitesse βc . Et c'est l'identité de forme des formules de transformation relativiste pour la fréquence d'une horloge et pour la chaleur qui rend possible ce double aspect.

(*) Voir [5b] et [5d].

Quand la particule se déplace suivant la loi du guidage, si l'onde n'est pas plane monochromatique, la masse propre M_0 varie d'une façon qui est donnée par la formule (9) quand on connaît la forme de l'onde. Nous avons vu que le mouvement de la particule est alors réglé par la Dynamique relativiste d'un corps à masse propre variable et nous sommes ainsi conduits à penser qu'il doit exister un lien étroit entre la formule fondamentale de la Thermodynamique relativiste et la formule du guidage. C'est bien ce que montre le raisonnement suivant.

Rappelons d'abord que, si φ est la phase de l'onde écrite sous la forme $a \exp [i\varphi/\hbar]$ avec a et φ réels, la théorie du guidage nous dit que l'on a

$$(38) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

D'autre part, la formule (37) de Planck-Laue, peut s'écrire

$$(39) \quad Q = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}.$$

En portant (38) dans (39), nous obtenons

$$(40) \quad M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Mais si la particule est assimilable à une horloge de fréquence propre $M_0 c^2/\hbar$, la phase de sa vibration interne écrite sous la forme $a_i \exp [i\varphi_i/\hbar]$ avec a_i et φ_i réels est

$$(41) \quad \varphi_i = h\nu_0 \sqrt{1-\beta^2} t = M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} t$$

et l'on aura

$$(42) \quad d(\varphi_i - \varphi) = 0,$$

ce qui est en accord avec notre hypothèse fondamentale suivant laquelle la particule se déplace dans son onde en restant constamment en phase avec elle.⁽¹⁾ Il existe donc un lien étroit entre la théorie du guidage et la thermodynamique relativiste. Ce fait est d'autant plus remarquable que la formule (36) résulte des travaux de Planck et de Laue qui sont très antérieurs à l'apparition de la mécanique ondulatoire et de la théorie de la double solution.

(1) Cette hypothèse n'est valable que si elle est assez large pour ne pas être exclue d'un mouvement brownien ou d'un échange d'énergie avec le milieu subquantique, hypothèse qui n'est pas réalisée pour l'électron en raison de sa très faible masse.

10. — La relation entre l'action et l'entropie.

Après tout ce qui vient d'être dit, il paraît naturel de raisonner comme il suit. La dynamique relativiste nous apprend que la fonction de Lagrange d'une particule libre de masse propre M_0 en mouvement avec la vitesse βc est $\mathcal{L} = -M_0 \sqrt{1-\beta^2}$ et que

$$(43) \quad \int \mathcal{L} dt = - \int M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt$$

est l'intégrale d'action, grandeur invariante puisque $M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt = M_0 c^2 dt_0$ où dt_0 est l'élément de temps propre de la particule. En accord avec une idée déjà aperçue par EDDINGTON il y a une cinquantaine d'années, il est alors tentant de chercher à établir une relation entre les deux grands « invariants » de la Physique que sont l'Action et l'Entropie. Mais pour pouvoir le faire, il faut donner à l'intégrale d'Action (43) une valeur bien définie en choisissant convenablement l'intervalle d'intégration. Il est alors naturel, avec nos idées, de choisir comme intervalle d'intégration la période T_i de la vibration interne de la particule de masse propre m_0 dans le système de référence où elle a la vitesse βc . Comme on a

$$\frac{1}{T_i} = \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1-\beta^2},$$

on définit ainsi une intégrale « cyclique » d'action en remarquant que la période T_i étant toujours très petite, on peut considérer que M_0 et β sont sensiblement constants dans l'intervalle d'intégration et en posant comme définition de l'action A

$$(44) \quad \frac{A}{h} = - \int_0^{T_i} M_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} dt = - \frac{M_0 c^2}{m_0 c^2}.$$

L'on est alors amené à définir l'entropie de l'état de la particule par la formule

$$(45) \quad \frac{S}{k} = \frac{A}{h}$$

où k et h sont respectivement la constante de Boltzmann et celle de Planck. On a alors puisque $\delta Q_0 = \delta M_0 c^2$ la relation

$$(46) \quad \delta S = -k \frac{\delta Q_0}{m_0 c^2}.$$

*Si S désigne l'entropie
du thermostat caché,
il faut écrire
 $-\frac{S}{k} = \frac{A}{h}$*

Nous sommes ainsi parvenus à attribuer au mouvement de la particule une certaine entropie et par suite une certaine probabilité P donnée par la formule de Boltzmann écrite sous la forme $P = \exp [S/k]$.

Des conceptions précédentes, j'ai pu tirer un certain nombre de résultats qu'on trouvera exposés dans mes publications sur ce sujet [5]. Les deux résultats obtenus qui me paraissent les plus importants sont les suivants:

1) Le principe de moindre Action n'est qu'un cas particulier du second principe de la Thermodynamique.

2) Le privilège, dont Schrödinger avait souligné le caractère paradoxal, que la Mécanique quantique actuelle attribue aux ondes planes monochromatiques et aux états stationnaires des systèmes quantifiés, s'explique par le fait qu'ils correspondent à des maximums de l'entropie, les autres états étant non pas inexistantes, mais d'une bien moindre probabilité.

11. — Nécessité d'introduire dans la théorie de la double solution un élément aléatoire. Le thermostat caché et le mouvement brownien de la particule dans son onde.

Nous avons jusqu'à présent raisonné en admettant que le mouvement de la particule dans son onde est entièrement déterminé par la loi du guidage. Nous allons maintenant montrer pourquoi ce point de vue ne peut pas être entièrement conservé.

Nous raisonnerons en partant de l'équation de Schrödinger qui fournit toujours une première approximation pour les vitesses petites par rapport à c . Nous avons vu au paragraphe 6 que l'équation de continuité (C) conduit à penser que la probabilité de présence de la particule dans un élément de volume $d\tau$ est proportionnelle à $a^2 d\tau$, a étant l'amplitude de l'onde v , ce qui conduit, en introduisant l'onde statistique normée par la relation $\psi = Cv$, à dire que la probabilité en question est égale en valeur absolue à $|\psi|^2$, résultat bien connu. Cependant cette idée paraît avec nos conceptions conduire à des difficultés. On le voit, par exemple en considérant un atome d'hydrogène dans un de ces états stationnaires du type s . La formule du guidage $\mathbf{v} = -\text{grad } \varphi / m$ nous donne $\mathbf{v} = 0$. L'électron serait donc immobile en un point de l'atome et l'on ne voit pas comment la relation de continuité (C) pourrait alors nous conduire à justifier la probabilité en $|\psi|^2 d\tau$. On peut conclure qu'il faut compléter cette relation par l'introduction d'un élément aléatoire.

Il semble que cette difficulté soit tout à fait analogue à celle qui est bien connue en Mécanique statistique classique où le théorème de Liouville, qui fournit une formule de continuité dans l'espace des phases, ne suffit pas à établir que la probabilité pour que le point représentatif d'une molécule d'un gaz soit présent dans un élément de volume de son extension-en-phase est

proportionnelle à cet élément de volume. Pour justifier cette affirmation, il faut introduire dans le mouvement des molécules un élément aléatoire qui perturbe constamment ce mouvement. Boltzmann, considérant cet élément aléatoire comme résultant des chocs continus de chaque molécule avec les autres molécules du gaz, l'avait appelé « le chaos moléculaire ».

Par analogie, il semble bien que le fait universellement admis qu'une particule a une probabilité $|\psi|^2 d\tau$ de manifester sa présence dans un élément de volume $d\tau$ entraîne nécessairement, quand on adopte les idées de la théorie de la double solution, l'intervention d'un élément aléatoire d'origine cachée. Or cela implique que le mouvement régulier de la particule prévu par la loi du guidage doit subir continuellement des perturbations aléatoires dont l'effet est de la faire passer constamment d'une trajectoire de guidage sur une autre. Alors, grâce à l'introduction de ces perturbations aléatoires, l'équation de continuité $\partial \rho / \partial t + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$ où $\rho = a^2$ et où $\mathbf{v}$ est la vitesse de guidage permettra de justifier la loi de probabilité de présence en $|\psi|^2 = a^2$.

On aboutit ainsi à l'idée que le mouvement d'une particule est la combinaison d'un mouvement régulier défini par la formule du guidage et d'un mouvement aléatoire ayant le caractère d'une agitation brownienne. Une comparaison simple fera mieux comprendre la possibilité d'une telle superposition de mouvements. Considérons l'écoulement hydrodynamique d'un fluide. Un granule placé sur la surface du fluide sera entraîné par le mouvement de celui-ci. Si le granule est assez lourd pour ne pas subir sensiblement l'action des chocs individuels qu'il reçoit des molécules invisibles du fluide, il décrira l'une des lignes de courant de l'écoulement hydrodynamique qui pourront être comparées aux trajectoires de guidage. Mais si le granule est suffisamment léger, son mouvement sera constamment perturbé par ses chocs individuels avec les molécules du fluide. Il sera donc animé, en plus du mouvement régulier que tend à lui faire suivre le long d'une ligne de courant l'écoulement général du fluide, d'un mouvement brownien qui le fera constamment passer d'une ligne de courant sur une autre. Nous obtenons ainsi une image de la superposition d'un mouvement aléatoire à un mouvement régulier analogue à celle que nous proposons pour la particule.

Dans l'image hydrodynamique que nous venons d'exposer, c'est l'ensemble des molécules invisibles du fluide qui joue le rôle d'un thermostat caché, thermostat qui, par son interaction constante avec le granule, lui impose un mouvement brownien suivant une conception bien connue de la Thermodynamique statistique. Mais dans le cas d'une particule qui nous semble soustraite à toute action perturbatrice comme un électron dans un atome d'hydrogène, quelle peut être l'origine de ces perturbations aléatoires dont il nous paraît nécessaire d'admettre l'existence? La question étant ainsi posée, on est évidemment amené à penser que toute particule, même quand elle nous paraît isolée, est constamment en contact énergétique avec un milieu caché qui constituerait

une sorte d'invisible thermostat. Cette hypothèse a été envisagée, il y a une quinzaine d'années par BOHM et VIGIER [6] qui ont donné à cet invisible thermostat le nom de « milieu subquantique ». Nous pensons qu'il y a, en effet, lieu d'admettre que la particule échange continuellement de l'énergie et de la quantité de mouvement avec un tel thermostat caché. Ces échanges auraient lieu régulièrement d'une façon bien définie si le mouvement de guidage existait seul, mais il s'y superpose des échanges énergétiques aléatoires ayant le caractère de fluctuations d'un type bien connu en thermodynamique statistique.

Dès qu'on a admis l'existence d'un milieu subquantique caché, on est amené à se demander quel est la nature de ce milieu. Il a certainement une nature assez complexe. En effet, il doit d'abord ne pas pouvoir servir de milieu de référence universel, ce qui serait en opposition avec la théorie de la Relativité. De plus, il se comporte non pas comme un thermostat unique, mais plutôt comme un ensemble de thermostats dont les températures seraient reliées aux énergies propres m_0c^2 des diverses sortes de molécules. Bien que des tentatives intéressantes aient déjà été faites pour préciser la nature du milieu subquantique, il me paraît prématuré de discuter ici ce problème.

12. — Conclusion.

Tel est, exposé dans ces grandes lignes, l'état actuel de l'interprétation de la Mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution avec ses prolongements thermodynamiques récents. Je pense aujourd'hui que cette interprétation, quand elle aura été approfondie, étendue et peut-être sur certains points modifiée, nous permettra de mieux comprendre la véritable nature de la coexistence des ondes et des particules sur laquelle les formalismes de la Mécanique quantique actuelle ne nous fournissent que des renseignements statistiques souvent exacts, mais à mon avis incomplets.

R É F É R E N C E S

- [1] a) *Compt. Rend.*, **177**, 506, 548, 630 (1923); b) Thèse de Doctorat (Paris, 1924) (rééditée en 1963).
- [2] *Journ. de Phys.*, **5**, 225 (1927).
- [3] a) *Une interprétation causale et non-linéaire de la mécanique ondulatoire: la théorie de la double solution* (Paris, 1956) (traduction anglaise (Amsterdam, 1960); b) *La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire* (Paris, 1957); c) *Etude critique*

des bases de l'interprétation usuelle de la mécanique ondulatoire (Paris, 1963) (traduction anglaise (Amsterdam, 1964)); d) *Ondes électromagnétiques et photons* (Paris, 1968); e) *Journ. de Phys.*, **20**, 963 (1959); f) **28**, 481 (1967); g) *Certitudes et incertitudes de la science* (Paris, 1966).

- [4] a) F. FER: Thèse de Doctorat, Bureau de Documentation Minière (Paris, 1957);
b) M. THIOUNN: Thèse de Doctorat, Cahiers de Physique, No. 174 (1965);
Compt. Rend., B **262**, 657 (1966); *Portugaliae Phys.*, **4**, 208 (1966).
- [5] a) *La thermodynamique de la particule isolée (ou thermodynamique cachée des particules)* (Paris, 1964); b) *Int. Journ. Theor. Phys.*, **1**, 1 (1968); c) *Ann. Inst. H. Poincaré*, **1**, 1 (1964); d) **9**, 89 (1968).
- [6] D. BOHM et J. P. VIGIER: *Phys. Rev.*, **96**, 208 (1954).
- [7] *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire* (Paris, 1971).