Nombres en physique

Unités et étalons

Description logico-mathématique

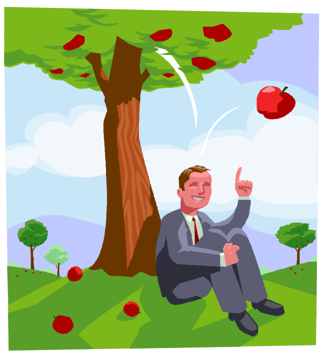
Élucubrations anthumes V

Philippe Ch. Zabey

Édition expérimentale 0.9.1

Hiver 2014

Élucubrations anthumes V
Philippe Ch. Zabey
Édition expérimentale 0.9.1



À Janine

qui m'a accompagné

pendant mes années d'élucubrations

(et il y en a eu de nombreuses,

durant <u>et</u> après ma carrière)

ÉLUCUBRATIONS ...

Selon l'excellent dictionnaire Littré, l'origine latine de ce mot est *elucubrare*, travailler avec soin ; elle renvoie au verbe *lucubrare*, travailler à la lumière d'une lampe.

Un coup d'œil au non moins excellent *Dictionnaire Latin-Français*, de Quicherat, Daveluy et Chatelain, me confirme cette étymologie et me propose même une citation de Cicéron : *elucubrare orationem*, préparer avec soin, soigner un discours ; citation à laquelle je me rallie totalement. Enfin une petite recherche sur Internet me signale le joli *lucubrum*, petite lampe, à huile bien évidemment ; ce mot daterait du VIe siècle après J.C.[1]. Tout cela à partir de « lux », la lumière !

Il va de soi que je récuse ici les acceptions modernes de ce mot, acceptions **péjoratives** selon le Petit Robert, **ironiques** selon le Quillet-Flammarion, ou encore **moqueuses** selon le Littré.

... ANTHUMES (V)...

Ceci est un clin d'œil à l'humoriste Alphonse Allais, l'auteur de ses *Œuvres Anthumes*.

Mais pourquoi justement Alphonse Allais ? Car enfin, quelle qu'en soit la nature, toutes les œuvres humaines sont anthumes[2] ! Seules certaines éditions peuvent se payer le luxe d'être posthumes.

C'est que notre ami fut l'un des premiers à protester avec humour contre cette manie, que j'appelle *initialite* ou *siglomanie* et qui consiste à remplacer des noms ou des titres par une suite de lettres formant ainsi un sigle qu'il faut de toutes façons expliquer à chaque occurrence ou presque. Il propose en exemple l'A.T.C.H.O.U.M., soit l'Association des Terrassiers Cyclistes du Havre et des Organistes Unis de Montivilliers.

Or je donnerai certainement, moi aussi, dans ce travers qui a envahi toute la société actuelle. Alphonse Allais me servira ainsi de caution morale.

... ET SCIENTIFIQUES

Mathématiques et même mathématique[3], physique, informatique, telles sont ces sciences dites exactes[4] que j'ai eu du plaisir à enseigner pendant 45 ans avec mes

[1] L'auteur serait l'évêque Isidore de Séville (Isidorus Hispalensis, 560 ou 570 – 4.4.636), dans ses « Étymologies ».

[2] Sauf les Mémoires d'Outre-Tombe, et encore... Je signale encore que Georges Perec a, lui aussi, produit des *Œuvres Anthumes* (1978).

[3] Vers la fin des années 1960 est apparue à Genève la mode des mathématiques dites modernes, mode accompagnée de chamboulements psychologiques et prétendument pédagogiques, le plus important ayant été sans contredit ce singulier « la mathématique » destiné à convaincre les pauvres élèves de l'unité conceptuelle de cette discipline sans la rendre plus facile. Fut-ce un échec ? En tous cas, 10-15 ans plus tard, on est revenu au pluriel usuel.

[4] Quoique, un jour, un collègue m'a affirmé que l'informatique n'était qu'une science « à peu près exacte »...

idées personnelles, tout en respectant les sacro-saints programmes, collégialité et honnêteté vis-à-vis de mes élèves obligent.

Ce sont ces mêmes disciplines que je n'ai cessé de creuser durant ces 45 ans et aussi à la suite de ma retraite de la fonction publique. Et c'est en suivant des cours à l'université que j'ai concocté le présent recueil sur les sujets abordés. Je me dois donc de citer ici quelques collègues dont j'ai (encore) le plaisir de suivre l'un ou l'autre cours ou séminaire ou séances d'exercices, par ordre bêtement alphabétique :

- Pierre Alain Chérix et Shaula Fiorelli Vilmart
- Jan Lacki,
- Gerhard Wanner,

sans oublier les conférenciers et participants des formations continues.

PROLÉGOMÈNES

Les sujets sont présentés ici en vrac, un peu à l'image que l'on peut avoir de mon bureau et de ses annexes (tables du salon et de la salle à manger avec les tapis avoisinants, descente de lit et autres tapis, et j'en passe...).

L'origine de ce recueil est à chercher dans les cours de mes collègues où, selon mon habitude, je n'ai pas manqué de « ramener ma fraise[5] ». C'est donc un recueil au gré des circonstances (qui seront parfois relatées dans des préludes).

C'est dire, en particulier, qu'il n'est pas rédigé comme l'exigeraient les canons en vigueur dans les publications scientifiques… En particulier, il y aura des redites, puisque les « chapitres » ont été écrits plus ou moins indépendamment les uns des

[5] Selon un grand principe qui m'a guidé, celui de ne jamais laisser à autrui la possibilité d'oublier que j'étais là... En toute (im-)modestie bien sûr.

autres.

Diagrammes aristotéliciens (DA)
en logique, en physique, en chimie, en économie d'entreprise, en mathématiques, et même en comptabilité, c'est dire…

Voici pour commencer ce qui ressemble à une table des matières :

Seuls les §§X) et XI) sont détaillés dans le présent recueil dans des « chapitres » séparés.

§I) Quelques références, incomplètes et en vrac

- Internet, bien sûr ; en particulier un document de présentation du sujet dont je n'ai pas réussi à retrouver la référence après que je l'ai imprimé ; il est intitulé : « *LA LOGIQUE D'ARISTOTE, Culture générale, séance 3* » (pour le §II).
- « *Précis de mécanique quantique* », polycopié du Département de physique théorique de l'Université de Genève rédigé par mes soins en 1970-1972, surtout sa page 47 (pour le §III).
- « *Matière, rayonnement, énergie* » d'Ulysse Filippi, Dunod 1966. Surtout son superbe chapitre 6, intitulé « *L'énergie comme mesure des changements* » (pour le §VII).
- Etc.

§II) C'est quoi, un DA ?

Le DA est un outil logique pour classer et présenter de façon synoptique, donc mnémotechnique, différents cas qui, dans un contexte donné, peuvent se présenter à notre sagacité. En voici le principe original :

- on dispose de deux critères « oui/non » indépendants[6] ;
- ce qui donne évidemment lieu à quatre cas a priori.

Ces quatre cas peuvent être présentés en une liste triée bêtement selon un ordre quelconque. Mais un DA permet de le faire dans quatre cases disposées en carré et qu'un bon tableur (logiciel inexistant à l'époque d'Aristote, qui n'en avait pas besoin) désignerait comme suit :

Case L1C1	Case L1C2
Case L2C1	Case L2C2

On peut dès lors mettre des titres aux lignes (L1 et L2), aux colonnes (C1 et C2) et, au besoin, aux diagonales ($L=C$ et $L \neq C$). De plus, les quatre cas peuvent être placés dans les cases comme on veut.

Dans notre science « moderne », les diagrammes de Venn-Euler ou de Karnaugh ont permis d'augmenter le nombre des critères et, donc, des cas à étudier. Ces diagrammes me paraissent parfois plus synoptiques que les tables de décision où les cas sont listés à la queue-leu-leu...

Pour clore cette introduction, voici (en termes et avec des notations « modernes ») ce qu'Aristote a classé.

Considérons un prédicat $P(x)$, *ie* un énoncé portant sur une variable x parcourant un certain domaine. A priori, $P(x)$ n'est ni vrai ni faux, et il en va de même de sa négation notée $\neg P(x)$; cela dépend du choix fait pour x. Certains puristes parlent de *fonction propositionnelle*. En revanche, on peut « évaluer globalement » un $P(x)$ ou un $\neg P(x)$ à l'aide de deux quantificateurs :

- le quantificateur existentiel, noté $\exists x$, se lisant « il existe (au moins) un x » ;
- le quantificateur universel, noté $\forall x$, se lisant « pour tout x ».

Un prédicat et sa négation, deux quantificateurs, il n'en faut pas plus pour tracer le superbe DA ci-dessous :

<table>
<tr><td></td><td>Colonne C1 : $\exists x$</td><td>Colonne C2 : $\forall x$</td></tr>
<tr><td>Ligne L1 : $P(x)$</td><td colspan="2" rowspan="2">Dans un cours de logique, je détaillerais les quatre cas ; on y parlerait d'exemples ou de contre-exemples.</td></tr>
<tr><td>Ligne L2 : $\neg P(x)$</td></tr>
</table>

Relevons simplement que les cases d'une même diagonale sont les négations l'une de l'autre. On appelle cela les lois d'Augustus de Morgan.

Aristote n'a peut-être jamais tracé de tels diagrammes ; mais il a conduit les savants qui lui ont succédé à le faire ; on connaît ces DA depuis le Moyen-Âge, je

[6] Un tel critère n'est rien d'autre qu'une alternative.

crois. À noter que le croquis médiéval que j'ai vu me fait plutôt penser à un tétraèdre dont les quatre sommets sont les cas et les six arêtes les liens cités (2 lignes, 2 colonnes et 2 diagonales) : c'est la représentation la plus symétrique...

§III) Mon 1er contact avec un DA, en mécanique quantique

Lorsque j'ai rédigé le « Précis de mécanique quantique », au début de la décennie 1970, je suis arrivé aux schémas de description de l'évolution d'un système physique à l'aide d''un opérateur autoadjoint appelé hamiltonien ; il s'interprète souvent comme donnant l'énergie du système. Au«**x**» schéma«**s**», car il arrive que cet hamiltonien H soit décomposé en deux termes, le 1er noté H_0 pour une partie du système pas trop difficile à résoudre, le 2nd noté V pour le reste. Les techniques de calcul nous disent ensuite comment ces différentes parties peuvent affecter les états <u>et</u>/<u>ou</u> les autres grandeurs du système (positions, vitesses, spins, etc.).

C'est à cette occasion qu'un de mes profs d'Uni, Marcel Guenin, m'a signalé l'existence des DA, chose que je n'avais jamais rencontrée auparavant.

En la présente circonstance, nos deux critères sont :

> la partie H_0 affecte les états ; sa négation est : elle affecte les autres grandeurs ;
> la partie V affecte les états ; sa négation est : elle affecte les autres grandeurs ;

ce qui donne lieu aux quatre cas tels que j'ai pu les présenter dans mon « Précis » :

<table>
<tr><td></td><td>Colonne C1 : V affecte les états</td><td>Colonne C2 : V affecte les autres grandeurs</td></tr>
<tr><td>Ligne L1 : H_0 affecte les états</td><td colspan="2" rowspan="2">Dans le jargon de la mécanique quantique, les quatre cas portent évidemment des noms qu'il est inutile de préciser ici[7].</td></tr>
<tr><td>Ligne L2 : H_0 affecte les autres grandeurs</td></tr>
</table>

Les diagonales ont, elles aussi, leur interprétation :

- diagonale « L=C » : schémas dans lesquels H_0 et V conjuguent leurs actions ; l'hamiltonien n'a, en fait, pas besoin d'être décomposé ;
- diagonale « L≠C » : schémas dans lesquels H_0 et V différencient leurs actions ; l'hamiltonien doit impérativement être décomposé. Ces schémas sont qualifiés « d'interaction » et l'on écrit même parfois H_I au lieu de V.

Dois-je ajouter que Marcel Guenin, de son côté, présentait dans son cours les mêmes quatre cas dans un DA dans lequel il échangeait les rôles des lignes, des colonnes et des diagonales ? C'est l'atout principal d'un DA (ou des diagrammes de Karnaugh) de permettre ces jongleries.

[7] Détails sur demande avec préavis.

§IV) Un DA en chimie

Quelques années plus tard, j'ai dû donner une leçon de chimie minérale lors d'un stage que je faisais dans une demi-classe terminale en filière scientifique du Cycle d'Orientation ; âge des 12 élèves : 14-15 ans. Le sujet du jour était la nomenclature des molécules à deux éléments.

Un DA m'est venu tout « naturellement » à l'esprit et je l'ai présenté avec force commentaires :

	Molécules sans oxygène	Molécules avec oxygène
Molécules sans hydrogène	L1C1[8] : Ce sont des <u>sels</u> en -ure ; exemple : NaCl.	L1C2 : Ces sont des <u>oxydes</u> ; exemple : CO_2.
Molécules avec hydrogène	L2C1 : Ce sont des <u>acides</u> en -hydrique ; exemple : HCl.	L2C2 : C'est l'<u>eau</u> H_2O, tout bêtement !

Anecdote. *Vers la fin de la leçon, après avoir introduit le cas « L2C1 », après avoir expliqué que la racine du mot soufre est sulf-, après avoir fait trouver aux élèves la formule H_2S, je leur ai demandé le nom officiel de cette molécule (anciennement baptisée hydrogène sulfuré). Et là, une belle empoignade s'est élevée entre eux :*

- *Ouais, facile, c'est l'acide sulfurique.*
- *Mais non...*
- *Mais si...*
- *Mais non, t'es c..* (censuré).
- … (ils parlaient un peu tous à la fois ; mais ce n'était pas du chahut).
- (finalement) *C'est l'acide sulfhydrique, t'as qu'à écouter ce que le prof a dit !*

Je n'ai rien eu à ajouter à cela. Ils avaient compris. Cette façon de procéder a bien impressionné leur vrai prof ainsi que la proffe de méthodologie qui assistaient tous deux à ma leçon de stage !

§V) Un DA dans un prospectus de fournitures de bureau

Parmi les différents objets proposés « à prix cassés », j'ai trouvé un tableau blanc sur lequel on avait tracé le DA suivant sous le titre :

« PRODUKT-/MARKTSTRATEGIEN : Produkt-/MarktMatrix (nach Ansoff)[9] »

Remarque trouvée sur Wikipédia : La matrice d'Ansoff est une matrice conçue par Igor Ansoff en 1957 pour classifier et expliquer les différentes stratégies de croissance

[8] Je ne place ces LC que pour la lisibilité actuelle ; ils n'existaient pas encore à l'époque.
[9] Je ne ferai pas l'injure au lecteur de traduire d'allemand en français.

pour une entreprise.

↓Produkt \ Markt→	bestehend	neu
bestehend	Marktdurchdringung	Marktentwiklung
neu	Produktentwiklung	Diversifikaton

§VI) Un DA en mécanique

Quand on veut faire montre de sa pédagogie ainsi que du fait qu'on « domine » un sujet, il convient de chercher des méthodes synoptiques de présentation qui se veulent mnémotechniques ; un DA peut être à cet effet un outil idoine. En voici un (sans les détails) qui est établi après quelques prérequis touchant les forces exercées par une source S et subies par un objet-test T.

La source S et l'objet-test T sont ici supposés ponctuels pour simplifier	C1 : Dynamique	C2 : Énergétique
L1 : Avec une source <u>et</u> un objet-test	3e LN[10] : Loi de l'«action - réaction» ou des «actions mutuelles». Elle s'écrit $F_{T/S} = - F_{S/T}$.	Dans de nombreux cas, on dispose d'une énergie potentielle.
L1 : Avec une source <u>mais</u> sans objet-test	Le <u>champ</u> de la source S est défini comme la force qu'elle pourrait exercer sur un objet-test T unité, s'il y en avait un.	Le <u>potentiel</u> de la source S est défini comme l'énergie potentielle qu'aurait un objet-test T unité, s'il y en avait un.

§VII) Un DA en comptabilité (on dit aussi *techniques quantitatives de gestion*)

Sur Internet, j'ai découvert que la comptabilité (d'une entreprise, d'un ménage, voire d'un État) pouvait être envisagée comme une *approche systémique quantifiée* pour l'étude de la vie de l'entreprise, du ménage ou de l'État.

Quelle belle expression, bien ronflante et destinée aux frimeurs[11]... !

Il n'en fallait pas plus pour que je présente dans un DA les bases de cette discipline en y classant les principaux types de comptes. Un DA qui se veut pédagogique et que je n'ai trouvé nulle part.

---

[10] 3e loi de Newton. Les deux premières figurent dans les prérequis.

[11] Dont je suis, évidemment.

	C1 : colonne *de gauche* dans une comptabilité[12]	C2 : colonne *de droite* dans une comptabilité
L1 : Situation (on la lit dans un bilan)	Comptes d'Actif	Comptes de Passif
L2 : Évolution (on la lit dans un journal)	Comptes de Charges	Comptes de Produits

Ce sont les titres « situation » et « évolution » qui rendent « systémique » cette approche ; en physique, on parlerait d'une énergie (que l'on note $\mathcal{E}$) pour L1 et d'un échange d'énergie (que l'on note $\Delta\mathcal{E}$) pour L2.

Et dire que je ne suis pas à l'origine de cette comparaison entre l'énergétique et la comptabilité ; elle m'a pourtant été fort utile dans mon enseignement de l'énergie ! Pourquoi, en effet, ne pas considérer l'énergétique comme une *approche systémique quantifiée* pour l'étude de l'évolution d'un système ?

§VIII) Un DA en analyse combinatoire

Ce beau chapitre sert souvent d'introduction au calcul des probabilités car on y apprend à dénombrer les cas « possibles » et les cas « favorables » pour évaluer aussi « honnêtement » que faire se peut les mises d'un pari. Il y a donc lieu de faire des choix aléatoires parmi les n éléments d'un certain ensemble que je note F.

Si le 1^er^ choix (on dit aussi le 1^er^ tirage) offre toujours n possibilités, il convient de réfléchir à la façon de procéder aux choix ou aux tirages ultérieurs (il y aura p choix ou tirages en tout) :

- Opère-t-on avec ou sans remise, *ie* « avec ou sans répétitions » ?
- Classe-t-on les éléments choisis dans un certain ordre ou les amasse-t-on en vrac, *ie* « dans l'ordre » ou « dans le désordre » ?

Encore une fois deux critères indépendants, donc un DA à établir. Le voici :

	C1 : Tirages sans remise, *ie* sans répétitions ; Ici, on doit avoir $p \leq n$	C2 : Tirages avec remise, *ie* avec répétitions
L1 : On place les éléments choisis dans un certain ordre	Si $p < n$: Ce sont les A Si $p = n$: Ce sont les P	Ce sont les A surlignés
L2 : on les laisse en vrac, *ie* en désordre	Ce sont les C	Ce sont les C surlignés

12 Si mes profs de compta voyaient ces titres, ils me taperaient sur les doigts. On doit en effet dire colonne des « débits » et colonne des « crédits », et ce pour des raisons qui auraient tendance à m'échapper...

Dans le jargon de l'analyse combinatoire, A / C / P = respectivement arrangements / combinaisons / permutations ; le surlignage indique les répétitions possibles.

Il manque les « P surlignés » ; ils apparaissent en fait dans la case L2C1 quand on effectue d'abord p_1 tirages, puis p_2, puis p_3, etc. avec $p_1+p_2+p_3+\ldots = n$.

§IX) Un DA pour un calendrier perpétuel

Le calendrier perpétuel a été un excellent sujet que j'ai pu proposer aux élèves des différentes écoles où j'ai enseigné : en physique, en mathématiques, en informatique. Un beau problème est le suivant :

- montrer que chaque année comporte au moins un vendredi 13 ;
- en serait-il de même avec un vendredi 31 ?

D'autres énoncés sont à disposition sur simple demande avec préavis…

Mais le DA annoncé en titre, où est-il ?

Une année de notre ère (on travaille donc dans $\mathbb{N}^*$; en fait dans $\mathbb{N}^*\backslash\{1582\}$) peut être :

- <u>soit</u> julienne <u>soit</u> grégorienne (sauf 1582, qui aura été julienne <u>et</u> grégorienne) ;
- <u>soit</u> normale, avec 365 jours, <u>soit</u> bissextile avec 366 jours (sauf 1582 qui, bien que normale, n'aura eu que 355 jours ; en effet, le jeudi 4.10.1582 a été suivi immédiatement du vendredi 15.10.1582).

Julienne *vs* grégorienne, normale *vs* bissextile, voilà de quoi constituer un DA simple et de bon goût. Seule donc l'année 1582 échappe à cette double dichotomie.

§X) Deux DA en électromagnétisme

(sujet faisant l'objet d'un « chapitre » séparé)

Cette superbe discipline, un des fleurons de la physique du XIX[e] siècle avec la thermodynamique, a donné lieu historiquement à plusieurs systèmes d'étalons (en abrégé « perso » SystÉtals) que j'ai cherché à classer, toujours dans un but synoptique, donc pédagogique. Voici d'abord une liste de ces SystÉtals :

- Système cgs-esu ;
- Système cgs-emu ;
- Système de Gauss ;
- Système de Heaviside-Lorentz ;
- Système International SI, inspiré de Giorgi et initialement nommé MKSA.

Curieux, non ? Il y en a cinq, alors qu'un DA ne contient que quatre cases !

La réponse est que les deux premiers valent pour l'électricité et pour le magnétisme comme chapitres séparés, mais que les trois autres valent pour l'électromagnétisme postérieur à l'expérience d'Œrsted (1820). Autrement dit et en formule, seuls les trois derniers sont cohérents en ceci qu'ils reposent sur la définition du courant I comme déplacement de charges : I := dQ/dt.

Voici d'abord le DA tout fait :

	C1 :	C2 :
L1 :	Systèmes cgs-esu et – cgs-emu	SI
L2 :	Gauss	Heaviside-Lorentz

Et voici la signification des lignes et des colonnes :

- L1 : Systèmes que je qualifie de « pré-relativistes » puisque la force de Lorentz s'y écrit F_{Lor} = qvB (avec des vecteurs et un produit vectoriel).
- L2 : Systèmes que, par opposition, je qualifie de « relativistes » puisque cette même force s'y écrit F_{Lor} = q(v/c)B ; le quotient v/c n'est rien d'autre que le coefficient β de la relativité restreinte ; c'est ainsi que, par exemple, les champ E et B ont même dimension physique (bien que, et cela ne gêne pas, E soit polaire et B axial ; c'est d'ailleurs ainsi qu'on les distingue) ;
- C1 : Systèmes non rationalisés puisqu'on y a D = Q/r^2 ;
- C2 : Systèmes rationalisés puisqu'on y a D = $1/4\pi \cdot Q/r^2$.

Notons que, dans ces systèmes, la force de gravitation n'est jamais rationalisée !

Dans la case « L1C1 », les deux systèmes qu'elle contient se distinguent par l'expression des interactions (deux systèmes, deux interactions, voici donc encore un DA ! Décidément...) :

	cgs-esu :	cgs-emu :
Interactions électriques (loi de Coulomb) :	$F_{él} := qQ/r^2$	$F_{él} = c^2 \cdot qQ/r^2$
Interactions magnétiques (loi de Laplace) :	$dF_{ma}/dL = 1/c^2 \cdot 2iI/r$	$dF_{ma}/dL := 2iI/r$

Attention : rappelons que le I du cgs-emu est différent du dQ/dt du cgs-esu !

Le 3e DA se trouve à la fin du chapitre sur van der Waals ; Je fais là une remarque sur les signes en physique et je l'illustre avec les forces et les champs électrostatiques.

§XI) Un DA dans le jungle des grandeurs photométriques

(sujet faisant l'objet d'un « chapitre » séparé)

Car c'est une jungle, chacun en conviendra !

Mais on peut structurer tout cela grâce (évidemment) à un DA présentant, tant pour les *exitances* (anciennement baptisées émittances) que pour les *densités d'énergie* ou encore pour les *luminances*, les particularités engendrées par la dualité onde *vs* corpuscule et la dualité fréquence (ν) *vs* longueur d'onde (λ).

Deux dualités, il n'en faut pas plus pour dresser le DA ci-dessous :

<table>
<tr><td></td><td>C1 : grandeurs spectrales[13] exprimées en ν</td><td>C2 : grandeurs spectrales exprimées en λ</td></tr>
<tr><td>L1 : grandeurs spectrales énergétiques</td><td colspan="2" rowspan="2">Je ne présente pas ici les 4 formules spécialisées, elles font l'objet d'un « chapitre » séparé avec tous les détails (formules, dimensions, étalons).</td></tr>
<tr><td>L2 : grandeurs spectrales photoniques</td></tr>
</table>

Je précise seulement que, si la dualité C1 *vs* C2 repose sur la physique très classique des ondes (avec la belle formule $c = \nu \cdot \lambda$ où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide), la dualité L1 *vs* L2 résulte des quantifications de l'énergie opérées par Planck en 1900 et Einstein en 1905 (c'est pour cela et non pour la relativité que ce dernier a reçu le prix Nobel).

13 On disait autrefois « monochromatiques ».

En physique :
mesure de la constante g (pesanteur terrestre ; à distinguer de G)
En maths :
propriétés intrinsèques et extrinsèques d'une parabole verticale

Prélude. Dans mes lectures à propos des constantes universelles, de leurs rôles en physique, en particulier pour définir les étalons, je suis tombé par hasard sur le sujet cité en titre dans l'excellent ouvrage suivant :

- *Brian William Petley, « The Fundamental Physical Constants and the Frontier of Measurement », 1984 ; il y a différentes éditions sur le marché. Entre autres son chapitre 7, «The gravitational constants G and g » avec, pour g, le §7.4 « The acceleration due to gravity ».*

Pour mesurer g, on effectue ce que j'appelle des MRUG verticaux[14] et l'on repère quelques « t » et quelques « z » bien choisis.

Sauf que, dans beaucoup d'expériences faites en classe, l'instant initial, celui où l'on lâche la bille, intervient dans les mesures puisqu'un « t » ultérieur, donc non nul, se mesure à partir de cet instant. Or ce lâcher de la bille s'accompagne toujours d'effets secondaires indésirables. Le problème est donc : comment s'en débarrasser dans les mesures et les calculs puisqu'on ne peut pas les éviter ?

Il y a deux réponses possibles, clairement décrites dans l'alinéa 7.4.1 « *The basic principles of the free-fall methods* (FFM) » :

(i) La première, intitulée « *Simple FFM* », consiste à repérer trois instants (1, 2 et 3) **après** le départ, puis à effectuer les mesures suivantes :

Les Δt_{12} et Δt_{13}, les Δz_{12} et Δz_{13} correspondants.

Exercice pour le lecteur : établir la formule pour déterminer g à partir de ces 4 mesures. Corrigé sur demande avec préavis.

(ii) La seconde, intitulée « *Symmetric FFM* », plus subtile, consiste en un lancer vers le haut suivi de la chute ; on repère alors deux positions (1 et 2) par lesquelles la bille passe deux fois, positions autres que le point de départ, le sommet et le point de chute ; on mesure :

Le Δz entre ces positions,
les Δt_1 et Δt_2 pour passer d'un point à la montée au même point à la descente.

Exercice pour le lecteur : établir la formule pour déterminer g à partir de ces 3 mesures. Corrigé sur demande avec préavis.

[14] Ce sont des MRUA bien classiques, mais avec « g » comme accélération constante ; de plus, le mouvement est vertical pour éviter la rotation du mobile, en général une bille, sur un rail incliné.

Chacun sait que le graphe de la fonction t $\to$ z est celui d'une parabole verticale dans le repère[15] (Otz), ce qui permet d'étudier ce qui précède en termes purement mathématiques. Voici ce que cela donne.

Dans un repère « ortho » (Oxy), une parabole a pour équation $y = Ax^2 + Bx + C$, avec trois paramètres qui s'interprètent comme suit :

A donne l'ouverture[16], B la pente à l'origine, C l'ordonnée à l'origine.

Interlude. Pour le physicien, l'équation est $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$*, elle illustre bien le théorème selon lequel la solution générale d'une équation différentielle linéaire, ici* $d^2z/dt^2 = -g$*, est une combinaison affine de ses conditions initiales, et même linéaire si l'on considère l'accélération constante comme une telle condition.*

Mais voilà, seule A est une caractéristique **intrinsèque** (*le* $-\frac{1}{2}g$ *du physicien*) ; le B et le C ne font que positionner le repère ; leurs noms (avec les « à l'origine » en maths, *et les « initiales » en physique*) le disent clairement ; ce sont des caractéristiques extrinsèques. Et, dans le MRUG, « G » est bien cette caractéristique intrinsèque que l'on cherche à déterminer.

1er postlude pour le MRUG : la solution du second exercice a été établie par Ch. Volet, in CR Acad. Sc. Paris <u>222</u> (1946) pp. 373-… ; je n'ai pas encore lu ce papier.

2e postlude, toujours pour le MRUG : pour déterminer « g », des Δt *et des* Δz *suffisent. Joli résumé, non ?*

---

[15] Repère « ortho- » , mais pas nécessairement « –normé » !

[16] Ou alors la courbure au sommet. Comme on veut. En fait, on devrait plutôt citer l'inverse 1/A.

LA SAGA DES NOMBRES NATURELS

... telle que vue (entre autres) par Kronecker, Dedekind, Cantor, Peano et Grothendick, ...

... telle qu'enseignée dans les années 1960 par Karamata, mon prof de Calcul Différentiel et Intégral[17],

... et enfin, en toute (im-)modestie, telle que retenue par l'auteur,

... le tout avec ou sans le zéro !

Quelques sources :

- Richard Dedekind, *Traité sur la théorie des nombres* (éd° du Tricorne 2006) ; excellente traduction faite par mon collègue Claude Duverney qui y a conservé les notations originelles.
- Mes notes de cours (1962-1964).
- Internet, bien sûr, surtout pour les images.

- Eric Temple Bell, *Les grands mathématiciens* (Payot 1937 / 1950 / 1961) ; titre d'origine : *Men of mathematics* (1937).
- Un chapitre du cours du prof. Pierre-Alain Chérix, cours intitulé « propriétés transverses en mathématiques ».
- Etc.

[17] C'est ainsi que l'on appelait l'analyse réelle.

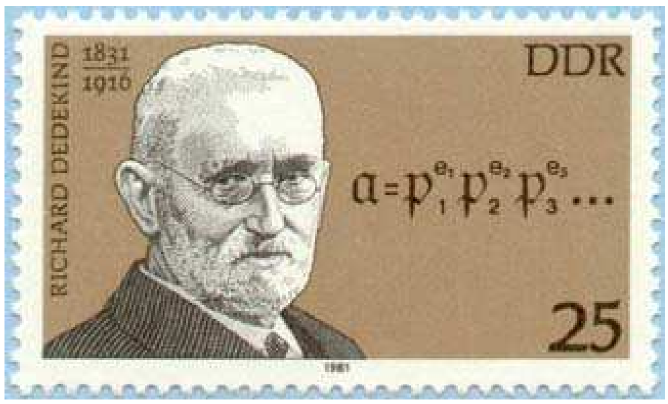
Léopold KRONECKER
7.12.1823 Liegnitz (Prusse, actuellement Legnica, Pologne)
29.12.1891 Berlin

À propos de *N* : « *Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht. Alles andere ist Menschenwerk*“ (Berlin 1836). Une telle vision des choses l’a sans doute dispensé de chercher à formaliser ou à définir les nombres naturels.

Autre citation, traduite en français : « *Tous les résultats des recherches mathématiques les plus profondes doivent finalement pouvoir s’exprimer sous la forme simple de propriétés des nombres entiers.* »

Si Platon disait « Dieu géométrise tout », Kronecker, de son côté, affirmait « Dieu arithmétise tout ».

Julius Wilhelm Richard DEDEKIND
6.10.1831 Brunswick ; 12.2.1916 Brunswick



À propos de *N*, dans son traité *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888), au §6: « *Die natürlichen Zahlen sind freie Schöpfung des menschlichen Geistes* ».

Ce traité, dans lequel il travaille avec des axiomes qui sont ceux de Peano avant la lettre, fait suite à celui sur les coupures, daté de 1872 et intitulé *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

Dedekind a introduit le symbole *Z* pour les nombres entiers. L'origine n'est pas la liaison en français (nombres z'entiers) mais l'initiale de Zahlen.

Une autre explication que j'ai trouvée je ne sais plus où : le caractère cyclique (zyklich) de *Z* ; actuellement, on dit de préférence monogène (cette propriété sera utilisée dans le chapitre sur les nombres en physique).

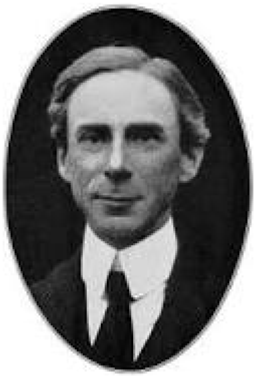
Ajout du 10.02.2015 : Les positions de Kronecker et de Dedekind ne sont pas si contradictoires qu'il y paraît ; selon la Bible, der liebe « Gott schuf den Menschen ihm zum Bilde, … » (Gen. I.27).

Georg Ferdinand CANTOR
3.3.1845 Saint-Pétersbourg ; 6.1.1918 Halle

Il a donné, avec Dedekind, une très jolie définition d'un ensemble fini E (*il n'existe pas d'injection de E dans une partie propre de lui-même*), puis il a démontré le théorème :

$$2^{\#E} < \#E,$$

et ce quel que soit E (si E est fini, c'est facile ; sinon il faut un peu ruser).



Dans une (éventuelle) prochaine édition, je donnerai (peut-être) ici la démonstration de ce théorème ; elle fait intervenir un raisonnement par l'absurde qui évoque le paradoxe de **RUSSEL** (**Bertrand Arthur William**, 3e comte Russell ; 18.5.1872 Trellech ; 2.2 1970 Penrhyndeudraeth).

Giuseppe PEANO
27.8.1858 Spinetta di Cuneo ; 20.4.1932 Turin

Son axiome de récurrence, qui aurait très bien pu s'appeler « de Dedekind-Peano » aux dires même de Peano, est à l'origine de la récursivité que l'on trouve dans certains langages de programmation.

Il a introduit deux symboles bien connus :

- *N* pour les nombres naturels ;
- *Q* pour les nombres rationnels (issus des Quotients).

Јован Карамата
1.2.1902 Zagreb, royaume de Croatie-Slavonie ; 14.8.1967 Genève

Dans ses cours, il a pris *Z* et non *N* comme ensemble de départ de l'analyse réelle, n'estimant pas nécessaire d'opérer deux symétrisations consécutives (de *N* vers *Z*, puis de *Z* vers *Q*) : il partait d'un ensemble totalement ordonné sans premier ni dernier élément et lui imposait des axiomes inspirés de ceux de Peano.

Détails sur demande avec préavis.

Alexander GROTHENDIECK
28.3.1928 Berlin

Jovan Karamata aurait pu motiver ses choix en citant le théorème de symétrisation « catégorique » qui a été énoncé en 1960 par Alexander Grothendieck ; on y parle :

- de monoïde (associativité et élément neutre) abélien simplifiable ;
- et de propriété universelle pour assurer l'unicité de la construction à un isomorphisme près.

Pour Alexander Grothendieck, N contient son élément neutre !

L'AUTEUR en toute (im-)modestie
26.2.1943 Bâle

Il fait partie du sous-ensemble non vide et non universel des mathématiciens à inclure le zéro dans N. Comme Grothendieck, comme Karamata, aussi comme Wikipédia. Mais pas comme Dedekind, par exemple.

Sa motivation vient des « *INTEGERS* ». Sous ce terme franglais, on désigne les quelques rares entiers représentables dans un ordinateur. Par exemple, avec 16 bits, on dispose de 65'536 (=2^{16}) valeurs dont voici quelques exemples :

	Valeurs dans Z	Représentation
	0	0'000'000'000'000'000
	1	0'000'000'000'000'001
	-1	1'111'111'111'111'111
Le « MaxInt »[18]	32'767	0'111'111'111'111'111
Le « MinInt »[19]	-32'768	1'000'000'000'000'000

Notez la dissymétrie entre les positifs et les négatifs ; elle est due au zéro qui occupe une place et qui est unique. Notez aussi que l'on utilise l'astuce dite du complément à 2 pour changer les signes. Notez enfin le beau calcul qui provoque ce que l'on appelle un « *overflow* » : MaxInt + 1 → MinInt ! Quand je vous disais que Z est cyclique…

[18] C'est l'entier maximal que l'on peut représenter.
[19] C'est l'entier minimal que l'on peut représenter.

Petite étude sur l'échelle de température de Newton
Ou : « Après les degrés Fahrenheit, Réaumur et Rankine,
sans oublier les Celsius et les Kelvin, voici les degrés Newton »

Lors de son cours intitulé « Histoire de la thermodynamique et de la mécanique statistique », Jan Lacki a étudié en traduction anglaise un texte de Newton portant sur la mesure des « chaleurs », car c'est ainsi que l'on appelait à l'époque les « températures » ; d'ailleurs ne dit-on pas encore de nos jours « source chaude/froide » pour « source à haute/basse température » ? Voici les références :

Texte original : [1] « Scala graduum caloris », texte anonyme (mais déterminé comme étant de la main de Newton)
in *Philosophical Transactions* 22 (1701) 824-829 ;
puis : « Scala graduum caloris et frigoris »
in *Isaaci Newtoni Opuscula mathematica, philosophica et philologica* tome II (1744) 419-423.

Traduction : [2] William Francis Magie
« HEAT, Newton »
in *A Source Book in Physics* (30e éd. 1969) 125-128
Harward University Press.

De mon côté, j'ai trouvé, entre autres, un travail d'Ulrich Grigull comparant, avec les actuelles, les valeurs de Newton des températures de fusion ou d'ébullition de différentes substances (pures ou en alliages) ; Grigull y étudie aussi la dilatation thermique pour le thermomètre à l'huile de graine de lin utilisé par Newton. Je renvoie à cet article le lecteur intéressé :

Grigull : [3] Ulrich Grigull, Technische Universität München
« Newton's temperature scale and the law of cooling »
in *Wärme- und Stoffübertragung* 18 (1984) 195-199.

Dans cette étude, je me suis penché sur les deux colonnes de valeurs données par Newton et décrites par Newton lui-même comme étant l'une en progression arithmétique, l'autre en progression géométrique.

Une feuille de calcul accompagne le présent document. Selon mon habitude (qui se veut pédagogique), les valeurs grisées sont les données, les autres étant toutes calculées. De plus, j'ai placé *en italique et en les encadrant* les valeurs tirées de l'article de Newton. Lisons cette feuille de calcul reproduite en dernière page du chapitre.

- Bordant les deux colonnes de Newton, trois renvois dont deux signalent une faute de frappe dans la traduction. Puis ce que j'appelle l'échelle de Newton avec la formule de calcul $\Theta_N = 6*2^d$; je suis en effet parti de l'idée que les valeurs de la colonne des « d » sont exactes, mais pas celles de la colonne des « g » ; de plus, pour imiter Newton et encore mieux comparer ses « g » et mes « Θ_N », la dernière colonne présente les « Θ_N » arrondis au 1/11e.

- Enfin les colonnes des échelles Celsius présentent les valeurs obtenues par Grigull [3] ou selon Wikipédia ; les formules sont au bas des colonnes, elles ne diffèrent que par un facteur (37/12)·(33/100) = 1.0175 ; je me suis permis de choisir pour la suite l'échelle selon Wikipédia, au prix d'une ligne ajoutée dans le tableau. Grigull part de la ligne « 12 / 1 » de Newton en postulant que la température du corps humain vaut 37 _°C ; et Wikipédia part de la valeur 33 citée dans la ligne « 34 / 2½ ».
- Je dois encore mentionner que la colonne des « d » est une progression arithmétique de raison ¼ et que celle des « Θ_N » correspondants est une progression géométrique de raison $2^{1/4} \approx 1.1892$.

Mais pourquoi Newton a-t-il choisi le plomb, l'étain, le bismuth et l'antimoine ? Pourquoi pas, par exemple, le cuivre ou l'argent, pourtant déjà connus à son époque ? La réponse est dans l'**alchimie** discipline philosophique par excellence ; une brève recherche m'a conduit au document :

[4] www.alchimie-pratique.org/bpfusion.html

qui mentionne principalement ces quatre substances (plus quelques autres). J'en extrais les lignes suivantes :

Lignes 3-5 : « *Au point de vue de leur température de fusion il est remarquable* [de noter[20]] *qu'un alliage fond toujours à une température plus basse que le moins fusible de ses constituants. Pour une partie d'entre eux, leur température de fusion est même plus basse que le plus fusible des métaux qui le composent.* » Jolie propriété physique joliment exprimée, non ?

Ligne 25 : « *Alliage* ***Plomb 3 parts, Étain 2 parts, Bismuth 5 parts.*** *Il fond à 91,6 °C. Il est dit* ***de Darcet****.* » Cette ligne rejoint le 1er alliage de la ligne « 34 / 2 ½ » de Newton, sauf que les proportions de Pb et de Sn sont inversées (je n'ai aucune explication à cela). 91,6 _°C donnerait les valeurs 30,2 et 2,33. Accord convenable sans plus.

Ligne 54 : « *Alliage* ***Étain 60 %, Plomb 39,7 %, Antimoine 0,3 %,*** *température de fusion 188 °C.* » Cette ligne rejoint le 2e alliage de la ligne « 57 / 3 ¼ » de Newton, sauf que le Sb n'y est pas mentionné. 188 _°C donnerait les valeurs 62 et 3.37. Ici aussi, accord convenable sans plus.

Une dernière remarque sur l'échelle Fahrenheit. Dans la référence déjà citée, on trouve la traduction d'un article de Daniel Gabriel Fahrenheit :

Texte original : [5] « Experimenta circa gradum caloris liquorum nonnullorum ebullientium instituta »
in *Philosophical Transactions* 33 (1724) 1.

[20] J'ai toujours été pénible quant au français ; d'où mon ajout…

Traduction : [6] William Francis Magie
« HEAT, Fahrenheit »
in *A Source Book in Physics* (30e éd. 1969) 131-133
Harward University Press.

Dans son échelle[21], Fahrenheit fixe à zéro le point de congélation le plus bas d'un « mélange d'eau, de glace et de sel ammoniac ou même de sel marin » ; comme point supérieur, il utilise la température d'un être humain en bonne santé, qu'il fixe, non à 100 comme on l'enseigne d'ordinaire, mais à 96[22] ! J'émets ici une hypothèse : entre 1 et 100, le nombre 96 est celui qui a le plus grand nombre de diviseurs non triviaux ; d'où ce choix de 96 que l'on pourrait qualifier d'opérationnel pour repérer les dilatations thermiques.

Pour terminer, voici un sujet que j'aurais très bien pu proposer à quelques-uns de mes élèves :

> « Entre 1724 (publication de Fahrenheit) et 1727 (décès de Newton), imaginez que ces deux physiciens soumettent aux *Philosophical Transactions* un article commun, rédigé évidemment dans le style de l'époque, présentant la façon de passer d'une de leurs deux échelles à l'autre. »

[21] Rappelons que de nos jours $\Theta_F = 32 + 9 \cdot \Theta_C / 5$.

[22] Respectivement 37 7/9 _°C et 35 5/9 _°C.

Et voici la feuille de calcul :

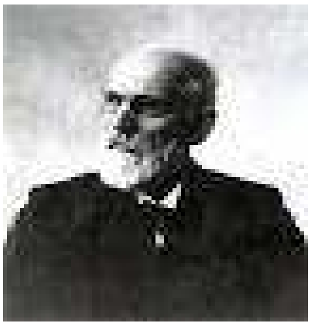
	Colonnes de Newton *(valeurs encadrées)*			**Échelle de Newton**	**Échelles Celsius selon**		Pour imiter Newton:
	Gauche	Droite			**Grigull**	**Wikipédia**	
	les "g"	les "d"		les Θ_N	les Θ_{CG}	les Θ_{CW}	arrondis des Θ_N
	0	-infini		0	0	0	0
			Ajout	6	18.5	18.181818	6
	12	*1*		12	37	36.363636	12
	14 3/11	*1 1/4*		14.270485	44.000663	43.243895	14 3/11
	17	*1 1/2*		16.970563	52.325902	51.425948	17
	20 2/11	*1 3/4*		20.181514	62.226335	61.156103	20 2/11
	24	*2*		24	74	72.727273	24
1)	*28 6/11*	*2 1/4*		28.540971	88.001327	86.48779	28 6/11
		2.45943162	3) Ajout	*33*	101.75	100	33
	34	*2 1/2*		33.941125	104.6518	102.8519	33 10/11
	40 4/11	*2 3/4*		40.363028	124.45267	122.31221	40 4/11
	48	*3*		48	148	145.45455	48
	57	*3 1/4*	2)	57.081942	176.00265	172.97558	57 1/11
	68	*3 1/2*		67.882251	209.30361	205.70379	67 10/11
	81	*3 3/4*		80.726056	248.90534	244.62441	80 8/11
	96	*4*		96	296	290.90909	96
	114	*4 1/4*		114.16388	352.00531	345.95116	114 2/11
	136	*4 1/2*		135.7645	418.60721	411.40758	135 8/11
	161	*4 3/4*		161.45211	497.81068	489.24882	161 5/11
	192	*5*		192	592	581.81818	192
1)	et non: 28 3/11	et non: 3 11/14	2)	formule: $\Theta_N = 6*2^d$	formule: $37\Theta_N/12$	formule: $100\Theta_N/33$	Ces arrondis sont au 1/11e
		formule: $d=lb(\Theta_N/6)$	3)				

1) et 2) pour corriger des fautes de frappe du livre [3]

3) "lb" désigne le logarithme binaire, ie en base 2 Formule: lb = ln / ln(2)
(notation que j'ai introduite à l'ESIG dans le chapitre "systèmes de numération")
ESIG = École supérieure d'informatique de gestion

Le gaz selon van der Waals et sa pression négative

Prélude. *Lors d'une journée annuelle de formation continue en physique[23], le conférencier a parlé en coup de vent de pression négative. Un de mes collègues, qui assistait au cours, s'est penché vers moi et m'a avoué en catimini qu'il ne voyait pas ce que cela pouvait signifier ; en effet, une pression se définit avant tout comme une force exercée sur une surface unité et, à part les orientations spatiales relatives de la force et de l'élément de surface, avec l'inévitable cosinus, il n'y pas lieu a priori d'affubler la pression d'un quelconque signe « - » physique[24]. Je lui ai promis alors les pages d'un cours que j'avais donné il y a longtemps déjà[25] à des élèves de filière scientifique sur le gaz selon van der Waals. En voici le résumé.*



Une étude cinétique et classique du gaz parfait, avec ses deux hypothèses principales, conduit à l'équation suivante, classique elle aussi :

$$PV = NkT$$

ou bien PV = nRT, selon qu'on travaille avec N particules élémentaires, ce que je préfère, ou avec n kilomoles. Dans tous les cas, on passe par l'équation :

$$PV = 3/2 \cdot N E_{cin} \text{ (énergie d'agitation thermique).}$$

Les deux hypothèses sont connues :

- Particules ponctuelles, donc pas de volume propre.
- Pas d'interactions autres que les chocs, supposés élastiques, entre elles et contre les parois.

De plus, il est à noter, et c'est là un point clé, que la pression offre deux aspects complémentaires :

---

[23] Une telle journée est proposée aux collègues actifs de l'Enseignement secondaire ; elle est aussi ouverte à ceux qui, comme moi, n'émargent plus au budget de l'État ; j'apprécie beaucoup de telles rencontres.

[24] J'essaie de distinguer un signe « - » physique, émanant du phénomène décrit, d'une signe « - » mathématique, émanant par exemple d'une orientation sur un axe. Voyez le postlude.

[25] Les notes que j'avais données à mes élèves étaient imprimées avec des stencils à alcool ou à encre ; c'est dire !

Un aspect mécanique pour sa mesure avec un manomètre ; cet aspect se traduit par la définition citée dans le prélude ; sa DimPhys[26] est alors [FL^{-2}].
Un aspect énergétique la rendant proportionnelle à une densité d'énergie, de DimPhys [$\mathcal{E}$L^{-3}], et rendant compte de la nature des forces en jeu : pesanteur pour la pression hydrostatique[27], agitation thermique pour la pression dans un gaz parfait, etc.

Puisque, dans un gaz parfait, tout réside dans l'agitation thermique, affublons d'un indice « cin » la pression et le volume :

- $V = V_{cin}$; c'est le volume à disposition pour les mouvements,
- $P = P_{cin}$; c'est bien une densité d'énergie, cinétique donc positive en l'occurrence,

et récrivons comme suit l'équation des gaz parfaits :

$$P_{cin}V_{cin} = NkT.$$

Mais telle qu'elle est présentée ci-dessus, cette équation est aussi valable dans le modèle selon van der Waals avec les deux amendements qu'il lui a apportés.

– 1er amendement : introduction d'un volume propre V_0 (curieusement baptisé parfois covolume), à ajouter au V_{cin} pour constituer le volume total V, *seul accessible à la mesure* :

$$V = V_{cin} + V_0, \text{ donc } V_{cin} = V - V_0.$$

– 2e amendement : introduction d'interactions attractives pour décrire la liquéfaction du gaz ; c'est à cet endroit qu'il y a une densité d'énergie potentielle négative (comme dans toute bonne liaison qui se respecte), donc une **pression négative**, qui vient se combiner à la pression cinétique pour donner la pression totale P, *seule accessible à la mesure* ; van der Waals propose une énergie potentielle par particule proportionnelle à la concentration des particules N/V, d'où :

$$P = P_{cin} - cte\cdot N^2/V^2, \text{ donc } P_{cin} = P + cte\cdot N^2/V^2.$$

Il n'y a plus qu'à substituer dans l'équation $P_{cin}V_{cin} = NkT$. Joli, non ?

Postlude, avec un DA en prime. *Signes « ± » physiques ? Phénoménologiques ? Algébriques ? Orientations ? Voilà de quoi perturber les élèves quand on les traite indistinctement. Qu'en est-il ? Voici quelques exemples.*

---

[26] Abrégé pour « dimension physique » ; [F] est celle d'une force, [$\mathcal{E}$] celle d'une énergie.

[27] De même que la force de pesanteur dérive de l'énergie potentielle de la pesanteur mgz, de même la force d'Archimède dérive de l'énergie potentielle hydrostatique qui se calcule exactement par la formule ρgH.

- *Signes physiques. Signes des charges électriques, signes d'un potentiel ou d'une pression vue comme une densité d'énergie (signes très utiles pour parler d'une liaison dans un puits).*
- *Certains physiciens, avant l'emploi des notations vectorielles, ont même parfois suggéré l'emploi d'un signe « ± » pour distinguer les attractions et les répulsions dans les lois de Newton et de Coulomb : signe « + » pour une répulsion, signe « - » pour une attraction ; un tel choix, peu usuel, permet d'insister sur la validité de la 3e loi de Newton !*
- *Signes algébriques ou vectoriels. Ils sont souvent attachés à une orientation des axes. C'est ici que l'on brise la symétrie de la 3e LN, puisqu'on y précise que le vecteur « $\underline{r}$ » doit être orienté de A vers B ou de B vers A.*

Et le DA promis ? Dressez-le pour les forces et les champs électrostatiques, selon les critères suivants (tout y est physique) :

- *L1/L2 : charge source positive / négative, donc champ E_S divergent/convergent.*
- *C1/C2 : charge test positive / négative, donc force subie $F_{S/T}$ directement / anti- parallèle au champ E_S.*
- *Diagonale L=C : répulsions ; diagonale L≠C : attractions. Donc, selon une remarque ci-dessus, force de Coulomb positive / négative.*

Encore une fois, joli, non ?

DA abrégé en guise de corrigé…

	C1 : charge test $q>0$ E_Q et $F_{Q/q}$ dir^{mt} //	C2 : charge test $q<0$ E_Q et $F_{Q/q}$ anti //
L1 : charge source $Q>0$ E_Q divergent	L=C Répulsion, $F_{Q/q}<0$	L≠C Attraction, $F_{Q/q}>0$
L2 : charge source $Q<0$, E_Q convergent	L≠C Attraction, $F_{Q/q}>0$	L=C Répulsion, $F_{Q/q}<0$

$F_{Q/q}$ (= $F_{q/Q}$ selon la 3e LN) = $K_{él} \cdot Qq/r^2$

La cinématique de la relativité restreinte (CRR)

vue comme un bon vieux problème de courriers

Premier prélude

Sur Internet, j'ai trouvé par hasard l'unique problème (simple) de courrier de l'ouvrage suivant : « *ARITHMÉTIQUE, Cours élémentaire (1500 exercices)* », 1895, Librairie Ch. Delagrave, avec cette belle citation de Montaigne en page de titre : « Sçavoir par cœur n'est pas sçavoir ». En voici l'énoncé :

- **65 p. 184** . La distance de Paris à Marseille étant de 88 Mm 4, on demande combien il faudra de temps à une locomotive qui parcourt 68 kilomètres à l'heure pour franchir cette distance.

Je précise que, dans cet ouvrage, « Mm » désigne le myriamètre (et non le mégamètre…) ! Donc 1 « Mm » = 10 km.

Deuxième prélude

Sautons un demi-siècle. Dans un excellent ouvrage en usage à l'école primaire suisse au milieu du XXe siècle (« *ARITHMÉTIQUE II* », Addor, Post, Schneider, Vaney ; Payot 1968 (c'est une 7e édition que j'ai trouvée aux puces pour CHF 5.50), on trouve quelques superbes problèmes « de courriers ». En voici quatre extraits du chapitre II intitulé « *Règles de trois, partages, mélanges, alliages* ».

- **246 p. 75**. Un cycliste part de Martigny à 8 h 15 min et arrive à Lausanne (distance 70 km) à 11 h 24 min. Il se repose pendant une demi-heure, puis repart à la même vitesse dans la direction de Genève. À quelle distance de Lausanne se trouvera-t-il à 14 h ? […] À quelle heure parviendra-t-il à Genève, si cette ville est à 60 km de Lausanne ?
- **259 p. 77**. Une automobile circule à la vitesse de 60 km/h sur une route parallèle à une ligne de chemin de fer. Elle croise un train, venant en sens contraire à la vitesse de 80 km/h. Quelle est la longueur du train si le croisement s'est fait en 2,7 s ?
- **260 p. 77**. Je suis dans un train dont la vitesse est de 72 km/h ; je vois passer en 2 $^2/_5$ s un train express marchant en sens inverse et ayant 108 m de long. Quelle est, en km/h et en m/min, la vitesse de ce second train ?
- **276 p. 78**. Un promeneur a parcouru 28 km en 5 h 50 min. Quelle est la distance parcourue par un deuxième promeneur en 3 h 45 min, si le premier fait 4 pas pendant que le second en fait 5 ? 6 pas du premier en valent 5 du second.

Troisième et dernier prélude, pour le plaisir

Encore un ouvrage genevois : « *Arithmétique et Géométrie, Exercices et problèmes* », Adrien Grosrey, 1959, Imprimerie G. Chappuis. Voici deux superbes problèmes.

- **394, p. 65-66**. Deux cyclistes A et B partent à la même heure (8 heures), A de Genève dans la direction de Lausanne, B de Lausanne dans la direction de Genève. A fait km/h 20, B fait km/h 25.
    1. À quelle heure et à quelle distance de Genève aura lieu la rencontre ?
    2. A partant à 8 heures et B à 8 heures 20, à quelle heure et à quelle distance de Genève aura lieu la rencontre ?
    3. A part à 8 heures et B à 8 heures 40 ; de plus, A s'arrête à 12 km de Genève et perd 8 minutes pour réparer. À quelle heure et à quelle distance de Genève aura lieu la rencontre ?

- **395 p. 60**. Deux amis, Pierre et Jean, partent en excursion. Au moment du départ Pierre, ayant oublié sa carte, propose à Jean de partir tranquillement en avant. Il est 8 heures du matin. Jean fait km/h 18. 28 minutes après, Pierre part à son tour en faisant km/h 24.
    1. À quelle heure et à quelle distance de Genève aura-t-il rejoint son camarade ?
    2. 28 minutes après, Pierre part à son tour et rejoint son camarade à 9 heures 48. Calculer la vitesse de Pierre.
    3. 24 minutes après, Pierre part à son tour et rejoint son camarade à km 28,8 du point de départ. Calculer la vitesse de Pierre.

Conclusion des trois préludes

Tout y est : mesures, calculs et même changements d'unités[28], pour les temps, les trajets, les positions, les vitesses, bref il y a là tous les ingrédients pour la CRR (qui ne traite que de MRUs, même si le « MU » des problèmes de courriers se déroule le long d'une courbe Rectifiable à défaut d'être Rectiligne…).

Il ne reste donc plus qu'à aborder la CRR dans le même esprit, selon une idée glanée dans l'excellent « *Relativité et bon sens* », Hermann Bondi, 1968, Dunod, collection Science-Poche.

Source : Wikipedia
Born: 1 Nov 1919 in Vienna, Austria
Died: 10 Sept 2005 in Cambridge, England

[28] Que j'appelle de préférence « étalons », et que Maxwell qualifiait de standards.

Les étalons de la CRR

- Le **temps** a toujours eu pour étalon la _s ; c'est la seule grandeur, parmi les cinq premières du SI, à être définie par un phénomène, les quatre suivantes l'étant par la fixation de constantes universelles, et ce dès le mois d'octobre 2011, date à laquelle la Conférence générale des poids et mesures a décidé de lancer une révision partielle du SI.

- L'**espace**, avec ses longueurs et ses distances, a comme étalon SI le _m défini par la valeur, posée exacte, de la célérité c. Mais ici, je préfère employer l'étalon *ad hoc* _sl 29) qui conduit à la superbe formule _c := 1·_sl/_s, donnant ainsi satisfaction aux physiciens qui « posent c=1 » ainsi qu'aux physiciens qui, comme moi, aiment encore et toujours distinguer explicitement une DimPhys d'un étalon…[30]. Autre jolie conséquence : une vitesse pourra s'écrire sous la forme v = β·_sl/_s, puisque β := v/c est un nombre pur.

- L'étalon SI pour l'espace est un bel exemple de la modernisation du SI ; je me plais à citer en plus :
  - L'étalon de **masse** défini par la valeur, à fixer exactement, de la constante de Planck. Voilà qui nous change du kilogramme en platine irridié…
  - L'étalon de **température** défini par la valeur, à fixer exactement, de la constante de Stefan-Boltzmann. Voilà qui nous change du point triple de l'eau…
  - L'étalon de **charge électrique** défini par la valeur, à fixer exactement, de la charge élémentaire. Voilà qui nous change de la loi de Laplace $dF_{ma}/dL = 2II'/r$…

Mais seuls le temps et l'espace sont utiles pour la CRR.

Remarques

- Comme chacun sait, l'_UA vaut environ 500·_sl. De même la _sl vaut environ 300'000·_km 31) selon la définition originelle datant de la Révolution française.

- Dans la bonne vieille arithmétique des deux pages précédentes, les courriers effectuaient leurs trajets à pied, à cheval, en diligence, à vélo, en auto ou en train. En CRR, les courriers seront les photons, puisque c'est par eux que les messages seront transmis. Avec cette particularité essentielle : leur vitesse, la fameuse célérité c, est une <u>constante universelle</u> (dans le vide) valable pour tous, les émetteurs aussi bien que les récepteurs. C'est là ce

---

29 C'est la seconde-lumière.

30 Dois-je rappeler que, dans mon modèle mathématique certes un peu frimeur, la DimPhys est une *rétraction* tandis que les étalons donnent lieu à une *section* ?

31 7,5 fois 40'000 = 300'000.

que l'on pourrait appeler le 2e principe de la CRR.

- o Le 1er principe est celui qui a donné son nom à la relativité : équivalence des référentiels en MRUs les uns par rapport aux autres (on est en RR).
- o Il y a aussi un principe « zéro » pour lequel je cite à peu près Yves Pierseaux dans *La structure fine de la relativité restreinte* (éd° L'Harmatan ; 1999 je crois), propos rapportés par Gilles Cohen-Tannoudji lors d'un séminaire consacré à Einstein le 21 mai 2005 :
  - « Principe de l'identité des unités de mesures (tiges rigides et rythmes identiques). »
  - « C'est ce principe qui permet d'attacher rigidement une horloge à un système de coordonnées (une telle horloge pourra être par exemple un atome de césium). »

- De même que l'on résout les problèmes de courrier par l'arithmétique de l'école primaire, de même nous nous permettrons en CRR de recourir au calcul algébrique. Et même de (vous faire parfois) tracer dans un repère orthonormé direct[32] (Otx) les représentations graphiques des différents MRUs, seuls à intervenir en CRR.
  - o « Ortho- », c'est normal, mais « -normé » ? alors que sur les deux axes (Ot) et (Ox) figurent des grandeurs de natures différentes ? Ci-gît l'intérêt d'avoir la _sl avec la _s : avec la même échelle, le MRU des photons sera représenté par des droites à ±45°, car de pente ±1 ; si ces droites passent par l'origine des axes, elles leur servent même de bissectrices. Joli, non ?
  - o Repère direct (Otx) ? Alors que presque tous, sinon tous, les ouvrages traitant de relativité utilisent le repère direct (Oxt) ? C'est l'usage « high school » qui a dicté mon choix, car il permet de passer sans autre de la cinématique de 1ère année gymnasiale à la CRR.

« Pour parler de relativité, il faut être [au moins] deux[33] »

Voici donc, pour commencer, Alice et Bob[34], chacun d'eux avec SON labo, SON horloge, SES appareils d'émission et de réception, SES miroirs, …

J'ai failli oublier : chacun a son ROND (Otx) ; mais puisque nous sommes en CRR, le temps et l'espace son homogènes et tous deux pourront en tout temps synchroniser les origines et même l'orientation de leurs axes.

Effet Doppler en CRR

Suivant en cela les idées proposées par Hermann Bondi, j'utilise cet effet pour introduire la CRR.

---

32 En abrégé, un ROND…

33 Énoncé entendu en août 2004 à la radio belge ; après quoi j'ai estimé que mon cours sur la CRR était prêt. L'ajout [au moins] est de mon crû.

34 Il y aussi Carole et Dave..

Alice et Bob sont, chacun dans son labo, en MRU de vitesse relative ±v non nulle. Lorsqu'ils se croisent, ils synchronisent l'origine commune de leurs deux RONDs ainsi que l'orientation de leurs axes spatiaux : par convention, Bob s'éloignera d'Alice avec la vitesse +v.

À partir de cet instant, Alice envoie régulièrement des photons à Bob avec la période T, donc à la fréquence $f_A := 1/T$, ce qui leur donne une longueur d'onde $\lambda_A = cT = c/f_A$. Bob les reçoit et les lui renvoie immédiatement.

L'homogénéité de l'espace-temps (on est en RR) et son corollaire, le théorème de Thalès, font que la période pour Bob peut s'écrire kT. **Relativité oblige**, Alice reçoit ses photons en retour avec la période $k(kT) = k^2T$. On a évidemment $k>1$.

Remarque. C'est précisément en invoquant cette homogénéité, dans son article originel de 1905, qu'Einstein propose que les transformations de Lorentz soient linéaires (ou à la rigueur affines en cas de translations).

1er résultat : Alice estime, sur SON horloge à elle, à $T/2\cdot(k^2+1)$ l'instant où Bob reçoit le 1er photon, qu'elle a émis à l'instant T.

2e résultat : Alice établit les formules entre v et k, formules bien sûr réciproques l'une de l'autre :

- $v/c = (k^2-1)/(k^2+1)$;
- $k^2 = (1+v/c)/(1-v/c) = (1+\beta)/(1- \beta)$, puisque $v := \beta\cdot$_sl/_s.

C'est ce facteur k qui donne le nom de *k-calculus* à la méthode introduite par Hermann Bondi.

3e résultat : Alice peut calculer la fréquence f_B à laquelle Bob, sur SON horloge à lui, reçoit les photons (c'est ÇA l'effet Doppler relativiste) :

- $f_B = f_A/k = f_A\cdot\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$.

Les signes « - » qui interviennent dans les formules d'Alice ont une signification physique puisque v < c ! En revanche le signe « - » pour le MRU d'Alice vu par Bob résulte d'une pure convention.

Composition des vitesses en CRR

Carole vient se joindre à l'expérience. Il y a donc trois vitesses relatives :

- v_{BA} = vitesse relative de Bob vue par Alice, avec son facteur k_{BA} ;
- de même pour v_{CA} et v_{CB} et leurs facteurs k_{CA} et k_{CB}.

4e résultat : Alice (c'est toujours elle qui émet les photons) peut écrire $k_{CA} = k_{CB}k_{BA}$

et obtenir ainsi la formule de Lorentz pour la composition relativiste des vitesses.

C'est l'associativité de ces compositions qui dispense Dave, le 4e larron, d'intervenir lui aussi dans cette histoire.

« αβγ »

Ne voyez dans mon titre aucune allusion à l'article astucieusement intitulé « αβγ », rédigé par Ralph Asher **Alpher**, Hans Albrecht **Bethe** et Georges Antonovitch **Gamow**, publié dans la prestigieuse « Physical Review » le 1er avril 1948.

En revanche, nous avons ici :

- un $\beta := v/c$;
- un $\gamma := (1-\beta^2)^{-1/2}$;
- sans oublier le k, appelé rapport aussi bien de Doppler que de Bondi ;
- il nous manque un α, le voici : $\alpha := \ln(k) = \tanh(\beta)$; c'est ce que l'on appelle parfois la « rapidité ».

Il y a donc ici trois groupes à envisager :

- Les $\{\alpha\}$ forment un groupe additif, comme dans le cas des vitesses galiléennes.
- Les $\{k\}$ forment un groupe multiplicatif (Thalès oblige).
- Les $\{\beta\}$ forment un groupe « physique » à la base du groupe de Lorentz.
- Les $\{\gamma\}$, quant à eux, s'écrivent comme $\gamma = \cosh(\alpha)$. Forment-ils un 4e groupe ?

Le reste de la CCR suit alors sans difficultés.

C'est beau, la CRR (à une dimension d'espace, rappelons-le), non ?

LES NOMBRES CHEZ LES PHYSICIENS

Qualités, quantités, ...

Grandeurs, mesures, ...

Unités, étalons, dimensions, exposants, ...

Nombres de toutes sortes, ...

QUEL MARASME !

Voici quelques remarques en vrac au fil des idées qui me sont revenues à l'esprit : c'est un sujet que j'avais brièvement abordé en 1969-1970 déjà.

TABLE DES MATIÈRES

§I) Quelques références, en vrac

- Sylvie LAMY, *Dictionnaire des unités de mesures*, Ellipse 2004.
- Internet, bien sûr, Wikipédia en particulier.
- Il y a beaucoup d'autres références possibles.

§II) « Mes » notations et « mes » abréviations

Inspiré entre autres :

par les notations de la TI-89, calculatrice utilisée durant quelques années dans les cours de niveau fort en mathématiques et en physique dans différents établissements du Collège de Genève,

et par la proposition pour une révision du SI, adoptée le 23.10.2011,

j'utiliserai des tirets de soulignements pour noter :

- aussi bien les unités, que je préfère appeler étalons (les tirets de soulignement remplacent alors les crochets[35]),
- que les constantes universelles selon les circonstances.

C'est ainsi que, par exemple, j'écrirai _c ≈ 3E8·_m/_s.

Pour distinguer une dimension physique et une dimension vectorielle, je les abrégerai respectivement *DimPhys* et *DimVect*, et ce par pure paresse pour ne pas devoir les écrire chaque fois en entier...

Dans le même souci de « clarté », je réserverai le terme « unité » pour le pur nombre 1, *ie* le scalaire qui est l'élément neutre de la multiplication, et je choisirai le terme « étalon » pour désigner une valeur particulière servant de commune mesure. Maxwell parlait, lui, de standards (1867).

III) Dimensions physiques et exposants, version pédante

À la base de l'analyse dimensionnelle, on a le groupe abélien libre construit sur un ensemble G de n éléments appelés générateurs ; je note AF_G un tel groupe[36]. De tels groupes sont isomorphes au groupe Z^n bien connu. La plupart de mes exemples seront faits avec n=3 ou n=4.

Mais voilà, la loi de composition dans Z^n est notée additivement[37] tandis que l'analyse dimensionnelle s'effectue multiplicativement, comme dans les groupes libres F_G s'ils ne sont pas abéliens.

Dans la notation multiplicative de l'analyse dimensionnelle, on utilise parfois les crochets ; par exemple $[L^2MT^{-2}]$, ce qui donne <2;1;-2> dans Z^3. Le pédantisme consiste alors à prétendre que le symbole […] désigne un isomorphisme de type logarithmique entre deux groupes (abéliens, rappelons-le) isomorphes, l'un

---

35 Le but pédagogique est évidemment le même : m ≠ _m, g ≠ _g, V ≠ _V, A (aire) ≠ _A, etc.

36 J'ai trouvé sur Wikipédia le symbole F_G ; le « *A* » pour « abélien » est de mon crû. Le « *F* » semble signifier ici « free ».

37 En toute rigueur, on devrait écrire $(Z^n,+)$.

multiplicatif, l'autre additif ; dans $\mathcal{Z}^3$ figureront donc les exposants.

L'auteur <u>est</u> pédant...

On aura donc sans autre :

- $[L^2MT^{-2}]$ = <2;1;-2>
- et [1] = <0;0;0> pour les éléments neutres (grandeurs sans dimensions).

Pour n=3 en mécanique, les générateurs SI-standards[38] du groupe sont, dans l'ordre alphabétique usuel, L, M et T.

<u>Remarque</u> : A priori, rien ne distingue la *DimPhys* d'un travail de celle d'un moment de force: <2;1;-2> ou L^2MT^{-2}. Sauf si l'on complique la structure en distinguant un «L» scalaire d'un «L» vectoriel en tenant compte ou non de la subtile différence, introduite par Pierre Curie, entre un vecteur polaire et un vecteur axial. Mais nous garderons nos $AF_{\{LMT\}}$ et $\mathcal{Z}^3$ tels quels et gérerons ces complications ailleurs et plus tard.

Pour n=4 en électromagnétisme, on ajoute en 4e place le générateur SI-standard noté I.

Pour n=4 en thermodynamique, on ajoute en 4e place le générateur SI-standard noté Θ.

Quelques emplois

L'analyse dimensionnelle ne permet pas de prédire ou de vérifier des coefficients de *DimPhys* = [1] = <0;0;0>. Par exemple, ½ pour une énergie cinétique non relativiste, π pour la surface d'un disque.

Elle ne permet pas non plus d'opérer des changements d'étalons tel celui, bien connu des profs de physique, qui consiste à donner une vitesse en _km/_h et à demander une énergie en _eV.

Bon, ce sont là des «non-»emplois. Et les emplois ?

Il convient de citer ici le théorème «PI» de Vaschy-Buckingham, dans une version simplifiée, et de l'illustrer par quelques exemples.

<u>Énoncé simple en mécanique</u>: en effectuant un changement d'échelle sur les grandeurs variables d'un système décrit par une équation différentielle (*eg* $F = m \cdot d^2r/dt^2$), on obtient une suggestion pour une constante du mouvement.

Ce théorème a de nombreuses implications en aéro- ou en hydrodynamique, en résistance des matériaux, … bref dans les domaines où règnent les problèmes de similitudes.

Dans l'exemple cité, où la masse est supposée constante, un changement

---

38 Selon le SI (système international).

d’échelle s’écrit:

$$r \to r' := \alpha r \text{ et } t \to t' := \beta t \text{ ; d'où } F \to F' = \alpha/\beta^2 \cdot F.$$

Le principe à appliquer ensuite est que la loi dynamique est la même avant et après le changement d’échelle (c'est là un principe d'invariance). Illustrons ce propos de quelques exemples classiques.

Exemple du mouvement elliptique keplérien (que je nomme MEK):

Puisque $F \div 1/r^2$, on a $F' \div 1/(r')^2$ et, donc, α^3/β^2 = une constante. Joli, non?

Exemple du mouvement rectiligne harmonique (MRH):

Puisque $F \div r$, on a $F' \div r'$ et, donc, β = une constante. Joli, non?

Exemple du mouvement circulaire uniforme (MCU):

Puisque $F \div v^2/r$, on a $F' \div (v')^2/(r')$ et, donc, β = une constante. Joli, non? Eh bien, ici, **non**, car l'on sait déjà *a priori* que ω = une constante et même que $v = \omega r$!

Exemple du mouvement circulaire uniforme lorentzien:

C'est une conséquence du cas précédent avec n=4 ; c'est la charge électrique Q qui forme ici le 4^{e} générateur : [Q] = <0;0;0;1> ; la *DimPhys* de B est [M/TQ]. Cherchons donc un $\omega \div r^\rho m^\mu q^\kappa B^\beta$; on obtient l'équation $[1/T] = [L^\rho M^\mu Q^\kappa (M/QT)^\beta]$ dont la solution est $\rho=0$, $\beta=1$, $\mu=-1$ et $\kappa=1$, soit $\omega \div qB/m$. Joli, non ?

IV) Grandeurs, unités, étalons (ou standards selon Maxwell)

Une grandeur physique Γ est mathématisée par un EV sur un corps *K*. Sa *DimVect* vaut 1, 2, 3, ... selon qu'il s'agit d'une grandeur scalaire, vectorielle plane, spatiale, ...

Quant à *K*, on pourra prendre :

– *Q* pour commencer et garder à l'esprit que l'on n'a JAMAIS mesuré un nombre irrationnel ;

– *R* pour ne pas chipoter et **surtout** pour pouvoir écrire des éq° diff. ;

– *C* pour faire bien et traiter les phases d'une tension alternative aussi bien que les fonctions d'onde hilbertiennes ;

– *H* (quaternions) pour parler d'espace-temps par exemple (il y a eu des essais à ce sujet).

C'est dans *K* qu'il y a une unité (= élément neutre de la multiplication, c'est un scalaire, *ie* un nombre pur).

Comme dans tout EV, on peut choisir une base quelconque et y développer de façon unique tout élément $g \in \Gamma$:

- Une base, étant a priori une famille, s'écrit $[e_1 ; (e_2 ; e_3 ; \ldots)]$; « e » pour *étalon*, bien sûr.
- $\forall g \in \Gamma, \exists \gamma_i \in K : g = \gamma_1 e_1 \ (+ \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \ldots)$.

Si Γ est une grandeur scalaire ou pseudo-scalaire, *ie* si sa *DimVect* = 1, pas besoin d'indice ; on écrira simplement $g = \gamma e$; mais JAMAIS, dans un EV, on se permettrait d'écrire $\gamma = g/e$! Même si l'on ne mesure, dans nos labos, que des rapports de grandeurs, donc des γ. Ce sont LÀ les nombres chez les physiciens !

Et la *DimPhys*, dans tout cela ?

L'idée est évidemment d'attacher à chaque grandeur Γ une dimension dans Z^n avec n choisi de façon idoine. La *DimPhys* apparaît donc comme une certaine application à définir proprement[39] ; ainsi, en mécanique dans Z^3 avec sa base « SI-canonique » :

- Γ = masse → *DimPhys*(Γ) = [M] = <0;1;0> ;
- Γ = force + → *DimPhys*(Γ) = $[LMT^{-2}]$ = <1;1;-2> ;
- Γ = grammage → *DimPhys*(Γ) = $[L^{-2}M]$ = <-2;1;0> ;
- Γ = dose absorbée → *DimPhys*(Γ) = $[L^2T^{-2}]$ = <2;0;-2> ;
- etc.

Notons que deux Γ différentes peuvent avoir la même *DimPhys* même si elles n'ont pas la même *DimVect* :

- Γ = travail, énergie → *DimPhys*(Γ) = $[L^2MT^{-2}]$ = <2;1;-2>,
  → tandis que *DimVect*(Γ)= 1 ;
- Γ = moment d'une force → *DimPhys*(Γ) = $[L^2MT^{-2}]$ = <2;1;-2>,
  → tandis que *DimVect*(Γ) = 3 ;

tout cela parce que nous bénéficions dans notre espace R^3 de deux produits de vecteurs !

---

[39] Voir pour cela l'annexe.

ANNEXE : Idée pour une structure mathématique décrivant les grandeurs, leurs dimensions physiques et leurs étalons

Et voici une de mes élucubrations (relisez le prologue)...

Ce qui a été décrit jusqu'ici fait penser à ce que l'on appelle pompeusement un « espace fibré vectoriel », *ie* une structure, dont je simplifie grandement la présentation, qui consiste en un ensemble appelé « base » à chaque élément duquel est attaché un EV, appelé « fibre ». Sauf que :

- La base doit être un espace topologique ; pour notre $\mathcal{Z}^n$, c'est OK.
- Les « fibres » sont toutes isomorphes les unes aux autres ; là, il y aura un peu de travail à faire...
- Il doit y avoir une projection continue des fibres vers la base ; notre *DimPhys* fait parfaitement l'affaire.
- Dans le cas où la base est un groupe topologique, il est parfois intéressant d'exiger une action dudit groupe sur la réunion des fibres ; ce seront les systèmes d'étalons qui nous la donneront.

Détaillons le point 2

Nous savons que les EV mathématisant les différentes grandeurs ne sont pas tous isomorphes les uns aux autres. Il convient donc d'introduire le concept *ad hoc* de « gerbes d'EV» qui seraient des familles d'EV avec des règles qui interdisent les additions vides de sens et que la mécanique quantique qualifie de supersélection[40]. En clair :

Chaque gerbe pourrait contenir :

- un EV de *DimVect* = 1 pour une grandeur scalaire ;
- un EV de *DimVect* = 2 pour une grandeur aréolaire ;
- un EV de *DimVect* = 3 pour une grandeur vectorielle polaire ;
- un autre EV de *DimVect* = 3 pour une grandeur vectorielle axiale[41] (j'ai dûment pris la précaution de définir la gerbe comme une famille d'EV et non comme un ensemble d'EV) ;
- ... ;
- un $\mathcal{L}^2$ pour une fonction d'onde ;
- etc.

---

40 Par exemple, un travail (dans un $\mathbb{R}$) + un moment de force (dans un $\mathbb{R}^3$ axial), tous deux dans la même gerbe au-dessus de l'élément $[L^2MT^{-2}] = \langle 2;1;-2\rangle$ de $\mathbb{Z}^3$. À l'école primaire, on dirait que l'on ne peut additionner que des quantités de même nature.

41 Un vecteur axial est, en fait, un tenseur du 3e ordre totalement antisymétrique ; ce n'est que parce qu'il a 3 composantes indépendantes que l'on en a fait un vecteur ; les puristes, dont je me flatte de faire partie, l'indiqueront par une flèche courbée et non rectiligne. La subtile différence se voit lors d'une réflexion par rapport à un miroir plan.

quitte à ne pas tout utiliser dans une gerbe, ni même à utiliser toutes les gerbes. Cette structure est donc ouverte (comme l'est l'échelle de Richter...).

Continuons. Dans le langage, ± catégorique et un peu frimeur, hérité de l'ère Bourbaki, notre *DimPhys*, comme toute projection, est une rétraction. Mais alors où sont les sections ?

- Car c'est ainsi que l'on nomme deux applications $r : E \rightarrow B$, surjective, et $s : B \rightarrow E$, injective, telles que $r^\circ s$ = identité sur B. Si on les restreint à im(s) dans E, on obtient deux applications bijectives réciproques l'une de l'autre.

Les sections sont, dans notre structure, les « Systèmes d'Étalons » (que j'abrègerai en SystÉtals) ; ces sections ne sont pas quelconques car elles subissent une action du groupe $\mathcal{Z}^n$ et, pour compliquer la chose, elles doivent tenir compte de l'isotropie de l'espace.

Cette action permet d'effectuer des produits de grandeurs en sachant que les *DimPhys* suivent la superbe formule :

DimPhys d'un produit = Produit des *DimPhys*.

Nous progressons vers les SystÉtal

Un SystÉtal, *ie* une section de notre structure, peut et doit même être choisi de façon cohérente ; la cohérence s'exprime formellement et simplement par :

- soit g_1 avec son étalon e_1 et sa *DimPhys* = $[z_1]$; on écrit $g_1 = \gamma_1 e_1$;
- soit g_2 avec son étalon e_2 et sa *DimPhys* = $[z_2]$; on écrit $g_2 = \gamma_2 e_2$;
- pour $g := g_1 g_2$, on aura l'étalon $e = e_1 e_2$ (ci-gît la cohérence) et sa *DimPhys* $[z] = [z_1 z_2]$ (ci-gît l'action du groupe) ; de plus $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$.

Même le SystÉtal curieux fondé sur _c comme étalon de vitesse, _MeV/c^2 comme étalon de masse et _h/2π comme étalon d'action est cohérent, bien qu'un peu biscornu, il est vrai.

Tiens, ce n'est pas la même base SI-canonique (en mécanique) de $\mathcal{Z}^3$?

Rendez-vous dans le chapitre suivant intitulé « SystÉtal ».

SYSTÈMES D'ÉTALONS
1ère partie
(que, dans ma paresse, j'abrège en SystÉtals)
ou SYSTÈMES DE STANDARDS selon Maxwell
(pour ne pas dire systèmes d'unités…)

Quelques références parmi d'autres :

- Internet, Wikipédia, etc.
- Gilles Cohen-Tannoudji, *Les constantes universelles*, Hachette 1991, ISBN 2.01.017258.X
- Gilles Cohen-Tannoudji, *Einstein et les constantes universelles*, présentation dans le cadre de « World Year of Physics », le 30.11.2005.

Tout d'abord, quelques précisions en guise de rappels (voir le chapitre « *Les nombres chez les physiciens* ») :

- J'ai introduit le terme *étalons* au lieu d'*unités*.
- Pour ne pas utiliser des crochets, je désigne les étalons par des tirets de soulignement ; par ex, _J, _s, _eV etc. Comme dans la TI89, qui propose la <u>même</u> notation pour un étalon et pour une constante. D'où aussi _c^2, _h etc.
- Mathématiquement, un système d'étalons est une *section* dans la structure introduite dans le précédent chapitre et ressemblant à ce que l'on appelle pompeusement un *fibré vectoriel*.
- Il convient encore et toujours de distinguer un étalon de sa DimPhys ; par exemple :
  Grandeur = masse m, sa DimPhys = [M],
  quelques étalons possibles : _kg, _M_{Soleil}, _GeV/_c^2 etc.
- La DimPhys est une *rétraction* dans la structure mathématique rappelée ci-dessus.

Remarque importante avant d'aborder le vif du sujet :

- Certains SystÉtals reposent sur des « égalités » invoquant des constantes universelles :
  - « c=1, h=2π, G=1 ou 4π^2, k=1, μ_0=4π, ... »
- En les utilisant, nous devons nous rappeler que, si les étalons peuvent changer, les DimPhys, elles, restent toujours les mêmes. Exemple :
  - Même si l'on « pose c=1 », on exprimera :
    - un temps en _s et une longueur en _sl ce qui nous conduira à la superbe égalité _c = 1·_sl/_·s !
    - une énergie en _eV et une masse en _eV/_c^2.

Les $\mathcal{Z}^n$ avec n = 1 .. 5 (cela devrait suffire ici…)
(dans le Système International, bien sûr ;
c'est une excellente référence, complète)

- **Géométrie, n=1** : base standard de $\mathcal{Z}$ formée de [L(*ongueur*)] ; et encore là, on triche un peu, car c'est par pure convention que A(*ire*) = L^2 pour un carré et que V(*olume*) = L^3 pour un cube. Euclide en tous cas ne pensait pas ainsi.

- **Cinématique, n=2** : à [L] on adjoint[42] [T(*emps*)].

- **Dynamique (et énergétique), n=3** : à [L] et [T], on adjoint [M(*asse*]) ; mais, dans le chapitre des SystÉtals en électromagnétiseme, nous prendrons [L], [T] et [F(orce)].

- **Thermodynamique, n= 4** : à [L], [T] et [M], on adjoint [Θ] (pour la température absolue).

- **Électromagnétisme, n=4** : à une des bases de $\mathcal{Z}^3$, on adjoint [I] (pour l'intensité du courant électrique), parfois [Q] (pour la charge électrique) ; sauf que, avant l'expérience d'Oersted (1820), nul ne considérait que I = dQ/dt et, donc, il fallait adjoindre [Q] <u>et</u> [I] séparément en travaillant dans $\mathcal{Z}^5$; détails dans le chapitre portant sur les SystÉtals (2e partie) en électromagnétisme.

§1. Géométrie, n=1

Groupe $\mathcal{Z}$ avec le générateur SI-standard [L] = <1>.

Quelques étalons : _nm, _UA, _sl, _ha, _dl(*itre*), etc.

Signalons la vergence : [vergence] = [L^{-1}] = <-1> ; elle aurait aussi pu fournir un générateur ! Rappelons ici que $\mathcal{Z}$ est peut-être l'initiale de « zyklisch ».

Je laisse les considérations sur les angles plans (avec leurs 2π) et les angles solides (avec leurs 4π) pour des jours meilleurs, car je pense que ce ne sera pas simple ! Donc en principe ni vitesse angulaire ni pulsation.

§2. Cinématique, n=2

Groupe $\mathcal{Z}^2$ avec les générateurs SI-standards [L] = <1;0> et [T] = <0;1>.

Quelques étalons : _km, _h, l'inévitable _km/_h, _y(*ear*), _sl/_s, _knot, _Gal :=

[42] Ces adjonctions successives font que chaque $\mathcal{Z}^n$ est inclus ±canoniquement dans un $\mathcal{Z}^{n+1}$ (ou un $\mathcal{Z}^{n+2}$). Il y a en fait chaque fois l'ordre des générateurs à considérer. Rappelons que les générateurs forment un ensemble et non un multiplet ; mais les isomorphismes avec les $\mathcal{Z}^n$ requièrent, eux, de les citer dans un certain ordre…

_cm/_s^2 (g ≈ 1·_kGal), etc.

Signalons une entourloupette : [dose absorbée] = [L^2T^{-2}] = <2;-2> ; mais puisqu'il s'agit en réalité d'une énergie absorbée par unité de masse absorbante, sa place sera en énergétique, avec n=3.

Nous trouvons ici une constante universelle[43] _c qui vaut environ 3^{E}8·_m/_s ou 3^{E}10·_cm/_s, mais très exactement 1·_sl/_s !

Si l'on « pose c=1 », on opère en réalité un changement de base de $\mathcal{Z}^2$: au lieu de [L] et [T], on prend [v(*itesse*)] = [LT^{-1}] = <1;-1> et [T].

C'est ici que l'on commence à considérer que $\mathcal{Z}^2$ est un $\mathcal{Z}$–module et que l'on dispose de tout l'attirail linéaire compatible avec le fait que $\mathcal{Z}$ est anneau et non un corps. En particulier la représentation matricielle d'un changement de base ; on introduit donc la matrice $\mathcal{B}$ suivante :

$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut 1 et l'inverse $\mathcal{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi, à partir de la base SI-standard [L] [T], effectuer un changement vers une base formée de [a(*ccélération*)] et [L]. En voici la représentation matricielle :

$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, dét($\mathcal{B}$) = 2 et $\mathcal{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Au fait, que signifie ce coefficient ½ quand on travaille dans un module sur l'anneau $\mathcal{Z}$? Réponse à peine un peu plus loin.

§2bis. En interlude : un peu d'algèbre linéaire

Un changement de base et une application linéaire sont deux opérations dites *contragrédientes* ; cette subtilité est très utile en relativité par exemple (*cf les cours d'Ernst Carl Gerlach Stueckelberg* ; notez au passage l'acronyme ECGS) ; utilisons donc les matrices $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{-1}$ à bon escient !

Pour les « balèzes[44] » : le vecteur *accélération* est contravariant et le vecteur *force* (= gradient d'un potentiel) covariant ; ce qui fait que la *masse* est en réalité un tenseur dans lequel gît la métrique de l'espace. La même réflexion peut être faite avec les champs E et D (et la constante ε_0). Joli, non ? ECGS notait les vecteurs par des flèches, vers l'avant (→) pour les vecteurs contravariants et vers l'arrière (←) pour les covariants ; sans oublier de les arrondir s'ils étaient axiaux et non polaires. Simplement superbe !

Dans nos modules $\mathcal{Z}^n$, quand dét($\mathcal{B}$) vaut ±2, l'inverse $\mathcal{B}^{-1}$ contiendra inévitablement un facteur ±½ ; cela tient au fait que $\mathcal{B}$ est injective mais non

[43] En physique. Alors que π en est une en mathématiques !

[44] Merci au Professeur Dominique Meier, auteur de la « *Physique pour les nuls* », qui suggère ce terme pour qualifier celles et ceux qui veulent creuser le sujet.

surjective et que im($\mathcal{B}$) n'est pas $\mathbb{Z}^n$, mais seulement un sous-module de $\mathbb{Z}^n$ isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Dans notre exemple avec [a] et [L], im($\mathcal{B}$) = $\mathbb{Z}\times 2\mathbb{Z}$!

§3. Mécanique (dynamique & énergétique), n=3

Groupe $\mathbb{Z}^3$ avec les générateurs SI-standards [L] = <1;0;0>, [M] = <0;1;0> et [T] = <0;0;1>.

Nous aborderons ici quatre SystÉtals :

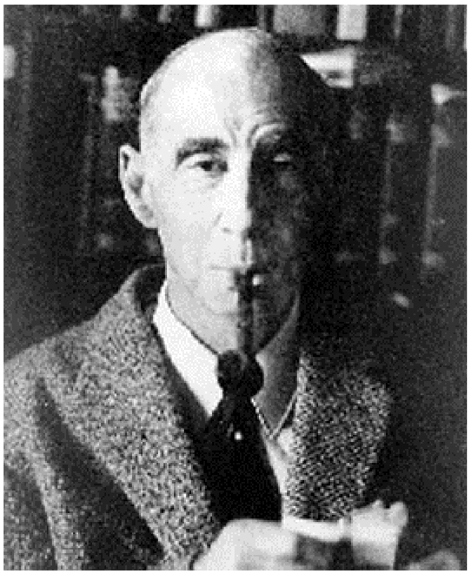
a. **Le système de Giorgi** ; les étalons sont connus et sont à la base du SI. Les forces s'expriment en _N et les énergies en _J.

b. **Le système CGS**, très ancien et encore utilisé. Les forces s'expriment en _dynes et les énergies en _ergs.

À ce propos, une anecdote acronymique : E.C.G.S. = Einheiten CGS. Mais aussi Ernst Carl Gerlach Stueckelberg ; inutile de dire qu'il en était très fier !

Baron Ernst Carl Gerlach Stueckelberg von Breidenbach zu Breidenstein und Melsbach.1.2.1905 – 4.9.1984.

Voici la 1ère phrase de ses cours : « La physique théorique est la recherche de Dieu » et il citait Jean I:1.



c. **Un système « pré-Cavendish »**. Quand on étudie le système solaire sans connaître la valeur de la constante universelle de gravitation (on est donc entre Newton et Cavendish), on utilise les trois étalons _UA, _M$_{soleil}$ et _yr ; la 3e loi de Képler conduit alors à G = $4\pi^2\cdot$_UA^3(/_M$_{soleil}\cdot$_yr^2). D'où l'idée (ou l'élucubration) de passer de la base SI-standard de $\mathbb{Z}^3$ à une base ad hoc formée de [L], [M] et [G] et de « poser G = $4\pi^2$ ». La matrice est $\mathcal{B}$:= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Dét($\mathcal{B}$), im($\mathcal{B}$) ($\neq\mathbb{Z}^3$) et $\mathcal{B}^{-1}$ laissés en exercice.

d. **Le système de Planck**. Il repose sur trois constantes universelles :
   i. _c, bien connue ; on « pose c = 1 » ;
   ii. _h, la fameuse «Hilfskonstante » de Planck ; on « pose h = 2π » ;
   iii. _G, bien connue aussi ; sauf que, dans le cas présent, on « pose G = 1 ».

La base associée est formée de [C(*élérité*)], [H] et [G]. Voici la matrice : $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ici aussi, Dét($\mathcal{B}$), im($\mathcal{B}$) ($\neq \mathcal{Z}^3$) et $\mathcal{B}^{-1}$ sont laissés en exercice.

Suggestion pour im(B) : calculer les images du cube unité, puis les projeter dans $(\mathcal{Z}_2)^3$. *En conclure que, dans la base CHG, les éléments de im(B) ont un nombre impair de composantes paires ; ce qui montre à l'envi que la structure d'un module est plus complexe que celle d'un simple EV ! Cela fait penser au cube de Okun, non ?*

Voici encore les étalons de Planck en mécanique :

$$\_L_{PL} \approx 1.6E\text{-}35\cdot\_m\ ;$$
$$\_M_{PL} \approx 2.1E\text{-}8\cdot\_kg\ ;$$
$$\_T_{PL} \approx 5.4E\text{-}44\cdot\_s\ ([45])\ ;$$
$$\_\mathcal{E}_{PL} \approx 1.96E9\cdot\_J \approx 1.22E19\cdot\_GeV.$$

§4. Thermodynamique, n=4

Groupe $\mathcal{Z}^4$ avec les générateurs SI-standards [L], [M] et [T] de la mécanique auxquels on adjoint [Θ] := <0;0;0;1>.

Il y a une constante universelle qui donne lieu à un changement de base :

$$\_k = \text{constante de Boltzmann} \approx 1.38^{E}\text{-}23\cdot\_J/\_°K\ ([46]).$$

Le système de Planck. À la base [C], [H] et [G] rencontrée plus haut, on adjoint [K] := [$\mathcal{E}$/Θ] = <2;1;-2;-1> et, si l'on « pose k=1 », on obtient l'étalon de Planck pour la température :

$$\_\Theta_{PL} \approx 1.4^{E}32\cdot\_°K.$$

§4bis. Le rôle des constantes spécifiques (telles _UA, _yr, M_{Soleil} _g) ou universelles

[45] En guise de plaisanterie, on peut dire que ce laps de temps, le plus court de la physique, est celui qui sépare l'instant où le feu de circulation devient vert et celui où l'imbécile qui nous suit en voiture se met à klaxonner.

[46] Oui, je sais, je ne devrais pas expliciter le symbole du degré lorsqu'il s'agit d'une température absolue. Héritage de l'époque où la température était une qualité et pas encore une quantité. Mais bon…

(telles _c, _h, _G, _k) ; on devrait dire « un des rôles »

Elles peuvent servir à des changements de base dans le $\mathcal{Z}^n$ que l'on est en train d'utiliser. Les techniques linéaires, avec les matrices $\mathcal{B}$ dont nous avons déjà donné quelques exemples, nous aident en cela.
Si le nombre de constantes utilisées est supérieur à n, nous devons disposer d'équations les reliant et les rendant dépendantes ; ce qui fait que nous pouvons choisir celles que nous souhaitons « poser = 1 » pour notre changement. D'où une grande variété de SystÉtals ad hoc.

§4ém. Électromagnétisme, n=4 (ie sans la température)

Groupe $\mathcal{Z}^4$ avec les générateurs SI-standards [L], [M] et [T] de la mécanique auxquels on adjoint [I(*ntensité du courant électrique*)] := <0;0;0;1>. On utilise parfois la charge électrique [Q] := [TI] comme 4^{e} générateur ; c'est selon les besoins, il suffit de préciser.

Quelques étalons :

- Pour le SI, l'_A et le _C := _A·_s.
- Chez les garagistes : l'_Ah := 3'600·_C.
- Etc.

Et une constante universelle : _e ≈ 1.602^{E}-19_C.

Pour des raisons didactiques, on utilise parfois une base *ad hoc* formée de [L], [T], [I] et [U] := [$\mathcal{E}$/Q] pour la tension électrique. Inspirée de la célèbre équation $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ (valable dans le SI), elle conduit à une comparaison intéressante, voire esthétique, entre l'électricité et le magnétisme :

[ε] = [$ITU^{-1}L^{-1}$]	[μ] = [$UTI^{-1}L^{-1}$]
[champ E] = [UL^{-1}]	[champ B] = [IL^{-1}]
[flux él.] = [IT]	[flux magn.] = [UT]
[moment él.] = [ILT]	[moment magn.] = [ULT]
Etc.	Etc.

Il y a de nombreux livres effectuant une telle présentation ! En particulier l'excellent ouvrage de P. Cornelius, *L'électricité selon le système Giorgi rationalisé* (Philips, Eindhoven NL) ; préface de W. de Groot, 1ère édition hollandaise en 1948 ; éd. Française en 1953, traduction par A. Fouillé et M. Denis-Papin. Je crois qu'on le trouve d'occasion sur Internet. Encore une fois, l'aspect matriciel est laissé en exercice.

Le système de Planck. À la base [C], [H] et [G] rencontrée en mécanique, on adjoint [ε] := [$L^{-3}M^{-1}T^2Q^2$], on « pose $4\pi\varepsilon_0 = 1$ », on calcule la charge étalon de Planck :

$$\_Q_{PL} \approx 1.875^{E}\text{-}18\cdot\_C,$$

et l'on constate, ô miracle, que $(\_e/\_Q_{PL})^2$ = LA constante de structure fine, universelle et sans dimension ! Cette dernière propriété fait qu'il est impossible de travailler dans un SystÉtal dans lequel on « pose $e = h = c = 4\pi\varepsilon_0 = 1$ ». Je viens ici de citer Wikipédia[47].

En exercice, encore et toujours, les calculs détaillés avec une matrice *B*.

Autres systèmes. J'en ai recensé 4 classiques :

- les deux « cgs[48] », dans lesquels c ≈ 3E10·_cm/_s,
- le système de Gauss
- et enfin celui de Heaviside-Lorentz.

Vu l'ampleur de la chose, j'en ferai un chapitre séparé (SystÉlMa).

[47] Sur le site info.phys.unm.edu. University of New Mexico, je crois.
[48] Le « cgs-esu » et le « cgs-emu ».

SYSTÈMES D'ÉTALONS
2e partie, ÉLECTROMAGNÉTISME
ou SYSTÈMES DE STANDARDS selon Maxwell
à qui l'on doit l'électromagnétisme classique

À partir de maintenant :

En effet :

Ici n=4 avec les générateurs SI-standards :

- [L] = <1;0;0;0>
- [M]= <0;1;0;0>
- [T] = <0;0;1;0>
- [I] = <0;0;0;1>.

On utilise parfois [Q] = <0;0;1;1> au lieu de [I].

Remarque historique : Avant 1820 (expérience d'Oersted), on travaillait même dans un $\mathcal{Z}^5$ avec [L], [M] et [T] comme ci-dessus[49], mais avec :

- [Q] = <0;0;0;1;0>
- [I] = <0;0;0;0;1>.

Prélude. Je me suis proposé, fort des techniques que j'ai présentées jusqu'ici, de « décortiquer » quelques systèmes électromagnétiques plus ou moins folkloriques qui ont précédé le Giorgi et le SI, et dont certains sont encore en usage

[49] Avec une 5e composante nulle, bien sûr !

aujourd'hui.

- Mon travail : parcourir un peu la littérature à ce sujet (livres, articles, Internet etc.) et constater que, si chaque physicien présente des calculs justes, il escamote très souvent des « *a priori* » et des présupposés, et ce selon ses travaux propres.
- Constater, débusquer, expliciter ! Vaste opération qui a surtout contribué à mettre **mes** idées en place.

J'ai recensé quatre tels systèmes[50] :

- I) et II) Les systèmes CGSESU et CGSEMU :
  - o Ils sont incompatibles car, bien qu'associés au CGS de 1874, ils parlent de l'électricité et du magnétique comme s'ils dataient d'avant 1820 ; ils peuvent cependant être traités en parallèle.
- III) Le système de Gauss :
  - o Il s'inspire du système CGSESU ci-dessus, mais après 1820.
- IV) Le système de Heaviside-Lorentz :
  - o C'est le seul des quatre à être « rationalisé », *ie a*vec les facteurs « 4π » aux bons endroits, comme dans le SI.

En bref : « *[…] regrettable variété dans le choix des systèmes […]* » selon Georges Bruhat, page 514, chapitre XXVII section I, de son traité *Électricité*.

Rappelons d'abord deux équations sur lesquelles reposent ces systèmes :

Loi de Coulomb : $F_{él} = K_{él} \cdot Q_1 Q_2 / r^2$.

Loi dite de Laplace[51] : $F_{ma}/dL = 2K_{ma} \cdot I_1 I_2 / r$.

1ère remarque. Les valeurs des constantes universelles $K_{él}$ et K_{ma} dépendent

[50] Le système de Planck a été étudié dans un chapitre précédent.

[51] C'est du moins comme cela qu'on la nomme dans bon nombre de manuels ou de polycopiés. Elle résulte d'une intégration sur les « ds » de la source rectiligne dans la formule d'Ampère. Voyez la 2e remarque.

évidemment du SystÉtal. Ou, **plus exactement**, le SystÉtal repose sur l'une et/ou l'autre de ces deux valeurs ! Mais, dans **tous** les SystÉtals dont s'enorgueillit la physique, on vérifiera la superbe équation :

$$K_{él}/K_{ma} = c^2.$$

2e remarque. Pour les forces magnétiques, j'avais a priori le choix entre :

- La loi originelle d'Ampère (1826) : $d^2F_{ma}/ds_1ds_2 = I_1I_2/r^2\cdot$(un polynôme trigonométrique avec les angles entre les vecteurs portant ds_1, ds_2 et r).
- La loi dérivée de Laplace citée plus haut et dont l'avantage est qu'elle sert à la définition SI de l'_A (jusqu'en 2011) ; d'où mon choix.

Il va de soi que ces lois donnent lieu à la même analyse dimensionnelle. Encore heureux…

Effectuons d'abord dans $\mathcal{Z}^3$ le changement vers la base [L], [T] et [F], puisque les lois ci-dessus parlent de forces et non de masses :

La matrice est ᵗ[[1;0;0][0;0;1][1;1;-2]].

Ce n'est pas pour les nostalgiques du _kgf, parfois noté _kg*, mais pour simplifier l'étude qui suit.

C'est à cette base *ad hoc* que l'on ajoute un 4e générateur et, au besoin, un 5e, le [Q] et/ou le [I]. Pas de difficulté à cela.

Remarque. Le choix n=4 *vs* n=5 traduit le fait que, pour n=4, on écrit que I := dQ/dt, ce qui n'est pas le cas pour n=5 ; d'où l'incompatibilité annoncée.

I) Système CGSESU	**II) Système CGSEMU**
Dans la loi de Coulomb, on « pose $K_{él}$ = 1 », ce qui permet : • de définir[52] le _stC comme étalon pour Q_{esu} ; • puis le _stA comme étalon pour I_{esu}, puisque $I_{esu} = dQ_{esu}/dt$; • et enfin de calculer $K_{ma/esu}$ selon la loi de Laplace :	Dans la loi de Laplace, on « pose K_{ma} = 1 » , ce qui permet : • de définir[53] le _abA comme étalon pour I_{ema}, ; • puis le _abC comme étalon pour Q_{ema}, puisque $dQ_{ema} = I_{ema}\cdot dt$; • et enfin de calculer $K_{él/ema}$ selon la loi de Coulomb :

[52] C'est le statcoulomb, puis le statampère. On devrait écrire _statC et _statA.
[53] C'est l'ampère absolu, puis le coulomb absolu.

$K_{ma/esu} = 1 / c^2$.	$K_{él/ema} = c^2$.

Rappelons que les tournures elliptiques du type « *on pose ceci ou cela = 1* » parlent d'étalons et non de DimPhys !

De plus, pour être soigneux, j'ai affublé tout cela d'indices « esu » ou « emu » pour distinguer les Q, les I et les K dans ces deux SystÉtals, encore et toujours incompatibles.

Encore une remarque. Si, réellement, on « pose $K_{él}$ = 1 sans DimPhys »,, on obtient $[Q_{esu}] = [F^{1/2}L^2] = [L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}]$ avec des exposants fractionnaires, comme nous en avons rencontré dans un chapitre précédent. Mais comme le dit si bien Robert Littlejohn (Univ. de Berkeley) dans l'appendice A de son texte *Physics 221A, Fall 2007* :

- […] *You may not like the fractional powers that appear in [the above] equation[s], but you are always free to treat the statcoulomb as an independant unit* […]

Il est évident qu'il en va de même de $[I_{esu}]$, $[I_{emu}]$ et $[Q_{emu}]$. Il est aussi évident que je me rallie à cette opinion… Il est encore à relever que, même dans le SI, la loi de Laplace donne un exposant fractionnaire à [I] !

Enfin je me plais ici à citer Michel Karatchentzeff[54] dans son document *Grandeurs physiques et Unités* (trouvé sur Internet en pdf), en sa note 24 de la page 32 :

- *C'est tout à fait étonnant, et c'est un apport spectaculaire de la théorie des systèmes d'unités électromagnétiques. Sauf erreur de ma part, c'est la première fois qu'une grandeur physique apparaît comme étant le rapport de la même grandeur évaluée dans deux systèmes d'unités différents.*

Écrivez pour voir cela le rapport des deux $K_{ém}$ et celui des deux K_{ma}.

Encore trois références :

- Théo Kahan, *Physique théorique*, PUF ; il expose les équations du début de l'électrodynamique en deux colonnes, l'une « mks », l'autre « u.G. » (unités de Gauss). Je me suis inspiré de cette présentation pour les deux systèmes ESU et EMU.
- John David Jackson, *Électrodynamique classique*, Dunod 2001 ; spécialement l'annexe A (p. 810) intitulée *Unités et dimensions*.
- David Jeffrey Griffiths, *Introduction to electro-dynamics*, Prentice Hall ; spécialement son annexe B.

III) Système de Gauss (u.G.) et IV) Système de Heaviside-Lorentz (H.L.)

Pour effectuer la transition entre **I)-II)** et **III)-IV)**, et aussi pour faire le lien avec le **SI** bien connu, commençons par dresser un rapide inventaire des grandeurs et des formules en distinguant quatre plans conceptuels.

[54] Fondation Louis de Broglie, 23 rue Marsoulan, 75012 Paris (29 mai 2010 – version 1.0)

- Plan 1) : les interactions, qui sont soumises à la 3^e loi de Newton (action – réaction, ou actions réciproques). C'est le seul plan où l'on ne parle pas de champs mais uniquement de forces, en l'occurrence ici les $F_{él}$ et les dF_{ma}/dL.
- Plan 2) : les champs D et H que je qualifie de « géométriques » car ils parlent a priori des sources qui les produisent.
- Plan 3) : les champs E et B que je qualifie de « dynamiques » car ils donnent lieu aux forces qu'ils font subir. Telle est la force de Lorentz qui permet de définir E et B.
    - Ces deux plans brisent la symétrie de la 3^e loi de Newton.
- Plan 4) : les champs P et M que je qualifie de « matériels » car ils parlent de la réponse de la matière plongée dans des champs extérieurs.

Nous pouvons dès lors présenter les différents SystÉlMas étudiés plan par plan.

Plan 1) Les interactions

	Constante $K_{él}$	Constante K_{ma}
SI (en cgs, bien sûr ; voyez la remarque qui suit…)	$10^{-2}.c^2$	10^{-2} par définition via le μ_0
cgs-esu, u.G.	1 par définition	$1 / c^2$
cgs-emu	c^2	1 par définition
H.L.	$1 / 4\pi$	$1 / 4\pi c^2$

Remarque sur le SI. A priori, le SI est fondé sur le « mks » et non sur le « cgs » ; mais le « cgs » permet de faire apparaître simplement le c^2, qui le fait alors ressembler au « cgs-emu »[55] ; voici cependant les valeurs SI en « mks » :

	Constante $K_{él}$	Constante K_{ma}
SI en mks, cette fois	$10^{-7}.c^2$	10^{-7} par définition via le μ_0

Deux constantes « électromagnétiques » avec une équation valable dans tous ces SystÉlMas : $K_{él} = K_{ma} \cdot c^2$. Certains physiciens utilisent même ladite équation pour définir c ! En fait, dès octobre 2011, le SI définit l'étalon de longueur (le _m) à partir de l'étalon de temps (la _s) par la valeur posée exacte de c.

On voit déjà surgir ici les deux constantes « non électromagnétiques » c et 4π qui sont à la base de « mon » diagramme aristotélicien.

Plan $2_{él}$) Le champ géométrique D

	divD =	Avec une charge ponctuelle

[55] Faut-il vraiment rappeler que $c \approx 3^E8$·_m/_s = 3^e10·_cm/_s ? et que 1_N = 1^e5·_dyne ? Au fait, quelle est la DimPhys de ces facteurs 1^E-2 ou 1^E-7 ?

SI (en cgs ou en mks) H.L.	: = ρ	$D = Q / 4\pi r^2$
cgs-esu, cgs-esu u.G.	: = 4πρ	$D = Q / r^2$

Plan 2_{ma}) Le champ géométrique H
On y « sent » venir un beau « DA » !

	rotH =	Avec un courant rectiligne infini
SI (en cgs ou en mks)	: = j	$H = 2 \cdot 1/4\pi \cdot I/r$
cgs-esu, cgs-emu	: = 4π · j	$H = 2 \cdot I/r$
u.G.	: = 4π/c · j	$H = 2 \cdot 1/c \cdot I/r$
H.L.	: = 1/c · j	$H = 2 \cdot 1/4\pi c \cdot I/r$

Le facteur 2 sert à la définition SI de l'_A. Il assure aussi l'invariance relativiste entre les $F_{él}$ et les F_{ma}.

Dans ces deux plans $2_{él}$) et 2_{ma}), on voit le facteur 4π valser d'une colonne à l'autre. Cela tient au fait que la colonne de droite résulte d'une intégrale. Ce facteur devrait s'exprimer en _sr, mais bon…

Plan $3_{él}$) Le champ dynamique E et son action

Chacun s'accorde à poser $F_{él} := Q_{test} \cdot E_{source}$. Il n'y a donc aucun problème : cette définition du champ E est calquée sur celle du champ de gravitation : $F_{grav} := m_{test} \cdot g_{source}$. Notons en passant que les formules pour la gravitation ne sont pas rationnalisées !

Plan 3_{ma}) Le champ dynamique B et son action

	$dF_{ma} / dL =$	$F_{Lor} =$
SI, cgs-esu, cgs-emu	$= I_{test} \cdot B_{source}$	$:= Q_{test} \cdot v_{test} \cdot B_{source}$
u.G., H.L.	$= 1/c \cdot I_{test} \cdot B_{source}$	$:= 1/c \cdot Q_{test} \cdot v_{test} \cdot B_{source}$

Le facteur 1/c témoigne du caractère relativiste du champ B via les transformations de Lorentz ; v/c n'est en effet rien d'autre que le β de la relativité restreinte.

Plans 2) et 3) : Les constantes ε_0 et μ_0

Puisque l'on a toujours (dans le vide) $D := \varepsilon_0 E$ et $B := \mu_0 H$, on trouve aisément :

	ε_0	μ_0
SI	$= 10^2 / 4\pi c^2$	$= 4\pi \cdot 10^{-2}$ par définition
cgs-esu	= 1	$= 1 / c^2$
cgs-emu	$= 1 / c^2$	= 1
u.G., H.L.	= 1	= 1

Calculez ce que vaut le célèbre produit $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2$ et comparez avec le $K_{ma} \cdot c^2 / K_{él}$ du plan 1) !

Plan 4) : Les champs matériels P et M

Autrement dit, les corrections à apporter aux formules ci-dessus quand on n'est pas dans le vide.

	$D := \varepsilon_0 \cdot E + \ldots$	$H := 1/\mu_0 \cdot B - \ldots$
SI, H.L.	… + P	… - M
cgs-esu, cgs-emu, u.G.	… + 4πP	… - 4πM

L'inventaire est presque terminé ; il manque la loi de Maxwell complète rotH = … ; comme dans tous les bons manuels, elle sera laissée en exercice.

Et voici le diagramme aristotélicien (DA) promis, fondé sur deux constantes que je note ici K_Ω (= 1 ou 4π ; Ω pour l'angle solide en _sr évidemment) et K_{Lor} (= 1 ou 1/c), tel que pressenti au plan 2_{ma}) pour le champ géométrique H :

	Colonne K_Ω = 4π	Colonne K_Ω = 1
Ligne K_{Lor} = 1	esu et emu	SI
Ligne K_{Lor} = 1 / c	u.G.	H.L.

Exercice complet

- Écrivez la loi de Maxwell complète dans les différents SystÉlMas.
- Écrivez toutes les superbes formules des 4 plans que j'ai introduits ci-dessus avec les constantes K_Ω et K_{Lor} afin de les rendre générales.
- Enfin, dans un grand DA, placez-les dans les quatre cases.

Corrigé sur demande avec préavis. Un coup d'œil sur la page 817 du Jackson en français donne, à sa façon, toutes les réponses pour les plans 2), 3) et 4).

Hommage posthume à mon prof de thèse, J. M. Jauch

En 1976 est paru, en 2e édition revue et corrigée, l'ouvrage qu'il avait cosigné en 1955 avec F. Rohrlich, ouvrage intitulé *The Theory of Photons and Electrons*.

À ma connaissance, **c'est le seul livre à utiliser le système de Haeviside-Lorentz en expliquant clairement les motivations de ce choix**, dans le §1 (*The natural unit system*) du chapitre I (*General principles*).

Étalons chez Wien, Planck, Rayleigh-Jeans, Stefan-Boltzmann, …
… Il y en a beaucoup, de tels étalons en photométrie …
Et encore, rien que pour le corps noir !

ET VOICI ENCORE UNE « TABLE DES MATIÈRES »

I) Quelques références, en vrac

- R. Fleury et J.P. Mathieu : *Chaleur, thermodynamique, états de la matière.* Eyrolles, 3^{e} édition 1961. Le chapitre 20, intitulé « Rayonnement, hautes températures », est des plus pédagogiques, il m'a fortement inspiré.

- Internet en général et Wikipedia en particulier. On y trouve moult informations, dont en particulier les termes « modernes » définis par la CIE (Commission internationale de l'éclairement) avec ses normes ISO (entre autres ISO 9288 et ISO/CIE 23539:2005) en accord avec le CIPM (Comité international des poids et mesures). Notons encore que Fleury-Mathieu se réfèrent déjà à la CIE avec les normes édictées à l'époque.

- Le site www.techniques-ingenieur.fr m'a permis de trouver en deux pages intitulées « Notations et symboles » une vaste liste de grandeurs photométriques présentées dans un ordre que je n'ai pas très bien compris : mais deux pages, ce n'est pas long à consulter...

- Gilles Cohen-Tanoudji : *Les constantes universelles*. Hachette 1995.

- Gilles Cohen-Tanoudji : conférence donnée le 30.11.2005 dans le cadre de l'« International Year of Physics » et intitulée *Einstein et les constantes universelles*.

- Sylvie Lamy : *Dictionnaire des unités de mesure*. Ellipses 2004.

- Divers textes du CIPM portant sur une résolution adoptée à Sèvres par la 24e CGPM (Conférence générale des poids et mesures) le 23.10.2011 ; cette résolution propose une révision, que je qualifierai de fondamentale, des définitions du SI (Système International).

- G. Falk & W. Ruppel, *Energie und Entropie*, Springer 1976.

- Jean-Philippe Uzan : *Dimensions et constantes fondamentales*, dans *Huitième rencontre « Physique et interrogations fondamentales »*, 19.11.2003[56].

- Il y a beaucoup d'autres références possibles, bien sûr.

II) « Mes » notations

Inspiré entre autres :

- par les notations de la TI-89, calculatrice utilisée durant quelques années dans les cours de niveau fort en mathématiques et en physique dans différents établissements du Collège de Genève,
- et par la proposition pour une révision du SI (seul système employé dans ce document) adoptée le 23.10.2011,

j'utiliserai des tirets de soulignements pour noter :

[56] Voir Annexe B.

- aussi bien les unités, que je préfère appeler étalons (les tirets de soulignement remplacent les crochets),
- que les constantes universelles selon les circonstances.

IIIa) Quelques constantes universelles en mécanique et en thermodynamique

- _c = la célérité de la lumière dans le vide en _m / _s.
- _h = la « Hilfskonstante » de Planck en _J / _Hz = _J·_s.
- _k = la constante de Boltzmann en _J / _°K [57].
- _σ = la constante de Stefan-Boltzmann en _W / ($\_m^2 \cdot \_°K^4$), elle peut être définie à partir des précédentes constantes.

IIIb) « Scoop » important sur ces constantes[58]

C'est en fixant <u>sans incertitude</u> les valeurs de _c, _h et _k (et, donc, de _σ) que le CIPM propose d'opérer sa révision du SI. En voici le schéma :

- La seconde « _s » est déterminée par la fréquence à fixer exactement d'une certaine vibration. C'est le seul étalon[59] à reposer sur un phénomène !
- *Le mètre « _m » est l'unité de longueur ; sa grandeur est déterminée quand on fixe la valeur numérique exacte de la vitesse _c de la lumière dans le vide à 299'792'458 pour l'exprimer en _m/_s.* C'est le texte officiel proposé.
- Le kilogramme « _kg » est déterminé par la valeur à fixer exactement de la constante de Planck _h. Quel progrès depuis le cylindre en platine iridié !
- Le kelvin « _K » (même si je le note parfois _°K...) est déterminé par la valeur à fixer exactement de la constante de Boltzmann _k. Quel progrès depuis le point triple de l'eau !
- Il en va de même pour les trois derniers étalons.

Le SI-2011 et le système naturel de Planck (SNP) se construisent de façon similaire ; dans le fond, ce n'est pas si étonnant que cela !

Le SI-2011	**Le SNP**

[57] Oui, je sais, je place parfois explicitement le symbole du degré...
[58] Voir l'annexe B.
[59] Avec, il est vrai, la candela.

Une fois la _s définie, on pose :

_c := sa valeur, déjà exacte, en _m/_s ;	_c := 1 ;
_h := sa valeur à fixer en _J·_s ou, mieux, en _J/_Hz ;	_h:= 2π (on devrait, en toute rigueur, écrire 2π·_rad ; mais bon …) ;
_k := sa valeur à fixer en _J/_K ;	_k := 1 ;
_σ garde sa valeur qui sera fixée sans marge d'erreur ;	_σ vaut alors $\pi^2/60$; joli, non ?
_*G* garde sa valeur et sa marge d'erreur.	De plus, pour la relativité générale, on pose _*G* := 1.

IIIc) « Les » constantes de Stefan-Boltzmann

Pluriel curieux, non ? En fait, dans la littérature (en particulier chez Wikipedia), j'ai trouvé <u>trois</u> formules photométriques offrant l'allure

« une certaine grandeur $G = \sigma \cdot T^4$ » ;

ce sont, avec trois indices *ad hoc* :

« LA » formule originelle de Stefan-Boltzmann (*indice SB*), avec « LA » bonne constante σ_{SB} ; G_{SB} y est dûment exprimée en $\_W/\_m^2$.

C'est bien cette constante qui figure dans la calculatrice TI-89 sous le symbole _σ, avec ses $\_kg \cdot \_s^{-1} \cdot \_K^{-4}$ pour étalon. Vérifiez, cela joue !

Une formule *bis* où G_{bis}, définie par $G_{bis} := G_{SB} \cdot 4/c$, est exprimée en $\_J/\_m^3$ et parle donc d'une densité d'énergie ; ainsi $G_{bis} = \sigma_{bis} \cdot T^4$ avec :

$$\_\sigma_{bis} \quad := \quad \_\sigma_{SB} \cdot 4/c \quad \text{en } \_J \cdot \_m^{-3} \cdot \_K^{-4}$$

Enfin une formule *ter* où G_{ter}, définie par $G_{ter} := G_{SB} \cdot 1/\pi$, est exprimée en $\_W/(\_m^2 \cdot \_sr)$ et est une luminance ; _sr désigne le stéradian, étalon utile pour les aspects directionnels ; ainsi $G_{ter} = \sigma_{ter} \cdot T^4$ avec :

$$\_\sigma_{ter} \quad := \quad \_\sigma_{SB}/\pi \quad \text{en } \_W \cdot \_m^{-2} \cdot \_sr^{-1} \cdot \_K^{-4}$$

Ces subtiles distinctions seront reprises plus loin.

IV) Catalogue « raisonné » des grandeurs photométriques spectrales (inspiré, pour ne pas dire plagié, du document « ISO/CIE 23539:2005 »)

Il y a pour commencer deux critères pour classer ces grandeurs.

1er critère : Grandeurs spectrales en ν ou en λ

Soit *G* une grandeur quelconque portant sur la totalité du spectre[60], avec son étalon _γ. Nous ne distinguerons pas ici le spectre visible du spectre total ; donc les intégrales, en ν ou en λ, iront de 0 à l'infini ; en conséquence :

- pas de *lumens _lm* à la place de _W ([61]),
- pas de *candelas _cd* à la place de _W/_sr,
- pas de *lux _lx* à la place de _W/_m².

G dépend en général de la température absolue T. Les deux grandeurs spectrales[62] (selon CIE 2005) ou monochromatiques (selon CIE 1961) associées sont :

Grandeur spectrale en ν	Grandeur spectrale en λ
$G_\nu(\nu,T)$ en _γ·_s ou en _γ/_Hz telle que : $G(T) = \int d\nu \cdot G_\nu(\nu,T)$	$G_\lambda(\lambda,T)$ en _γ/_m telle que : $G(T) = \int d\lambda \cdot G_\lambda(\lambda,T)$

C'est la formule $c = \nu \cdot \lambda$, dont on tire $d\nu \cdot \lambda + \nu \cdot d\lambda = 0$, qui permet de passer de l'une à l'autre. Un calcul simple (par substitution) permet en effet d'établir que :

$$\nu \cdot G_\nu(\nu,T) = \lambda \cdot G_\lambda(\lambda,T).$$

2e critère : Grandeurs spectrales énergétiques ou photoniques

Depuis le début du XXe siècle, on sait que l'énergie en photométrie est granulaire (Planck 1900) et qu'elle s'écrit $E = h\nu = hc/\lambda$ pour un photon (Einstein 1905) ; il est donc possible, dans une grandeur spectrale, de remplacer une énergie par un nombre de photons et de parler ainsi de grandeurs photoniques.

Suivant en cela l'exemple de Falk et Ruppel[63] (réf. [8]), nous introduisons ici un étalon ad hoc « _phot » tel que hν s'exprime en _J/_phot quand nous voudrons passer d'une grandeur énergétique à une grandeur photonique ou vice versa. C'est ainsi que la constante _h sera donnée en _J·_s/_phot.

60 Une telle grandeur pourrait être qualifiée d'intégrale.

61 Une ampoule dite de « basse consommation » prétend offrir beaucoup de _lm/_W.

62 De telles grandeurs pourraient être qualifiées de différentielles.

63 À vrai dire, ils font cela en mécanique statistique, par exemple pour le nombre d'Avogadro. Leur étalon s'appelle évidemment _Teilchen. C'est très beau.

Résumons-nous

Deux critères indépendants l'un de l'autre, voilà qui permet déjà de classer les types de grandeurs spectrales ou différentielles à l'aide d'un diagramme aristotélicien (2 lignes et 2 colonnes, un de mes dadas) ; étant donné une grandeur énergétique intégrale quelconque G avec son étalon $\_\gamma$:

	Colonne pour les grandeurs en ν	Colonne pour les grandeurs en λ
Ligne pour les grandeurs énergétiques (indice én) *Remarque : la grandeur globale ou intégrale $G_{én}(T)$ s'exprime en $\_\gamma$*	Case « énν »[64] $G_{én\nu}(\nu,T)$ en $\_\gamma\cdot\_s$ ou en $\_\gamma/\_Hz$	Case « énλ » $G_{én\lambda}(\lambda,T)$ en $\_\gamma/\_m$
Ligne pour les grandeurs photoniques (indice ph) *Remarque : la grandeur globale ou intégrale $G_{ph}(T)$ s'exprime en $\_\gamma\cdot\_J/\_phot$*	Case « phν » $G_{ph\nu}(\nu,T)$ en $\_\gamma\cdot\_s\cdot\_J/\_phot$	Case « phλ » $G_{ph\lambda}(\lambda,T)$ en $\_\gamma\cdot\_J/(\_m\cdot\_phot)$

Rappelons les formules de passage :

- On passe d'une colonne à l'autre par la formule $\nu\cdot G_\nu(\nu,T) \;=\; \lambda\cdot G_\lambda(\lambda,T)$.
- On passe d'une ligne à l'autre par les formules $h\nu\cdot G_{ph\nu} = G_{én\nu}$ pour la colonne de gauche et $hc\cdot G_{ph\lambda} = \lambda\cdot G_{én\lambda}$ pour celle de droite. Attention, il n'en va pas de même pour les grandeurs intégrales ou totales[65] !

Mais ce n'est pas tout : il y a encore un 3e critère de classification. Sans compter l'aspect historique.

3e critère : Exitances[66] / densités d'énergie / luminances

Ce critère s'accompagne des « trois » constantes tels qu'elles ont été décrites plus haut. Pour chacune de ces grandeurs, on pourra dresser le diagramme aristotélicien construit sur les deux premiers critères.

---

[64] C'est plus parlant que le « L1C1 » d'un tableur, non ?

[65] Voir l'annexe A

[66] Du latin « exire » = sortir ; rien à voir donc avec ex<u>c</u>iter... ; même si le sujet est excitant.

Remarque : Dans le document « ISO/CIE 23539:2005 » que je « plagie », les grandeurs spectrales <u>dans les formules</u> s'expriment avec, explicitement, des _Hz pour les fréquences et des _μm pour les longueurs d'onde, et ce dans un but évidemment louable et pédagogique[67] » :

- *il est différent de considérer des _s ou des 1/_Hz, ce qui ne pose par ailleurs aucun problème ;*
- *il est aussi différent de considérer des _m^3 ou des _m^2·_μm, ce qui introduit évidemment ci et là un facteur $10^{\pm 6}$!*

Les <u>constantes</u>, quant à elles, y sont « réglementaires », ni _Hz ni _μm.

> *Autre remarque « à propos de » la précédente, mais sans lien avec la photométrie. Dans le SI « pur et dur », la résistivité électrique s'exprime en _Ω·_m, ce qui ne manque pas de faire rire les électriciens qui sont sur le terrain ; de mon côté, j'enseignais à mes élèves que le bon étalon était le _Ω·_mm^2/_m, avec des facteurs $10^{\pm 6}$ à considérer.*

Aspect historique

Cet aspect historique nous conduit à décomposer la ligne « én » en deux :

- « én » avant Planck : thermodynamique la plus pure ; cependant, on sait déjà que $c = \nu \cdot \lambda$;
- « én » entre Planck et Einstein : granularité de la lumière ;

tandis que la ligne « ph », quant à elle, se situe :

- après Einstein : introduction du photon.

Je ne ferai une telle analyse que pour l'exitance (CIE 2005), anciennement appelée émittance (CIE 1961), car c'est là que l'on suit l'aspect historique.

[67] On aura ainsi les dν en _Hz et les dλ en _μm.

Diagramme complet pour l'exitance M

L'exitance énergétique totale (ou intégrale) est définie par $M_{én} := dP_{ém}/dS_{ém}$ (puissance lumineuse totale émise par unité de surface émettrice), elle s'exprime donc en _W/_m^2. C'est LA loi historique sur laquelle s'est bâtie la 1ère mouture de la « vieille » théorie quantique.

Notons déjà que la fonction thermodynamique F introduite par Wien est intimement liée à la fonction purement mathématique f décrite dans l'appendice A ; la première s'exprime avec des grandeurs physiques dimensionnées, la seconde avec une variable mathématique x a priori quelconque, juste bonne à donner lieu à de jolies intégrales. La constante $\zeta(3)$ est aussi définie dans l'appendice A.

	Exitances spectrales en ν	Exitances spectrales en λ
Exitances énergétiques		
Avant Planck $M_{én} = \sigma \cdot T^4$ en _W/_m^2 (loi de Stefan-Boltzmann)	$M_{én\nu} = \nu^3 \cdot F(\nu/T)$ en (_W/_m^2)/_Hz (loi de Wien, 1894)	$M_{én\lambda} = c^4/\lambda^5 \cdot F(c/\lambda T)$ en (_W/_m^2)/_m [68]
Entre Planck et Einstein $M_{én} = 2\pi^5 k^4/15h^3c^2 \cdot T^4$	$M_{én\nu} =$ $\nu^3 \cdot 2\pi h/c^2 \cdot f(h\nu/kT)$ (loi de Planck, 1900)	$M_{én\lambda} =$ $c^4/\lambda^5 \cdot 2\pi h/c^2 \cdot f(hc/\lambda kT)$
Exitances photoniques		
Après Einstein $M_{ph} =$ $4\pi\zeta(3)k^3/h^3c^2 \cdot T^3$ en _phot/(_s·_m^2)	$M_{ph\nu} =$ $\nu^2 \cdot 2\pi/c^2 \cdot f(h\nu/kT)$ en _phot/_m^2	$M_{ph\lambda} =$ $c^3/\lambda^4 \cdot 2\pi/c^2 \cdot f(hc/\lambda kT)$ en _phot/(_s·_m^2·_m)

En grisé, les cases qui donnent lieu aux considérations historiques.

[68] C'est ici que l'on pourrait trouver des _µm.

Diagramme abrégé pour la densité d'énergie U

Ce tableau se construit à partir du premier en multipliant <u>toutes</u> les exitances par 4/c et <u>tous</u> les étalons par _s/_m.

	Densités d'énergie spectrales en ν	Densités d'énergie spectrales en λ
Densités d'énergie $U_{én}$ en $\_W{\cdot}\_s/\_m^3 = \_J/\_m^3$ *C'est ici que l'on trouve la constante « bis » citée plus haut*	$U_{én\nu}$ en $(\_J/\_m^3)/\_Hz$	$U_{én\lambda}$ en $(\_J/\_m^3)/\_m$
Densités de photons U_{ph} en $\_phot/\_m^3$	$U_{ph\nu}$ en $(\_phot/\_m^3)/\_Hz$	$U_{ph\lambda}$ en $(\_phot/\_m^3)/\_m$

Diagramme abrégé pour la luminance L

Ce tableau se construit à partir du premier en multipliant <u>toutes</u> les exitances par 1/π et <u>tous</u> les étalons par 1/_sr (c'est le stéradian). On peut aussi multiplier toutes les densités d'énergie par c/4π et ajuster les étalons en conséquence.

	Luminances spectrales en ν	Luminances spectrales en λ
Luminances énergétiques $L_{én}$ en $(\_W/\_m^2)/\_sr$ *C'est ici que l'on trouve la constante « ter » citée plus haut*	$L_{én\nu}$ en $(\_W/\_m^2)/(\_Hz{\cdot}\_sr)$	$L_{én\lambda}$ en $(\_W/\_m^2)/(\_m{\cdot}\_sr)$
Luminances photoniques L_{ph} en $\_phot/(\_s{\cdot}\_m^2{\cdot}\_sr)$	$L_{ph\nu}$ en $\_phot/(\_s{\cdot}\_m^2{\cdot}\_Hz{\cdot}\_sr) = \_phot/(\_m^2{\cdot}\_sr)$	$L_{ph\lambda}$ en $\_phot/(\_s{\cdot}\_m^2{\cdot}\_m{\cdot}\_sr)$

Et pour ne pas failler à une certaine tradition : S.E.O.

Annexe A : Les intégrales utilisées (pour mémoire et pour le plaisir)

Ceci est essentiellement un extrait ad hoc de différents formulaires.

Fin décembre 1900, Planck a introduit sa fonction interpolant celle de Wien et celle de Rayleigh-Jeans ; en voici l'allure mathématique généralisée :

$$\text{pour } x > 0 \text{ et } \underline{\mathrm{Re}}(s) > 1, \quad f_s(x) := x^{s-1} / (e^x-1).$$

Elle conduit aux intégrales I(s) suivantes, qui font intervenir la célèbre fonction gamma « Γ » et la non moins célèbre fonction de Riemann « ζ » :

$$I(s) := \int_D dx \cdot f(x) := \Gamma(s) \cdot \zeta(s), \text{ avec } D :=]\, 0 \,;\, \infty \,[.$$

Le domaine d'intégration D traduit le fait que nous intégrons sur tout le spectre, que ce soit avec $d\nu$ ou avec $d\lambda$.

<u>La fonction Γ</u> : seules nous intéressent ici les valeurs $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in N$.

<u>La fonction ζ</u> : seules nous intéressent ici les valeurs suivantes :

- $\zeta(1) = \infty$, d'où la restriction <u>Re</u>(s)>1 ;
- $\zeta(2) = \pi^2/6$;
- $\zeta(4) = \pi^4/90$;
- $\zeta(3)$, nombre appelé constante de Roger Apéry (qui, en 1977, en a démontré l'irrationalité) ; ce nombre n'offre pas de « forme fermée ; il vaut environ 1,2020569... (Le *Handbook of Mathematical Function* en donne 20 décimales).

Voici donc quelques intégrales :

$$I(2) = \Gamma(2) \cdot \zeta(2) = \pi^2/6 \,;$$
$$I(3) = \Gamma(3) \cdot \zeta(3) = 2\zeta(3) \,;$$
$$I(4) = \Gamma(4) \cdot \zeta(4) = \pi^4/15.$$

Annexe B : Conférences de Jean-Marc Lévy-Leblond et de Jean-Philippe Uzan

Toutes deux témoignent du rôle important que les physiciens veulent conférer à quelques constantes universelles, objet de mon « scoop » IIIb) au début du présent chapitre.

B1) Invitation à la conférence de Jean-Marc Lévy-Leblond (JMLL)

Le 12 mars 1979, JMLL a donné à l'École de Physique de Genève une conférence intitulée « *L'IMPORTANCE D'ÊTRE CONSTANTE (d'après Oscar Wilde)* » ; je ne résiste pas au plaisir de recopier ici le petit résumé de présentation, il vaut son pesant d'or.

- *Pourquoi y a-t-il des constantes fondamentales en physique et non en biologie ?*
- *Toutes les constantes de la physique ont-elles le même statut, par exemple la compressibilité de l'eau, la charge de l'électron, la constante de Boltzmann ?*
- *Pourquoi n'y a-t-il pas de constantes fondamentales en mécanique ?*
- *La vitesse de la lumière « c » est-elle bien une constante fondamentale si elle caractérise la propagation d'un agent physique particulier ?*
- *Pourquoi les tables de <u>constantes</u>[69] physiques voient-elles leur contenu <u>varier</u> au cours du temps ?*
- *Qu'y a-t-il de commun entre un simple facteur tel que le rapport J = 1 calorie / 1 joule et une constante fondamentale comme celle de Planck ?*
- *Comment peut-on « faire tendre vers zéro » (ou vers l'infini) des <u>constantes</u> fondamentales (lorsque l'on affirme que $c \to \infty \equiv$ relativité galiléenne ou que $h \to 0 \equiv$ mécanique classique) ?*
- *Inversement, comment peut-on prendre certaines de ces constantes pour unités ?*

- *À partir du statut conceptuel des constantes physiques, peuvent être posés de nombreux problèmes théoriques, épistémologiques, historiques de la physique contemporaine.*

Je n'ai, hélas, pas le souvenir d'avoir assisté à cette conférence. Mais j'ai précieusement conservé son annonce.

[69] Souligné dans le texte

B2) Extraits de *Dimensions et constantes fondamentales* de Jean-Philippe Uzan, dans *Huitième rencontre « Physique et interrogations fondamentales »*, le 19.11.2003.

[...]

JMLL[70] a proposé, dans les années 1970, de classer les constantes universelles en trois catégories :

- Type A : constante caractérisant les propriétés d'un système physique particulier (ex : charge et masse de l'électron).
- Type B : constante caractérisant les propriétés de toute une classe de phénomènes (ex : constantes de couplages).
- Type C : constante universelle transcendant les systèmes physiques et apparaissant dans les lois fondamentales de la physique (ex : la vitesse de la lumière).

On peut (et on doit) compléter cette liste par une 4e catégorie :

- Type D : constante de référence, dont la valeur numérique a été fixée par décret et qui entre explicitement dans la définition de nos systèmes d'unités.

[...]

La vitesse de la lumière entre dans cette catégorie depuis 1983.

[...]

Actuellement, la possibilité de définir le kilogramme à partir de la constante de Planck est à l'étude.

[...]

B3) Conclusion...

Depuis 1983 ? Ainsi mon « scoop » n'en est en fait pas vraiment un...

[70] JMLL, *The importance of being (a) constant*, Enrico Fermi School LXXII, à Varenne, Italie (North Holland, 1979).

Annexe C) : Un texte de Georges Lemaître

La Revue des Questions Scientifiques[71] a consacré son 4e numéro du tome 138 (2012) à une réédition des papiers que Georges Lemaître (GL) y a publiés (articles, conférences) entre 1926 et 1957. On voit dans ces pages des photos de Lemaître bien sûr, mais aussi d'Eddington, de Friedmann, de Gamow[72], de Hoyle, de Hubble, de de Sitter, pour ne citer que celles illustrant les « repères bibliographiques » qui servent d'introduction.

L'un de ces papiers, publié en 1931 et intitulé « *L'expansion de l'espace* », m'a paru intéressant en ceci que GL y propose la très jolie et très simple petite démonstration que je résume ci-dessous avec les notations introduites plus haut.

<u>Constats initiaux</u> : la densité d'énergie (*ie* le $U_{én}$ du §IV en _J/_m^3) est proportionnelle à T^4, tandis que la densité de photons (*ie* le U_{ph} du même § en _phot/_m^3) est proportionnelle à T^3. GL écrit donc quelque chose qui ressemble à $U_{én} = VT^4$ et $U_{ph} = VT^3$ et ce en oubliant toutes les constantes ; le SI est donc mis de côté, pour une fois…

<u>Hypothèse</u> pour décrire l'expansion de l'Univers : $U_{én}$ est une constante et V augmente.

GL calcule d'abord $dU_{én} = T^4 \cdot dV + 4VT^3 \cdot dT$ et $dU_{ph} = T^3 \cdot dV + 4VT^2 \cdot dT$. Puis, posant $dU_{én} = 0$, il constate que si $dV>0$ (expansion oblige) alors $dT = -T \cdot dV/4V$ et, donc, $dT<0$. Enfin, substituant dT dans dU_{ph}, il obtient $dU_{ph} = 1/4 \cdot T^3 \cdot dV$ et établit ainsi que le nombre de photons augmente ; il pousse même plus loin en disant que cette augmentation lui « *paraît être la forme moderne du principe de l'augmentation de l'entropie ou de la dégradation de l'énergie, celle-ci se répartissant en particules de plus en plus nombreuses* ».

Joli, non ?

[71] Publication en principe trimestrielle de la Société Scientifique de Bruxelles.

[72] Je ne résiste pas au plaisir de citer encore une fois ici l'article de Alpher, Bethe et Gamow, article ayant reçu le superbe sigle « αβγ » et publié en 1948 dans la *Physical Review*.

Et voilà,

c'est tout pour l'instant.

Il y aura peut-être une suite...

En effet,

ce ne sont pas les sujets qui manquent

et l'espoir fait vivre...

Dépôt légal le 26 mars 2014
(Loi du 19 mai 1967, Genève, Suisse)