

Vers une unification  
de toutes les interactions

(La Théorie du Tout)



# Vers une unification de toutes les interactions

Claude DAVIAU

Jacques BERTRAND

Thierry SOCROUN

Dominique GIRARDOT

FONDATION LOUIS DE BROGLIE

Claude Daviau  
email : [daviau.claude@orange.fr](mailto:daviau.claude@orange.fr)

Jacques Bertrand  
email : [bertrandjacques-m@orange.fr](mailto:bertrandjacques-m@orange.fr)

Thierry Socroun  
email : [tsocroun@yahoo.fr](mailto:tsocroun@yahoo.fr)

Dominique Girardot  
email : [dominique.girardot.1989@polytechnique.org](mailto:dominique.girardot.1989@polytechnique.org)

© Fondation Louis de Broglie,

ISBN : 978-2-910458006

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des paragraphes 2 et 3 de l'article L. 122-5, d'une part, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective et, d'autre part, sous réserve du nom de l'auteur et de la source, que les analyses et les courtes citations justifiées par le caractère critique, polémique, pédagogique, scientifique ou d'information, toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite (article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

|                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Nomenclature</b>                                          | <b>11</b> |
| <b>Introduction</b>                                          | <b>19</b> |
| <b>1 L'onde de l'électron de spin 1/2</b>                    | <b>27</b> |
| 1.1 L'équation d'onde de l'électron . . . . .                | 28        |
| 1.1.1 Equations du second ordre . . . . .                    | 32        |
| 1.1.2 L'invariance de forme de l'équation de Dirac . . . . . | 33        |
| 1.2 Invariance étendue . . . . .                             | 40        |
| 1.3 L'équation de Dirac dans $Cl_3$ . . . . .                | 43        |
| 1.3.1 Onde plane . . . . .                                   | 46        |
| 1.3.2 Densités tensorielles sans dérivée partielle . . . . . | 47        |
| 1.3.3 Transformation relativiste des densités . . . . .      | 52        |
| 1.4 Forme invariante de l'équation de Dirac . . . . .        | 53        |
| 1.4.1 Conjugaison de charge . . . . .                        | 55        |
| 1.5 Équation invariante améliorée . . . . .                  | 57        |
| 1.5.1 Forme décroisée de l'équation d'onde . . . . .         | 59        |
| 1.5.2 Invariance de jauge . . . . .                          | 61        |
| 1.5.3 Onde plane . . . . .                                   | 63        |
| 1.5.4 Invariance élargie . . . . .                           | 64        |
| 1.5.5 Normalisation de l'onde . . . . .                      | 65        |
| 1.5.6 Conjugaison de charge . . . . .                        | 69        |
| 1.6 L'atome d'hydrogène . . . . .                            | 72        |
| 1.6.1 Effet Lamb . . . . .                                   | 77        |
| 1.6.2 Au sujet des probabilités . . . . .                    | 78        |
| 1.7 Trois générations . . . . .                              | 78        |
| 1.8 La dimension – numérique (invdim) . . . . .              | 82        |
| 1.9 Espace-temps invariant . . . . .                         | 85        |
| 1.10 Impulsion-énergie, force de Lorentz . . . . .           | 86        |
| 1.11 Le champ électromagnétique . . . . .                    | 90        |
| 1.12 Le principe d'exclusion de Pauli . . . . .              | 94        |
| 1.13 Forme itérative de l'équation améliorée . . . . .       | 97        |

|          |                                                      |            |
|----------|------------------------------------------------------|------------|
| <b>2</b> | <b>Interactions faibles</b>                          | <b>101</b> |
|          | (Cas des leptons)                                    |            |
| 2.1      | De l'onde de l'électron à l'onde complète . . . . .  | 102        |
| 2.1.1    | Nouvelles densités tensorielles . . . . .            | 108        |
| 2.1.2    | L'invariance de jauge électro-faible . . . . .       | 111        |
| 2.2      | Conserver les termes de masse . . . . .              | 117        |
| 2.3      | Invariance élargie . . . . .                         | 118        |
| 2.3.1    | Le groupe $U(1)$ engendré par $P_0$ . . . . .        | 120        |
| 2.3.2    | Le groupe de jauge $SU(2)$ . . . . .                 | 121        |
| 2.3.3    | Simplification des équations . . . . .               | 125        |
| 2.3.4    | Double lien avec la densité lagrangienne . . . . .   | 126        |
| 2.3.5    | Itération et équations des champs de jauge . . . . . | 131        |
| 2.3.6    | Angle de Weinberg-Salam . . . . .                    | 133        |
| 2.3.7    | Conséquence pour le neutrino-monopôle . . . . .      | 135        |
| 2.4      | Densités tensorielles d'impulsion-énergie . . . . .  | 136        |
| 2.4.1    | Densité de probabilité . . . . .                     | 139        |
| 2.5      | Quantification du moment cinétique . . . . .         | 140        |
| 2.6      | Dynamique du neutrino-monopôle . . . . .             | 143        |
| 2.7      | L'onde solitaire de l'électron . . . . .             | 144        |
| 2.7.1    | Résolution du système radial . . . . .               | 148        |
| 2.7.2    | Normalisation de l'onde . . . . .                    | 150        |
| <b>3</b> | <b>Interactions faibles et fortes des quarks</b>     | <b>153</b> |
| 3.1      | Le secteur des quarks . . . . .                      | 153        |
| 3.2      | Chromodynamique . . . . .                            | 160        |
| 3.2.1    | Trois générations, quatre neutrinos . . . . .        | 163        |
| 3.3      | Terme de masse conservé . . . . .                    | 166        |
| 3.4      | Invariance . . . . .                                 | 170        |
| 3.5      | Equation d'onde – densité lagrangienne . . . . .     | 173        |
| 3.6      | Impulsion-énergie . . . . .                          | 175        |
| 3.7      | Quantification du moment cinétique . . . . .         | 177        |
| 3.7.1    | Cas du proton seul ou du neutron seul . . . . .      | 179        |
| 3.8      | Préférence pour les ondes gauches . . . . .          | 180        |
| 3.9      | L'équation d'onde à valeurs réelles . . . . .        | 182        |
| <b>4</b> | <b>Gravitation</b>                                   | <b>185</b> |
| 4.1      | Géométrie différentielle . . . . .                   | 188        |
| 4.1.1    | La gravitation par l'onde quantique . . . . .        | 188        |
| 4.1.2    | Connexion liée au groupe d'invariance . . . . .      | 193        |
| 4.2      | Equations d'onde invariantes . . . . .               | 197        |
| 4.2.1    | Quantification des charges . . . . .                 | 199        |
| 4.3      | Lien double avec la densité lagrangienne . . . . .   | 201        |
| 4.4      | Impulsion-énergie et moment cinétique . . . . .      | 205        |
| 4.4.1    | Densité de probabilité . . . . .                     | 207        |
| 4.4.2    | Quantification du moment cinétique . . . . .         | 207        |

|          |                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 4.4.3    | Le principe d'équivalence . . . . .                           | 208        |
| 4.4.4    | Effet Mössbauer . . . . .                                     | 209        |
| 4.5      | La variété globale d'espace-temps . . . . .                   | 209        |
| 4.5.1    | Structure locale et globale de l'espace-temps . . . . .       | 209        |
| 4.5.2    | Le paradoxe EPR . . . . .                                     | 211        |
| 4.5.3    | La flèche du temps et l'expansion de l'univers . . . . .      | 213        |
| 4.5.4    | Début de l'accélération . . . . .                             | 215        |
| <b>5</b> | <b>Pourquoi ?</b>                                             | <b>217</b> |
| 5.1      | Einstein avait raison . . . . .                               | 219        |
| 5.1.1    | "Il n'y a pas d'alternative" . . . . .                        | 220        |
| 5.1.2    | Après ce travail . . . . .                                    | 221        |
| 5.2      | de Broglie avait raison . . . . .                             | 222        |
| 5.3      | Bohr avait aussi (en partie) raison . . . . .                 | 223        |
| 5.4      | Hasard intrinsèque ou statistique ? . . . . .                 | 224        |
| 5.5      | L'équation de Dirac presque oubliée . . . . .                 | 227        |
| 5.6      | Pourquoi cette forme d'équation d'onde ? . . . . .            | 230        |
| 5.7      | Jeu de piste . . . . .                                        | 232        |
| 5.8      | Physique et mathématiques . . . . .                           | 232        |
| 5.9      | Compréhension, prédiction . . . . .                           | 234        |
| 5.10     | Falsifiabilité . . . . .                                      | 235        |
| <b>6</b> | <b>Épilogue</b>                                               | <b>239</b> |
| <b>A</b> | <b>Algèbres de Clifford</b>                                   | <b>243</b> |
| A.1      | Qu'est-ce qu'une algèbre de Clifford ? . . . . .              | 244        |
| A.2      | Algèbre de Clifford du plan euclidien . . . . .               | 245        |
| A.3      | Algèbre de Clifford de l'espace . . . . .                     | 246        |
| A.3.1    | Produit vectoriel, orientation . . . . .                      | 247        |
| A.3.2    | L'algèbre de Pauli . . . . .                                  | 248        |
| A.3.3    | Trois conjugaisons . . . . .                                  | 249        |
| A.3.4    | Gradient, divergence et rotationnel . . . . .                 | 250        |
| A.3.5    | Centre de $Cl_3^*$ , centralisateur de $\sigma_3$ . . . . .   | 251        |
| A.3.6    | L'espace-temps en algèbre de Pauli . . . . .                  | 252        |
| A.3.7    | L'algèbre d'espace en matrices réelles $4 \times 4$ . . . . . | 254        |
| A.3.8    | L'exponentielle dans $Cl_3$ . . . . .                         | 257        |
| A.3.9    | Projecteurs . . . . .                                         | 259        |
| A.3.10   | Identités de Krüger . . . . .                                 | 260        |
| A.3.11   | Lois de l'électromagnétisme dans $Cl_3$ . . . . .             | 262        |
| A.4      | Densités tensorielles . . . . .                               | 265        |
| A.4.1    | Calcul de $\Omega_1$ et $\Omega_2$ , déterminant . . . . .    | 265        |
| A.4.2    | Calcul des $D_\mu^\nu$ . . . . .                              | 266        |
| A.4.3    | Calcul des $S_k$ . . . . .                                    | 268        |
| A.4.4    | Preuve de $\nabla = \widehat{M\nabla'M}$ . . . . .            | 272        |
| A.4.5    | Preuve de $\det(R_\mu^\nu) = r^4$ . . . . .                   | 273        |

|          |                                                                             |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| A.4.6    | Relations entre densités tensorielles . . . . .                             | 275        |
| <b>B</b> | <b>Autres algèbres de Clifford</b>                                          | <b>277</b> |
| B.1      | Les algèbres de Clifford d'espace-temps . . . . .                           | 277        |
| B.1.1    | L'algèbre $Cl_{1,3}$ . . . . .                                              | 277        |
| B.1.2    | $Cl_{1,3}$ comme produit cartésien $Cl_3 \times Cl_3$ . . . . .             | 280        |
| B.1.3    | Preuve de $R_\nu^\mu \gamma^\nu = \tilde{N} \gamma^\mu N$ . . . . .         | 281        |
| B.1.4    | Equation invariante et densité lagrangienne . . . . .                       | 282        |
| B.1.5    | L'algèbre $Cl_{3,1}$ . . . . .                                              | 283        |
| B.1.6    | Représentations matricielles réelles . . . . .                              | 284        |
| B.2      | Retournement dans $Cl_{3,3}$ . . . . .                                      | 286        |
| B.2.1    | Matrices $8 \times 8$ réelles . . . . .                                     | 290        |
| B.2.2    | $Cl_{3,3}$ avec matrices réelles $16 \times 16$ . . . . .                   | 294        |
| <b>C</b> | <b>L'atome d'hydrogène</b>                                                  | <b>295</b> |
| C.1      | Séparation des variables . . . . .                                          | 296        |
| C.1.1    | Résolution du système angulaire . . . . .                                   | 299        |
| C.1.2    | Structure de l'onde . . . . .                                               | 303        |
| C.1.3    | Séparation des variables $r$ et $\theta$ . . . . .                          | 306        |
| C.2      | Résolution du système radial . . . . .                                      | 308        |
| C.2.1    | Cas où $n = 0$ . . . . .                                                    | 311        |
| C.2.2    | Cas $n > 0$ . . . . .                                                       | 312        |
| C.3      | Cas des petits nombres quantiques . . . . .                                 | 314        |
| C.3.1    | Etats $1s_{1/2}$ . . . . .                                                  | 314        |
| C.3.2    | Cas des polynômes radiaux non constants . . . . .                           | 316        |
| C.3.3    | Cas $\mathbf{n} = 2$ et $n = 1$ : états $2s_{1/2}$ . . . . .                | 316        |
| C.3.4    | Cas où $a_0 = 0$ . . . . .                                                  | 321        |
| C.3.5    | Cas des états $2p_{3/2}$ . . . . .                                          | 323        |
| <b>D</b> | <b>Divers calculs</b>                                                       | <b>329</b> |
| D.1      | Invariance de jauge $SU(2)$ des quarks . . . . .                            | 329        |
| D.1.1    | Groupe engendré par $\underline{P}_1$ . . . . .                             | 329        |
| D.1.2    | Groupes engendrés par $\underline{P}_2$ et $\underline{P}_3$ . . . . .      | 330        |
| D.2      | Invariance de jauge sous $SU(3)$ . . . . .                                  | 330        |
| D.3      | Simplification des équations d'onde . . . . .                               | 333        |
| D.3.1    | Termes de jauge de la densité lagrangienne . . . . .                        | 334        |
| D.4      | Calcul des $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ . . . . .                                 | 337        |
| D.4.1    | Calcul des $\mathcal{S}_{(k)}$ et des $\mathcal{A}_{(k)}$ . . . . .         | 337        |
| D.4.2    | Calcul des $\Gamma_{\mu\nu}^\mu$ . . . . .                                  | 338        |
| D.4.3    | Calcul des $\Gamma_{j\nu}^0$ et $\Gamma_{0\nu}^j$ , $j = 1, 2, 3$ . . . . . | 340        |
| D.4.4    | Calcul des $\Gamma_{1\nu}^0$ . . . . .                                      | 341        |
| D.4.5    | Calcul des $\Gamma_{2\nu}^0$ . . . . .                                      | 344        |
| D.4.6    | Calcul des $\Gamma_{3\nu}^0$ . . . . .                                      | 347        |
| D.4.7    | Calcul des $\Gamma_{l\nu}^k$ . . . . .                                      | 350        |

|                           |            |
|---------------------------|------------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | 9          |
| <b>Bibliographie</b>      | <b>355</b> |
| <b>Index</b>              | <b>362</b> |



# Nomenclature

- $(1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, i, i\sigma^1, i\sigma^2, i\sigma^3)$  base de  $Cl_3$ , page 54  
 $(D_0, D_1, D_2, D_3)$  base mobile, page 51  
 $(a)_n \quad (a)_0 = 1 \quad (a)_1 = a, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$ , page 300  
 $(r, \theta, \varphi)$  coordonnées sphériques, page 296  
 $(V_1, V_2, V_3, V_4)$  base canonique de  $M_2(\mathbb{C})$ , page 29  
 $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  constante de structure fine, page 298  
 $\beta$  angle d'Yvon-Takabayasi, page 48  
 $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  symboles de Christoffel (à partir de la contravariance), page 194  
 $\square = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2$  dalembertien, page 253  
 $\Delta = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2$  Opérateur laplacien, page 250  
 $\eta$  onde gauche, page 29  
 $\eta^1$  onde gauche de l'onde de l'électron, page 60  
 $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  symboles de Christoffel (par la covariance), page 189  
 $\gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$  matrices de Dirac ( $j = 1, 2, 3$ ), page 279  
 $\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$  matrices de Dirac (notre choix), page 279  
 $\Gamma_4$  , page 287  
 $\Gamma_5$  , page 287  
 $\Gamma_\mu \quad \mu = 0, 1, 2, 3$  , page 287  
 $\lambda$  nombre quantique magnétique, page 74  
 $\lambda_\mu$  générateurs de  $Cl_{3,1}$ , page 283  
 $\Lambda_a$  générateurs de l'algèbre  $Cl_{3,3}$ , page 290  
 $\mathbb{R}$  corps des nombres réels, page 35

- $\mathbb{C}$  corps des nombres complexes, page 35
- $\mathbb{H} = Cl_3^+$  corps des quaternions (sous-algèbre paire de  $Cl_3$ ), page 247
- $\mathbf{A} := \gamma_\mu A^\mu$  potentiel électromagnétique (en algèbre d'espace-temps), page 280
- $\mathbf{D}$  dérivation invariante (invariance relativiste étendue), page 196
- $\mathbf{d} = \gamma^\mu \partial_\mu$  opérateur différentiel de Dirac, page 283
- $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{pmatrix}$  champ électromagnétique (en algèbre d'espace-temps), page 280
- $\mathbf{i} = \gamma_{0123} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = i\gamma_5$ , page 286
- $\mathbf{J}$  courant de l'électron, page 67
- $\mathbf{J}_l = \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \mathbf{D}_R^1 + \frac{m}{k\mathbf{I}^1} \mathbf{D}_L^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \mathbf{D}_R^8 + \frac{m}{k\mathbf{I}^8} \mathbf{D}_L^8$  courant leptonique, page 108
- $\mathbf{l}$  terme de masse gauche, page 57
- $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix}$  terme de masse matriciel, page 57
- $\mathbf{n}$  nombre quantique principal, page 72
- $\mathbf{n} = |\kappa| + n$  ( $n$  : degré des polynômes radiaux), page 74
- $\mathbf{r}$  terme de masse droit, page 57
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$  ensemble des  $\psi$  (fonctions d'onde), page 28
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$  ensemble des  $\psi$  (ondes de Dirac), page 29
- $\mathcal{G}$  groupe des matrices  $2 \times 2$  complexes  $M$  telles que  $|\det(M)| = 1$ , page 39
- $\mathcal{L}$  densité lagrangienne, page 55
- $\mathcal{L}_+^\dagger$  groupe de Lorentz restreint, page 39
- $\mathcal{L}_q^+; \mathcal{L}_q^-$  densité lagrangienne (quarks), page 173
- $\mathbf{b}; \mathbf{w}^j; \mathbf{h}_j^k$  vecteurs d'espace-temps potentiels, page 166
- $\mathbf{D}_0 = \mathbf{J}$  courant de probabilité, page 49
- $\mathbf{D}_1 = \phi \sigma_1 \phi^\dagger$  premier nouveau courant, page 49
- $\mathbf{D}_2 = \phi \sigma_2 \phi^\dagger$  second nouveau courant, page 49
- $\mathbf{D}_3 = \mathbf{K}$  second courant, page 49
- $\mathbf{D}_L^1 = L^1 \tilde{L}^1$  courant gauche, page 50
- $\mathbf{D}_L^8 := \tilde{L}^8 L^8$  courant gauche du neutrino-monopôle, page 108
- $\mathbf{D}_R^1 = R^1 \tilde{R}^1$  courant droit, page 50
- $\mathbf{D}_R^8 := \tilde{R}^8 R^8$  courant droit du neutrino-monopôle, page 108

- $j$  courant électrique (vecteur d'espace-temps), page 263  
 $J = J^\mu \sigma_\mu$  courant de probabilité, page 47  
 $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  densités, composantes de  $J$ , page 47  
 $k$  courant magnétique), page 264  
 $K^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$  composantes du courant  $K$ , page 47  
 $K_l$  courant gauche moins droite, page 206  
 $v = \frac{1}{\rho} J$  vitesse réduite, page 60  
 $x = x^\mu \sigma_\mu$  élément général de l'espace-temps, page 252  
 $\nabla = \partial_0 - \vec{\partial}$  premier opérateur différentiel dans l'espace-temps, page 253  
 $\nu = E/h$  fréquence, page 67  
 $\Omega = r^{-1}(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} S$  dilatateur, page 296  
 $\Omega_1 = \bar{\psi} \psi$  invariant relativiste, page 47  
 $\Omega_2 = -i \bar{\psi} \gamma_5 \psi$  second invariant relativiste, page 47  
 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$  conjugué de Dirac, page 47  
 $\bar{A} = \hat{A}^\dagger$   $A$  barre, page 249  
 $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  dérivée partielle, page 30  
 $\phi = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & -\eta_2^{1*} \\ \xi_2^1 & \eta_1^{1*} \end{pmatrix}$  onde de l'électron, page 44  
 $\phi_p = -\phi_e \sigma_1$  onde du positron (dans  $Cl_3$ ), page 69  
 $\mathbf{\Lambda}_n, n = 1, \dots, 8$  generateurs du groupe  $SU(3)_c$ , page 161  
 $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$  opérateur différentiel de Dirac, page 279  
 $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial X^\nu} = D_\nu^\mu \partial_\mu$  opérateur de Dirac, page 189  
 $\Psi : \phi \mapsto \phi_e$  : opérateur sur  $Cl_3$ , page 102  
 $\psi = \psi(x, y, z, t)$  fonction d'onde (fonction de l'espace et du temps à valeur complexe), page 28  
 $\Psi_b$  wave  $d(\text{blue}) + u(\text{blue})$ , page 104  
 $\Psi_g$  wave  $d(\text{green}) + u(\text{green})$ , page 104  
 $\Psi_l$  wave electron + neutrino-monopole, page 104  
 $\Psi_L = \Psi_L^1 + \Psi_L^8$  partie gauche de l'onde leptonique, page 121  
 $\psi_p$  onde de Dirac du positron, page 56  
 $\Psi_q = \begin{pmatrix} i\Psi_b & \Psi_r + \Psi_g \\ \Psi_r - \Psi_g & -i\Psi_b \end{pmatrix}$  onde des quarks, page 154

- $\Psi_r$  wave  $d(\text{rot}) + u(\text{rot})$ , page 104
- $\rho$  invariant relativiste principal, page 48
- $\rho_l$  generalisation de  $\rho$  à l'onde leptonique, page 110
- $\sigma_\mu$  matrice de Pauli, page 29
- $\sigma_{21} = \sigma_2 \sigma_1$  est un bivecteur dans  $Cl_3$ , page 45
- $\theta_W$  angle de Weinberg-Salam, page 134
- $\underline{D}$  dérivée invariante de jauge, page 161
- $\underline{J} := \frac{m_a}{k\mathbf{l}} D_L^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} D_R^1$  courant pondéré, page 89
- $\vec{\partial}'$   $(= \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi)$ , page 296
- $\vec{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix}$  principal opérateur différentiel dans  $Cl_3$ , page 250
- $\vec{\partial} \cdot \vec{u}$  divergence de  $\vec{u}$ , page 251
- $\vec{\partial} \times \vec{u}$  rotationnel de  $\vec{u}$ , page 251
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$  produit scalaire, page 244
- $\vec{u} \times \vec{v}$  produit vectoriel), page 247
- $\vec{\text{grad}} a = \vec{\partial} a$  gradient du scalaire  $a$ , page 251
- $\vec{E}$  champ électrique, page 262
- $\vec{H}$  champ magnétique, page 262
- $\vec{u} = u_1 \sigma_1 + u_2 \sigma_2 + u_3 \sigma_3$  ( $\vec{u}^2 = 1$ ), page 296
- $\hat{\nabla} = \partial_0 + \vec{\partial}$  second opérateur différentiel dans l'espace-temps, page 253
- $\hat{A} = A_1 - A_2$   $A$  chapeau, page 249
- $\tilde{L}^{3+n} = \tilde{\phi}^{3+n} \frac{1-\sigma_3}{2}$   $n = 2, 3, 4$ , page 155
- $\tilde{R}^{3+n} = \tilde{\phi}^{3+n} \frac{1+\sigma_3}{2}$   $n = 2, 3, 4$ , page 155
- $\xi$  onde droite, page 29
- $\xi^1$  onde droite de l'électron, page 60
- $A \mapsto \tilde{A}$  réversion, page 245
- $A^\dagger = (A^*)^t$  adjoint(conjugué transposé), page 249
- $A_1 = a + i\vec{v}$  partie paire de  $A = a + \vec{u} + i\vec{v} + ib$ , page 249
- $A_2 = \vec{u} + ib$  partie impaire de  $A = a + \vec{u} + i\vec{v} + ib$ , page 249
- $a_n, n = 1, 2, \dots, 6$  densités invariantes, page 110
- $B$  potentiel chirale, page 264

- $C_{\mu\nu}$  champ de courbure, page 206  
 $Cl_2$  algèbre de Clifford du plan euclidien, page 245  
 $Cl_3$  algèbre de Clifford de l'espace de dimension 3, page 246  
 $Cl_3^*$  groupe des éléments inversible dans  $Cl_3$ , page 34  
 $Cl_3^+$  sous-algèbre paire de  $Cl_3$  (corps des quaternions), page 247  
 $Cl_{1,3}$  algèbre d'espace-temps, page 278  
 $Cl_{2,2}$  algèbre de Clifford, à matrices réelles  $4 \times 4$ , page 285  
 $Cl_{3,1}^+$  sous-algèbre paire de l'algèbre d'espace-temps, page 284  
 $Cl_{3,3}$  algèbre de Clifford  $\text{End}(Cl_3)$ , page 289  
 $d = \frac{1-r}{2}$  différence des masses, page 57  
 $D^*$  groupe des similitudes, page 37  
 $d_{n\mu}^p$  vecteurs de la densité lagrangienne (quarks), page 174  
 $D_x : X \mapsto x = \phi X \phi^\dagger$  similitude induite, page 85  
 $d_\mu = -i\partial_\mu + qA_\mu + m_g v_\mu$  dérivée covariante, page 66  
 $f : M \mapsto R$  homomorphisme : dilatateur  $\mapsto$  similitude, page 188  
 $F = \vec{E} + i\vec{H}$  champ électromagnétique, page 262  
 $f_j, g_j$  fonctions de  $r$  (variable radiale), page 297  
 $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  champ électromagnétique, page 89  
 $G_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$  champ gravitationnel, page 89  
 $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$  groupe des endomorphismes de  $\mathbb{C}^2$ , page 40  
 $H$  Hamiltonien, page 28  
 $i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  est un 3-vecteur de  $Cl_3$ , page 45  
 $i_1 = \sigma_{23}$  ( $i_1^2 = -1$ ), page 296  
 $i_2 = \sigma_{31}$  ( $i_2^2 = -1$ ), page 296  
 $i_3 = \sigma_{12}$  ( $i_3^2 = -1$ ), page 296  
 $l^1$  terme non différentiel gauche de l'électron, page 107  
 $L^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^1 & 0 \\ \eta_2^1 & 0 \end{pmatrix}$  partie gauche de l'onde  $\phi$ , page 44  
 $L^8$  onde gauche du neutrino-monopôle, page 106  
 $L^8$  terme non différentiel droit du neutrino-monopôle, page 107  
 $l^8$  terme non différentiel gauche du neutrino-monopôle, page 107

- $L^n = \phi^n \frac{1-\sigma_3}{2}$   $n = 2, 3, 4$ , page 155  
 $m = \frac{m_0 c}{\hbar}$   $m_0$  est la masse propre, page 28  
 $M$  dilatateur (élément général de  $Cl_3$ ), page 36  
 $M_\phi$   $SL(2, \mathbb{C})$  partie de déterminant 1 de l'onde, page 58  
 $m_a := \frac{1+\mathbf{r}}{2}$  moyenne arithmétique, page 57  
 $m_g := \sqrt{\mathbf{r}}$  moyenne géométrique, page 63  
 $M_n(\mathbb{C})$  ensemble des matrices complexes  $n \times n$   
 $N = s + v + B + p_v + p_s$  élément général de l'algèbre d'espace-temps, page 278  
 $n$  degré des polynômes angulaires, page 301  
 $p$  phase de l'onde, page 297  
 $P : A \mapsto \widehat{A}$  Parité, page 249  
 $P : M \mapsto \widehat{M}$  automorphisme principal de  $Cl_3$  (parité), page 44  
 $p^+$  projecteur en coordonnées sphériques, page 259  
 $P_+, P_-$  projecteurs, page 113  
 $P_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  projecteurs, page 113  
 $p_l$  projecteur en coordonnées sphériques, page 259  
 $p_l$  projecteur sur l'onde gauche (left), page 259  
 $p_r$  projecteur sur l'onde droite (right), page 259  
 $r$  rapport de la similitude  $R$ , page 36  
 $R : x \mapsto x' = MxM^\dagger$  similitude, page 36  
 $r^1$  terme non différentiel droit de l'électron, page 107  
 $R^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & 0 \\ \xi_2^1 & 0 \end{pmatrix}$  partie droite de l'onde  $\phi$ , page 44  
 $R^8$  onde droite du neutrino-monopôle, page 106  
 $R^n = \phi^n \frac{1+\sigma_3}{2}$   $n = 2, 3, 4$ , page 155  
 $R_\nu^\mu$  matrice réelle  $4 \times 4$  de la similitude  $R$ , page 36  
 $S = e^{-\frac{\varphi}{2}i_3} e^{-\frac{\theta}{2}i_2}$  rotateur, page 296  
 $S^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$  densités de moment électrique-magnétique, page 47  
 $S_0 = \phi\sigma_0\bar{\phi}$  égal aussi à  $a_1$  et à  $\rho e^{i\beta}$ , page 50  
 $S_1$  première somme (fonction de  $\theta$ ), page 301  
 $S_2$  seconde somme (fonction de  $\theta$ ), page 302

- $S_3 = \phi \sigma_3 \bar{\phi}$  2-vecteur d'espace-temps (6 densités), page 49  
 $S_\mu = \phi \sigma_\mu \bar{\phi}$  (20 densités : 8 connues, 12 nouvelles), page 49  
 $S_L^1$  densité venant du courant gauche, page 50  
 $S_R^1$  densité venant du courant droit, page 50  
 $SL(2, \mathbb{C})$  groupe des matrices  $2 \times 2$   $M$  telles que  $\det(M) = 1$ , page 34  
 $SO(3)$  groupe des rotations en dimension d, page 34  
 $SU(2)$  sous-groupe de éléments unitaires dans  $SL(2, \mathbb{C})$ , page 34  
 $T; T_{L\lambda}^{n\mu} T_{R\lambda}^{n\mu} T_{L\lambda}^{3+n\mu} T_{R\lambda}^{3+n\mu}$  densités d'impulsion-énergie (quarks), page 175  
 $T_\nu^\mu$  densité tensorielle d'impulsion-énergie (tenseur de Tétrode), page 67  
 $U(1) \times SU(2)$  groupe de jauge électro-faible, page 106  
 $u_j = \frac{x_j}{r}$  composantes de  $(\vec{u} = \frac{\vec{x}}{r})$ , page 296  
 $U_j, V_j, \mathbf{U}_j, \mathbf{V}_j$  fonctions de  $\theta$ , page 297  
 $V_\lambda^\mu$  tenseur non-interprété de O. Costa de Beauregard, page 136  
 $X_\mu$  terme non lagrangien, page 202  
 $Y_\mu$  terme lagrangien, page 202  
 $Z'^0 := \frac{Z^0}{\sqrt{3}}$  boson  $Z'^0$ , page 135



# Introduction

Pendant le précédent siècle, la gravitation a été comprise comme la courbure de l'espace-temps, grâce à la théorie de la relativité générale, principalement due à Albert Einstein. Il y a maintenant un siècle, Louis de Broglie comprit qu'au mouvement de toute particule matérielle, quelque soit sa nature et sa masse, est associée une « onde de phase ». Cette phase est en tout point en accord avec la phase interne de la petite horloge que constitue la particule. A partir de cette idée mais en ne gardant que l'onde, la physique quantique s'est construite comme une théorie de champs régis par l'invariance de jauge. A partir de ces avancées théoriques, et surtout à partir des découvertes nombreuses faites grâce aux accélérateurs de particules, le modèle standard de la physique quantique s'est progressivement bâti. Cependant, le but de toute la physique, c'est-à-dire une vraie unification de ces deux parties séparées de la théorie physique, physique quantique et relativité générale, la **théorie du tout**, reste inachevé : cette unification est le but du présent exposé.

De nombreuses tentatives ont été faites dans les précédentes décades, partant de la physique quantique pour y inclure aussi la gravitation. Nous partons ici aussi de la mécanique quantique relativiste, et utilisons tous les résultats expérimentaux de la physique des particules, mais avec une formulation entièrement nouvelle de la physique quantique relativiste. Cette nouvelle approche ne se focalise ni sur les espaces hermitiens, ni sur les opérateurs sur ces espaces hermitiens. En effet l'onde quantique est une fonction de l'espace-temps à valeur dans deux groupes de Lie contenus dans des algèbres de Clifford sur le corps des réels, non sur le corps des complexes. Et c'est cela qui nous permet de comprendre l'origine de la normalisation de l'onde, l'existence d'une densité de probabilité, la quantification en nombres entiers de l'action, et aussi la vraie nature de la lumière et du champ électromagnétique, lié à la partie 2-vectorielle de l'impulsion-énergie de l'onde quantique. Notre approche permet en outre d'intégrer le spin de l'onde quantique à une vraie théorie de champs, en justifiant le principe d'exclusion sans les espaces de configuration de la mécanique quantique non relativiste. Les contraintes de la physique relativiste rendent alors à l'onde de phase sa nature d'onde physique, et non pas de simple outil mathématique de calcul de probabilités, sans renoncer à ces probabilités dont on justifie l'existence.

Cette nouvelle manière d’appréhender les multiples aspects du modèle standard de la physique quantique est rendue possible par l’utilisation du même panorama mathématique, à la fois pour décrire le modèle standard et la gravitation relativiste : d’abord l’algèbre de Clifford  $Cl_3$  et son groupe multiplicatif  $Cl_3^*$ . Ils sont décrits dans l’annexe A. L’algèbre  $Cl_{1,3}$  permet de décrire les interactions électro-faibles, et le groupe  $\text{End}(Cl_3)$  contenu dans l’algèbre  $Cl_{3,3}$  généralise le groupe  $Cl_3^*$ . Ils sont décrits dans l’annexe B. La nécessité de ces outils en relativité générale vient du théorème de Whitney : l’espace-temps étant une variété de dimension 4 peut s’exprimer, en toute généralité, à partir de son inclusion dans un espace de dimension double, et il se trouve que  $Cl_3$  est un espace de dimension  $8 = 2^3$  sur le corps des réels.  $Cl_{3,3}$ , qui contient  $Cl_{1,3}$ , est une algèbre de dimension  $64 = 2^{3+3} = 4^3$ , nombre des symboles de Christoffel de la variété d’espace-temps.

L’utilisation des algèbres de Clifford en physique a commencé en fait dès 1927 avec l’algèbre des matrices de Pauli,  $Cl_3$ , pour écrire une équation d’onde non relativiste de l’électron avec spin. Aussitôt après, en 1928, l’algèbre des matrices complexes  $4 \times 4$  a permis à Dirac d’écrire une équation relativiste pour l’onde de l’électron. Ces prémisses font partie d’un cadre théorique appelé maintenant la *première quantification*. Celle-ci a été suivie d’une *seconde quantification ou quantification des champs* (champ électromagnétique et bosons des interactions électro-faibles et des interactions fortes). Cette seconde étape englobe tous les résultats de la première étape. La raison mathématique en est l’inclusion de  $Cl_3^*$ , qui est aussi le groupe des endomorphismes sur l’anneau des matrices diagonales complexes  $2 \times 2$ , dans le groupe des endomorphismes (opérateurs linéaires)  $\text{End}(Cl_3)$  sur l’anneau  $Cl_3$ . Ce groupe inclut à la fois le groupe d’invariance de forme  $Cl_3^*$  et le groupe de jauge du modèle standard.

A partir de 1966, David Hestenes a rebâti la mécanique quantique de première quantification avec l’outil mathématique de l’algèbre d’espace-temps  $Cl_{1,3}$  [76, 77, 78, 79, 81, 82]. Nous avons commencé nos travaux avec cet outil mathématique [12]. Notre première nouveauté, par rapport aux travaux des Cliffordiens, a été l’utilisation d’une équation d’onde améliorée, équation non linéaire présentée dans le chapitre 1. Deuxième nouveauté, le cadre géométrique naturel de la physique quantique relativiste de l’électron n’est ni l’algèbre des matrices de Dirac, ni l’algèbre d’espace-temps qui en constitue une sous-algèbre, mais le groupe de Lie  $Cl_3^*$ . Ceci, qui n’avait pas été envisagé au début de la mécanique quantique relativiste, découle de nos précédents travaux [14, 15, 17, 18, 19, 20]. L’algèbre  $Cl_3$ , d’abord promue par W. Baylis [3], est isomorphe à la sous-algèbre paire de l’algèbre  $Cl_{1,3}$  d’Hestenes. Et ce  $Cl_3$  est aussi l’algèbre de Lie du groupe de Lie  $Cl_3^*$ , usuellement nommé en théorie des groupes  $GL(2, \mathbb{C})$ . Ce cadre mathématique beaucoup plus restreint, donc très contraint, à la fois algébriquement et topologiquement, nous a d’abord permis de comprendre que la théorie de Dirac, sous sa forme initiale, est incomplète : de nombreuses autres densités tensorielles sont constructibles, avec les mêmes liens entre

spineurs et tenseurs respectant les contraintes de la physique relativiste. De plus, ces densités tensorielles introduisent automatiquement la distinction entre ondes droites et gauches, et justifient ensuite la préférence pour les ondes gauches. Troisième nouveauté, on s'aperçoit que le groupe de Lie  $Cl_3^*$ , formé par les éléments inversibles de  $Cl_3$ , est le groupe d'invariance de toutes les lois de l'électromagnétisme, onde quantique et spin de l'électron inclus [17, 19, 20, 22, 23]. Et c'est ce groupe,  $Cl_3^*$ , strictement inclus dans  $Cl_3$ , qui est essentiel pour l'onde quantique électronique, application de l'espace-temps, variété à paramètres inclus dans  $Cl_3$ , dont les champs scalaires ont valeur dans le sous-anneau commutatif maximal de  $Cl_3$ .

Ces trois nouveautés nous ont permis de construire une théorie complètement relativiste des interactions électro-faibles, qui généralise l'équation de Dirac améliorée. Cette équation d'onde comporte des termes de masse propre : nous réalisons donc ici précisément ce qui fut impossible pour la première théorie des interactions faibles [113], sans termes de masse. L'équation améliorée se généralise à une équation d'onde pour tous les fermions et anti-fermions de la première génération [25, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 49, 50, 51, 48]. En expliquant les premières étapes de nos travaux d'unification en [51], nous avons obtenu de nouveaux résultats, comme la force de Lorentz agissant sur l'onde leptonique complète (électron + monopôle magnétique). Nous avons aussi obtenu une équation pour l'onde complète de quarks de couleur. Nos équations d'onde comportent une vitesse réduite locale. Ceci nous permet de masquer partiellement le croisement entre ondes droites et gauches qu'effectuent les termes de masse propre. Il en résulte que l'on peut écrire les équations d'onde d'une manière récursive, ce qui donne les propriétés des champs de jauge. Et surtout nous obtenons la **quantification du moment cinétique**, avec la valeur attendue  $\hbar/2$ , à la fois pour l'électron, pour le proton et le neutron grâce à leurs trois quarks de couleur. Et nous expliquons aussi le double lien logique existant entre la densité lagrangienne et l'équation d'onde, justifiant le principe de moindre action. Pour la partie fermionique de l'onde, notre équation non linéaire découle d'une densité lagrangienne qui ne diffère de celle du modèle standard que par son terme de masse, non linéaire. Il n'y a pas besoin de postuler une densité lagrangienne pour la partie bosonique de l'onde quantique.

Rappelons ceci, concernant les quarks qui composent les protons et les neutrons des noyaux atomiques : la charge électrique des quarks (+2/3 de la charge du positron pour le quark  $u$  et  $-1/3$  de la charge du positron pour le quark  $d$ ) est connue avec une précision extraordinaire. C'est sans aucun doute le meilleur résultat expérimental de toute la physique : s'il y avait le plus léger écart par rapport à ces valeurs, un atome non ionisé ne pourrait pas être électriquement neutre et les forces électrostatiques entre atomes seraient beaucoup plus fortes que les forces gravitationnelles. Alors la matière ne pourrait former ni étoile ni planète. Il est donc très important d'obtenir exactement ces valeurs  $+2/3$  et  $-1/3$ , et ce résultat est la première

et plus importante validation expérimentale de notre construction. Le modèle standard tel qu'il est exposé ici n'a pas besoin de supposer la valeur de ces charges, ces valeurs sont les simples conséquences des contraintes qu'imposent l'invariance relativiste et les invariances de jauge. Toujours concernant les quarks, le modèle standard comporte plusieurs propriétés qui doivent être expliquées. D'abord il y a l'existence de trois et seulement trois états de **couleur** pour chaque quark : nous justifions ce trois. De plus, il y a l'existence de trois et seulement trois **générations** qui sont très similaires. Ici aussi notre explication est simple, puisque ce trois vient aussi de la structure de l'équation d'onde. Donc nous n'attendons pas de quatrième génération, excepté pour un quatrième neutrino, et nous expliquons pourquoi. Ce quatrième neutrino est stable et identique à son antiparticule.

De nombreuses tentatives de théories unitaires partent d'un élargissement du cadre trop restreint de l'espace-temps de Minkowski et expriment l'équation de Dirac comme régissant une fonction de l'espace-temps courbe, sans changer l'espace des valeurs, qui reste  $\mathbb{C}^4$ . C'est aujourd'hui considéré comme un problème complètement résolu, que ce soit avec le formalisme initial des matrices de Dirac, ou avec l'algèbre d'espace-temps utilisée par Hestenes et son école cliffordienne [5][6][9][10]. Mais ces tentatives confondent, pour l'invariance sous les rotations, deux groupes de Lie structurellement différents. Ceci est expliqué en détail au chapitre 1. La nécessité de degrés de liberté supplémentaires, de notre point de vue, est compatible avec le nombre restreint à trois des dimensions de l'espace physique et à quatre des dimensions de l'espace-temps. Nous n'utilisons que les dimensions supplémentaires du groupe d'invariance des lois physiques. De nombreux domaines de la physique, en particulier tout ce qui utilise le produit vectoriel, le rotationnel d'un vecteur, la chiralité, est complètement dépendant de cette dimension trois.

Ce que nous proposons ici fait suite à de nombreuses tentatives d'unification. Par exemple la théorie d'unification de Weyl était basée sur la notion de jauge qu'il a introduite en physique [112]. Sa théorie unifiée était équivalente à l'utilisation d'un groupe de similitudes comme groupe d'invariance locale. Cette théorie de Weyl fut développée à une époque où ni l'invariance de jauge de l'onde quantique, ni la chiralité des interactions faibles n'étaient connues. En outre le groupe de Lie à un paramètre engendré par le rapport de similitude est le groupe multiplicatif des nombres réels positifs, quand c'est un groupe  $U(1)$  dont on a besoin pour l'invariance de jauge électrique.

Une autre tentative majeure a été la théorie des twisteurs de Penrose [102][103]. Comme cette théorie utilise aussi l'équation de Dirac et ses spineurs gauches et droits, il y a de nombreux liens possibles entre la théorie des twisteurs et ce que nous étudions ici. Cependant, nous partons dans une tout autre direction : au lieu de la forme hamiltonienne de la mécanique quantique, nous n'utilisons que la partie fermionique de la densité lagrangienne du modèle standard.

Les plus importantes tentatives d'unification furent l'œuvre d'Einstein

entre 1917 et sa mort [112]. Il a défriché les voies les plus diverses pour unifier l'électromagnétisme, la gravitation et la physique quantique. C'est l'une de ces voies que nous développons ici au chapitre 4, utilisant une variété d'espace-temps avec torsion. Nous suivons son avis sur le caractère incomplet de la mécanique quantique développée il y a un siècle, nous expliquons aussi pourquoi Einstein ne pouvait pas développer cette voie à son époque, où l'existence des quarks et les conséquences de la chiralité de l'onde quantique n'étaient pas encore connues. En outre Einstein, très conscient qu'un outil mathématique lui manquait, ne pouvait pas prévoir les liens étroits entre la variété d'espace-temps et l'algèbre de Clifford  $Cl_3$ .

De nombreuses autres tentatives, comme les théories de cordes et de supersymétrie, étaient basées sur l'usage de nombreuses dimensions supplémentaires d'espace-temps. Le point de départ de ces théories, visant la théorie du tout, était un groupe de jauge plus vaste, un groupe simple unifiant l'électromagnétisme, les interactions faibles et les interactions fortes, comme  $SU(5)$  ou  $SO(10)$ . Le groupe de jauge du modèle standard est en fait à l'intérieur d'un autre groupe, le groupe  $\text{End}(Cl_3)$  qui est le groupe d'invariance naturel de l'algèbre  $Cl_3$ , de dimension 64 sur le corps des réels. Et cette inclusion est utile, elle donne la raison de la différence entre quarks qui voient et leptons qui ne voient pas les interactions fortes. Ceci aussi n'a pas à être postulé et est une conséquence inévitable des mathématiques à l'œuvre dans cette version-ci du modèle standard.

Aussi notre voie de recherche est nouvelle : la variété d'espace-temps de la relativité générale est paramétrable grâce aux huit dimensions de  $Cl_3^*$ . L'onde de l'électron est une fonction sur cette variété, à valeur dans le groupe de Lie  $Cl_3^*$ . Ce groupe multiplicatif contient le groupe  $SU(2)$  de la mécanique quantique non relativiste, il est lui aussi de dimension huit : on a donc deux dimensions supplémentaires par rapport au groupe de Lorentz. Ce groupe  $Cl_3^*$  est aussi un anneau et un module, à droite et à gauche, sur son sous-anneau commutatif  $\mathbb{A}$  des éléments diagonaux. De plus, le groupe  $\text{End}(Cl_3)$  est un groupe à 64 dimensions. C'est aussi un anneau qui contient  $Cl_3^*$  comme sous-anneau, et qui est assez vaste pour contenir les valeurs des ondes quantiques de toutes les particules et antiparticules de chaque génération. De plus, la multiplication de  $\text{End}(Cl_3)$  est une généralisation de la multiplication dans  $Cl_3^* = \text{End}(\mathbb{C}^2)$ . C'est cela qui permet d'inclure dans l'électron de seconde quantification tous les résultats obtenus pour l'électron de première quantification.

Cette nouvelle voie de recherche n'a besoin ni de nouvelles particules, ni de nouveaux concepts encore inconnus : nous respectons la totalité des découvertes (et même des non-découvertes) de la physique des hautes énergies, nous confortons, pour le modèle standard son exploitation des résultats expérimentaux accumulés depuis un siècle de physique quantique. Les seuls objets possibles qui peuvent s'ajouter sont ceux qui comportent les ondes droites des neutrinos. Nous étudions donc ces neutrinos complets qui peuvent aussi être appelés monopôles magnétiques.

La première raison expliquant pourquoi nous pouvons ajouter la gravitation aux trois autres sortes d'interactions, est que nous utilisons des termes non linéaires de masse propre dans chaque équation d'onde. Le modèle de Weinberg-Salam des interactions électro-faibles ne pouvait pas comporter ces termes de masse. Et ce défaut s'est propagé à tous les modèles incluant celui-ci.

Le chapitre 1 étudie l'électron grâce à  $Cl_3$ . La plupart de nos nouveautés y sont présentées : le bon nombre des densités tensorielles, l'équation d'onde améliorée, l'invariance relativiste élargie, les deux tenseurs d'impulsion-énergie, le lien entre ces tenseurs et le champ électromagnétique. Ce chapitre est le seul qui semble se restreindre au seul domaine de l'électromagnétisme, et semble ignorer la seconde quantification. On y utilise donc les notations de la première quantification, restant au plus près des résultats expérimentaux très précis obtenus il y a un siècle. Le principal changement par rapport à la première version de ce travail est l'utilisation d'une masse propre pour chaque partie, gauche et droite, de l'onde électronique. Malgré sa non-linéarité, notre équation d'onde à deux masses retrouve, et améliore, tous les résultats obtenus avec l'équation de Dirac, notamment ceux donnant les états électroniques des atomes. Le domaine de validité de l'équation d'onde est étendu aux systèmes d'électrons, sans nécessiter l'utilisation d'un espace de configuration. L'inclusion de l'espace-temps dans  $Cl_3$  permet de relier le champ électromagnétique aux tenseurs d'impulsion-énergie de l'onde électronique.

Le chapitre 2 explique comment le passage de l'algèbre  $Cl_3$  à l'algèbre  $\text{End}(Cl_3)$  est équivalent au passage de la première à la seconde quantification, pour la partie fermionique du modèle standard. Cette algèbre étendue nous donne la possibilité de séparer l'onde complète en seize parties, huit parties gauches et huit parties droites, à quatre paramètres chacune. Ce second chapitre étudie aussi les interactions faibles qui mélangent les ondes de l'électron et de son neutrino. L'onde de ce neutrino fait partie de l'onde du monopôle magnétique : c'est d'ailleurs la seule possibilité qui puisse exister d'étendre l'onde fermionique du modèle standard. Nous expliquons aussi et de manière totalement détaillée le principe extrémal et la quantification de l'action. Et nous présentons une solution de type soliton pour un électron n'interagissant qu'avec lui-même, avec un potentiel électromagnétique intérieur dû à sa charge électrique.

Cette étude est continuée au chapitre 3 où l'on étudie les interactions faibles et fortes des quarks. Nous généralisons la dérivation invariante de forme. Cette généralisation simplifie la part des interactions faibles agissant sur les ondes des quarks. Nous justifions la préférence pour les ondes gauches. Nous présentons l'équation d'onde écrite dans une algèbre purement réelle, sans aucun nombre complexe.

Le chapitre 4 introduit la gravitation au cœur de la physique quantique telle que décrite dans les précédents chapitres. La formulation de la relativité générale comme égalité entre deux tenseurs sur la variété d'espace-temps est

étendue à une égalité entre deux connexions sur cette même variété. Nous justifions alors dans ce cadre le principe d'exclusion de Pauli et le principe d'équivalence à la base de la relativité générale. La structure globale de la variété d'espace-temps rend alors plus intelligible le paradoxe EPR et l'expansion cosmologique, avec en prime une accélération de cette expansion commençant en un temps correspondant bien aux dernières estimations astronomiques.

Ensuite nous présentons nos conclusions. Ce chapitre 5 comporte de nombreuses réflexions que nous ne pouvions présenter de manière précise dans cette introduction. Nous y expliquons aussi pourquoi nous sommes passés de **une** à **la** théorie du tout. Un résumé des nouveautés précédemment décrites termine cet exposé.

Les parties les plus techniques ont été placées dans quatre annexes. La présentation de l'outil mathématique des algèbres de Clifford forme les annexes A et B. On y détaille de manière aussi simple que possible les calculs utilisés dans les autres chapitres. La principale nouveauté par rapport aux précédentes versions de ce livre est la résolution exacte de l'équation de Dirac améliorée, dans le cas de l'électron d'un atome d'hydrogène, dans l'annexe C. Cette résolution s'effectue par séparation des variables en coordonnées sphériques. Elle retrouve tous les résultats (nombres quantiques, niveaux d'énergie, normalisation de l'onde) qui ont fait la renommée de l'équation de Dirac, et cela, sans utilisation des opérateurs de moment cinétique, sans espace de Hilbert et malgré le caractère non linéaire de notre équation d'onde. Divers calculs sont placés ensuite dans l'annexe D.

Ce texte ne prétend ni décrire une théorie définitive de toutes les interactions, ni a fortiori une théorie de toute la physique. De nombreuses questions restent à développer, comme l'émission et l'absorption de l'impulsion-énergie de l'onde électronique, qui est la lumière. Louis de Broglie estimait qu'il restait après lui du travail pour plusieurs générations de physiciens, dans ce vaste domaine de la physique quantique qu'il avait juste commencé à défricher, il y a maintenant un siècle.



# Chapitre 1

## L'onde de l'électron de spin $1/2$

On présente d'abord dans le cadre matriciel usuel l'onde quantique de l'électron et son équation d'onde. On étudie l'équation d'onde dans le cadre de l'algèbre de Clifford d'espace et dans le cadre de l'algèbre d'espace-temps. On étudie les densités tensorielles de l'onde de l'équation linéaire (équation de Dirac). L'invariance de forme de l'équation d'onde est étendue au groupe multiplicatif de l'algèbre d'espace. L'invariance relativiste introduit les parties, gauche et droite, de l'onde. On simplifie la densité lagrangienne, et on étudie l'équation d'onde améliorée qui en résulte. Un double lien logique existe entre densité lagrangienne et équation d'onde. L'invariance de jauge électrique n'est pas changée. Une seconde invariance de jauge apparaît, avec un second courant conservatif. L'invariance de jauge, tout comme l'invariance de forme, sont compatibles avec les termes de masse. On étudie la conjugaison de charge pour l'équation améliorée. On justifie la normalisation de l'onde. On présente la résolution de l'équation améliorée dans le cas de l'atome d'hydrogène. On donne une possible justification aux trois générations. On introduit les notions de dimension numérique et d'espace-temps invariant. On étudie le vecteur d'impulsion-énergie et la dynamique de deux tenseurs gauche-droite d'impulsion-énergie. Cela donne la force de Lorentz pour l'électron. On met en évidence un lien direct entre le champ électromagnétique et le tenseur d'impulsion-énergie de l'onde de l'électron. On relie le principe d'exclusion de Pauli à la normalisation de l'onde et la conservation de l'impulsion-énergie. On étudie la récursivité de l'équation d'onde améliorée et ses conséquences.

## 1.1 L'équation d'onde de l'électron

En 1926 deux découvertes majeures furent faites pour l'électron : la découverte du spin de l'électron, qui signifie que l'électron est un petit aimant, même au repos, et la formulation d'une équation d'onde par Erwin Schrödinger. Avec [56] cette équation s'écrit :

$$\frac{ih}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(\psi), \quad (1.1)$$

où  $\psi = \psi(x, y, z, t)$  est un nombre complexe, pour chaque valeur de  $x, y, z, t$ , et  $h$  est la constante de Planck. L'onde de l'équation de Schrödinger est donc une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{C}$ . Cette équation d'onde est linéaire. Les fonctions solutions de l'équation d'onde forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$ . La plupart des concepts propres à la mécanique quantique jusqu'ici résultent de l'étude du hamiltonien  $H$  contenu dans l'équation d'onde. Comme on n'utilisera ici ni cette équation d'onde, ni les espaces de Hilbert, on remarquera ici simplement le rôle très particulier du temps dans l'équation d'onde.

L'électron est aussi un aimant, ceci est l'origine de toutes les propriétés des aimants permanents que l'on utilise tous les jours. Donc il faut rendre compte de cette aimantation. Après un premier essai par Pauli donnant une équation d'onde permettant d'expliquer ce magnétisme, Dirac s'est servi de cet essai et l'a prolongé en donnant une autre équation d'onde, seulement quelques mois plus tard : cette équation a été publiée dès 1928 [64, 65]. Presque un siècle plus tard, on peut présenter cette équation d'onde (en notations semi-modernes, et avec la convention usuelle de sommation des indices d'Einstein) comme suit <sup>1</sup> :

$$0 = [\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) + im]\psi; \quad q = \frac{e}{\hbar c}; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}; \quad m = \frac{m_0 c}{\hbar}. \quad (1.2)$$

Les quatre  $A_\mu$  sont les quatre composantes du vecteur d'espace-temps nommé potentiel électromagnétique extérieur <sup>2</sup> créé par les autres charges ;  $e$  est la charge de l'électron et  $m_0$  est la masse propre <sup>3</sup>. Remarquons tout d'abord la grande différence existant entre le  $\psi$  de l'onde de l'équation de Schrödinger,

---

1. La plupart des présentations modernes utilisent un système d'unités simplifiées en posant  $c = 1$  et  $\hbar = 1$ . On verra en 1.5.4 pourquoi nous ne pouvons pas, ici, utiliser la commodité de la convention  $\hbar = 1$ .

2. On verra en 1.11 que le champ électromagnétique, donc aussi le potentiel, n'est pas extérieur, il dépend de l'onde quantique.

3. L'équation d'onde de l'électron comporte toujours un terme de masse et un terme de charge. Cette équation est trop souvent présentée sans son terme de charge, comme si l'interaction électrique pouvait être coupée et remise à volonté. Même lorsque l'interaction avec les autres charges est négligeable, l'action sur l'onde du champ électro-faible associé à l'onde elle-même ne peut ni être supprimée, ni être négligée, on le verra pour les électrons des atomes.

et le  $\psi$  de l'équation de Dirac qui s'écrit :

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

parce que maintenant les  $\xi_j = \xi_j(x, y, z, t)$  et les  $\eta_j = \eta_j(x, y, z, t)$  jouent le même rôle de fonction du temps et des coordonnées d'espace, à valeur dans le corps des complexes. L'onde de Dirac est donc une fonction<sup>4</sup> différentiable de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{C}^4$ . Cette équation d'onde est linéaire. Les solutions sont donc éléments d'un espace vectoriel, sous-espace de l'espace fonctionnel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ . L'écriture de l'équation de Dirac comporte le choix de quatre matrices  $\gamma^\mu$  convenables. Notre choix, unique et définitif, est :<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^j := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^j &= -\hat{\sigma}^j = \hat{\sigma}_j := -\sigma_j; \quad \gamma^j = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \gamma_0 &= \gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_2 = \sigma_0 = \sigma^0 = \hat{\sigma}^0 = \hat{\sigma}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

Les matrices  $\sigma_\mu$  et leurs produits engendrent une algèbre de dimension 8 sur  $\mathbb{R}$ , qui est de dimension 4 sur  $\mathbb{C}$ , l'algèbre de Pauli ou algèbre  $M_2(\mathbb{C})$  des matrices complexes  $2 \times 2$ . Le choix des matrices de Pauli est déterminé de manière intrinsèque par la base  $(V_1, V_2, V_3, V_4)$  de  $M_2(\mathbb{C})$ , où les projecteurs  $V_n$  sont définis par :

$$\begin{aligned} p_r = V_1 &:= \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_2 := \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V_3 &:= \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad p_l = V_4 := \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Avec les matrices de cette base canonique,  $\xi$  est la **partie droite** de l'onde et  $\eta$  est la **partie gauche** de l'onde. En effet, dans l'algèbre des matrices de Dirac c'est la matrice  $\gamma_5$  qui permet la définition des projecteurs sur l'onde droite et l'onde gauche :

$$\gamma_5 := i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \quad \frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{1-\gamma_5}{2}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Le choix des matrices de Dirac n'est pas un choix obligé. On obtient une équation d'onde équivalente si :

$$\gamma'^\mu := M\gamma^\mu M^{-1}; \quad \psi' := M\psi, \quad (1.7)$$

4. On peut aussi considérer l'onde de Dirac comme un ensemble de quatre fonctions de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{C}$ . Donc, même si le terme usuel pour l'onde de la mécanique quantique est "fonction d'onde", on utilise ici quatre fonctions, et non plus une seule et le terme le plus approprié est le plus simple : onde, dans le cas de la théorie de Dirac.

5. Le sens de la notation  $\hat{\sigma}$  est expliqué en A.3.3.

où  $M$  est une matrice inversible  $4 \times 4$  fixe quelconque. Ceci nous permet toujours de revenir au choix fait ici. On remarque en outre que changer de matrices ne se fait pas sans changement concordant de l'onde elle-même. Le choix fait ici est pertinent non seulement pour les électrons à grande vitesse, mais aussi, contrairement à ce que l'on croyait en 1928, pour la résolution de l'équation d'onde dans le cas de l'atome d'hydrogène [13] [37]. Le choix initial des matrices, que nous notons  $\gamma'^\mu$ , était destiné à retrouver l'équation de Pauli pour les électrons lents. [12] Il utilisait :

$$M = M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 + \gamma_5); \quad \gamma'_0 = M\gamma_0M = \gamma_5; \quad \gamma'_j = M\gamma_jM = -\gamma_j, \quad (1.8)$$

pour  $j = 1, 2, 3$ .<sup>6</sup> On a alors :

$$\psi' = M\psi = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \\ \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_1 - \eta_1 \\ \xi_2 - \eta_2 \end{pmatrix}; \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix}; \quad \omega = \begin{pmatrix} \psi'_3 \\ \psi'_4 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Ce choix des matrices mélange donc les parties droite et gauche de l'onde. Ce mélange est désastreux pour tout ce qui se rapporte au spin, au champ magnétique et aux interactions faibles. C'est la raison pour laquelle nous n'utiliserons jamais les  $\gamma'^\mu$ . Revenons donc au choix (1.4) des matrices, l'équation de Dirac (1.2) s'y écrit :

$$0 = \begin{pmatrix} im & \sigma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) \\ \widehat{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) & im \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}; \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}; \quad x^0 = ct. \quad (1.10)$$

C'est équivalent au système :

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\eta + im\xi, \\ 0 &= \widehat{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\xi + im\eta. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le terme de masse de l'équation d'onde de la partie droite  $\xi$  contient la partie gauche  $\eta$ , le terme de masse de l'équation de la partie gauche  $\eta$  contient la partie droite  $\xi$ . C'est ce croisement des termes  $\xi$  et  $\eta$  qui empêche de traiter séparément les ondes droites et les ondes gauche. Pour obtenir l'équation de Pauli, il faut rompre la symétrie entre temps et espace dans l'espace-temps avec :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_0\eta + \vec{\partial}\eta + iq(A_0 - \vec{A})\eta + im\xi; \quad \vec{\partial} = \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3, \\ 0 &= \partial_0\xi - \vec{\partial}\xi + iq(A_0 + \vec{A})\xi + im\eta; \quad \vec{A} = A^1\sigma_1 + A^2\sigma_2 + A^3\sigma_3. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Multipliant par  $i$  on obtient la forme dite hamiltonienne

$$\begin{aligned} -i\partial_0\eta &= i\vec{\partial}\eta - q(A_0 - \vec{A})\eta - m\xi, \\ -i\partial_0\xi &= -i\vec{\partial}\xi - q(A_0 + \vec{A})\xi - m\eta. \end{aligned} \quad (1.13)$$

---

6. La matrice  $\gamma_5$  ne faisant pas partie de la sous-algèbre  $Cl_{1,3}$  de  $Cl_{2,3} = M_4(\mathbb{C})$ , la matrice  $\gamma'^0$  n'appartient pas à  $Cl_{1,3}$ .

Ajoutant et soustrayant les deux équations on obtient :

$$0 = (\partial_0 + iqA_0 + im)\chi + (\vec{\partial} - iq\vec{A})\omega, \quad (1.14)$$

$$0 = (\partial_0 + iqA_0 - im)\omega - (\vec{\partial} - iq\vec{A})\chi. \quad (1.15)$$

L'approximation non relativiste usuelle (sur laquelle de Broglie n'était pas du tout d'accord [60]) remplace (1.15) par une équation d'onde différente, non équivalente à l'équation de Dirac, que l'on obtient en supprimant purement et simplement une dérivation par rapport au temps :

$$\omega = \frac{i}{2m}(\vec{\partial} - iq\vec{A})\chi, \quad (1.16)$$

puis en substituant  $\omega$  dans (1.14). On obtient alors l'équation de Pauli :

$$(\partial_0 + iqA_0 + im)\chi = \frac{1}{2im}(\vec{\partial} - iq\vec{A})^2\chi. \quad (1.17)$$

Cette substitution par  $\omega$  est destinée à retrouver l'équation de Schrödinger où l'on a  $i\hbar c\partial_0\psi = E\psi$ , et par l'approximation non relativiste  $E \approx m_0c^2$ . Ensuite on peut placer l'équation de Pauli sous la forme hamiltonienne de l'équation de Schrödinger<sup>7 8</sup> (1.1) :

$$i\hbar c\partial_0\chi = H\chi; \quad H\chi = (eA_0 + m_0c^2)\chi + \frac{\hbar^2}{2m_0}(\vec{\partial} - i\frac{e}{\hbar c}\vec{A})^2\chi. \quad (1.18)$$

Maintenant, avec la règle usuelle de sommation sur les indices hauts et bas, on pose :

$$\begin{aligned} \nabla &:= \sigma^\mu \partial_\mu; \quad \widehat{\nabla} := \widehat{\sigma}^\mu \partial_\mu; \quad A := \sigma^\mu A_\mu; \quad \widehat{A} := \widehat{\sigma}^\mu A_\mu, \\ \mathbf{A} &:= \gamma^\mu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \widehat{A} & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

7. Le hamiltonien de l'équation de Schrödinger, issu du hamiltonien de la mécanique classique, est alors remplacé par un opérateur hamiltonien agissant sur l'onde. Obtenir un hamiltonien directement issu du lagrangien relativiste est le but des travaux de I. Kanatchikov [83], c'est un pré-requis pour une unification des différents formalismes hamiltoniens des diverses parties de la théorie physique.

8. La théorie quantique des champs se sert d'une exponentielle de l'hamiltonien sans tenir compte de la non-commutativité de la multiplication des matrices  $\sigma$ . Tant que la direction d'espace est la direction 3, les résultats des calculs sont exacts, parce que la matrice  $\sigma_3$  est diagonale, et parce que la multiplication des matrices diagonales est commutative. Mais il suffit d'avoir à prendre en compte une autre direction que la direction 3 pour avoir des problèmes avec la mécanique relativiste. C'est pourquoi nous utilisons ici uniquement l'équation de Dirac et son formalisme lagrangien, jamais la mauvaise approximation par l'équation de Pauli ni la forme hamiltonienne de la première équation de Dirac. Cette équation hamiltonienne, utilisant la matrice  $\beta = \gamma'^0 = \gamma_5$ , qui n'appartient pas à l'algèbre de Clifford  $Cl_{1,3}$  engendrée par les  $\gamma^\mu$ , mais à l'algèbre de Clifford  $Cl_{2,3} = M_4(\mathbb{C})$  engendrée par les quatre  $\gamma^\mu$ , plus  $\gamma_5$ , change en fait le temps relatif de l'équation relativiste en un temps bidimensionnel qui n'est plus le temps relatif unidimensionnel. La formulation hamiltonienne de l'équation rompt également le lien entre la chiralité de l'espace et la chiralité de l'espace-temps. Elle ne peut pas être complètement relativiste.

Ces calculs sont en fait des calculs d'algèbre de Clifford, plus précisément de deux algèbres : l'algèbre de Pauli, aussi appelée  $Cl_3$ , comme algèbre de Clifford de  $\mathbb{R}^3$ , et l'algèbre dite d'espace-temps  $Cl_{1,3}$ , qui est l'algèbre utilisée par Hestenes, Boudet et Casanova [9]. Une présentation détaillée des algèbres de Clifford est disponible en [22, 29, 37] ainsi que dans l'annexe A. On y détaille, ainsi qu'en annexe B, les propriétés de  $Cl_{1,3}$  qui est isomorphe à une sous-algèbre sur le corps des réels de l'algèbre complexe  $M_4(\mathbb{C})$ . De plus,  $Cl_{1,3}$  est un module, à droite et à gauche, sur l'anneau  $Cl_3$ . Avec l'équation de Dirac, cela se traduit par le fait que les calculs sur les matrices  $4 \times 4$  peuvent toujours se faire par blocs de matrices  $2 \times 2$ . Le système (1.11), équivalent à l'équation de Dirac, s'exprime sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{i}{m} \begin{pmatrix} 0 & \nabla + iqA \\ \widehat{\nabla} + iq\hat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Cette équation peut donc être écrite sous la forme fonctionnelle récursive

$$\psi = f(\psi); \quad f(\psi) := \frac{i}{m} \gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) \psi = \frac{i}{m} (\boldsymbol{\partial} + iq\mathbf{A}) \psi. \quad (1.21)$$

Cette forme récursive est très utile dans l'étude de l'équation du second ordre que nous regardons maintenant.

### 1.1.1 Equations du second ordre

En itérant la fonctionnelle  $f$  on obtient  $\psi = f[f(\psi)]$  c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{i}{m} (\boldsymbol{\partial} + iq\mathbf{A}) \left[ \frac{i}{m} (\boldsymbol{\partial} + iq\mathbf{A}) \right] \psi, \\ &= -\frac{1}{m^2} [\square \psi + iq\boldsymbol{\partial}(\mathbf{A}\psi) + iq\mathbf{A}\boldsymbol{\partial}\psi - q^2 \mathbf{A}^2 \psi], \\ \square &:= \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{\partial} = \partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3. \end{aligned} \quad (1.22)$$

où  $\square$  est le dalembertien. Multipliant par  $m^2$  c'est équivalent à :

$$0 = (\square + m^2 - q^2 \mathbf{A}^2) \psi + iq[\boldsymbol{\partial}(\mathbf{A}\psi) + \mathbf{A}\boldsymbol{\partial}\psi]. \quad (1.23)$$

Et on a :

$$\boldsymbol{\partial}(\mathbf{A}\psi) = (\boldsymbol{\partial}\mathbf{A})\psi + 2A^\mu \partial_\mu \psi - \mathbf{A}\boldsymbol{\partial}\psi; \quad (1.24)$$

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \hat{F} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\partial}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ \hat{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla\hat{A} & 0 \\ 0 & \widehat{\nabla}A \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Alors le champ électromagnétique ( $\mathbf{F}$  en algèbre d'espace-temps,  $F = \vec{E} + i\vec{H}$  en algèbre d'espace, où  $\vec{E}$  est le champ électrique et  $\vec{H}$  le champ magnétique), nous donne au second ordre :

$$\begin{aligned} 0 &= (\square + m^2 - q^2 \mathbf{A}^2) \psi + iq[(\boldsymbol{\partial}\mathbf{A}) + 2A^\mu \partial_\mu - \mathbf{A}\boldsymbol{\partial} + \mathbf{A}\boldsymbol{\partial}] \psi, \\ 0 &= (\square + m^2 - q^2 \mathbf{A}^2) \psi + iq[\mathbf{F} + 2A^\mu \partial_\mu] \psi. \end{aligned} \quad (1.26)$$

On remarque que le champ électromagnétique classique  $\mathbf{F}$  est rejoint par un champ d'opérateurs  $2A^\mu \partial_\mu$ . Cela fait partie du passage de la première quantification, où  $A^\mu$  est un champ de vecteurs d'espace-temps, à la théorie quantique des champs, où le champ électromagnétique devient un champ d'opérateurs. On voit aussi deux choses qui paraissent étranges dans cette équation d'onde : d'abord le champ d'opérateurs différentiels est un champ scalaire, agissant sur  $\xi$  et  $\eta$  de la même manière, tandis que le champ classique  $\mathbf{F}$  est un champ purement bivectoriel, ce qui est bien établi sur le plan expérimental : c'est lié à la complète absence de composante longitudinale pour la lumière. Deuxièmement les carrés  $m^2 - q^2 \mathbf{A}^2$  sont de signes opposés, tandis que l'impulsion-énergie de l'électron est somme d'une impulsion-énergie mécanique  $m\mathbf{v}$  et d'une impulsion-énergie électromagnétique  $q\mathbf{A}$ <sup>9</sup>, et non pas une différence entre ces deux vecteurs d'impulsion-énergie. On va donc remplacer (1.24) par une autre équation, similaire à la règle de Leibniz régissant la dérivation d'un produit :

$$\partial(\mathbf{A}\psi) = \mathcal{F}(\psi) + \mathbf{A}\partial\psi; \quad \mathcal{F}(\psi) = \partial(\mathbf{A}\psi) - \mathbf{A}\partial\psi, \quad (1.27)$$

$$\mathcal{F}(\psi) := \begin{pmatrix} \mathcal{F}(\phi) & 0 \\ 0 & \widehat{\mathcal{F}(\phi)} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{F}(\phi) := \nabla(\widehat{A}\phi) - A(\widehat{\nabla}\phi). \quad (1.28)$$

L'équation d'onde du second-ordre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 &= (\square + m^2 - q^2 \mathbf{A}^2)\psi + iq[\mathcal{F}(\psi) + 2\mathbf{A}\partial\psi] \\ &= (\square + m^2 - q^2 \mathbf{A}^2)\psi + iq[\mathcal{F}(\psi) - 2\mathbf{A}(iq\mathbf{A} + im)]\psi \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} &= [\square + (m + q\mathbf{A})^2]\psi + iq\mathcal{F}(\psi). \\ 0 &= [\square + (m + q\mathbf{A})^2]\phi + iq\mathcal{F}(\phi). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ceci donne à la fois le signe attendu pour le terme d'impulsion-énergie, et un champ électromagnétique qui est un champ d'opérateurs agissant sur et dépendant de l'onde quantique  $\phi$  de l'électron. Cette équation du second ordre est donc non linéaire, et n'est pas une équation linéaire de Klein-Gordon.

### 1.1.2 L'invariance de forme de l'équation de Dirac

Attention ! On va devoir expliquer et corriger une imprécision datant du tout début de la physique quantique, imprécision reprise depuis dans **tous** les exposés sur la physique de l'électron. Attention encore ! L'invariance de forme est très différente de tout ce qu'a expliqué la physique relativiste avant la mécanique quantique. D'abord l'espace-temps est considéré, en pratique, comme un sous-ensemble de l'algèbre  $Cl_3$  (algèbre des matrices de Pauli),

---

9. Cette forme de l'impulsion-énergie de l'électron comme une somme est très claire dans les travaux d'Hestenes (formule 6.22c de [79]).

parce que, avec des indices grecs 0, 1, 2, 3 et avec :

$$x^0 := ct ; \quad \vec{x} := x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 ; \quad \partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.31)$$

la physique quantique, dès 1927<sup>10</sup> a écrit, dans le cadre de l'équation d'onde de Pauli :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Ceci place l'espace physique, en totalité, dans l'algèbre  $Cl_3$ . Et c'est inévitable, parce que le groupe  $SU(2)$  remplace le groupe des rotations  $SO(3)$  pour l'équation d'onde de Pauli, et  $SU(2)$  est un sous-groupe du groupe de Lie  $Cl_3^*$ , groupe multiplicatif de  $Cl_3$ . Ensuite cette inclusion de l'espace physique a été le point de départ pour étendre cette inclusion, en ajoutant  $\sigma_0 = I$  aux  $\sigma_j$ . Ceci se relie aux représentations du groupe de Lorentz. [100][106] En effet, après l'exposé de Rose [105], reprenant en termes plus modernes celui de de Broglie [56] les exposés concernant cette invariance présentent tous les transformations de Lorentz des  $x^\mu$  à partir des transformations infinitésimales. Ceci revient exactement, du point de vue mathématique, à calculer avec l'algèbre de Lie du groupe. Et, en vertu d'un théorème général sur les groupes  $SO(n)$ , on suppose, sans démonstration, que ce théorème vaut aussi pour  $SO(1,3)$ , donc que cette algèbre de Lie est la même que celle formée par les bivecteurs des algèbres  $Cl_{1,3}$  ou  $Cl_{3,1}$ , algèbre de Lie identique à celle engendrée par les vecteurs et bivecteurs de  $Cl_3$ , et qui est aussi celle du groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . L'étrangeté de la situation est alors cachée par le fait qu'il n'existe pas une fonction exponentielle, mais deux : l'application exponentielle applique un voisinage du zéro de l'algèbre, c'est-à-dire la matrice nulle, zéro de l'algèbre  $M_2(\mathbb{C})$ , sur un voisinage de l'unité du groupe. Et comme il y a deux groupes différents, le groupe des matrices complexes  $2 \times 2$  dont le module du déterminant vaut 1 et dont l'unité est la matrice unité  $I_2$ , et le groupe des transformations de Lorentz, dont l'unité est l'application identique  $id$ , cela n'a aucun sens d'écrire à la fois  $\exp(0) = I_2$  et  $\exp(0) = id$ , qui impliquerait  $I_2 = id$ . Il faut donc distinguer deux fonctions exponentielles :  $\exp_1$  applique les éléments proches de 0 d'un sous-espace vectoriel de  $M_2(\mathbb{C})$  dans un sous-groupe du groupe linéaire  $GL(2, \mathbb{C})$ , tandis que  $\exp_2$  applique ces mêmes éléments dans le groupe de Lorentz, où chaque élément peut être associé à une matrice réelle  $4 \times 4$ . On a :

$$x = x^\mu \sigma_\mu = x^0 + \vec{x} = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

Et donc l'espace-temps est identifié à la part auto-adjointe de l'algèbre  $Cl_3$ , qui est le sous-ensemble de cette algèbre formé par les éléments  $M$  vérifiant  $M = M^\dagger$  (cette identification est le point de départ du chapitre 4).

<sup>10</sup>. Tout ce qu'on a besoin de savoir au sujet de  $Cl_3$  est détaillé dans l'annexe A, à un niveau mathématique aussi basique que possible. Aussi un lecteur au courant du sujet peut sauter cette annexe A. Néanmoins un rappel peut lui être utile.

La structure algébrique de  $Cl_3$  est plus riche que celle du corps des nombres complexes, avec trois conjugaisons :  $P : M \mapsto \widehat{M}$  est l'automorphisme principal de cette algèbre. Ce  $P$ , appelé **parité** en mécanique quantique, nous permet de séparer partie paire et impaire, et vérifie  $\widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$ . Ensuite l'anti-isomorphisme  $M \mapsto \widetilde{M} = M^\dagger$  est la **réversion**, qui vérifie  $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ . Ces deux conjugaisons en engendrent une troisième, le produit des deux autres :  $M \mapsto \overline{M} = \widehat{M}^\dagger = \text{tr}(M) - M$ , où  $\text{tr}$  désigne la trace, est un anti-isomorphisme parce que  $\overline{AB} = \overline{B}\overline{A}$  (plus de détails en A.3.3). Et l'on obtient <sup>11</sup> :

$$\begin{aligned}\widehat{x} &= \overline{x} = x^0 - \vec{x}, \\ ||x||^2 &= \det(x) = x\widehat{x} = x \cdot x = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.\end{aligned}\quad (1.34)$$

Le carré  $||x||^2$  de la pseudo-norme de tout vecteur d'espace-temps  $x$  est donc simplement le déterminant de ce vecteur. Par conséquent le produit scalaire de deux vecteurs d'espace-temps  $x$  et  $y$  vérifie :

$$x \cdot y = \frac{1}{2}(x\widehat{y} + y\widehat{x}) = \frac{1}{2}(\widehat{xy} + \widehat{yx}) = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3. \quad (1.35)$$

La transformation  $P : x \mapsto \widehat{x}$  est donc incluse dans la structure géométrique de l'espace-temps (voir le chapitre 4). Soit  $M = \exp_1(U)$  où  $U$  est un élément fixe quelconque de  $Cl_3$  (c'est-à-dire une matrice fixe quelconque de l'algèbre de Pauli), et soit  $R$  la transformation de l'espace-temps dans lui-même qui, à tout  $x = x^\nu \sigma_\nu$ , fait correspondre  $x' = x'^\mu \sigma_\mu$  tel que <sup>12</sup> :

$$\begin{aligned}x' &= R(x) = MxM^\dagger = \exp_1(U)x\exp_1(U)^\dagger; \quad M = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ c & \bar{d} \end{pmatrix} \\ R &= \exp_2(U); \quad x'^\mu \sigma_\mu = R_\nu^\mu x^\nu \sigma_\nu, \\ 2R_\nu^\mu &= \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d} & -ab + cd - \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} & i(ab + cd - \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d}) & a\bar{a} - b\bar{b} + c\bar{c} - d\bar{d} \\ a\bar{c} - b\bar{d} + c\bar{a} - d\bar{b} & ad - bc + \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c} & i(-ad + bc + \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) & a\bar{c} + b\bar{d} + c\bar{a} + d\bar{b} \\ i(a\bar{c} + b\bar{d} - c\bar{a} - d\bar{b}) & i(ad + bc - \bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}) & ad + bc + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} & i(a\bar{c} - b\bar{d} - c\bar{a} + d\bar{b}) \\ a\bar{a} + b\bar{b} - c\bar{c} - d\bar{d} & -ab - cd - \bar{a}\bar{b} - \bar{c}\bar{d} & i(ab + cd - \bar{a}\bar{b} - \bar{c}\bar{d}) & a\bar{a} - b\bar{b} - c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (1.36)$$

La matrice  $M$  est une matrice  $2 \times 2$  à valeurs complexes. La matrice  $R_\nu^\mu$  est une matrice  $4 \times 4$  à valeurs réelles. Il est évident qu'elles sont distinctes et donc confondre  $M$  et  $R$  est un non sens. Regardons maintenant les déterminants de ces matrices. On note :

$$\det(M) = re^{i\theta}, \quad r := |\det(M)|; \quad \underline{M} := r^{-1/2}M. \quad (1.37)$$

11.  $\mathbb{R}$  est inclus dans chaque algèbre de Clifford réelle, par convention. Dans le cas de  $Cl_3$  cela revient à identifier les nombres  $a$  aux matrices scalaires  $aI$ . Cela simplifie de nombreux calculs. Cette identification est souvent utilisée en mathématiques; par exemple le corps  $\mathbb{R}$  des réels est inclus dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes.

12. Une seule autre possibilité existe :  $\vec{x}' = R(x) = MxM^\dagger/\sqrt{r}$ . Avec  $N := \sqrt[4]{r}M$  on a  $\vec{x}' = R(x) = NxN^\dagger$  ce qui nous ramène à la transformation sous sa forme plus simple utilisée ici.

Donc  $r$  est le module et  $\theta$  est un argument du déterminant de  $M$  ( $r$  n'est pas le déterminant de  $M$ , seulement le module du déterminant). On obtient :

$$\begin{aligned} (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 &= \det(x') = \det(MxM^\dagger) \\ &= re^{i\theta} \det(x) re^{-i\theta} = r^2[(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Par conséquent  $R$  multiplie toute distance d'espace-temps par  $r$ , on l'appelle donc "similitude de rapport  $r$ ". On appelle  $M$  le dilatateur de la similitude  $R$ . Même si, depuis 1928, la plupart des physiciens ont confondu similitude et dilatateur, on utilisera ici deux termes différents, car **une similitude n'est pas un dilatateur**. Considérons  $\underline{R}$ , transformation telle que :

$$\underline{x}' = \underline{R}(x) = \underline{M}x\underline{M}^\dagger. \quad (1.39)$$

On a alors :

$$x' = r^{1/2} \underline{M} x r^{1/2} \underline{M}^\dagger = r \underline{M} x \underline{M}^\dagger = r \underline{R}(x); \quad R = r \underline{R}. \quad (1.40)$$

Et donc  $R$  est le produit, dans n'importe quel ordre, de  $\underline{R}$  et d'une homothétie de rapport  $r$ . Et puisqu'on a défini  $\underline{M}$  de telle sorte que :

$$|\det(\underline{M})| = 1, \quad (1.41)$$

on a défini  $\underline{M}$  pour qu'il appartienne au sous-groupe  $\mathcal{G}$  de  $GL(2, \mathbb{C})$  des éléments dont le module du déterminant vaut 1. On a alors au lieu de (1.38) :

$$\begin{aligned} (\underline{x}'^0)^2 - (\underline{x}'^1)^2 - (\underline{x}'^2)^2 - (\underline{x}'^3)^2 &= \det(\underline{x}') = \det(\underline{M}x\underline{M}^\dagger) \\ &= |\det(\underline{M})|^2 \det(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Et donc  $\underline{R}$  est une transformation de Lorentz. Avec la convention usuelle de sommation sur les indices haut et bas, on pose :

$$x'^\mu = R^\mu_\nu x^\nu; \quad \underline{x}'^\mu = \underline{R}^\mu_\nu \underline{x}^\nu, \quad (1.43)$$

où  $(R^\mu_\nu)$  est la matrice réelle  $4 \times 4$  de la similitude  $R$  et  $(\underline{R}^\mu_\nu)$  est la matrice réelle  $4 \times 4$  de la transformation de Lorentz  $\underline{R}$ . De plus on obtient, (voir A.4.2) pour tout dilatateur  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$  :

$$2R_0^0 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 > 0, \quad (1.44)$$

et alors  $x'^0$  a le même signe que  $x^0$  à l'origine : la similitude  $R$ , et donc aussi  $\underline{R}$ , conservent la flèche du temps. De plus, pour tout dilatateur  $M$  de  $Cl_3^*$ , on obtient (calculs détaillés en A.4.5) l'égalité non triviale :

$$\det(R^\mu_\nu) = r^4. \quad (1.45)$$

Et alors, si  $r$  n'est pas nul,  $r^4 > 0 : \det(R) > 0$ . Donc  $R$  conserve l'orientation de l'espace-temps, et puisque la transformation conserve, avec (1.44), l'orientation du temps,  $R$  conserve aussi l'orientation de l'espace. De plus on a :

$$\det(\underline{R}_{\nu}^{\mu}) = 1. \quad (1.46)$$

Ceci termine la démonstration du fait que  $\underline{R}$  est une transformation du groupe de Lorentz (c'est le groupe des transformations conservant la métrique d'espace-temps). Mais ce groupe n'est pas le groupe d'invariance de l'onde de spin 1/2. Seul le groupe de Lorentz restreint s'obtient à partir de (1.36). Considérons à nouveau la fonction  $f$  qui associe au dilatateur  $M$  la similitude  $R = f(M)$ . Et soit  $M'$  un autre dilatateur, avec :

$$\det(M') = r' e^{i\theta'} ; \quad R' = f(M') ; \quad x'' = M' x' M'^{\dagger}. \quad (1.47)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x'' &= M' x' M'^{\dagger} = M' (M x M^{\dagger}) M'^{\dagger} = (M' M) x (M' M)^{\dagger} \\ R' \circ R &= f(M') \circ f(M) = f(M' M), \end{aligned} \quad (1.48)$$

et si l'on se restreint à  $r \neq 0$ ,  $f$  devient un homomorphisme,<sup>13</sup> du groupe de Lie  $(Cl_3^*, \times)$  dans le groupe de Lie  $(D^*, \circ)$ , où  $D^*$  désigne l'ensemble de toutes les similitudes de rapport non nul. Ces deux groupes sont des groupes de Lie :  $(Cl_3^*, \times)$  est le groupe  $(GL(2, \mathbb{C}), \circ)$ , où  $\circ$  désigne la composition des applications, de dimension 8. Or  $(D^*, \circ)$  est aussi un groupe de Lie, mais de dimension seulement 7, car le noyau de l'homomorphisme  $f$  n'est pas réduit à l'élément neutre. Soit en effet  $\theta$  un nombre réel quelconque et soit  $M$  le dilatateur tel que :

$$M = e^{i\theta/2} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}; \quad \det(M) = e^{i\theta}, \quad (1.49)$$

on obtient alors :

$$x' = M x M^{\dagger} = e^{i\theta/2} x e^{-i\theta/2} = x. \quad (1.50)$$

$f(M)$  est donc élément neutre pour la loi  $\circ$  et  $M$  appartient donc au noyau de  $f$ . Par conséquent le noyau est un groupe à un paramètre et il ne reste que 7 paramètres pour le groupe  $D^*$ . Six d'entre eux définissent une transformation de Lorentz propre et le septième est le rapport de similitude  $r$ . Par exemple, si le dilatateur  $M$  vérifie :

$$U = a + b\sigma_1; \quad M = \exp_1(U) = e^{a+b\sigma_1} = e^a [\cosh(b) + \sinh(b)\sigma_1], \quad (1.51)$$

13. La plupart des physiciens utilisent en mécanique quantique le terme de représentation, au lieu d'homomorphisme.

alors la similitude  $R$  définie en (1.36) vérifie :

$$\begin{aligned} x' &= MxM^\dagger = e^{a+b\sigma_1}(x^0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)e^{a+b\sigma_1} \\ &= e^{2a}[e^{2b\sigma_1}(x^0 + x^1\sigma_1) + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} x'^0 + x'^1\sigma_1 &= e^{2a}[\cosh(2b) + \sinh(2b)\sigma_1](x^0 + x^1\sigma_1), \\ x'^0 &= e^{2a}[\cosh(2b)x^0 + \sinh(2b)x^1]; \quad x'^2 = e^{2a}x^2, \\ x'^1 &= e^{2a}[\sinh(2b)x^0 + \cosh(2b)x^1]; \quad x'^3 = e^{2a}x^3. \end{aligned} \quad (1.53)$$

On peut voir que la similitude  $R = \exp_2(U)$  est le produit, dans n'importe quel ordre, de la transformation de Lorentz propre qui combine la composante de temps  $x^0$  avec la composante spatiale  $x^1$ , et de l'homothétie de rapport  $r = e^{2a}$ . Autre exemple, si :

$$U = a + bi\sigma_1; \quad M = \exp_1(U) = e^{a+bi\sigma_1} = e^a[\cos(b) + \sin(b)i\sigma_1], \quad (1.54)$$

alors la similitude  $R = \exp_2(U)$  définie en (1.36) vérifie :

$$\begin{aligned} x' &= MxM^\dagger = e^{a+bi\sigma_1}(x^0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)e^{a-bi\sigma_1} \\ &= e^{2a}[x^0 + x^1\sigma_1 + e^{2bi\sigma_1}(x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} x'^2\sigma_2 + x'^3\sigma_3 &= e^{2a}[\cos(2b) + \sin(2b)i\sigma_1](x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3), \\ x'^2 &= e^{2a}[\cos(2b)x^2 + \sin(2b)x^3]; \quad x'^0 = e^{2a}x^0, \\ x'^3 &= e^{2a}[-\sin(2b)x^2 + \cos(2b)x^3]; \quad x'^1 = e^{2a}x^1. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Et donc  $R$  est le produit d'une rotation d'axe  $Ox^1$  et d'angle  $2b$ , par une homothétie de rapport  $r = e^{2a}$ . Prendre en considération la distinction entre le dilatateur  $M$  et la similitude  $R$  est absolument nécessaire. Malheureusement cette distinction n'a jamais été faite avant ce travail, la théorie de Dirac a confondu  $M$  et  $R$  au point de donner le même nom à deux choses aussi différentes ! Ici on évitera toujours d'appeler  $M$  transformation de Lorentz puisque c'est une chose complètement différente, même si chaque dilatateur  $M = \exp_1(U)$  permet de définir la similitude  $R = \exp_2(U)$ . Le groupe de Lie des dilatateurs,  $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$ , et le groupe de Lie des similitudes  $\mathcal{D}^*$  sont très différents. Ils n'ont pas la même topologie, ils n'ont même pas la même dimension. Donc ils ne doivent pas être confondus, même au voisinage de l'élément neutre  $U = 0$ .

Les calculs précédents sont simples, parce que nous sommes partis des dilatateurs  $M$  pour obtenir les similitudes  $R$ . Le calcul en sens inverse est impossible, il n'a aucun sens, parce que la similitude  $R$  est l'image de  $M$  par l'homomorphisme  $f$ , et cet homomorphisme n'est pas inversible. Aucun isomorphisme ne peut permettre d'identifier le groupe à 8 dimensions des dilatateurs avec le groupe à 7 dimensions des similitudes.

### Groupe de Lorentz restreint

Ajoutons maintenant la condition  $|\det(M)| = 1$ , qui identifie  $M$  et  $\underline{M}$ . L'ensemble des dilatateurs  $\underline{M}$  est  $\mathcal{G}$ , et (1.38) se réduit à :

$$(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (1.57)$$

La similitude  $R$  est alors une transformation de Lorentz et l'ensemble des  $R$  est appelé le groupe de Lorentz restreint, usuellement noté  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ . L'orientation du temps et l'orientation de l'espace sont conservées, séparément. Le déterminant vérifie :

$$1 = |e^{i\theta}| \quad ; \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.58)$$

L'algèbre de Lie de  $\mathcal{G}$  et celle de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  ne peuvent pas être confondues. La première est une algèbre de dimension 7 sur le corps des réels, la seconde est une algèbre de dimension 6 sur le corps des réels. Ce qui s'est passé est non seulement qu'on a confondu dilatation et similitude, mais qu'en plus on a confondu les deux conditions non équivalentes  $\det(M) = 1$ , qui définit le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ , et  $|\det(M)| = 1$ , qui définit le groupe  $\mathcal{G}$ . L'origine de cette erreur est facile à comprendre, car on avait auparavant, avec la théorie de Pauli, identifié les groupes  $SO(3)$  et  $SU(2)$ , qui ont la même algèbre de Lie, à savoir l'algèbre  $su(2)$  des matrices hermitiques et de trace nulle. Comme  $\det[\exp(M)] = \exp[\text{tr}(M)]$ , les  $\exp(M)$ ,  $M \in su(2)$ , ont un déterminant égal à 1.

La fonction exponentielle est générale en théorie des groupes de Lie : c'est une fonction d'un voisinage du zéro de l'algèbre dans un voisinage de l'unité du groupe. Dans le cas simple des groupes  $GL(n, \mathbb{C})$  qui ont pour algèbre de Lie l'algèbre  $M_n(\mathbb{C})$  des matrices complexes  $n \times n$ , la fonction exponentielle a la forme bien connue :

$$\exp(M) = e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}. \quad (1.59)$$

La mécanique quantique non relativiste utilise deux propriétés simples de  $SU(2)$  : d'une part, tout élément  $M$  de  $SU(2)$  est de la forme :

$$M = \exp(ia^j \sigma_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad a^j \in \mathbb{R}. \quad (1.60)$$

D'autre part, pour toute rotation  $R$ , il existe un  $M$ , défini au signe près, tel que  $R = f(M)$ , où  $f$  est l'homomorphisme associant à tout dilatateur la similitude associée. Considérons maintenant  $M = -1 + \sigma_1 + i\sigma_2$ , qui est un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$  puisque  $\det(M) = 1$ . Or  $M$  vérifie :

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + i\sigma_2)^2 &= 0; \quad \exp(\sigma_1 + i\sigma_2) = 1 + (\sigma_1 + i\sigma_2) + 0, \\ M &= -[1 - (\sigma_1 + i\sigma_2)]; \quad M = -\exp[-(\sigma_1 + i\sigma_2)], \\ M &= \exp(i\pi - \sigma_1 - i\sigma_2). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Donc la fonction exponentielle, pour le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ , a des propriétés différentes de celles de  $SU(2)$ . La méconnaissance de cette différence a entraîné des énoncés faux : le plus fréquent affirme que tout élément de  $SL(2, \mathbb{C})$  est de la forme  $e^B$  avec  $\text{tr}(B) = 0$  [1]. Un contre-exemple est le  $M = -1 + \sigma_1 + i\sigma_2$  qu'on vient d'étudier, pour lequel  $\text{tr}(B) = 2ik\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La restriction  $\bar{f}$  de  $f$  à  $\mathcal{G}$  est un homomorphisme de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , avec le même noyau que celui de  $f$ .

Quant à lui, le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ , sous-groupe de  $\mathcal{G}$ , contient lui-même comme sous-groupe le groupe  $SU(2)$  des matrices complexes  $2 \times 2$  unitaires de déterminant 1. La restriction de  $f$  à ce sous-groupe est un homomorphisme de  $SU(2)$  sur le groupe  $SO(3)$  des rotations de l'espace. Le noyau de cet homomorphisme surjectif se réduit au groupe  $\{\pm 1\}$ . Ceci est à la base de tous les calculs utilisant le spin d'un système d'électrons. Bien entendu tous ces calculs, comme les symboles  $6j$  et  $9j$ , sont exacts puisqu'ils utilisent de manière appropriée les théorèmes sur les groupes de Lie, et parce qu'ils se servent non pas des compositions de rotations, mais en fait des multiplications de matrices unitaires.

## 1.2 Invariance étendue

Le premier changement important que nous proposons remplace la condition  $|\det(M)| = 1$  par la condition  $\det(M) \neq 0$  (cette condition ne sert qu'à obtenir la structure de groupe multiplicatif). C'est substituer au groupe  $\mathcal{G}$ , de dimension 7, le groupe de Lie  $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$ , de dimension 8.  $Cl_3^*$  est aussi le groupe multiplicatif de l'algèbre  $Cl_3$ , et  $Cl_3$  en est de plus l'algèbre de Lie. Les raisons de cette extension du groupe d'invariance sont les suivantes :

1- Ceci est possible, et très surprenant, parce que les propriétés (1.38), (1.44), (1.45), sont générales et ne supposent ni  $|\det(M)| = 1$ , ni  $\det(M) = 1$  [17, 19, 20]. Ces conditions restrictives ne semblent nécessaires nulle part pour l'onde de l'électron. Pour le voir il suffit de ne jamais utiliser les transformations infinitésimales, au contraire de la plupart des cours, et de calculer directement dans les groupes de Lie.

2- La valeur du déterminant n'a pas d'origine géométrique, alors que la gravitation est liée à cette géométrie de l'espace-temps. Or  $Cl_3^*$  est bien évidemment un **groupe géométrique** puisque c'est le groupe multiplicatif de l'algèbre incluant : d'une part les vecteurs de l'espace physique, à trois dimensions, avec une multiplication assemblant le produit scalaire et le produit vectoriel des vecteurs, plus le produit mixte pour trois vecteurs ; et d'autre part les quadri-vecteurs d'espace-temps, qui forment la partie auto-adjointe de l'algèbre.

3- Le physicien russe V. Fock [74] avait reconstruit la relativité générale en partant des propriétés de l'électromagnétisme et de la gravité. Son

point de départ était celui d'Einstein, l'invariance de la vitesse de la lumière par rapport à tout repère, même en mouvement de translation. Puisque la lumière est une onde électromagnétique, Fock considérait un front d'onde électromagnétique. Il avait alors prouvé que la transformation liant les coordonnées d'un événement était nécessairement linéaire, et il avait ensuite prouvé que la transformation  $R$  était nécessairement une similitude, produit d'une transformation de Lorentz et d'une homothétie. Mais il travaillait à partir de l'électromagnétisme, donc seulement à partir de la similitude  $R$ , et n'avait aucune chance de pouvoir introduire le dilatateur  $M$  qui arrive seulement de l'onde quantique. Certes Fock était aussi un des maîtres de la mécanique quantique, mais il n'avait pas plus que les autres compris la différence entre similitude  $R$  et dilatateur  $M$ . Comme il voulait obtenir seulement la transformation de Lorentz il prétendit que le rapport d'homothétie devait valoir 1. On savait pourtant déjà à l'époque que le groupe d'invariance de l'électromagnétisme, loin des sources du champ, était bien plus vaste que le groupe de Lorentz et incluait les similitudes. Ensuite l'erreur de Fock a diffusé dans tous les travaux de physique russes, notamment grâce au succès des livres de Landau, et cette erreur a concerné finalement la totalité de la théorie quantique des champs. Rappelons en outre que, même si l'homothétie se réduisait à l'identité, le groupe des dilatateurs ne se réduirait pas à  $SL(2, \mathbb{C})$ , mais au sous-groupe  $\mathcal{G}$  de  $GL(2, \mathbb{C})$  formé par les  $M$  tels que  $|\det(M)| = 1$ , groupe de dimension sept, qui ne peut donc être ni confondu, ni isomorphe, avec le groupe de Lorentz restreint, de dimension six.

4- Cette extension de l'invariance relativiste nous permettra ensuite de comprendre la géométrie des quatre sortes d'interaction en physique (électromagnétisme, interactions faibles, interactions fortes, gravitation), la quantification du moment cinétique et des charges, et la nature du champ électromagnétique. La force de cette approche vient de l'inclusion de la transformation de parité dans la géométrie de l'espace-temps, résultant de  $||x||^2 = xP(x)$ . Elle vient aussi de ce qu'on n'étend plus, de manière inconsidérée, les propriétés des normes euclidiennes aux pseudo-normes des espaces pseudo-euclidiens. Enfin et surtout, cette extension du groupe d'invariance nous permettra de comprendre que l'onde quantique de l'électron est une fonction de l'espace-temps à valeur dans ce groupe des dilatateurs.

Retournons maintenant à l'équation de Dirac et regardons comment l'onde de spin  $1/2$  se comporte sans la condition  $|\det(M)| = 1$ . D'abord l'onde droite  $\xi$  et l'onde gauche  $\eta$  ne se transforment pas de la même manière :

$$\xi' = \xi'(x') = M\xi = M\xi(x); \quad \eta' = \eta'(x') = \widehat{M}\eta = \widehat{M}\eta(x). \quad (1.62)$$

C'est en fait l'origine de l'existence d'ondes droites et d'ondes gauches : elles ne se transforment pas de la même manière dans les transformations de Lorentz. La différence vient des transformations de Lorentz qui ne sont

pas des rotations, parce que nous avons, par exemple :

$$\xi' = e^{a+b\sigma_1}\xi; \quad \eta' = e^{a-b\sigma_1}\eta. \quad (1.63)$$

Avec les transformations comme (1.54), qui sont des rotations, on a  $\widehat{M} = M$ , et donc l'onde droite et l'onde gauche se transforment de la même manière. En conséquence la théorie des interactions faibles ne peut qu'utiliser l'équation de Dirac sous sa forme relativiste chirale, seule capable de distinguer ondes droites et gauches (au contraire de l'équation de Pauli). Tout ceci est bien connu du modèle standard. Pour voir comment le système (1.11) se transforme, on a besoin de la relation non triviale suivante (détails en A.4.4) :

$$\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}; \quad \nabla' := \sigma^\mu \partial'_\mu; \quad \partial'_\mu := \frac{\partial}{\partial x'^\mu}. \quad (1.64)$$

On doit donc distinguer (et c'est une nouveauté, une contrainte supplémentaire) les vecteurs d'espace-temps se transformant comme  $x$  qu'on appellera vecteurs **contravariants**, des vecteurs se transformant comme  $\nabla$ , qu'on appellera **covariants**. Les deux dimensions supplémentaires du groupe d'invariance induisent donc de nouvelles contraintes qui s'ajoutent aux contraintes déjà fortes de l'invariance relativiste : en calcul tensoriel on n'a plus maintenant la possibilité de déplacer un indice tensoriel du haut vers le bas et inversement. On ne peut plus, par exemple, remplacer un vecteur contravariant  $n$  par le vecteur covariant  $\nabla$  comme le faisait Lasenby [88]. Autre contrainte consécutive à (1.64) :  $\nabla$  agit sur  $\widehat{\phi}$ , pas sur  $\phi$  : l'équation d'onde contient  $\nabla\widehat{\phi}$ , jamais  $\nabla\phi$ , à cause du  $\widehat{M}$  de  $\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}$  qui n'agit que sur  $\widehat{\phi}$ . Les contraintes précédentes de l'invariance relativiste demeurent : pour les transformations de Lorentz propres, tout comme pour les rotations, quand on a un angle  $\theta/2$  pour la transformation de  $\xi$  ou de  $\eta$ , on obtient un angle double  $\theta$  pour la transformation de  $x$  et  $\nabla$ . Ceci aussi était bien connu en physique quantique. Le système (1.11) devient, si  $qA$  se transforme comme  $\nabla$  (ce qui est indispensable pour l'invariance de jauge) :

$$\begin{aligned} \xi' &= M\xi = M \frac{i}{m} (\overline{M}\nabla'\widehat{M} + iq'\overline{M}A'\widehat{M})\eta = M\overline{M} \frac{i}{m} (\nabla' + iq'A')\eta', \\ \eta' &= \widehat{M}\eta = \widehat{M} \frac{i}{m} (\widetilde{M}\widehat{\nabla}'M + iq'\widetilde{M}\widehat{A}'M)\xi = \widehat{M}\widetilde{M} \frac{i}{m} (\widehat{\nabla}' + iq'\widehat{A}')\xi'. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Et avec  $\det(M) = re^{i\theta}$  on a :

$$M\overline{M} = re^{i\theta}; \quad \widehat{M}\widetilde{M} = re^{-i\theta}; \quad \overline{M} = re^{i\theta}M^{-1}. \quad (1.66)$$

Le système (1.65) peut donc s'exprimer comme :

$$\xi' = re^{i\theta} \frac{i}{m} (\nabla' + iq'A')\eta'; \quad \eta' = re^{-i\theta} \frac{i}{m} (\widehat{\nabla}' + iq'\widehat{A}')\xi'. \quad (1.67)$$

Dans le cas particulier où  $M$  appartient à  $SL(2, \mathbb{C})$ , ceci se réduit à :

$$\xi' = \frac{i}{m}(\nabla' + iqA')\eta'; \quad \eta' = \frac{i}{m}(\widehat{\nabla}' + iq\widehat{A}')\xi'. \quad (1.68)$$

On peut donc dire que la forme de l'équation d'onde est inchangée<sup>14</sup>.

Pour utiliser complètement les avantages et contraintes de l'invariance étendue au groupe  $Cl_3^*$ , on va maintenant commencer par changer l'apparence de l'équation d'onde, en plaçant tous les calculs dans le cadre de la même algèbre de Clifford. Cela signifie que tous les éléments de l'équation d'onde, opérateurs différentiels, potentiels de jauge, addition et multiplication, valeurs de l'onde, coordonnées d'espace et de temps, seront des éléments de la même structure algébrique-géométrique. Ensuite seulement, nous changerons l'équation d'onde elle-même en simplifiant la densité lagrangienne d'où se déduit l'équation d'onde.

### 1.3 L'équation de Dirac dans $Cl_3$

Au lieu du formalisme initial des matrices de Dirac, qui forment un espace vectoriel et une algèbre, de dimension 16 sur le corps des complexes et donc un espace vectoriel de dimension 32 sur le corps des réels, au lieu du formalisme de l'algèbre d'espace-temps  $Cl_{1,3}$  d'Hestenes [77]–[81], espace vectoriel de dimension 16 sur le corps des réels, on peut trouver un formalisme plus simple, moins coûteux en dimensions, puisque n'utilisant que l'algèbre  $Cl_3$ , espace vectoriel de dimension 8 sur le corps des réels.<sup>15</sup> La manière utilisée dès 1928 pour rendre compte de l'invariance relativiste, que nous venons d'étudier en détail, est la première raison de ce changement de cadre pour l'équation de Dirac : cette invariance utilise seulement un sous-groupe de  $Cl_3^*$ , lui-même sous-ensemble de  $Cl_3$ . Seconde raison, l'onde de Dirac, version Hestenes, est à valeur dans la sous-algèbre paire  $Cl_{1,3}^+$ , isomorphe à  $Cl_3$ . Troisième raison, l'utilisation de la seule algèbre  $Cl_3$ , comme nous allons le voir en détail, est suffisante pour tout décrire en théorie de Dirac [14, 15]. Enfin et surtout, c'est le cadre idéal pour décrire ondes gauches et ondes droites, et toutes les grandeurs qui s'obtiennent à partir d'elles, dont les tenseurs d'impulsion-énergie.

Pour exprimer l'onde de Dirac dans  $Cl_3$ , il suffit de remplacer les matrices colonnes  $\xi$  et  $\eta$  par des matrices  $2 \times 2$  avec une seconde colonne de zéros. Ça ne change rien aux calculs parce que les sommes et les produits

14. Une lecture rapide peut ne pas permettre de voir ce qui change par rapport à un exposé courant de mécanique quantique. En fait il n'y a pas de différence, même pour les ondes droites et gauches, à part le fait qu'on voit mieux la distinction entre les  $\nabla$  agissant sur  $\eta$  et les  $\widehat{\nabla}$  agissant sur  $\xi$ , à quoi il convient seulement d'ajouter la distinction entre dilatateur et similitude. Et ces distinctions, liées à la parité, se montreront essentielles dans les propriétés de la variété d'espace-temps au chapitre 4.

15. L'utilisation de  $Cl_3$  a d'abord été l'œuvre de W. Baylis [3].

ligne-colonne opèrent de manière indépendante sur chaque ligne de la matrice de gauche, et sur chaque colonne de la matrice de droite. Pour un calcul plus aisé des densités tensorielles on rajoute un facteur  $\sqrt{2}$  et donc on pose :

$$\begin{aligned} R^1 &:= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & 0 \\ \xi_2^1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widehat{L}^1 := \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^1 & 0 \\ \eta_2^1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi &:= R^1 + L^1 = \sqrt{2}(\xi^1 \quad \widehat{\eta}^1) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & -\eta_2^{1*} \\ \xi_2^1 & \eta_1^{1*} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.69)$$

On utilise pour le complexe conjugué de  $z$  soit  $\bar{z}$ , qui est la notation usuelle en mathématique, soit  $z^*$ , qui est usuel en théorie de Dirac. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{\phi} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^1 & -\xi_2^{1*} \\ \eta_2^1 & \xi_1^{1*} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta^1 & \widehat{\xi}^1 \end{pmatrix}, \\ R^1 &= \phi \frac{1 + \sigma_3}{2} = \sqrt{2}(\xi^1 \quad 0); \quad \widehat{L}^1 = \widehat{\phi} \frac{1 + \sigma_3}{2} = \sqrt{2}(\eta^1 \quad 0). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Le lien entre  $\phi$ ,  $R^1$  et  $L^1$  est indépendant du repère utilisé parce que les transformations de (1.62) équivalent à<sup>16</sup> :

$$\phi' = \phi'(x') = M\phi = M\phi(x); \quad \widehat{\phi}' = \widehat{\phi}'(x') = \widehat{M}\widehat{\phi} = \widehat{M}\widehat{\phi}(x). \quad (1.71)$$

Le système (1.11), qui est équivalent à l'équation de Dirac, s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla + iqA)\widehat{\phi} \frac{1 + \sigma_3}{2} + im\phi \frac{1 + \sigma_3}{2}, \\ 0 &= (\widehat{\nabla} + iq\widehat{A})\phi \frac{1 + \sigma_3}{2} + im\widehat{\phi} \frac{1 + \sigma_3}{2}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

En appliquant l'opérateur parité  $P : M \mapsto \widehat{M}$ <sup>17</sup> à la seconde équation, on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla + iqA)\widehat{\phi} \frac{1 + \sigma_3}{2} + im\phi \frac{1 + \sigma_3}{2}, \\ 0 &= (\nabla - iqA)\widehat{\phi} \frac{1 - \sigma_3}{2} - im\phi \frac{1 - \sigma_3}{2}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Ce système est lui-même équivalent à la seule équation suivante, obtenue en ajoutant les deux équations du système :

$$0 = \nabla \widehat{\phi} + qA\widehat{\phi}i\sigma_3 + m\phi i\sigma_3, \quad (1.74)$$

16. Cette équivalence n'est pas triviale et vient du fait que  $\sigma_2$  est imaginaire tandis que  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  sont des matrices réelles. Le résultat est, pour tout  $\phi$ , que la transformation  $P$  telle que  $M \mapsto \widehat{M}$  échange  $\xi$  et  $\eta$ .

17.  $P$  est, du point de vue mathématique, l'automorphisme principal de  $Cl_3$ , qui change  $i$  en  $-i$  et  $\sigma_j$  en  $-\sigma_j$ . Du point de vue physique  $P$  désigne la parité, qui échange onde droite et onde gauche.

parce que chaque équation du système (1.73) s'obtient en appliquant à (1.74) les projecteurs sur les parties droites et les parties gauches qui sont, avec  $Cl_3$ ,  $(1 \pm \sigma_3)/2$ . On termine la simplification en multipliant à droite par  $-i\sigma_3 = \sigma_{21} = \sigma_2\sigma_1$ . L'équation de Dirac est donc équivalente à :

$$0 = \nabla \hat{\phi} \sigma_{21} + qA\hat{\phi} + m\phi, \quad (1.75)$$

Comme  $\hat{\phi} = \sqrt{2}(\eta^1 \quad \hat{\xi}^1)$ , on peut considérer l'onde  $\hat{\phi}$  comme composée de deux ondes gauches :  $\eta^1$  et  $\hat{\xi}^1$ . Et, par la transformation de parité  $P$ , (1.75) est équivalent à :

$$0 = \hat{\nabla} \phi \sigma_{21} + q\hat{A}\phi + m\hat{\phi}. \quad (1.76)$$

Redisons, une fois encore, qu'en dépit d'un aspect très différent, **ces équations sont exactement l'équation de Dirac invariante relativiste**. L'invariance de jauge prend maintenant la forme :

$$\phi \mapsto \phi' = \phi e^{ia\sigma_3} ; \quad A \mapsto A' = A - \frac{1}{q} \nabla a \quad (1.77)$$

Ainsi la multiplication par le nombre imaginaire  $i$  unique, générateur de la jauge électrique et commutant avec tout, est remplacée par la multiplication à droite par  $i_3 = i\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$ . Ce terme, du point de vue géométrique, est un bivecteur ou 2-vecteur, ce qui signifie une aire orientée (un produit vectoriel). Le  $i$  qui commute avec tout, dans  $Cl_3$ , est le trivecteur ou 3-vecteur  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i$  qui est un volume orienté. Cet autre  $i$  est celui qui est utilisé par exemple dans l'écriture bien connue du champ électromagnétique  $F$  comme somme d'un champ électrique et d'un champ magnétique  $\vec{E} + i\vec{H}$ . Pour chacun de ceux qui ont été habitués au  $i$  unique de la mécanique quantique non relativiste, c'est un changement important, difficile, parce que la non commutativité de la multiplication est beaucoup moins commode que la multiplication commutative des nombres complexes. Cependant ce changement de statut du  $i$  est absolument nécessaire du point de vue géométrique, car un 2-vecteur est une aire orientée, un 3-vecteur est un volume orienté, et une aire n'est pas un volume.

Tous les objets présents dans l'équation d'onde deviennent des éléments de la même algèbre. Les calculs, qui utilisent maintenant seulement des matrices  $2 \times 2$ , sont beaucoup plus simples que ceux qu'ils remplacent, et qui utilisaient des matrices  $4 \times 4$ . Même s'il n'y avait pas d'autre raison, cette simplification suffirait à justifier cette nouvelle forme de l'équation de Dirac. Mais il y a d'autres raisons, venant notamment du fait que, dans  $Cl_3$ , les comatrices donnant l'inverse d'une matrice sont réduites à des nombres, ainsi que des propriétés très particulières de la fonction exponentielle, détaillées en A.3.8.

### 1.3.1 Onde plane

Ce paragraphe utilise le cas le plus simple où l'interaction avec le champ électromagnétique extérieur et intérieure est négligée<sup>18</sup>. On suppose alors  $A = 0$ . L'équation de Dirac se réduit à :

$$\nabla \hat{\phi} \sigma_{21} + m\phi = 0. \quad (1.78)$$

On considère une onde plane avec une phase  $\varphi$  telle que :

$$\phi = \phi_0 e^{i\varphi \sigma_{21}} ; \quad \varphi = m v_\mu x^\mu. \quad (1.79)$$

On utilise un vecteur d'espace-temps appelé vitesse réduite :

$$v = \sigma^\mu v_\mu, \quad (1.80)$$

et  $\phi_0$  est un terme fixe qui donne :

$$\nabla \hat{\phi} \sigma_{21} = \sigma^\mu \partial_\mu (\hat{\phi}_0 e^{i\varphi \sigma_{21}}) \sigma_{21} = -m v \hat{\phi}. \quad (1.81)$$

Donc l'équation de Dirac est équivalente à :

$$\phi = v \hat{\phi}. \quad (1.82)$$

En utilisant la conjugaison  $P$  ceci équivaut à :

$$\hat{\phi} = \hat{v} \phi. \quad (1.83)$$

Alors en combinant les deux précédentes égalités on a :

$$\phi = v(\hat{v}\phi) = (v\hat{v})\phi = (v \cdot v)\phi. \quad (1.84)$$

Si  $\phi$  est inversible on obtient alors :

$$1 = v \cdot v = v\hat{v} = v_0^2 - \vec{v}^2, \quad (1.85)$$

$$v_0^2 = 1 + \vec{v}^2 ; \quad v_0 = \pm \sqrt{1 + \vec{v}^2}, \quad (1.86)$$

avec a priori deux possibilités sur le signe. Le signe moins implique une énergie négative pour la particule. Ce fut pour Dirac une sérieuse déception, car il souhaitait se débarrasser des énergies négatives, non physiques. Et il était impossible de supprimer ces énergies négatives.<sup>19</sup> Elles sont nécessaires

18. On verra au chapitre 2 qu'il n'y a pas de raison de négliger le champ électromagnétique interne à l'onde électronique. Tout ce qui concerne les ondes planes ne peut donc être considéré que comme un exercice simple de mathématiques sans autre intérêt du point de vue physique que de justifier l'analyse de Fourier.

19. Les ondes planes, même si elles se calculent ici bien plus simplement, ne sont pas la panacée trop souvent présentée. De Broglie nous a averti contre l'abus qu'on fait de ces ondes : une onde illimitée dans l'espace et le temps, ça n'existe pas dans la nature. Dans un microscope électronique un train d'onde électronique est toujours limité dans le temps et l'espace. On a vu en 1.2 l'usage que Fock faisait des fronts d'onde. Donc les ondes planes sont beaucoup trop virtuelles et irréelles pour être très intéressantes pour ceux qui donnent à l'onde une réalité physique.

dans le calcul de la transformation de Fourier, ou pour obtenir un paquet d'onde très petit.

Six ans plus tard, la découverte du positron, une particule qui a la même masse que celle de l'électron, avec cependant une charge opposée, a complètement changé la situation : les ondes planes à énergie négative ont été associées au positron. Et cette association est toujours considérée comme le triomphe de la théorie de Dirac. Mais ces ondes à énergie négative engendrent de sérieux problèmes quand on calcule leurs effets sur l'émission ou l'absorption de la lumière. De plus les positrons semblent avoir la même masse propre, et non pas une masse opposée à celle de l'électron.

Les calculs présentés ici sont **beaucoup plus simples** que les calculs que l'on trouve dans les livres de mécanique quantique relativiste utilisant les matrices complexes  $4 \times 4$ . C'est, redisons-le, une raison suffisante pour préférer  $Cl_3$  à l'algèbre des matrices de Dirac.

### 1.3.2 Densités tensorielles sans dérivée partielle

Le courant  $J = J^\mu \sigma_\mu$  est l'un des vecteurs de la physique de l'électron dont les quatre composantes  $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  se calculent sans dérivée partielle. On peut d'abord remarquer avec L. de Broglie [56] le caractère fort étrange de ces densités tensorielles qui n'ont aucun vrai équivalent en physique avant la mécanique quantique. Plusieurs autres quantités similaires ont été rapidement notées [56], d'abord une quantité scalaire :

$$\Omega_1 := \bar{\psi} \psi ; \quad \bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0 = (\eta^{1\dagger} \quad \xi^{1\dagger}), \quad (1.87)$$

où  $M^\dagger$  est la matrice adjointe (matrice transposée conjuguée). Ensuite les six densités :

$$S^{\mu\nu} := i \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi, \quad (1.88)$$

sont considérées comme les composantes d'un tenseur antisymétrique de rang deux. Les quatre  $K^\mu$  tels que :

$$K^\mu := \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi ; \quad \gamma_5 = -i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

sont considérées comme les composantes d'un pseudo-vecteur d'espace-temps, en théorie lié à un tenseur antisymétrique de rang 3, même si ce lien n'est jamais utilisé. Finalement :

$$\Omega_2 := -i \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \quad (1.90)$$

est un invariant relativiste qui permet de définir l'invariant principal  $\rho$  et l'angle d'Yvon-Takabayasi  $\beta$  tels que :

$$\Omega_1 = \rho \cos \beta ; \quad \Omega_2 = \rho \sin \beta ; \quad \Omega_1 + i \Omega_2 = \rho e^{i\beta}. \quad (1.91)$$

Avec les spineurs gauche  $\eta^1$  et droit  $\xi^1$  on a :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \xi^{1\dagger}\eta^1 + \eta^{1\dagger}\xi^1 ; \quad \Omega_2 = i(\xi^{1\dagger}\eta^1 - \eta^{1\dagger}\xi^1), \\ \rho e^{i\beta} &= \Omega_1 + i\Omega_2 = 2\eta^{1\dagger}\xi^1 = 2(\eta_1^{1*}\xi_1^1 + \eta_2^{1*}\xi_2^1), \\ \rho e^{-i\beta} &= \Omega_1 - i\Omega_2 = 2\xi^{1\dagger}\eta^1 = 2(\eta_1^1\xi_1^{1*} + \eta_2^1\xi_2^{1*}).\end{aligned}\tag{1.92}$$

Ces densités tensorielles ont été obtenues très vite et ont été intensément étudiées, car les physiciens désiraient relier les nouvelles ondes aux quantités connues en physique, où toutes les quantités sont des vecteurs et tenseurs à composantes réelles (mais pas des densités tensorielles!). En fait ces 16 densités tensorielles ne savent rien de la phase de l'onde, car elles contiennent le produit de  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$  par  $\psi$  et sont donc invariantes de jauge<sup>20</sup>. On ne peut donc pas substituer la dynamique de ces densités à la dynamique de l'onde  $\psi$  elle-même.

Revenant à  $Cl_3$ , nous allons en obtenir une réelle simplification et une grande généralisation. Tout d'abord  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  s'assemblent très simplement, en identifiant nombres réels et matrices scalaires, grâce à :

$$\det(\phi) = \phi\bar{\phi} = \bar{\phi}\phi = \Omega_1 + i\Omega_2 = \rho e^{i\beta}.\tag{1.93}$$

Ainsi  $\rho$  est le module et l'angle d'Yvon-Takabayasi  $\beta$  est un argument du **déterminant** de  $\phi = \phi(x)$ ; donc ils sont fonctions de  $x$ . De plus,  $\phi(x)$  est un élément inversible de  $Cl_3$  si et seulement si  $\rho \neq 0$ . Puis le calcul détaillé de  $J_\mu$  et  $K_\mu$  (voir A.4.2) à l'aide de  $\xi^1$  et de  $\eta^1$  donne :

$$J = J^\mu\sigma_\mu = \phi\sigma_0\phi^\dagger = \phi\phi^\dagger ; \quad K = K^\mu\sigma_\mu = \phi\sigma_3\phi^\dagger.\tag{1.94}$$

On voit aussitôt que ces deux vecteurs d'espace-temps, dont on savait qu'ils sont orthogonaux et de carrés scalaires opposés, font maintenant partie d'une liste de quatre vecteurs ( $D_0, D_1, D_2, D_3$ ). **Attention! Ceci est un changement majeur en théorie de Dirac**, changement obtenu en premier par Hestenes [78] :

$$D_0 = J ; \quad D_1 = \phi\sigma_1\phi^\dagger ; \quad D_2 = \phi\sigma_2\phi^\dagger ; \quad D_3 = K.\tag{1.95}$$

---

20. Il en est de même pour toute quantité du type  $\psi\bar{\psi}$ , qui n'est donc pas général, quoi qu'en pensent de nombreux physiciens [71]. Leur principal argument, basé sur la dimension de l'espace vectoriel des matrices de Dirac, 16 sur le corps des nombres complexes, n'a pas de raison de s'appliquer pour les densités tensorielles, qui sont des grandeurs réelles. Ce 16 est en réalité une différence de nombres triangulaires ( $36 - 10 - 10$ , avec  $36 = 9 \times 8/2$ ,  $10 = 5 \times 4/2$ ). Les nombreuses études construites sur ces seules 16 densités [10][98][110] manquent donc un point essentiel. En outre les densités tensorielles obtenues sans dérivées partielles ne sont pas les seules densités importantes en théorie de Dirac. D'autres densités, dont le calcul comporte des dérivées partielles, sont utilisées et de plus certaines d'entre elles ont même été ininterprétées [54]. Pire encore, la liste des densités tensorielles constructibles de manière relativiste à partir de l'onde de l'électron est une liste infinie [15]. Donc on ne peut pas tout en savoir, ce qui signifie que ces quantités ne peuvent pas suffire à bâtir une théorie du tout.

Les densités tensorielles qui sont les composantes de  $D_1$  et de  $D_2$  (puisque non invariantes de jauge) ne peuvent pas être des combinaisons linéaires des seules 16 quantités connues dans le formalisme initial des matrices de Dirac. On doit donc considérer ce formalisme comme sérieusement incomplet, faible, trompeur. De plus, et c'est encore plus utile que la simplification des calculs, changer pour  $CL_3$  nous permet de découvrir de nouvelles quantités qui se révéleront très utiles dans les prochains chapitres. Pour toute similitude  $R$  définie par un dilatateur  $M$ , les quatre vecteurs  $D_\mu$  sont transformés de même manière :

$$D'_\mu = \phi' \sigma_\mu \phi'^\dagger = (M\phi) \sigma_\mu (M\phi)^\dagger = M\phi \sigma_\mu \phi^\dagger M^\dagger = MD_\mu M^\dagger. \quad (1.96)$$

Rappelons qu'en physique relativiste les tenseurs sont définis et classés par la manière dont ils se transforment dans une transformation de Lorentz. Nous n'avons donc aucune raison d'être concernés par  $D_0$  et  $D_3$ , tout en déniaient l'existence de  $D_1$  et  $D_2$ . Les quatre vecteurs  $D_\mu$  se transforment comme les vecteurs d'espace-temps  $x$ . Ils sont donc appelés **contravariants**. Ces vecteurs sont de plus orthogonaux et forment une **base mobile d'espace-temps** car on a :

$$\begin{aligned} 2D_\mu \cdot D_\nu &= D_\mu \widehat{D}_\nu + D_\nu \widehat{D}_\mu = \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \widehat{\phi} \widehat{\sigma}_\nu \overline{\phi} + \phi \sigma_\nu \phi^\dagger \widehat{\phi} \widehat{\sigma}_\mu \overline{\phi} \\ &= \phi \sigma_\mu \rho e^{-i\beta} \widehat{\sigma}_\nu \overline{\phi} + \phi \sigma_\nu \rho e^{-i\beta} \widehat{\sigma}_\mu \overline{\phi} = \rho e^{-i\beta} \phi (\sigma_\mu \widehat{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \widehat{\sigma}_\mu) \overline{\phi} = \rho e^{-i\beta} \phi 2\delta_{\mu\nu} \overline{\phi} \\ &= 2\delta_{\mu\nu} \rho e^{-i\beta} \phi \overline{\phi} = 2\delta_{\mu\nu} \rho e^{-i\beta} \rho e^{i\beta}; \quad D_\mu \cdot D_\nu = \delta_{\mu\nu} \rho^2. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Bien entendu, comme on se sert ici d'une métrique d'espace-temps de la relativité restreinte avec le choix du signe  $+$  pour le temps, on a :

$$\delta_{00} = 1; \quad \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1; \quad \delta_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (1.98)$$

Parmi ces  $10 = 5 \times 4/2$  relations (1.97), seulement  $3 = 3 \times 2/2$  étaient connues de l'ancienne théorie de Dirac :

$$J \cdot J = \rho^2; \quad K \cdot K = -\rho^2; \quad J \cdot K = 0. \quad (1.99)$$

Ensuite, pour les densités tensorielles  $S^{\mu\nu}$ , on pose :

$$S_3 = S^{23}\sigma_1 + S^{31}\sigma_2 + S^{12}\sigma_3 + S^{10}i\sigma_1 + S^{20}i\sigma_2 + S^{30}i\sigma_3. \quad (1.100)$$

Et on prouve (voir le détail en A.4.3) que :

$$S_3 = \phi \sigma_3 \overline{\phi}. \quad (1.101)$$

On peut voir immédiatement que  $S_3$  est l'un des quatre :

$$S_\mu = \phi \sigma_\mu \overline{\phi}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.102)$$

On a précédemment rencontré  $S_0$ , qu'on notera plus loin  $a_1$ , puisque l'on a (voir A.4.1) :

$$a_1 = S_0 = \phi \sigma_0 \overline{\phi} = \phi \overline{\phi} = \rho e^{i\beta} = \det(\phi). \quad (1.103)$$

Avec les quatre vecteurs contravariants  $D_\mu$  qui ont chacun quatre composantes,  $S_0$  qui n'en a que deux, et les trois  $S_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  qui en ont chacun six, on compte 36 densités tensorielles. C'est nettement plus que l'ancienne théorie, et c'est une preuve évidente du caractère incomplet de celle-ci. On peut noter que ce 36 est, comme le 16 qu'il remplace, un carré, mais ce n'est qu'une coïncidence numérique, parce que ce 36 est un nombre triangulaire : en algèbre de Clifford, les nombres triangulaires  $n(n-1)/2$  interviennent naturellement. Et puisque les ondes droites et les ondes gauches qui forment l'onde de l'électron sont les quantités fondamentales (ce que confirmera l'étude des interactions faibles dans le prochain chapitre), le décompte des densités tensorielles fonctionne comme suit : avec chaque spineur, le droit  $R^1$  et le gauche  $\hat{L}^1$  de (1.70), on obtient  $4 \times 5/2 = 10 = 4 + 6$  densités. Quatre d'entre elles constituent un vecteur d'espace-temps, les six autres forment un bivecteur d'espace-temps. Ainsi avec le spineur droit on obtient le courant droit  $D_R^1$  et le bivecteur  $S_R^1$  qui vérifient [30] :

$$D_R^1 := R^1 \tilde{R}^1 = (\xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \xi^1) \sigma_\mu; \quad S_R^1 := R^1 \sigma_1 \bar{R}^1. \quad (1.104)$$

De même avec le spineur gauche de l'électron, le vecteur  $D_L^1$  et le bivecteur  $S_L^1$  vérifient :

$$D_L^1 := L^1 \tilde{L}^1 = (\eta^{1\dagger} \sigma^\mu \eta^1) \sigma_\mu; \quad S_L^1 := L^1 \sigma_1 \bar{L}^1. \quad (1.105)$$

Dans sa théorie du monopôle magnétique, Georges Lochak a été le premier à remarquer le rôle fondamental des courants gauche et droit [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96]. Ces courants ont un carré scalaire nul, ils sont donc sur le cône de lumière, parce que, avec (1.104) et (1.105) :

$$\begin{aligned} 0 &= R^1 \bar{R}^1 = \bar{R}^1 R^1 = \tilde{R}^1 \hat{R}^1 = \hat{R}^1 \tilde{R}^1, \\ 0 &= L^1 \bar{L}^1 = \bar{L}^1 L^1 = \tilde{L}^1 \hat{L}^1 = \hat{L}^1 \tilde{L}^1, \\ D_R^1 \cdot D_R^1 &= D_R^1 \hat{D}_R^1 = R^1 (\tilde{R}^1 \hat{R}^1) \bar{R}^1 = 0, \\ D_L^1 \cdot D_L^1 &= D_L^1 \hat{D}_L^1 = L^1 (\tilde{L}^1 \hat{L}^1) \bar{L}^1 = 0. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Donc dans l'onde de spin 1/2 il existe toujours des quantités qui ont les propriétés de la lumière, même à très faible vitesse, même avec un électron au repos. C'est pour cela que l'approximation supprimant les "petites composantes" est, du point de vue physique, un parfait non sens, et pas seulement en physique des hautes énergies. De plus un nombre complexe, aussi petit que soit son module, peut s'écrire sous forme trigonométrique, avec un argument qui donne la phase d'une onde en physique. Seul zéro n'a pas d'argument.

Lochak a aussi compris que le courant J et le courant K sont simplement la somme et la différence des deux courants gauche et droit. Et on peut voir que ceci se transpose aux bivecteurs, où  $S_1$  et  $S_2$  sont aussi des combinaisons

de  $S_R^1$  et  $S_L^1$ , avec (1.104) et (1.105) :

$$J = D_0 = D_R^1 + D_L^1; \quad K = D_3 = D_R^1 - D_L^1, \quad (1.107)$$

$$S_1 + iS_2 = 2S_R^1; \quad S_1 - iS_2 = 2S_L^1. \quad (1.108)$$

On a établi en [48] la relation suivante, qui sera généralisée dans les chapitres suivants :

$$\rho^2 = a_1 a_1^* = 2D_R^1 \cdot D_L^1, \quad (1.109)$$

parce qu'on a :

$$\begin{aligned} J \cdot J &= (D_R^1 + D_L^1) \cdot (D_R^1 + D_L^1) \\ &= D_R^1 \cdot D_R^1 + 2D_R^1 \cdot D_L^1 + D_L^1 \cdot D_L^1 = 2D_R^1 \cdot D_L^1, \quad (1.110) \\ \tilde{R}^1 \hat{L}^1 &= a_1^* \frac{1 + \sigma_3}{2}; \quad \tilde{L}^1 \hat{R}^1 = a_1^* \frac{1 - \sigma_3}{2}, \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} 2D_R^1 \cdot D_L^1 &= D_R^1 \hat{D}_L^1 + D_L^1 \hat{D}_R^1 = R^1 \tilde{R}^1 \hat{L}^1 \bar{L}^1 + L^1 \tilde{L}^1 \hat{R}^1 \bar{R}^1 \quad (1.111) \\ &= R^1 a_1^* \frac{1 + \sigma_3}{2} \bar{L}^1 + L^1 a_1^* \frac{1 - \sigma_3}{2} \bar{R}^1 \\ &= a_1^* (R^1 \bar{L}^1 + L^1 \bar{R}^1) = a_1^* a_1 = \rho^2. \end{aligned}$$

En plus des densités tensorielles venant d'un seul des deux spineurs, on a 16 autres densités qui se calculent à partir des deux spineurs, le gauche et le droit. Ce  $16 = 2^4$  était le (faux) maximum du nombre de densités dans l'ancien formalisme des matrices complexes. Cela vient des propriétés bien connues du triangle de Pascal :  $2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$ . Le  $1 + 1$  des extrémités donne  $a_1$ , le  $4 + 4$  donne les vecteurs  $D_1$  et  $D_2$ , tandis que le 6 est le nombre de composantes de  $S_3$  :

$$\begin{aligned} a_1 &= S_0 = R^1 \bar{L}^1 + L^1 \bar{R}^1; \quad S_3 = R^1 \bar{L}^1 - L^1 \bar{R}^1, \\ D_1 + iD_2 &= 2R^1 \sigma_1 \tilde{L}_1; \quad D_1 - iD_2 = 2L^1 \sigma_1 \tilde{R}_1. \quad (1.112) \end{aligned}$$

L'usage de  $Cl_3$  est absolument nécessaire, parce que la construction de ces densités tensorielles ne peut se généraliser qu'à partir du décompte précédent, ce qui sera utilisé dans les chapitres suivants.<sup>21</sup> On verra l'importance de la base orthogonale ( $D_0$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ) au chapitre 4. Notons enfin qu'en théorie de Dirac de nombreuses autre densités, comportant des dérivées partielles, sont utiles, et nous en utiliserons dans l'étude de l'impulsion-énergie.

<sup>21</sup>. Par ailleurs R. Boudet et D. Hestenes ont fait une panacée de la base mobile orthonormale ( $e_0$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ) telle que  $D_\mu = \rho e_\mu$  [5] [78]. Il en a résulté notamment qu'ils n'ont pas vu la ressemblance entre les quatre  $D_\mu$  et les quatre  $S_\mu$ .

### 1.3.3 Transformation relativiste des densités

On a déjà expliqué comment les vecteurs  $D_\mu$  se transforment : ils sont contravariants ( $D' = MDM^\dagger$ ). De plus, ces formules de transformation sont automatiquement induites par la transformation de l'onde  $\phi$  elle-même. Ensuite, dans la similitude  $R$  induite par un dilatateur fixe quelconque  $M$ , les quatre quantités  $S_\mu$  deviennent :

$$S'_\mu = \phi' \sigma_\mu \bar{\phi}' = M \phi \sigma_\mu \bar{M} \bar{\phi} = M \phi \sigma_\mu \bar{\phi} \bar{M} = M S_\mu \bar{M}. \quad (1.113)$$

Comme la physique caractérise les tenseurs par la manière dont ils se transforment, il n'y a pas nécessité de distinguer les différents vecteurs  $D_\mu$  puisqu'ils se transforment de la même manière, qu'ils soient invariant de jauge ou non. La même situation se produit aussi pour les différentes quantités  $S_\mu$ . Par exemple on a :

$$\begin{aligned} \rho' e^{i\beta'} &= S'_0 = M S_0 \bar{M} = M \rho e^{i\beta} \bar{M} = \rho e^{i\beta} M \bar{M} = \rho e^{i\beta} r e^{i\theta}, \\ \rho' &= r \rho ; \quad \beta' = \beta + \theta \quad \text{mod } 2\pi. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Si on restreint les similitudes à être seulement des transformations de Lorentz alors  $\rho$  est invariant, mais pas  $\beta$ . Même dans le cas où  $\det(M) = 1$  on peut avoir  $\beta' = \beta + \pi$ . Et dans ce cas, ni  $\Omega_1 = \rho \cos(\beta)$ , ni  $\Omega_2 = \rho \sin(\beta)$  ne sont invariants, donc ils ne sont pas des invariants sous  $SL(2, \mathbb{C})$ .

De nombreuses relations existent entre les 36 densités tensorielles, qui dépendent seulement des 8 paramètres réels de l'onde  $\phi$  (voir A.4.6). Le nombre 36 est aussi dû à des restrictions limitant le nombre de possibilités : des produits comme  $R^1 R^1$  ou  $R^1 \hat{R}^1$  ne se transforment pas correctement du point de vue relativité, parce que la multiplication à droite par  $M^\dagger$  n'est pas disponible. Et plusieurs produits s'annulent, par exemple  $R^1 L^{1\dagger}$ .

Les égalités en (1.113) sont **complètement nouvelles en physique des tenseurs**, car elles diffèrent des relations de transformation des tenseurs antisymétriques de rang deux, qui donneraient  $S'^{\rho\sigma} = R^\rho_\mu R^\sigma_\nu S^{\mu\nu}$ . Puisque  $R^\nu_\mu$  est quadratique en  $M$  et multiplie chaque longueur d'espace-temps par  $r$ , la présence de deux facteurs  $R$  implique une multiplication par  $r^2$ , tandis que (1.113) est quadratique en  $M$  et donc multiplie les longueurs par  $r$ . Par ailleurs les courants  $J$  et  $K$  sont complètement similaires puisqu'ils sont simplement somme et différence des courants gauche et droit. Mais l'ancien formalisme des matrices complexes  $4 \times 4$  considère le courant  $J$  comme un vecteur d'espace-temps et le vecteur  $K$  comme un pseudo-vecteur d'espace-temps, ce qui est tout à fait incohérent :  $D_R^1$  et  $D_L^1$  ont bien évidemment le même statut du point de vue de la géométrie, ce sont deux vecteurs contravariants. Donc leur somme  $J$  et leur différence  $K$  sont aussi des vecteurs contravariants. On peut dire la même chose de  $S_0$  et  $S_3$ .

Par conséquent l'ancien et le nouveau cadre, le premier à base de matrices complexes  $4 \times 4$ , et le second utilisant  $Cl_3$ , ne sont pas du tout équivalents pour la géométrie d'espace-temps. Seule l'algèbre  $Cl_3$  est complètement satisfaisante, et nous n'utiliserons donc qu'elle.

## 1.4 Forme invariante de l'équation de Dirac

L'invariance de forme de l'équation d'onde de l'électron utilise l'opérateur différentiel  $\nabla = \overline{M}\nabla'M$ . Puisque  $\phi' = M\phi$  implique  $\overline{\phi}' = \overline{\phi}\overline{M}$ , le facteur  $\overline{M}$  à gauche indique la possibilité d'une multiplication de l'équation d'onde à gauche par  $\overline{\phi}$ . Lorsque  $\rho \neq 0$  (et seulement dans ce cas),  $\phi = \phi(x)$  est inversible. Donc en multipliant à gauche par  $\overline{\phi}$  l'équation d'onde est équivalente à :

$$0 = \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \overline{\phi}qA\widehat{\phi} + m\overline{\phi}\phi. \quad (1.115)$$

On peut considérer cette équation comme la vraie équation d'onde de l'électron, et on va maintenant expliquer pourquoi c'est la **forme invariante de l'équation de Dirac** : dans la similitude  $R$  définie par un dilatateur  $M$  de  $Cl_3$  satisfaisant (1.36), on obtient (1.62) et (1.64), ce qui implique que si on conserve l'invariance de jauge on a :

$$\overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} = \overline{\phi}(\overline{M}\nabla'\widehat{M}\widehat{\phi})\sigma_{21} = \overline{\phi}'(\nabla'\widehat{\phi}')\sigma_{21}, \quad (1.116)$$

$$\overline{\phi}qA\widehat{\phi} = \overline{\phi}\overline{M}q'A'\widehat{M}\widehat{\phi} = \overline{\phi}'q'A'\widehat{\phi}'. \quad (1.117)$$

Les deux termes de gauche de (1.115) sont alors invariants de forme, et le terme de masse l'est aussi si on a :

$$m\overline{\phi}\phi = m'\overline{\phi}'\phi' = m'\overline{\phi}\overline{M}M\phi = re^{i\theta}m'\overline{\phi}\phi, \quad (1.118)$$

ce qui suppose :

$$m = re^{i\theta}m'; \quad |m| = r|m'|. \quad (1.119)$$

Bien entendu, si on restreint  $M$  par la condition  $\det(M) = 1$  on a  $m = m'$ . Mais on doit faire attention : avec l'invariance étendue, la masse propre n'est plus invariante. C'est un changement important pour nos habitudes : il est bien connu que la masse propre est nécessairement invariante sous le groupe de Poincaré formé par toutes les transformations du groupe de Lorentz complet, plus les translations d'espace-temps. Mais l'équation de Dirac n'est pas invariante de forme sous ce groupe. Elle est certes inchangée dans les translations, mais elle n'est invariante de forme que sous les transformations de Lorentz du groupe restreint, qui ne changent ni l'orientation du temps ni l'orientation de l'espace. Donc le groupe d'invariance ne contient pas la totalité du groupe de Poincaré et les théorèmes basés sur ce groupe ne peuvent s'appliquer ici. Certes la masse propre reste invariante aussi longtemps que la transformation appartient au groupe de Poincaré, donc si  $r = 1$ . Mais la masse propre n'est plus invariante lorsque la transformation n'appartient plus à ce groupe, si  $r \neq 1$ . Le terme de masse peut s'écrire :

$$m\overline{\phi}\phi = m\Omega_1 + im\Omega_2, \quad (1.120)$$

il est donc la somme d'un terme scalaire et d'un terme pseudo-scalaire. Le second terme de l'équation invariante (1.115) montre une autre particula-

rité : c'est un vecteur d'espace-temps que l'on a calculé en (B.37) :

$$\bar{\phi} A \hat{\phi} = A_\nu D_\mu^\nu \sigma^\mu = V_\mu \sigma^\mu; \quad V_\mu = A_\nu D_\mu^\nu = A \cdot D_\mu. \quad (1.121)$$

Ceci donne aussi :

$$\bar{\phi} \sigma^\nu \hat{\phi} = D_\mu^\nu \sigma^\mu. \quad (1.122)$$

Seul le terme différentiel de (1.115) est un terme général de  $Cl_3$ , mais on peut aussi en obtenir des propriétés avec :

$$\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi}) = \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi}) + (\bar{\phi} \nabla) \hat{\phi}] + \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi}) - (\bar{\phi} \nabla) \hat{\phi}], \quad (1.123)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi}) + (\bar{\phi} \nabla) \hat{\phi}] &= \frac{1}{2} \partial_\nu (\bar{\phi} \sigma^\nu \hat{\phi}) = \frac{1}{2} \partial_\nu (D_\mu^\nu \sigma^\mu) = \frac{1}{2} (\partial_\nu D_\mu^\nu) \sigma^\mu \\ &= \frac{1}{2} (\nabla \cdot D_\mu) \sigma^\mu = v = v_\mu \sigma^\mu; \quad 2v_\mu = \nabla \cdot D_\mu, \end{aligned} \quad (1.124)$$

$$\frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi}) - (\bar{\phi} \nabla) \hat{\phi}] = iw = iw_\mu \sigma^\mu, \quad (1.125)$$

où  $v$  et  $w$  sont deux vecteurs d'espace-temps puisque  $v^\dagger = v$  et  $(iw)^\dagger = -iw$ . Ceci donne :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\nabla \hat{\phi}) \sigma_{21} &= (v + iw) \sigma_{21} \\ &= (v_0 + v_1 \sigma^1 + v_2 \sigma^2 + v_3 \sigma^3 + iw_0 + w_1 i \sigma^1 + w_2 i \sigma^2 + w_3 i \sigma^3) (i \sigma^3) \\ &= -w_3 + v_2 \sigma^1 - v_1 \sigma^2 - w_0 \sigma^3 + i(v^3 + w_2 \sigma^1 - w_1 \sigma^2 + v_0 \sigma^3). \end{aligned} \quad (1.126)$$

Donc la décomposition de la forme invariante de l'équation de Dirac (1.115) dans la base  $(1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, i, i\sigma^1, i\sigma^2, i\sigma^3)$  de  $Cl_3$  fournit ce système de huit équations :

$$0 = -w_3 + qA \cdot D_0 + m\Omega_1, \quad (1.127)$$

$$0 = \frac{1}{2} \nabla \cdot D_2 + qA \cdot D_1, \quad (1.128)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \nabla \cdot D_1 + qA \cdot D_2, \quad (1.129)$$

$$0 = w_0 + qA \cdot D_3, \quad (1.130)$$

$$0 = \frac{1}{2} \nabla \cdot D_3 + m\Omega_2, \quad (1.131)$$

$$0 = -w_2, \quad (1.132)$$

$$0 = w_1, \quad (1.133)$$

$$0 = \frac{1}{2} \nabla \cdot D_0. \quad (1.134)$$

La première équation est exactement l'équation de la **densité lagrangienne**  $\mathcal{L} = 0$  par suite de l'égalité suivante (le calcul détaillé est en B.1.5) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \bar{\psi} \gamma^\mu (-i\partial_\mu + qA_\mu) \psi \right) + \left( \bar{\psi} \gamma^\mu (-i\partial_\mu + qA_\mu) \psi \right)^\dagger \right] + m \bar{\psi} \psi \\ &= -w_3 + qA \cdot D_0 + m\Omega_1. \end{aligned} \quad (1.135)$$

On sait qu'en variant la densité lagrangienne  $\mathcal{L}$  on obtient l'équation de Dirac elle-même. De plus le fait que l'équation de Dirac est homogène<sup>22</sup> implique que  $\mathcal{L} = 0$  lorsque l'équation d'onde est vérifiée. Ici nous avons exactement la proposition logique réciproque : l'équation  $\mathcal{L} = 0$  est l'une des huit équations à valeur numérique réelle, et le formalisme lagrangien est donc une conséquence automatique de l'équation d'onde.

Toute loi du mouvement, en mécanique classique et en électromagnétisme, peut être obtenue à partir d'un formalisme lagrangien. On comprend maintenant que ceci résulte de la forme lagrangienne et de l'universalité de la mécanique quantique. Mais alors d'où est-ce que vient le fait que la mécanique quantique provient d'une forme lagrangienne ? On voit que c'est complètement automatique, parce que la densité lagrangienne est la partie scalaire de l'équation d'onde tandis que le formalisme lagrangien permet d'obtenir la totalité de l'équation d'onde. On regardera le détail au chapitre 2 de cette double implication. De plus les quatre équations réelles contenant la partie symétrique  $v$  de  $\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})$  sont avec les  $D_\mu$  de (1.95) (voir A.4.2) :

$$0 = \nabla \cdot D_0, \quad (1.136)$$

$$0 = \nabla \cdot D_3 + 2m\Omega_2, \quad (1.137)$$

$$0 = \nabla \cdot D_1 - 2qA \cdot D_2, \quad (1.138)$$

$$0 = \nabla \cdot D_2 + 2qA \cdot D_1. \quad (1.139)$$

L'équation (1.136), qu'on appelle la loi de conservation du courant de probabilité, est exactement l'une des huit équations numériques réelles équivalentes à l'équation de Dirac. Quant à (1.137), cette équation est connue sous le nom de relation d'Uhlenbeck-Laporte. Les équations à valeurs réelles (1.138) et (1.139) montrent que les vecteurs d'espace-temps  $D_1$  et  $D_2$  ne sont pas invariants de jauge électrique ; celle-ci opère une rotation dans le plan ( $D_1$   $D_2$ ), que R. Boudet a appelé le plan du spin [5].

### 1.4.1 Conjugaison de charge

De nombreuses années après la découverte de l'électron, le positron a été découvert à son tour. La seule différence entre électron et positron est

---

22. Les équations d'onde de la mécanique quantique sont linéaires. Elles sont en particulier additives, ce qui signifie que, si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux solutions de l'équation, alors  $\phi_1 + \phi_2$  est aussi une solution. Et elles sont homogènes, ce qui signifie que si  $\phi$  est une solution de l'équation et si  $z$  est un nombre complexe fixe quelconque, alors  $z\phi$  est aussi une solution de l'équation. Le mot "homogène" est utilisé avec son sens en mathématiques, il n'a rien à voir avec la considération des dimensions en physique. L'additivité et l'homogénéité ensemble constituent la linéarité de l'équation d'onde.

Mais attention ! l'homogénéité de l'équation de Dirac dont il est question ici ne concerne que  $a\phi$  avec  $a$  réel, et pas avec  $z$  complexe, ce qui est une autre raison de faire la distinction entre la première équation de Dirac, hamiltonienne et pleinement insérée dans la mécanique quantique à valeur complexe, et la version cliffordienne relativiste, équivalente à la forme à valeur dans  $Cl_3$ , qui n'est homogène qu'avec un facteur réel, car le générateur de la jauge électrique ne commute pas avec tout.

le signe de la charge : négative pour l'électron, positive pour le positron. Partant de l'équation de Dirac de la particule (1.2) (où l'onde de l'électron est notée  $\psi_e$  et l'onde du positron est notée  $\psi_p$ ), la mécanique quantique obtient l'équation d'onde de l'antiparticule comme suit : on utilise d'abord la conjugaison complexe sur l'équation de Dirac :

$$0 = [\gamma^{\mu*}(\partial_\mu - iqA_\mu) - im]\psi_e^*. \quad (1.140)$$

Puisque (1.4) donne  $\gamma_2\gamma^{\mu*} = -\gamma^\mu\gamma_2$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , en multipliant (1.140) par  $i\gamma_2$  à gauche, on obtient :

$$0 = -[\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) + im]i\gamma_2\psi_e^*. \quad (1.141)$$

Alors, à une phase arbitraire près, la mécanique quantique suppose<sup>23</sup> :

$$\psi_p = i\gamma_2\psi_e^*, \quad (1.142)$$

ce qui donne :

$$0 = [\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) + im]\psi_p. \quad (1.143)$$

Cette équation est exactement la même que celle de l'électron, au signe près de la charge électrique. On obtient ainsi automatiquement l'égalité entre la masse de la particule et la masse de l'antiparticule. En utilisant la décomposition de  $\psi$  en onde gauche et onde droite, et notant avec un indice  $e$  l'onde de l'électron, et avec un indice  $p$  celle du positron, le lien (1.142) entre l'onde de l'électron et celle du positron s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi_{1p} \\ \xi_{2p} \\ \eta_{1p} \\ \eta_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{1e}^* \\ \xi_{2e}^* \\ \eta_{1e}^* \\ \eta_{2e}^* \end{pmatrix}. \quad (1.144)$$

Ceci donne :

$$\xi_{1p} = \eta_{2e}^*, \quad \xi_{2p} = -\eta_{1e}^*; \quad \eta_{1p} = -\xi_{2e}^*; \quad \eta_{2p} = \xi_{1e}^*. \quad (1.145)$$

Maintenant les mêmes calculs, exprimés en algèbre  $Cl_3$ , et toujours avec des indices  $e$  pour l'électron et  $p$  pour le positron, utilisent :

$$\widehat{\phi}_e = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_{1e} & -\xi_{2e}^* \\ \eta_{2e} & \xi_{1e}^* \end{pmatrix}; \quad \widehat{\phi}_p = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_{1p} & -\xi_{2p}^* \\ \eta_{2p} & \xi_{1p}^* \end{pmatrix}. \quad (1.146)$$

Alors (1.142), qui équivaut à (1.145), équivaut aussi à :

$$\widehat{\phi}_p = \widehat{\phi}_e\sigma_1; \quad \phi_p = -\phi_e\sigma_1. \quad (1.147)$$

Encore une fois, on rappelle que la conjugaison de charge décrite ici est complètement équivalente à ce que décrivent tous les cours de mécanique quantique. Seule change la manière de les écrire.

<sup>23</sup>. La mécanique quantique utilise  $\gamma_2$  parce que c'est la seule des matrices de Dirac contenant des termes imaginaires, tandis que les trois autres matrices  $\gamma_\mu$  sont réelles, d'après (1.4). De plus, le lien (1.142) est, avec (1.7), indépendant du choix des matrices  $\gamma_\mu$ .

## 1.5 Équation invariante améliorée

Maintenant on arrive au principal changement par rapport à la théorie de Dirac sous-tendant toutes les composantes relativistes du modèle standard. Ce changement est aussi la principale différence avec le travail d'Hestenes, qui a toujours travaillé avec l'équation de Dirac linéaire sous sa forme relativiste, et n'a changé que le cadre mathématique de formulation de cette équation. **Ici, on simplifie l'équation d'onde elle-même.** La définition (1.91) de l'angle  $\beta$  implique que la forme invariante de l'équation de Dirac (1.115) est donnée par :

$$0 = \bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\rho\cos(\beta), \quad (1.148)$$

La simplification qu'on a apportée en [12] à cette équation était la suppression du terme  $\cos(\beta)$ . Une seconde modification remplace maintenant le terme scalaire de masse  $m$  par un terme matriciel  $\mathbf{m}$  [44] [45] :

$$0 = \bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + \mathbf{m}\rho; \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (1.149)$$

où  $\mathbf{l}$  est le terme de masse gauche et  $\mathbf{r}$  est le terme de masse droit. L'existence de deux masses possibles différentes sera justifiée par ses conséquences. L'équation améliorée est équivalente au système d'équations numériques :

$$0 = -w_3 + qA \cdot D_0 + m_a\rho; \quad m_a := \frac{\mathbf{l} + \mathbf{r}}{2} \quad (1.150)$$

$$0 = \frac{1}{2}\nabla \cdot D_2 + qA \cdot D_1, \quad (1.151)$$

$$0 = -\frac{1}{2}\nabla \cdot D_1 + qA \cdot D_2, \quad (1.152)$$

$$0 = w_0 + qA \cdot D_3 + d\rho; \quad d := \frac{\mathbf{l} - \mathbf{r}}{2} \quad (1.153)$$

$$0 = \frac{1}{2}\nabla \cdot D_3, \quad (1.154)$$

$$0 = -w_2, \quad (1.155)$$

$$0 = w_1, \quad (1.156)$$

$$0 = \frac{1}{2}\nabla \cdot D_0. \quad (1.157)$$

Cette amélioration est d'abord une simplification, puisque trois des huit équations équivalentes à l'équation d'onde globale ont bien été simplifiées : à la première ligne l'invariant  $m\Omega_1 = m\rho\cos(\beta)$  est simplement remplacé par  $m_a\rho$  (où  $m_a$  est la moyenne arithmétique des deux masses). La quatrième équation (1.153) a maintenant un terme  $d\rho$  et devient donc semblable à la première équation. Ce changement de la théorie de Dirac paraît modeste puisqu'il laisse inchangées cinq des huit équations numériques.

Néanmoins cette modification modeste améliore beaucoup de choses : le troisième changement, dans l'équation (1.154), signifie l'existence d'un second courant conservatif, le courant  $K = D_3$ . Puisque les courants  $J$  et  $K$  sont maintenant tous deux conservatifs, leur somme et leur différence sont aussi des courants conservatifs<sup>24</sup> : les courants chiraux gauche et droit  $D_R^1$  et  $D_L^1$  sont conservatifs. Ceci sera généralisé dans les prochains chapitres pour le domaine électrofaible. De plus on peut remarquer que les huit équations fonctionnent de manière similaire par paires, c'est la simple conséquence de la structure gauche-droite de l'onde.

Pour comparer notre équation améliorée avec l'équation de Dirac sous sa forme usuelle, il convient de multiplier (1.149) par  $\bar{\phi}^{-1}$  à gauche, qui donne :

$$0 = \nabla \hat{\phi} \sigma_{21} + qA \hat{\phi} + \rho \bar{\phi}^{-1} \mathbf{m}. \quad (1.158)$$

On a implicitement supposé, pour pouvoir multiplier à gauche par  $\bar{\phi}^{-1}$ , que  $\phi(x)$  est inversible, ce qui signifie  $\rho \neq 0$  et donc que  $\phi(x)$  appartient à  $Cl_3^*$ , groupe multiplicatif des éléments inversibles de  $Cl_3$ . Et alors, (voir A.3.8) il existe un élément  $M$  de  $Cl_3$ , défini à  $2i\pi$  près, tel que :

$$\phi = e^M; \quad M = a + ib + N; \quad N = z_1 \sigma_1 + z_2 \sigma_2 + z_3 \sigma_3. \quad (1.159)$$

On pose :

$$\rho = e^{2a}; \quad \beta = 2b; \quad M_\phi := e^N. \quad (1.160)$$

Ceci nous donne :

$$\phi = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\beta}{2}} M_\phi = e^{a+ib+N}; \quad a = \frac{\ln(\rho)}{2}; \quad b = \frac{\beta}{2}. \quad (1.161)$$

$M_\phi$  est bien un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$ , car on a :

$$\det(M_\phi) = \det(e^N) = e^{\text{tr}(N)} = e^0 = 1 = M_\phi \overline{M}_\phi; \quad \overline{M}_\phi = M_\phi^{-1}. \quad (1.162)$$

L'existence de cet élément  $M_\phi$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  a été obtenue par G. Lochak dès 1956 [97], puis par D. Hestenes dix ans plus tard [76]. Ce  $M_\phi$  a aussi été le point de départ du travail de R. Boudet [5][6]. Ils ne distinguent pas le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  du groupe de Lorentz restreint. Ils appellent donc ce  $M_\phi$

---

24. Le caractère conservatif des courants gauche et droit a été obtenu dès 1983 par Lochak avec sa théorie du monopôle magnétique [89]–[96], de laquelle provient notre terme de masse, dans le cas particulier où l'équation de Dirac est l'approximation linéaire de notre équation. Notre équation est néanmoins tout à fait distincte de l'équation d'onde du monopôle, puisqu'elle a gardé le terme de jauge électrique de l'équation de Dirac. Au contraire, l'équation d'onde de Lochak remplace ce terme de jauge électrique par un terme d'une jauge différente, la jauge chirale. Dans cette théorie du monopôle, l'invariance de jauge électrique est seulement globale (donc plus faible) et c'est la jauge chirale qui est locale (donc plus forte). Puisque le théorème de Noether ne nécessite qu'une invariance de jauge globale, notre équation, tout comme celle de Lochak, admet les mêmes courants conservatifs.

transformation de Lorentz. Ceci leur a interdit de voir que **l'onde  $\phi$  est un champ de dilatateurs**. On a ensuite :

$$\bar{\phi} = e^{\bar{M}} = e^{a+ib}e^{-N}; \quad \bar{\phi}^{-1} = e^{-(a+ib)}e^N; \quad \rho\bar{\phi}^{-1} = e^{-i\beta}\phi. \quad (1.163)$$

Et alors quand on compare avec l'équation de Dirac, l'équation améliorée apparaît avec un terme supplémentaire  $e^{-i\beta}$  :

$$0 = \nabla\hat{\phi}\sigma_{21} + qA\hat{\phi} + e^{-i\beta}\phi\mathbf{m}. \quad (1.164)$$

L'équation de Dirac (1.2) est donc l'approximation linéaire de notre équation améliorée (1.164) lorsque l'angle d'Yvon-Takabayasi  $\beta$  est nul ou négligeable et lorsque la différence entre les masses droite et gauche est nulle. On verra dans les prochains chapitres que seule l'équation améliorée sera généralisable. Les propriétés de l'équation améliorée sont souvent plus simples et plus proches de la réalité physique, on le verra par la suite.

### 1.5.1 Forme décroisée de l'équation d'onde

Remettons dans l'équation (1.164) les ondes gauche et droite définies en (1.70) :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla(\hat{L}^1 + \hat{R}^1)(-i\sigma_3) + qA(\hat{L}^1 + \hat{R}^1) + e^{-i\beta}(R^1 + L^1)\mathbf{m} \\ &= (-i\nabla\hat{L}^1 + qA\hat{L}^1 + \mathbf{l}e^{-i\beta}R^1) + (i\nabla\hat{R}^1 + qA\hat{R}^1 + \mathbf{r}e^{-i\beta}L^1). \end{aligned} \quad (1.165)$$

Dans cette dernière égalité, la quantité contenue dans la parenthèse de gauche, est une matrice comportant deux zéros dans sa deuxième colonne, tandis que la quantité contenue dans la parenthèse de droite est une matrice avec deux zéros dans sa première colonne. C'est donc équivalent au système :

$$\begin{aligned} 0 &= -i\nabla\hat{L}^1 + qA\hat{L}^1 + \mathbf{l}e^{-i\beta}R^1, \\ 0 &= i\nabla\hat{R}^1 + qA\hat{R}^1 + \mathbf{r}e^{-i\beta}L^1. \end{aligned} \quad (1.166)$$

On considère :

$$\underline{J} := \mathbf{J} + \frac{d}{m_a}\mathbf{K}; \quad d = \frac{\mathbf{l} - \mathbf{r}}{2}; \quad m_a = \frac{\mathbf{l} + \mathbf{r}}{2}, \quad (1.167)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \phi\phi^\dagger = \mathbf{D}_L^1 + \mathbf{D}_R^1; \quad \mathbf{K} = \phi\sigma_3\phi^\dagger = \mathbf{D}_L^1 - \mathbf{D}_R^1; \quad \underline{J} = \frac{m}{\mathbf{l}}\mathbf{D}_L^1 + \frac{m}{\mathbf{r}}\mathbf{D}_R^1 \\ \rho e^{-i\beta} &= \hat{\phi}\phi^\dagger = \hat{L}^1\tilde{R}^1 + \hat{R}^1\tilde{L}^1. \end{aligned} \quad (1.168)$$

On considère le vecteur d'espace-temps  $\mathbf{v}$  tel que :<sup>25</sup>

$$\mathbf{v} = \frac{\underline{J}}{||\underline{J}||} = \frac{m_g}{m\rho}\underline{J} = \frac{1}{\rho}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{l}}}\mathbf{D}_L^1 + \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}}\mathbf{D}_R^1\right). \quad (1.169)$$

25. On a choisi de noter en caractère romain les vecteurs d'espace-temps écrits dans  $Cl_3$  et en caractères gras les mêmes vecteurs écrits dans  $Cl_{1,3}$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\hat{L}^1 &= \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} \mathbf{D}_L^1 + \sqrt{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}}} \mathbf{D}_R^1 \right) \hat{L}^1 = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}}} R^1 \tilde{R}^1 \hat{L}^1 + 0, \\ \tilde{R}^1 \hat{L}^1 &= 2 \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_1 = \rho e^{i\beta}, \\ R^1 \tilde{R}^1 \hat{L}^1 &= R^1 a_1^* \frac{1 + \sigma_3}{2} = a_1^* R^1; \quad \mathbf{v}\hat{L}^1 = e^{-i\beta} \sqrt{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}}} R^1 = \frac{1}{m_g} e^{-i\beta} R^1. \end{aligned} \quad (1.170)$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\hat{R}^1 &= \frac{1}{\rho} \left( \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} L^1 \tilde{L}^1 + \sqrt{\frac{\mathbf{I}}{\mathbf{r}}} R^1 \tilde{R}^1 \right) \hat{R}^1 = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} L^1 \tilde{L}^1 \hat{R}^1 \\ &= \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} L^1 \tilde{R}^1 \hat{L}^1 = \frac{a_1^*}{\rho} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} L^1 = e^{-i\beta} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} L^1, \\ \hat{\mathbf{v}}R^1 &= e^{i\beta} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}}} \hat{L}^1. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Le système (1.166) est équivalent au système (apparemment) découplé :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\nabla + qA + m_g \mathbf{v}) \hat{L}^1, \\ 0 &= (i\nabla + qA + m_g \mathbf{v}) \hat{R}^1. \end{aligned} \quad (1.172)$$

On se doit de noter que ce système n'est pas vraiment découplé, parce que  $\mathbf{v}$  dépend en fait à la fois de la partie droite et de la partie gauche de l'onde. Ce système est équivalent à l'équation :

$$0 = \nabla \hat{\phi} \sigma_{21} + (qA + m_g \mathbf{v}) \hat{\phi}. \quad (1.173)$$

Si l'on écrit ce système en utilisant l'angle d'Yvon-Takabayasi  $\beta$  et en utilisant les spineurs droit  $\xi^1$  et gauche  $\eta^1$ , (1.166) s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= -i(\nabla + iqA) \eta^1 + \mathbf{l} e^{-i\beta} \xi^1, \\ 0 &= -i(\hat{\nabla} + iq\hat{A}) \xi^1 + \mathbf{r} e^{i\beta} \eta^1. \end{aligned} \quad (1.174)$$

On peut utiliser l'un ou l'autre de ces systèmes, qui sont complètement équivalents. Quant à l'équation de Dirac elle-même, le système (1.11), si on y remplace  $m$  par  $m_g$  et avec les identités (1.170) et (1.171), devient :

$$\begin{aligned} 0 &= (-i\nabla + qA + m_g e^{i\beta} \mathbf{v}) \eta^1, \\ 0 &= (-i\hat{\nabla} + q\hat{A} + m_g e^{-i\beta} \hat{\mathbf{v}}) \xi^1. \end{aligned} \quad (1.175)$$

Comme aussi bien  $\mathbf{v}$  que  $\beta$  dépendent de  $\xi$  et  $\eta$ , on doit remarquer que le décroisement de l'équation de Dirac n'est qu'apparent. On peut aussi considérer l'équation de Dirac comme non linéaire, et même comme moins linéaire

que l'équation améliorée, les identités (1.170) et (1.171) étant la seule cause de la linéarité de l'équation d'onde. La présence de l'angle  $\beta$  rend alors difficile la question de l'impulsion-énergie de l'onde quantique, car on a perdu le caractère de simple vecteur d'espace-temps de  $qA + m_g v$ . Notons aussi que, sous la forme usuelle, une seule masse apparaît, la moyenne géométrique des deux masses.

### 1.5.2 Invariance de jauge

Comme le terme différentiel et le terme de jauge ne changent pas quand on passe de l'équation de Dirac à l'équation améliorée, et comme le terme de masse est invariant de jauge, l'équation améliorée est aussi invariante de jauge électrique. Cette jauge s'exprime avec  $Cl_3$  comme :

$$\phi \mapsto \phi' = \phi e^{ia\sigma_3} ; \quad A \mapsto A' = A - \frac{1}{q} \nabla a. \quad (1.176)$$

Avec l'équation de Dirac, le courant conservatif lié à l'invariance de jauge par le théorème de Noether est le courant de probabilité  $J = D_0$ . Il en est de même pour l'équation améliorée. La première différence est le statut de cette loi de conservation, qui est maintenant l'une des huit équations numériques réelles équivalentes à l'équation d'onde elle-même. La seconde différence est l'existence, parmi ces huit équations numériques réelles, d'une seconde loi de conservation (1.154) pour le courant  $K = D_3$ . Ce courant vient directement de la théorie du monopôle magnétique de Lochak [89]–[96], à l'origine de l'équation améliorée. Ce deuxième courant conservatif est lié à l'invariance de jauge globale (dite jauge chirale) :

$$\phi \mapsto \phi' = e^{ia} \phi ; \quad \bar{\phi} \mapsto \bar{\phi}' = e^{ia} \bar{\phi} ; \quad \partial_\mu a = 0, \quad (1.177)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} = \phi \bar{\phi} &\mapsto \rho' e^{i\beta'} = \phi' \bar{\phi}' = e^{2ia} \phi \bar{\phi} = \rho e^{i(\beta+2a)}, \\ \rho &\mapsto \rho' = \rho ; \quad \beta \mapsto \beta' = \beta + 2a. \end{aligned} \quad (1.178)$$

On appelle cette transformation de jauge la "jauge chirale", parce que le générateur du groupe de jauge est le  $i$  qui oriente l'espace<sup>26</sup>. On retrouvera ce groupe de jauge chirale dans l'étude des interactions faibles. C'est aussi la jauge de la théorie du monopôle magnétique de Lochak. Comme la jauge chirale multiplie  $\phi$  par  $e^{ia}$ ,  $\hat{\phi}$  est multiplié par  $e^{-ia}$ , le spineur  $\xi$  qui est la colonne de gauche de  $\phi$  est multiplié par  $e^{ia}$ , et  $\eta$  qui est la colonne de gauche de  $\hat{\phi}$  est multiplié par  $e^{-ia}$  [91]. Lochak a donc fait remarquer que la différence entre la jauge électrique et la jauge chirale est la suivante : dans les deux transformations de jauge les spineurs gauches et droits tournent

26. Dans  $Cl_3$ , pour toute base orthonormale  $(u, v, w)$ , cette base est de sens direct si et seulement si  $uvw = i$ , et est de sens inverse si et seulement si  $uvw = -i$  (voir A.3.1).

d'un même angle, ils tournent dans le même sens dans la jauge électrique, et en sens contraire dans la jauge chirale.

L'équation d'onde améliorée perd l'additivité, donc la linéarité apparente de l'équation de Dirac usuelle, parce que  $\rho$  dépend de  $\phi$ , et parce que le déterminant qui définit  $\rho$  et  $\beta$  n'est pas additif. La somme  $\phi_1 + \phi_2$  de deux solutions de l'équation d'onde (1.164) n'est pas nécessairement une solution de (1.164), mais peut l'être. Et, comme l'équation est homogène et invariante de jauge chirale, si  $\phi$  est une solution et si  $z$  est un nombre complexe quelconque, alors  $z\phi$  est aussi solution de (1.164). Cette propriété, commune à l'équation de Schrödinger, de Klein-Gordon, de Pauli ainsi qu'à la version hamiltonienne de l'équation de Dirac, n'est pas vraie pour l'équation relativiste de Dirac (donc ces deux équations d'onde ne sont pas équivalentes) avec le  $i$  qui est un trivecteur de  $Cl_3$ . Quand on fait interférer une onde électronique, tout se passe comme si un seul électron était en jeu. De plus les interférences avec des fentes d'Young ne sont jamais faites avec un électron ultra-relativiste (il faudrait des fentes encore plus petites). On est donc là dans un cas où l'approximation par l'équation d'onde de Pauli utilisée par M. et A. Gondran [99] est tout à fait légitime.

Dans  $Cl_3$ , quand on multiplie par  $i$ , on ne doit pas oublier que  $\hat{i} = -i$  : la multiplication par le  $i$  commutatif de  $\mathbb{C}$  ne correspond pas à la multiplication par le  $i$  commutatif de  $Cl_3$ . Donc l'isomorphisme des algèbres  $M_2(\mathbb{C})$  et  $Cl_3$  est seulement un isomorphisme d'algèbres sur le corps des réels, pas sur le corps des complexes. Le  $i$  commutatif de la mécanique quantique, lié par l'invariance de jauge à la conservation de la charge électrique, correspond dans  $Cl_3$  à une multiplication à droite par  $i\sigma_3$ . Ce  $i\sigma_3$  anti-commute avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .  $i\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$  est un bivecteur (une aire orientée) alors que le  $i$  commutatif de  $Cl_3$  est le trivecteur  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  (un volume orienté). Ensuite puisque  $Cl_3$  est isomorphe à  $Cl_{1,3}^+$  ce  $i\sigma_3$  devient en algèbre d'espace-temps le bivecteur d'espace-temps  $\gamma_1\gamma_2$  utilisé par Hestenes [77].

Cet isomorphisme restreint implique, on l'a vu plus haut, une sérieuse divergence entre la première forme de l'équation de Dirac, utilisant les matrices  $\alpha_k$  et  $\beta = \gamma'_0 = \gamma_5$ , et l'équation de Dirac dans  $Cl_{1,3}$ .<sup>27</sup> Le formalisme hamiltonien que l'on obtient en utilisant ces matrices donne une équation d'onde qui n'est pas équivalente à la forme cliffordienne relativiste. Cette équation peut certes être multipliée par le  $i$  unique de la mécanique quantique, qui est aussi le  $i$  des matrices  $iI_4$  de  $M_4(\mathbb{C})$ . Mais ce  $iI_4$  n'appartient pas, lui non plus, à la formulation matricielle de l'algèbre d'espace-temps  $Cl_{1,3}$ . La première équation d'onde de Dirac, hamiltonienne et utilisant le  $i$  unique de la théorie quantique, est en fait exprimée dans une algèbre  $M_4(\mathbb{C})$  qui est aussi une algèbre de Clifford, mais cette algèbre est isomorphe à  $Cl_{2,3}$  ou  $Cl_{4,1}$  ou  $Cl_{0,5}$ , donc c'est l'algèbre d'un espace-temps avec une dimension supplémentaire, de temps pour  $Cl_{2,3}$  ou d'espace pour  $Cl_{4,1}$ , ou sans distinction possible entre temps et espace s'agissant de  $Cl_{0,5}$ . Il est donc

27. Rappelons que  $\gamma_5$  n'appartient pas à l'algèbre  $Cl_{1,3}$  engendrée par  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

plus que tentant d'utiliser cette dimension supplémentaire pour unifier électromagnétisme et gravitation, à la suite de Kaluza et de nombreux autres physiciens, dont Einstein et de Broglie. Mais ces tentatives nombreuses n'ont jamais démontré leur utilité.

### 1.5.3 Onde plane

On reprend ici, avec les mêmes réserves, le calcul fait en 1.3.3 pour l'équation de Dirac usuelle. L'équation améliorée se réduit, pour  $A = 0$ , à :

$$\nabla \hat{\phi} + e^{-i\beta} \phi \mathbf{m} \sigma_{12} = 0. \quad (1.179)$$

On considère la même onde plane avec une phase  $\varphi$  vérifiant :

$$\phi = \phi_0 e^{\varphi \sigma_{21}} ; \quad \varphi = m_g \mathbf{v}_\mu x^\mu ; \quad \mathbf{v} = \sigma^\mu \mathbf{v}_\mu, \quad (1.180)$$

où  $\mathbf{v}$  est un vecteur vitesse réduite fixe ( $\mathbf{v}\hat{\mathbf{v}} = 1$ ) et  $\phi_0$  est aussi un facteur fixe, ce qui donne :

$$\nabla \hat{\phi} = \sigma^\mu \partial_\mu (\hat{\phi}_0 e^{\varphi \sigma_{21}}) = -m_g \mathbf{v} \hat{\phi} \sigma_{12}. \quad (1.181)$$

Alors (1.164) équivaut à :

$$0 = (-m_g \mathbf{v} \hat{\phi} + e^{-i\beta} \phi \mathbf{m}) \sigma_{12}; \quad \phi \mathbf{m} = m_g e^{i\beta} \mathbf{v} \hat{\phi}, \quad (1.182)$$

$$\hat{\mathbf{v}} \phi \mathbf{m} = m_g e^{i\beta} \hat{\mathbf{v}} \mathbf{v} \hat{\phi} = m_g e^{i\beta} \hat{\phi}, \quad (1.183)$$

En conjuguant on obtient :

$$\mathbf{v} \hat{\phi} \hat{\mathbf{m}} = m_g e^{-i\beta} \phi, \quad (1.184)$$

qui implique :

$$\phi = e^{i\beta} \mathbf{v} \hat{\phi} \frac{\hat{\mathbf{m}}}{m_g}; \quad \hat{\phi} = e^{-i\beta} \hat{\mathbf{v}} \phi \frac{\mathbf{m}}{m_g}. \quad (1.185)$$

On a donc :

$$\phi = e^{i\beta} \mathbf{v} (e^{-i\beta} \hat{\mathbf{v}} \phi \frac{\mathbf{m}}{m_g}) \frac{\hat{\mathbf{m}}}{m_g} = \phi \frac{\mathbf{m} \hat{\mathbf{m}}}{m_g^2}. \quad (1.186)$$

Donc si  $\phi_0$  est inversible, on doit prendre :

$$\begin{aligned} m_g^2 &= \mathbf{m} \hat{\mathbf{m}} = (m + d\sigma_3)(m - d\sigma_3) = m^2 - d^2 = \mathbf{l} \mathbf{r}, \\ m_g &= \sqrt{\mathbf{l} \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (1.187)$$

Donc le terme de masse propre réduite  $m_g$  est la moyenne géométrique des termes de masse gauche et droit ( $m_g < m_a$  si  $\mathbf{l} \neq \mathbf{r}$ ). Multipliant (1.183) par  $\phi^\dagger$  à droite on obtient :

$$\hat{\mathbf{v}} \phi \mathbf{m} \phi^\dagger = m_g e^{i\beta} \hat{\phi} \phi^\dagger, \quad (1.188)$$

$$\hat{\mathbf{v}} (\mathbf{I} \mathbf{D}_R^1 + \mathbf{r} \mathbf{D}_L^1) = m_g e^{i\beta} \rho e^{-i\beta}, \quad (1.189)$$

$$\hat{\mathbf{J}} (\mathbf{I} \mathbf{D}_R^1 + \mathbf{r} \mathbf{D}_L^1) = m_g \rho^2 = \sqrt{\mathbf{l} \mathbf{r}} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{J}. \quad (1.190)$$

En divisant par  $\widehat{J}$  ceci implique :

$$\mathbf{ID}_R^1 + \mathbf{rD}_L^1 = \sqrt{\mathbf{lr}}(\mathbf{D}_R^1 + \mathbf{D}_L^1), \quad (1.191)$$

$$\frac{\mathbf{J}}{\sqrt{\mathbf{lr}}} = \frac{\mathbf{D}_R^1}{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{D}_L^1}{\mathbf{l}}, \quad (1.192)$$

$$\mathbf{ID}_R^{10} + \mathbf{rD}_L^{10} = \sqrt{\mathbf{lr}}(\mathbf{D}_R^{10} + \mathbf{D}_L^{10}) = \sqrt{\mathbf{lr}}\rho v^0. \quad (1.193)$$

Comme  $\mathbf{D}_R^{10} = |\xi_1^1|^2 + |\xi_2^1|^2 > 0$ ,  $\mathbf{D}_L^{10} = |\eta_1^1|^2 + |\eta_2^1|^2 > 0$ ,  $\sqrt{\mathbf{lr}} > 0$  et  $\rho > 0$  on obtient donc :

$$\mathbf{l} > 0; \mathbf{r} > 0; v^0 > 0. \quad (1.194)$$

On a donc, comme dans le cas où  $\mathbf{l} = \mathbf{r}$  :

$$1 = v\widehat{v} = (v^0 - \vec{v})(v^0 + \vec{v}) = (v^0)^2 - \vec{v}^2, \quad (1.195)$$

$$v^0 = \sqrt{1 + \vec{v}^2}. \quad (1.196)$$

Donc on résout ici de la manière la plus simple le problème des énergies négatives : les ondes planes n'autorisent que les énergies positives et les masses positives. L'équation améliorée est donc, sur ce point, meilleure que l'équation de Dirac linéaire : la non-existence des énergies négatives, jamais observées en physique des hautes énergies, n'a pas besoin de la seconde quantification pour trouver une justification.

#### 1.5.4 Invariance élargie

On part de la forme invariante (1.149). La similitude  $R$  induite par le dilatateur  $M$  de rapport  $r = |\det(M)|$  vérifie

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= R(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}M^\dagger, \quad \det(M) = re^{i\theta}, \quad \phi' = M\phi, \\ \nabla &= \overline{M}\nabla'\widehat{M}; \quad qA = \overline{M}q'A'\widehat{M}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \rho' e^{i\beta'} &= \det(\phi') = \det(M\phi) = \det(M)\det(\phi) = re^{i\theta}\rho e^{i\beta} = r\rho e^{i(\beta+\theta)}, \\ \rho' &= r\rho; \quad \beta' = \beta + \theta \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.198)$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \overline{\phi}qA\widehat{\phi} + \mathbf{m}\rho = \overline{\phi}\overline{M}\nabla'\widehat{M}\widehat{\phi}\sigma_{21} + \overline{\phi}\overline{M}q'A'\widehat{M}\widehat{\phi} + \mathbf{m}\rho \\ &= \overline{\phi}'(\nabla'\widehat{\phi}')\sigma_{21} + \overline{\phi}'q'A'\widehat{\phi}' + \mathbf{m}\rho. \end{aligned} \quad (1.199)$$

L'équation améliorée est invariante de forme sous  $Cl_3^*$ , groupe multiplicatif des éléments inversibles de  $Cl_3$ , si et seulement si :

$$\mathbf{m}\rho = \mathbf{m}'\rho'; \quad \mathbf{m}\rho = \mathbf{m}'r\rho. \quad (1.200)$$

On obtient donc l'invariance de forme de l'équation d'onde sous  $Cl_3^*$ , groupe isomorphe à  $GL(2, \mathbb{C})$ , si et seulement si :

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}'r; \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}'r; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}'r; \quad m_a = m'_a r; \quad m_g = m'_g r; \quad d = d'r. \quad (1.201)$$

Ces égalités sont plus simples que le  $m = m're^{i\theta}$  venant de l'équation de Dirac, et c'est un puissant argument en faveur de l'équation améliorée.

Quelle est la signification de ces égalités pour la physique ? Si le vrai groupe d'invariance des lois de l'électromagnétisme n'est pas seulement le groupe de Lorentz, ni même son groupe de recouvrement, mais le groupe plus contraignant  $Cl_3^*$ , il doit arriver des choses similaires à ce qui se passe quand on remplace la physique de Galilée par la physique relativiste : celle-ci regroupe ensemble masse et impulsion, ou champ électrique et champ magnétique. La masse propre  $m_0$  et la densité  $\rho = ||J||$  sont toutes deux invariants dans une transformation de Lorentz. Sous la similitude induite par un dilatateur quelconque  $M$ , on observe un regroupement similaire d'invariants :  $\mathbf{m}$  et  $\rho$  ne sont plus séparément invariants, c'est seulement le produit  $\mathbf{m}\rho$  qui demeure invariant :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\rho &= \mathbf{m}'r\rho = \mathbf{m}'\rho', \\ d\rho &= d'r\rho = d'\rho'. \end{aligned} \quad (1.202)$$

Donc seul le produit d'une masse réduite et d'un rapport de similitude est complètement invariant. Or  $mc = m_0c^2/\hbar$  est proportionnel à l'inverse d'une longueur de temps, c'est-à-dire à une fréquence. Utilisons une analogie : le fait que l'accélération due à la gravitation soit proportionnelle à l'accélération d'inertie résulte en un rapport constant entre masse gravitationnelle et masse d'inertie (et donc cette constante peut être réduite à 1). Historiquement c'est le point de départ de la théorie d'Einstein de la gravitation. Maintenant puisque, si l'on change arbitrairement le paramètre d'échelle  $r$ , le rapport entre  $\rho$  et  $1/m = \hbar/m_0c$  est fixe, ceci nécessite une constante supplémentaire, qui est la constante de Planck. On peut donc dire que **l'existence de la constante de Planck est une conséquence de l'invariance sous le groupe  $Cl_3^*$** , qui est un groupe plus contraignant que le groupe d'invariance de la relativité restreinte, groupe local d'invariance de la relativité générale. Nous verrons au chapitre suivant comment la quantification de l'action résulte de l'invariance relativiste étendue.

### 1.5.5 Normalisation de l'onde

On part de l'équation d'onde améliorée sous la forme du système (1.174), et on utilise :

$$J = D_L^1 + D_R^1 = \rho v; \quad \widehat{J\hat{J}} = \rho^2; \quad D_L^{1\mu} = \eta^{1\dagger} \sigma^\mu \eta^1; \quad D_R^{1\mu} = \xi^{1\dagger} \widehat{\sigma}^\mu \xi^1. \quad (1.203)$$

On peut exprimer la densité lagrangienne de l'équation améliorée comme :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_a}{k\mathbf{l}}\mathcal{L}_L + \frac{m_a}{k\mathbf{r}}\mathcal{L}_R; \quad \mathcal{L}_L = \Re[\eta^{1\dagger}(-i\nabla + qA + m_g\mathbf{v})\eta^1], \\ \mathcal{L}_R &= \Re[\xi^{1\dagger}(-i\widehat{\nabla} + q\widehat{A} + m_g\widehat{\mathbf{v}})\xi^1],\end{aligned}\quad (1.204)$$

où  $k$  est une constante que nous préciserons plus loin. Quant à l'équation de Dirac, la densité lagrangienne devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m_a}{k\mathbf{l}}\mathcal{L}_L + \frac{m_a}{k\mathbf{r}}\mathcal{L}_R; \quad \mathcal{L}_L = \Re[\eta^{1\dagger}(-i\nabla + qA + m_g e^{i\beta}\mathbf{v})\eta^1], \\ \mathcal{L}_R &= \Re[\xi^{1\dagger}(-i\widehat{\nabla} + q\widehat{A} + m_g e^{-i\beta}\widehat{\mathbf{v}})\xi^1],\end{aligned}\quad (1.205)$$

parce que l'on a, avec (1.170) et (1.171), puis avec (1.92) :

$$\begin{aligned}\frac{m_a}{\mathbf{l}}\eta^{1\dagger}m_g\mathbf{v}\eta^1 + \frac{m_a}{\mathbf{r}}\xi^{1\dagger}m_g\widehat{\mathbf{v}}\xi^1 &= m_a e^{-i\beta}\eta^{1\dagger}\xi^1 + m_a e^{i\beta}\xi^{1\dagger}\eta^1 \\ &= \frac{m_a}{2}e^{-i\beta}\rho e^{i\beta} + \frac{m_a}{2}e^{i\beta}\rho e^{-i\beta} = m_a\rho.\end{aligned}\quad (1.206)$$

De même, pour l'équation de Dirac, on a :

$$\begin{aligned}\frac{m_a}{\mathbf{l}}\eta^{1\dagger}m_g e^{i\beta}\mathbf{v}\eta^1 + \frac{m_a}{\mathbf{r}}\xi^{1\dagger}m_g e^{-i\beta}\widehat{\mathbf{v}}\xi^1 &= m_a\eta^{1\dagger}\xi^1 + m_a\xi^{1\dagger}\eta^1 \\ &= \frac{m_a}{2}\rho e^{i\beta} + \frac{m_a}{2}\rho e^{-i\beta} = m_a\rho \cos \beta = m_a\overline{\psi}\psi.\end{aligned}\quad (1.207)$$

Avec les dérivées covariantes

$$d_\mu := -i\partial_\mu + qA_\mu + m_g\mathbf{v}_\mu, \quad (1.208)$$

pour l'équation améliorée, et avec :

$$d_\mu := -i\partial_\mu + qA_\mu + m_g(\cos \beta)\mathbf{v}_\mu, \quad (1.209)$$

pour l'équation de Dirac, on peut exprimer la densité lagrangienne sous la même forme :

$$\mathcal{L} = \Re\left[-i\left(\frac{m_a}{k\mathbf{l}}\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\mu\eta^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{l}}\xi^{1\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\mu\xi^1\right)\right]. \quad (1.210)$$

L'invariance de la densité lagrangienne sous les translations d'espace-temps, comme dans la théorie de Dirac linéaire, implique l'existence d'une densité tensorielle d'impulsion-énergie conservative, connue sous le nom de tenseur de Tétrode. Comme l'équation d'onde est homogène, la densité lagrangienne est nulle pour toute solution de l'équation d'onde, et le tenseur de Tétrode s'exprime par :

$$\begin{aligned}T_\nu^\mu &= \Re\left[-i\left(\frac{m_a}{k\mathbf{l}}\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\nu\eta^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}}\xi^{1\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\nu\xi^1\right)\right] - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \\ &= \Re\left[-i\left(\frac{m_a}{k\mathbf{l}}\eta^{1\dagger}\sigma^\mu d_\nu\eta^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}}\xi^{1\dagger}\widehat{\sigma}^\mu d_\nu\xi^1\right)\right].\end{aligned}\quad (1.211)$$

Car  $\mathcal{L} = 0$  pour toute solution de l'équation d'onde. Pour une onde d'énergie  $E$  vérifiant :

$$-id_0\eta^1 = \frac{E}{\hbar c}\eta^1; \quad -id_0\xi^1 = \frac{E}{\hbar c}\xi^1, \quad (1.212)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \Re \left[ -i \left( \frac{m_a}{k\mathbf{l}} \eta^{1\dagger} d_0 \eta^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} \xi^{1\dagger} d_0 \xi^1 \right) \right] \\ &= \frac{E}{\hbar c} \left( \frac{m_a}{k\mathbf{l}} \eta^{1\dagger} \eta^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} \xi^{1\dagger} \xi^1 \right) = E \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c}. \end{aligned} \quad (1.213)$$

La condition de normalisation de l'onde :

$$\iiint dv \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = 1, \quad (1.214)$$

est donc équivalente à

$$E = \iiint dv T_0^0. \quad (1.215)$$

Le terme de gauche de cette somme est l'énergie totale  $E$  de l'électron, que de Broglie concevait comme une très petite horloge de fréquence  $E = h\nu$ , tandis que le terme de droite est la somme sur tout l'espace de la densité d'énergie locale de l'onde de l'électron. On verra plus loin que cette densité locale d'énergie est liée à l'inertie, par la force de Lorentz. Donc ce n'est pas parce qu'il faut avoir une probabilité que l'onde doit être normalisée. L'onde, parce qu'elle a une réalité physique, est normalisée, toujours, parce que la masse-énergie d'inertie, mue par les forces (électriques, faibles, ...) est égale en valeur absolue à la masse-énergie gravitationnelle. Ainsi cette énergie a une valeur déterminée, non arbitraire. **La normalisation de l'onde de l'électron, n'est donc que la conséquence de l'équivalence entre masse gravitationnelle et masse d'inertie.**<sup>28</sup> L'existence d'une densité de probabilité pour toute onde d'électron et dans n'importe quel cas, n'est pas un principe sur lequel toute théorie physique se doit d'être construite, c'est simplement la conséquence inévitable de l'égalité entre masse d'inertie et masse gravitationnelle. Et c'est la même chose pour l'équation de Dirac usuelle ou pour l'équation d'onde améliorée qui, rappelons-le, admet l'équation de Dirac comme approximation linéaire [22].

Comme  $T_\nu^\mu$  doit avoir la dimension physique d'une densité d'énergie,  $ML^2T^{-2}/L^3$ , et comme  $\mathbf{J}$  a la dimension  $\hbar c/L^3 = M/T^2$  on voit que  $k\mathbf{J}$ , qui a la dimension de  $D_L$  et  $D_R$ , a aussi la dimension  $\dim(k)M/T^2$ . Or la

28. Cette normalisation est si importante qu'elle a été mise dans les postulats imposés à toute onde quantique. Elle est toujours possible, mais ne se déduit pas de l'équation d'onde. Elle est la source de nombreuses difficultés, comme le "collapse du  $\psi$ ", ou l'objection de Schrödinger avec son chat à la fois mort et vivant. La normalisation de l'onde a induit la mise à l'écart de la théorie de l'onde pilote de L. de Broglie en 1927, et plus tard de celle de Bohm. En conséquence de Broglie élaborera ensuite sa théorie de la "double solution".

dimension de  $D_L$  et  $D_R$  est celle de  $\phi\phi^\dagger$ . Donc  $\phi$  est sans dimension physique si et seulement si  $k$  a la dimension  $T^2/M$ . On supposera donc désormais que  $k$  est une constante de dimension  $T^2/M$ , c'est à dire que  $k\hbar c$  a la dimension  $L^3$ . La seule longueur ayant un sens physique intrinsèque étant la longueur de Planck, on peut supposer :

$$k\hbar c = l_P^3; \quad l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}. \quad (1.216)$$

Après normalisation, la valeur numérique des courants ne dépend pas du choix de la valeur de  $k$ .

La normalisation s'applique bien évidemment aux solutions pour l'atome d'hydrogène qu'on étudie dans l'annexe C.<sup>29</sup> De plus, puisque le  $|\psi|^2$  de l'onde de Schrödinger est un cas particulier de l'approximation de l'onde de Dirac par une partie de ses composantes, le besoin de normalisation de la fonction d'onde d'un électron, qui fait partie des principes de la théorie quantique non relativiste, résulte en fait, comme dans le cas relativiste, du principe d'équivalence. On comprend mieux pourquoi Bohr a été capable de réfuter toutes les objections d'Einstein contre l'interprétation probabiliste de Born ; **l'existence d'une densité de probabilité pour l'électron vient de la gravitation.**

Les probabilités auxquelles pensaient Einstein venaient de la thermodynamique, auquel cas il n'y a pas une particule unique, mais au contraire une myriade de particules se déplaçant dans toutes les directions. Dans ce texte, on a certes utilisé l'expression *densité de probabilité*, mais on a évité l'expression *probabilité de présence*. La première expression a du sens, parce que la théorie des probabilités, comme le calcul intégral, s'est développée à partir du même domaine des mathématiques, la théorie de la mesure. La seconde expression, au contraire, n'a pas de sens pour l'électron, car on verra au second chapitre que l'onde de l'électron contient un point singulier et un seul. Pour un système d'électrons il est nécessaire de tenir compte du principe d'exclusion de Pauli dont nous analyserons les propriétés plus loin. Les propriétés des électrons, chacun seul sur son onde, sont radicalement différentes des propriétés des photons qui peuvent cohabiter sur la même onde. Résultat : la violation des inégalités de Bell a été expérimentalement observée seulement pour des photons (travaux d'Aspect, prix Nobel 2022). Pour les électrons, cela reste non établi. L'intrication nécessite au moins deux ondes.

---

29. Il faut rappeler que la densité  $J^0$  n'est pas égale à l'invariant relativiste  $\rho$ . Au contraire, c'est la composante de temps d'un vecteur contravariant d'espace-temps. On rappelle aussi que  $T_0^0$  est une composante d'un tenseur non symétrique. Et il est bien connu que l'intégration du spin 1/2 dans la gravitation relativiste n'est possible qu'avec une torsion non nulle [94] (voir aussi le chapitre 4).

**Produit scalaire**

Le courant qui est normalisé est :

$$\frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3} \left( D_0^0 + \frac{d}{m_a} D_3^0 \right) = \frac{m}{l_P^3} \left( \frac{\eta^\dagger \eta}{\mathbf{1}} + \frac{\xi^\dagger \xi}{\mathbf{r}} \right). \quad (1.217)$$

Le produit scalaire vérifie donc :

$$\langle \phi | \phi \rangle := \iiint d\mathbf{v} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \iiint d\mathbf{v} \frac{m}{l_P^3} \left( \frac{\eta^\dagger \eta}{\mathbf{1}} + \frac{\xi^\dagger \xi}{\mathbf{r}} \right), \quad (1.218)$$

$$\langle \phi | \phi' \rangle := \iiint d\mathbf{v} \frac{m}{l_P^3} \left( \frac{\eta^\dagger \eta'}{\mathbf{1}} + \frac{\xi^\dagger \xi'}{\mathbf{r}} \right), \quad (1.219)$$

Ce produit scalaire est identique au produit scalaire hermitien de la mécanique quantique.

**1.5.6 Conjugaison de charge**

On part à nouveau de  $\phi_p = -\phi_e \sigma_1$ , lien qu'on a établi entre l'onde de l'électron et l'onde du positron en mécanique quantique relativiste. L'équation d'onde améliorée (1.164) de la particule s'écrit :

$$\nabla \widehat{\phi}_e \sigma_{21} + q A \widehat{\phi}_e + e^{-i\beta_e} \phi_e \mathbf{m} = 0. \quad (1.220)$$

On a aussi :

$$\rho_e e^{i\beta_e} = \phi_e \overline{\phi}_e. \quad (1.221)$$

Alors on obtient :

$$\rho_e e^{i\beta_e} = \phi_e \overline{\phi}_e = \phi_p (-\sigma_1) (\widehat{\phi}_p \sigma_1)^\dagger = -\phi_p \overline{\phi}_p = -\rho_p e^{i\beta_p}. \quad (1.222)$$

Par conséquent (1.220) prend la forme :

$$\nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} + q A \widehat{\phi}_p + (-e^{-i\beta_p}) (-\phi_p \sigma_1 \mathbf{m}) = 0. \quad (1.223)$$

Multipliant à droite par  $\sigma_1$ , ceci équivaut à :

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} + q A \widehat{\phi}_p + e^{-i\beta_p} \phi_p \widehat{\mathbf{m}}, \\ 0 &= \nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} - q A \widehat{\phi}_p - e^{-i\beta_p} \phi_p \widehat{\mathbf{m}}. \end{aligned} \quad (1.224)$$

Puis, multipliant à gauche par  $\overline{\phi}_p$ , on obtient l'équation d'onde invariante du positron :

$$\begin{aligned} 0 &= -\overline{\phi}_p \nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} + q \overline{\phi}_p A \widehat{\phi}_p + \widehat{\mathbf{m}} \rho_p, \\ 0 &= \overline{\phi}_p \nabla \widehat{\phi}_p \sigma_{21} - q \overline{\phi}_p A \widehat{\phi}_p - \widehat{\mathbf{m}} \rho_p \end{aligned} \quad (1.225)$$

La première de ces deux équations signifie que seul le terme différentiel de l'équation d'onde change de signe. C'était la raison pour Feynman [72] d'interpréter la conjugaison de charge comme symétrie  $PT$ . La seconde équation signifie que la charge est vue changée de signe, et que la masse change de signe d'une manière telle que la moyenne arithmétique  $m_a = (\mathbf{r} + \mathbf{l})/2$  change de signe tandis que la différence  $\mathbf{l} - \mathbf{r}$  ne change pas, aussi peut-on dire que le rôle de la droite et de la gauche est échangée. Ensuite on peut réécrire les équations précédentes comme :

$$0 = \nabla \hat{\phi}_p \sigma_{12} + qA \hat{\phi}_p + e^{-i\beta_p} \phi_p \hat{\mathbf{m}}. \quad (1.226)$$

### Ondes planes

L'équation d'onde améliorée se réduit, pour  $A = 0$ , à :

$$0 = -\nabla \hat{\phi}_p + e^{-i\beta_p} \phi_p \hat{\mathbf{m}} \sigma_{12}. \quad (1.227)$$

On considère une solution de la forme :

$$\phi_p := \phi_0 e^{\varphi_p \sigma_{21}}; \quad \varphi_p := m_g v_{p\mu} x^\mu; \quad v_p := -v. \quad (1.228)$$

On obtient les mêmes résultats qu'en 1.5.3 :

$$m_g = \sqrt{\mathbf{l}\mathbf{r}}; \quad v^0 = \sqrt{1 + \vec{v}^2}. \quad (1.229)$$

On a donc :

$$v_p^0 = -\sqrt{1 + \vec{v}_p^2} \quad (1.230)$$

Donc on récupère les solutions en ondes planes avec un coefficient du temps négatif, nécessaires pour la transformation de Fourier, mais avec une masse-énergie positive, conformément aux résultats expérimentaux. Créés avec la même énergie, électron et positron sont dotés de vecteurs vitesses opposés, ce qui correspond bien à ce qui se passe du point de vue expérimental.

### Équations numériques

En multipliant à gauche (1.226) par  $\bar{\phi}_p$  on obtient l'équation d'onde invariante :

$$0 = \bar{\phi}_p \nabla \hat{\phi}_p \sigma_{12} + q \bar{\phi}_p A \hat{\phi}_p + \hat{\mathbf{m}} \rho_p; \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & 0 \\ 0 & \mathbf{l} \end{pmatrix}. \quad (1.231)$$

La mécanique quantique non relativiste, utilisant un  $i$  unique, ne pouvait comprendre vraiment la conjugaison de charge, qui change simplement le signe du terme  $\sigma_{21} = \sigma_2 \sigma_1$  qui devient  $\sigma_{12} = \sigma_1 \sigma_2$ , et qui change le signe de la différence  $d$ . Le premier changement de signe est donc seulement un changement de sens dans la suite des  $\sigma_k$ , ce qui change aussi l'orientation de l'espace, échangeant droite et gauche, et donc changeant aussi le signe de  $d$ .

Au lieu du système de huit équations réelles de l'électron, on a maintenant un système similaire, où seulement les  $\partial_\mu$  et  $d$  changent de signe :

$$0 = w_3 + qA \cdot D_0 + m_a \rho, \quad (1.232)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \nabla \cdot D_2 + qA \cdot D_1, \quad (1.233)$$

$$0 = +\frac{1}{2} \nabla \cdot D_1 + qA \cdot D_2, \quad (1.234)$$

$$0 = -w_0 + qA \cdot D_3 - d\rho, \quad (1.235)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \nabla \cdot D_3, \quad (1.236)$$

$$0 = w_2, \quad (1.237)$$

$$0 = -w_1, \quad (1.238)$$

$$0 = -\frac{1}{2} \nabla \cdot D_0. \quad (1.239)$$

La conjugaison de charge change le signe de la charge et le signe des masses chirales, si l'on ne change pas de signe l'opérateur  $\nabla$  [62]. En fait, seul le terme différentiel de l'équation d'onde change de signe. L'invariance de jauge électrique est maintenant obtenue sous la forme :

$$\phi_p \mapsto \phi'_p = \phi_p e^{ia\sigma_3}, \quad (1.240)$$

$$A \mapsto A' = A - \frac{1}{q}(-\nabla a) = A - \frac{1}{-q} \nabla a.$$

Donc le positron semble avoir une charge opposée à celle de l'électron. Mais en fait ce n'est pas  $q$  mais  $\partial_\mu a$  qui change de signe. Et donc seuls les  $\partial_\mu$ ,  $v_\mu$ ,  $w_\mu$  et  $d$  changent de signe. Avec les dérivées covariantes

$$\bar{d}_\mu = i\partial_\mu + qA_\mu + m_g v_\mu. \quad (1.241)$$

On peut exprimer la densité lagrangienne sous la forme :

$$\bar{\mathcal{L}} = \Re \left( \frac{m_a}{k\mathbf{r}} \eta_p^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \bar{d}_\mu \eta_p^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{l}} \xi_p^{1\dagger} \bar{d}_\mu \sigma^\mu \xi_p^1 \right). \quad (1.242)$$

La normalisation de l'onde, pour un état stationnaire donné, est alors équivalente à :

$$\iiint dv T_0^0 = -E. \quad (1.243)$$

L'énergie de masse  $m_a/c^2$ , positive, du positron est exactement l'opposée de l'énergie négative qui est le coefficient du temps dans un état stationnaire. L'équation d'onde améliorée résout donc le problème du signe de l'énergie d'une manière bien plus facile à comprendre qu'avec la seconde quantification. On a certes les coefficients négatifs  $-|E|$  qui permettent d'obtenir la transformation de Fourier, mais on a aussi une composante de temps  $T_0^0$  de

la densité d'impulsion-énergie qui reste positive. Comme l'équation d'onde de l'anti-particule est obtenue à partir de l'équation d'onde de la particule simplement en changeant  $\partial_\mu$  en  $-\partial_\mu$  et  $d$  en  $-d$ , ce qui résulte aussi de la transformation  $PT$ , le théorème  $CPT$  de la théorie quantique des champs est trivial. Donc la conjugaison de charge est le phénomène purement quantique et purement relativiste d'une onde qui semble voir l'espace-temps à l'envers. C'était le point de vue de Feynman [72]. Et puisque l'équation de Dirac est l'approximation linéaire de notre équation d'onde améliorée, on peut déduire l'équation de Dirac du positron à partir de l'équation d'onde améliorée du positron, en changeant son terme de masse. On doit prendre en compte le fait que  $\beta_p = \beta_e + \pi$  et que  $\Omega_{1e} = -\Omega_{1p}$ . L'approximation linéaire de l'équation d'onde améliorée du positron vérifie  $m = \mathbf{l} = \mathbf{r} = m_a$ , ce qui implique :

$$0 = -\bar{\phi}_p \nabla \hat{\phi}_p \sigma_{21} + q \bar{\phi}_p A \hat{\phi}_p - m \Omega_{1p}, \quad (1.244)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\nabla \hat{\phi}_p \sigma_{21} + q A \hat{\phi}_p - m \phi_p, \\ 0 &= \nabla \hat{\phi}_p \sigma_{21} + (-q) A \hat{\phi}_p + m \phi_p. \end{aligned} \quad (1.245)$$

Ceci est précisément l'équation de Dirac du positron, avec la charge seule apparaissant changée de signe. On a pour le signe de  $E$  et de  $T_0^0$ , les mêmes résultats qu'avec l'équation améliorée :  $E$  est négative tandis que  $T_0^0$  est positive.

## 1.6 L'atome d'hydrogène

La mécanique quantique naissante a obtenu la quantification des niveaux d'énergie en résolvant l'équation de Schrödinger dans le cas de l'atome d'hydrogène, un électron tournant autour d'un proton. Obtenir la justification de la quantification de l'action a été un magnifique résultat. De plus, la formulation hamiltonienne de la mécanique quantique a permis d'étendre aux systèmes d'électrons, si importants pour la chimie, la compréhension apportée par l'onde quantique. Mais les autres résultats n'ont pas été aussi bons. Les niveaux d'énergie n'étaient pas très précis. Et le nombre total d'états quantiques pour un nombre quantique principal  $\mathbf{n}$  était  $\mathbf{n}^2$ , alors que le nombre d'états attendus était  $2\mathbf{n}^2$ .

La résolution de l'équation améliorée est présentée dans l'annexe C. Cette résolution est très différente de celle utilisée dans les premières années de la mécanique quantique. A l'époque la théorie des vecteurs propres et valeurs propres dans les espaces hermitiens avait été développée principalement pour ses applications aux **opérateurs de moment angulaire**. Bohr avait compris le tableau périodique de Mendeleev à partir du décompte de tous les états possibles du moment angulaire des électrons-particules dans les atomes. Cela donna à Bohr les niveaux attendus d'énergie  $k/\mathbf{n}^2$ , mais pas le nombre d'états attendus. Ensuite Sommerfeld utilisa la dynamique

relativiste des particules, pour obtenir plus d'états, et aussi la structure fine des raies atomiques. Ces modèles d'électrons-particules ne peuvent pas expliquer les nombres demi-entiers impairs, pourtant nécessaires pour interpréter les spectres d'émission et d'absorption des atomes.

La mécanique quantique remplaça ensuite ces décomptes insatisfaisants par la résolution de l'équation d'onde de l'électron, obtenant des états qui sont vecteurs propres d'opérateurs avec les mêmes propriétés algébriques que les moments angulaires classiques. A partir de l'équation de Schrödinger, seul le modèle non relativiste de Bohr pouvait être obtenu. L'équation d'onde relativiste de Klein-Gordon était capable d'obtenir le second nombre quantique introduit par Sommerfeld grâce à la dynamique relativiste, mais pas avec les valeurs correctes, parce que les nombres entiers (0, 1, 2, 3, ...), qui sont les seules valeurs propres possibles des opérateurs de moment angulaire, doivent être remplacés par des valeurs demi-entières (1/2, 3/2, 5/2, ...) pour rendre compte des raies spectrales. Cette sérieuse divergence entre théorie et expérience sur les raies lumineuses aboutit à l'hypothèse du spin de l'électron, un ensemble d'opérateurs ayant les mêmes propriétés algébriques que les opérateurs de moment angulaire, et avec seulement deux valeurs propres possibles,  $+\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$ . Puis Pauli obtint une équation d'onde pour un électron à spin. Cette équation d'onde comportait les matrices complexes  $2 \times 2$  de (1.4), qui sont les générateurs de l'algèbre  $Cl_3$ . Cette algèbre contient l'algèbre de Lie du groupe  $SU(2)$ , mais aussi du groupe  $SO(3)$ . Les représentations du groupe  $SU(2)$  se caractérisent par un nombre qui prend les valeurs (0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, ...), ce qui rend possible les valeurs demi-entières, mais n'explique pas l'absence des valeurs (0, 1, 2, 3, ...), qui sont, parmi les représentations de  $SU(2)$ , justement celles liées aux représentations qui sont aussi des représentations du groupe géométrique  $SO(3)$ . Pour cette raison, et parce que l'équation de Pauli n'est pas relativiste, cette équation d'onde ne peut, en aucun cas, être la véritable équation d'onde de l'électron [56].

Aussi Dirac chercha, et rapidement trouva, une meilleure équation, qui fut aussitôt modifiée pour respecter les règles d'invariance de la relativité restreinte. Seule l'équation de Dirac fut capable d'obtenir les bons nombres quantiques et les niveaux d'énergie dans le cas de l'atome d'hydrogène. L'ensemble des solutions adéquates fut obtenu par C.G. Darwin aussitôt après, grâce à des opérateurs construits à partir de ceux utilisés avec l'équation de Pauli [11]. Cette résolution, malgré son extrême précision, montre deux insuffisances : elle n'explique pas pourquoi il faut que les états électroniques soient vecteurs propres des opérateurs construits à partir de l'équation de Pauli, et elle n'explique pas pourquoi ces solutions sont les seules possibles, notamment lorsqu'on récuse, à tort, l'existence d'états de nombres  $\kappa < 0$  avec des polynômes radiaux constants. Enfin et surtout, de Broglie [86] pensait que la linéarité de l'équation de Dirac ne permettait pas d'expliquer la limitation spatiale des trains d'onde. Cette équation linéaire ne pouvait être qu'une approximation linéaire de la véritable équation d'onde.

Au chapitre C, on se sert d'une méthode complètement différente, obtenue par H. Krüger [85], méthode classique du point de vue mathématique, séparant les variables en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . Dans la présente édition, on a complètement résolu l'équation améliorée, prenant en compte les masses gauche et droite. Cette résolution, non seulement calcule de manière exacte (et non pas par approximation) toutes les solutions à variables séparées possibles de l'équation d'onde dans le cas du potentiel coulombien,[27] mais prouve que ces solutions sont les seules possibles, à partir des hypothèses qui sont les nôtres : l'onde est une fonction de l'espace-temps à valeur dans le groupe de Lie  $Cl_3^*$ , solution de l'équation d'onde améliorée, telle que son énergie soit la somme à tout l'espace de la densité d'énergie de son onde. Elle doit donc être normalisable. Le nombre quantique principal  $\mathbf{n}$  reste la somme  $\mathbf{n} = |\kappa| + n$ ;  $\kappa$  s'introduit comme constante de séparation des variables, avec  $x^0 = ct$  et  $\varphi$ , d'un côté, et la variable angulaire  $\theta$  et la variable radiale  $r$  de l'autre côté. L'étude des fonctions de la variable  $\theta$  relie la nécessaire normalisation de l'onde à des conditions portant sur les variables  $|\kappa|$  et  $n$  :  $|\kappa|$  est nécessairement un entier naturel non nul et  $n$  est le degré des polynômes auxquels les développements en série des fonctions radiales doivent se réduire. C'est la nécessité de normer les solutions, de façon à pouvoir obtenir une densité de probabilité, qui donne les trois nombres entiers que sont  $|\kappa|$ ,  $n$ , et donc aussi leur somme  $\mathbf{n}$ . Le dernier nombre quantique, noté ici  $\lambda$ , s'obtient sous la seule condition que l'onde soit bien définie, à valeur unique dans  $Cl_3$ . On n'a nul besoin des opérateurs de moment angulaire, car on obtient tous les nombres quantiques sans jamais faire intervenir le nombre  $l$  de la mécanique quantique non relativiste. Et si les  $\lambda$  ne sont pas entiers, mais demi-entiers, cela résulte uniquement de l'utilisation d'un repère mobile lorsqu'on calcule en coordonnées sphériques. Ce repère mobile est engendré par un rotateur  $S = e^{-\frac{\varphi}{2}i_3}e^{-\frac{\theta}{2}i_2}$ , avec des angles moitié, qui sont donc d'origine purement géométrique. Le nombre de tours  $(\lambda \pm \frac{1}{2})\frac{\varphi}{2\pi}$  devant être un nombre entier, pour chacune des composantes de l'onde,  $\lambda$  ne peut qu'être la moitié d'un nombre entier relatif impair.

Voyons sur un exemple comment, avec le nombre quantique principal  $\mathbf{n} = 5$ , on obtient les différents états. Le degré  $n$  des polynômes radiaux, entier naturel, vaut  $\mathbf{n} - |\kappa|$  et la plus petite valeur de  $|\kappa|$  est 1. Le degré  $n$  ne peut donc valoir que 4, 3, 2, 1 ou 0. Et le nombre  $\lambda$  est limité par la condition  $|\lambda| < |\kappa|$ . Le calcul des fonctions radiales contient deux constantes arbitraires  $a_0$  et  $b_0$  qui ne peuvent pas être toutes les deux non nulles : dans le cas contraire il existe, dans le plan équatorial, des valeurs de la variable  $r$  pour lesquelles l'onde sort de  $Cl_3^*$ . C'est donc l'imposition de prendre valeur sur le groupe de Lie  $Cl_3^*$  qui est la vraie raison du succès de l'équation d'onde, assurant le bon nombre de solutions et l'unicité de ces solutions.

1. Si  $n = 4$  alors  $|\kappa| = 1$ , donc on a 4 états :  $\lambda = -1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $b_0 = 0$ .

2. Si  $n = 3$  alors  $|\kappa| = 2$ , donc on a 8 états :  $\lambda = -3/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -3/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $b_0 = 0$ .

3. Si  $n = 2$  alors  $|\kappa| = 3$ , donc on a 12 états :  $\lambda = -5/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -5/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = -3/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -3/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 5/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 5/2$  et  $b_0 = 0$ .

4. Si  $n = 1$  alors  $|\kappa| = 4$ , donc on a 16 états :  $\lambda = -7/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -7/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = -5/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -5/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = -3/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -3/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = -1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 1/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 5/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 5/2$  et  $b_0 = 0$ ,  $\lambda = 7/2$  et  $a_0 = 0$ ,  $\lambda = 7/2$  et  $b_0 = 0$ .

5. Si  $n = 0$  alors  $|\kappa| = 5$ , mais dans ce cas les polynômes radiaux sont réduits à des constantes, et dans ce cas ni  $a_0$  ni  $b_0$  ne peuvent être nuls, les solutions dépendent d'une seule constante, dont le module est fixé par la normalisation de l'onde. On a donc ici seulement 10 états :  $\lambda = -9/2$ ,  $-7/2$ ,  $-5/2$ ,  $-3/2$ ,  $-1/2$ ,  $1/2$ ,  $3/2$ ,  $5/2$ ,  $7/2$ ,  $9/2$ .

Cela donne finalement  $4+8+12+16+10 = 50 = 2 \times 5^2$  (et plus généralement  $2\mathbf{n}^2$ ) états, deux à deux orthogonaux (ce que de Broglie expliquait déjà de manière très détaillée en 1934 [56]). L'argument donné par Darwin pour supprimer les solutions à  $n = 0$ , pour des raisons de signe, n'était pas la bonne explication, ce que nous savions dès la résolution de l'équation linéaire par la méthode de séparation des variables [13]. On trouvera à la fin du chapitre C le calcul détaillé de toutes les solutions de nombre quantique principal  $\mathbf{n} = 1$  et  $\mathbf{n} = 2$ . Parmi les 50 états de nombre quantique total  $\mathbf{n} = 5$ , prenons comme exemple l'état de nombres quantiques  $n = 2$ ,  $|\kappa| = 3$ ,  $\lambda = 3/2$  et  $b_0 = 0$ . L'onde a pour valeur :

$$\phi = \Omega X e^{(\frac{3}{2}\varphi - Ex^0)i_3}; \quad \Omega = \frac{1}{r\sqrt{\sin\theta}} e^{-\frac{\varphi}{2}i_3} e^{-\frac{\theta}{2}i_2}, \quad (1.246)$$

$$X = \begin{pmatrix} AU & -\bar{B}V \\ CV & \bar{D}U \end{pmatrix}; \quad U = U(\theta); \quad V = V(\theta),$$

$$A = A(r); \quad B = B(r); \quad C = C(r); \quad D = D(r), \quad (1.247)$$

où  $U$  et  $V$  sont des fonctions à valeur réelle,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des fonctions à valeur complexe. Toutes ces fonctions sont calculées au chapitre C. On obtient alors :

$$\phi = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 & \bar{\xi}_2 \\ \eta_2 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix}; \quad \underline{c} := \cos \frac{\theta}{2}; \quad \underline{s} := \sin \frac{\theta}{2}, \quad (1.248)$$

$$\eta_1 = \frac{A\underline{c}U - C\underline{s}V}{r\sqrt{2}\sin\theta} e^{i(\varphi - Ex^0)}; \quad \bar{\xi}_1 = \frac{\bar{D}\underline{c}U - \bar{B}\underline{s}V}{r\sqrt{2}\sin\theta} e^{-i(\varphi - Ex^0)},$$

$$\eta_2 = \frac{AsU + C\bar{c}V}{r\sqrt{2}\sin\theta} e^{i(2\varphi - Ex^0)}; \quad -\bar{\xi}_2 = -\frac{\bar{D}sU + \bar{B}\bar{c}V}{r\sqrt{2}\sin\theta} e^{-i(2\varphi - Ex^0)}, \quad (1.249)$$

On voit donc clairement apparaître que l'onde de phase à laquelle pensait au départ L. de Broglie est, en ce qui concerne l'électron, une onde à **deux fois deux phases** : une partie de l'onde fait  $\frac{-1}{2} + \frac{\lambda}{2} = 1$  tour quand une autre partie de l'onde fait  $\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} = 2$  tours. Une partie tourne dans un sens et l'autre partie tourne dans l'autre sens. De même, pour un état de spin  $7/2$ , on obtient deux composantes tournant de 3 tours, en sens contraire, quand les deux autres composantes tournent de 4 tours exactement, en sens contraire, soit une moyenne de  $7/2$  certes, mais on n'a aucune rotation comportant un demi-tour. Donc pour le spin  $7/2$  il y a quatre phases tournant respectivement de  $+3$ ,  $-3$ ,  $+4$  et  $-4$  tours. Quand on change le signe du nombre quantique magnétique, pour le spin  $-7/2$ , tous les nombres de tours changent de signe :  $-3$ ,  $+3$ ,  $-4$  et  $+4$  tours. Dire que le spin de l'électron ne peut prendre que deux valeurs est tout à fait faux, car le nombre quantique de l'électron peut valoir  $7/2$  ou  $-9/2$ . Mais il y a bien seulement deux possibilités : ce nombre quantique ne peut être que positif ou négatif!

L'explication de Pauli donnée pour le  $2\mathbf{n}^2$  à partir du  $\mathbf{n}^2$  venant de l'équation de Schrödinger (toujours postulée comme suffisante pour la totalité de la physique quantique) et des deux valeurs du spin (up – down) n'est aujourd'hui qu'un **conte pour enfants**. Heureusement pour Pauli et les chimistes, et malheureusement pour la compréhension de la physique de l'électron, ce conte est toujours très populaire, il est même suffisant, en raison de la partition de tous les états électroniques en deux parties parfaitement symétriques, suivant le signe de  $\lambda$  (voir C.1.2).

L'étude des solutions de l'équation d'onde améliorée montre donc qu'une famille de solutions existe (ce qui n'a rien d'évident pour une équation non linéaire). Ces solutions sont très proches des solutions de l'équation linéaire obtenues en 1995 [13], telles que l'angle d'Yvon-Takabayasi soit partout défini et petit. De plus, si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux solutions de cette famille, alors  $e^{ia}\phi_1$  et  $e^{ib}\phi_2$  sont aussi solutions de l'équation améliorée parce qu'elle est à la fois homogène et invariante globalement sous la jauge chirale (multiplication par  $i$ ). Mais la somme  $\phi_1 + \phi_2$  n'a pas de raison d'être solution de l'équation d'onde puisque celle-ci n'est pas additive. Les solutions étiquetées par les nombres quantiques  $\mathbf{n}$ ,  $|\kappa|$ ,  $\lambda$ ,  $n$  et les deux possibilités d'annulation, soit de  $a_0$ , soit de  $b_0$ , donnent donc les seules solutions possibles pour les états stationnaires de l'atome d'hydrogène, ainsi que pour les états à un seul électron des autres atomes. Ceci donne une explication simple au fait qu'un électron dans un atome d'hydrogène se trouve habituellement dans un des états étiquetés, et pas dans une combinaison linéaire de tels états.<sup>30</sup> C'est un fait bien connu du point de vue expérimental, qui résulte en des

30. Les états de Rydberg de grands nombres quantiques, qu'on mélange dans de très belles expériences, sont des états d'un seul électron lent. Ces états sont très peu différents des états calculés à partir de l'équation de Schrödinger, ces électrons relèvent donc de la physique quantique non relativiste. Leur étude expérimentale n'a aucune conséquence

raies spectrales bien définies, et c'est une réalité que la théorie basée sur les espaces de Hilbert et les opérateurs sur ces espaces n'a jamais su expliquer. De plus, dans le cas de l'équation de Dirac linéaire, l'ensemble des solutions correspondant à un état défini par un triplet  $(\mathbf{n}, \kappa, \lambda)$  constitue un espace vectoriel hermitien de dimension 2. Les états sont tous dégénérés, au sens usuel du terme en mécanique quantique, et du point de vue expérimental, on sait que c'est tout à fait faux. Par contre, si on impose à l'onde d'être à valeur dans le groupe de Lie  $Cl_3^*$ , alors pour chaque état la solution la plus générale dépend de deux constantes arbitraires, l'une notée  $r_1$  au chapitre C, l'autre étant l'argument soit de  $a_0$ , soit de  $b_0$ . Ceci provient de la double invariance de jauge de l'équation améliorée. L'argument arbitraire de  $a_0$  ou de  $b_0$  vient de l'invariance sous la jauge électrique, qui reste inchangée quand on linéarise l'équation d'onde. La constante  $r_1$  est propre à l'équation améliorée et est due à la seconde invariante de jauge, la jauge chirale globale, qui disparaît quand on linéarise l'équation d'onde.

L'équation améliorée est donc plus proche de la réalité physique que son approximation linéaire, l'équation de Dirac. L'équation améliorée est ainsi, à notre connaissance, la seule équation d'onde non linéaire telle que des niveaux d'énergie quantifiés existent, sans dégénérescence, avec exactement les bons niveaux d'énergie, avec exactement toutes les propriétés nécessaires pour justifier les différents états atomiques, à la seule condition d'expliquer complètement le principe d'exclusion, ce que nous verrons plus loin.

### 1.6.1 Effet Lamb

Il est bien connu que l'équation linéaire de Dirac était parfaite pour l'électron, mais cependant deux propriétés n'ont pas été obtenues : le moment magnétique anormal de l'électron et l'effet Lamb. Cet effet concerne des décalages observés entre niveaux d'énergie que la résolution de l'équation de Dirac prédit sans décalage. par exemple entre les états  $2s_{1/2}$  et  $2p_{1/2}$ . Ce décalage est maximal pour les états  $1s_{1/2}$ , entre le niveau d'énergie calculé par la théorie de Dirac et celui calculé par la théorie quantique des champs [75]. L'équation de Dirac ne permettait pas d'obtenir de différence entre les niveaux d'énergie des quatre états  $2s_{1/2}$ , que l'on présentait d'ailleurs comme deux états  $2s_{1/2}$  et deux  $2p_{1/2}$ . Les calculs détaillés du chapitre C permettent cependant de remettre en cause le calcul effectué par la théorie quantique des champs, qui tient compte de plusieurs effets, la polarisation du vide, la taille non nulle du proton, et aussi le comportement à l'origine des fonctions radiales. Or il n'y a pas de différence entre le comportement à l'origine des fonctions radiales des états  $2s_{1/2}$  et des états  $2p_{1/2}$ . Comme l'effet Lamb est du même ordre de grandeur que la structure hyperfine des raies, il faudra pouvoir calculer exactement les états électroniques en tenant compte des ondes des protons et neutrons, et du mouvement relatif de l'onde

---

sur le contenu de la présente étude, pour la même raison qui fait que la mécanique de Newton ne peut pas mettre en défaut la gravitation relativiste.

électronique autour de l'onde du noyau, pour espérer calculer correctement les décalages de l'effet Lamb. Ce mouvement relatif étant une rotation, il faudra intégrer au calcul la contribution venant de la théorie relativiste de la gravitation, la relativité générale. Cependant, une différence apparaît entre les quatre états suivant qu'on annule  $b_0$ , ou  $a_0$ . Dans le premier cas la normalisation nous donne :

$$|a_0| = \sqrt{\frac{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{2\pi \mathbf{l} \Gamma(2s+1)}}, \quad (1.250)$$

tandis que dans le second cas la normalisation nous donne :

$$|b_0| = \sqrt{\frac{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{2\pi \mathbf{r} \Gamma(2s+1)}}, \quad (1.251)$$

Il se peut donc que tout ou partie de l'effet Lamb soit calculable à partir d'une possible différence entre  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$ .

### 1.6.2 Au sujet des probabilités

L'équation d'onde de l'électron est une équation d'onde pour un objet unique : le principe de Pauli nous interdit de placer plus d'un électron sur un seul état électronique. Quand la théorie physique a besoin de calculer la probabilité de l'émission ou de l'absorption d'un photon (en fonction du temps) on considère le plus souvent non pas un électron isolé mais un vaste nombre d'électrons, chacun avec son onde. Il n'y a donc a priori aucun rapport entre ces probabilités fonctions du temps, et la densité de probabilité  $\mathbf{J}^0/\hbar c$  (fonction de l'espace). S'il y a un rapport entre ces probabilités de nature différente, ce doit être prouvé du point de vue théorique, et validé expérimentalement par des statistiques adéquates. Rien, dans ce qui précède, ne nécessite l'existence d'un probabilisme essentiel, différent des probabilités issues des phénomènes de chaos. Il y a néanmoins toujours une quantité, le rapport densité locale d'énergie sur énergie totale, qui est un réel positif dont la somme totale vaut toujours 1, et qu'on peut donc appeler probabilité au sens de la théorie mathématique de la mesure.

## 1.7 Trois générations

Lorsque la physique, dans les années 1930, a compris qu'il existait d'autres particules élémentaires que les seuls électrons et protons, une des premières particules découvertes, le muon, en 1936, n'était pas du tout attendue. Le muon ressemble à un électron : même charge, même spin, mêmes propriétés dans les interactions électromagnétiques et faibles, même absence d'interactions fortes. Mais la masse propre du muon est beaucoup plus grande que celle de l'électron ( $105,6583755(23)\text{MeV}/c^2$ ). Par la suite on a compris que

les particules se rangeaient en trois générations semblables, et la particule correspondant à l'électron dans la troisième génération, le tau, ou tauon, a été découvert seulement quarante ans plus tard, étant encore plus lourd ( $1776,86(12)\text{MeV}/c^2$ ). Muons et tauons sont instables, avec une durée de vie de  $2.903(5) \times 10^{-13}\text{s}$  pour le tauon contre  $2.1969811(22) \times 10^{-6}\text{s}$  pour le muon, qui est donc beaucoup plus facile à observer.

On se doit donc d'expliquer pourquoi ces trois générations, pourquoi de telles différences dans les masses, et pourquoi seul l'électron est stable. Comme les trois particules ont des propriétés très voisines, on supposera qu'elles suivent toutes trois un même type d'équation d'onde, dans laquelle ne change que le terme de masse. Une formule empirique a été obtenue pour ces masses par Yoshio Koide en 1981 [84] :

$$\frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{(\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})^2} = \frac{2}{3}, \quad (1.252)$$

où la masse  $m_e$  de l'électron ( $0,51099895069(16)\text{MeV}/c^2$ ) et la masse du muon ( $105,6583755(23)\text{MeV}/c^2$ ) sont connues avec une beaucoup plus grande précision que la masse du tauon. Avec les valeurs expérimentales ci-dessus, on n'obtient pas tout à fait la valeur  $\frac{2}{3}$ , mais les dernières mesures de la masse du tauon sont supérieures aux premières publications, et parfaitement compatibles avec la valeur  $\frac{2}{3}$ . On va donc maintenant considérer la formule de Koide comme exacte. Koide lui-même, les divers physiciens ayant travaillé sur le sujet dont O. Rousselle (communication privée) ont cherché une justification de cette égalité à partir d'une brisure de symétrie due au boson de Higgs. La relation de Rousselle s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} m_k &= \frac{2}{\sqrt{6}} y_F \nu \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin(\theta_k) \right)^2; \quad \theta_k = \theta_F + \frac{2\pi(3-k)}{3}, \quad k = 1, 2, 3. \\ \frac{\sqrt{m_k}}{\sqrt{K}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin(\theta_k); \quad K = \frac{2y_F \nu}{\sqrt{6}}, \end{aligned} \quad (1.253)$$

avec comme valeurs approchées :

$$\begin{aligned} \theta_e &= -\frac{\pi}{4} + \epsilon = \theta_F - \frac{2\pi}{3} \approx -42.73^\circ > -45^\circ, \\ \theta_\mu &= \theta_F + \frac{2\pi}{3} \approx 197.27^\circ; \quad \theta_\tau = \theta_F \approx 77.27^\circ. \end{aligned} \quad (1.254)$$

Les angles de  $\frac{2\pi}{3}$  sont ceux que font les nombres 1,  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $j^2$  (les trois racines cubiques de 1) dans le plan complexe, ce qui amène à comparer cette situation à la figure similaire formée par les racines de l'algèbre de Lie de  $SU(3)$ , figure à l'origine de l'hypothèse des quarks. On va donc étudier :

$$a_n^k := c_n^k + i s_n^k = e^{i(k\theta_e - \frac{2n\pi}{3})}; \quad n = 0, 1, 2; \quad \theta_e = -\frac{\pi}{4} + \epsilon, \quad (1.255)$$

$$\sqrt{m_e} = \sqrt{K}(\delta + s_0^1); \quad \sqrt{m_\mu} = \sqrt{K}(\delta + s_1^1); \quad \sqrt{m_\tau} = \sqrt{K}(\delta + s_2^1), \quad (1.256)$$

où  $\delta$  et  $\epsilon$  sont des réels dont on peut calculer assez précisément la valeur, en se servant des valeurs des masses de l'électron et du muon. Avec :

$$r_j := \delta + s_j^1, \quad j = 0, 1, 2. \quad (1.257)$$

$$a_0 = c_0^1 + i s_0^1 = e^{i\theta_e} = e^{i(\epsilon - \frac{\pi}{4})}, \quad (1.258)$$

$$a_1 = c_1^1 + i s_1^1 = e^{i\theta_\mu} = e^{i(\theta_e - \frac{2\pi}{3})} = j^2 a_0, \quad (1.259)$$

$$a_2 = c_2^1 + i s_2^1 = e^{i\theta_\tau} = e^{i(\theta_e + \frac{2\pi}{3})} = j a_0. \quad (1.260)$$

On a alors :

$$r_0 = \frac{\sqrt{m_e}}{\sqrt{K}} = \delta + \sin(\theta_e), \quad (1.261)$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{m_\mu}}{\sqrt{K}} = \delta + \sin(\theta_\mu) = \delta - \frac{1}{2} \sin(\theta_e) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_e), \quad (1.262)$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{m_\tau}}{\sqrt{K}} = \delta + \sin(\theta_\tau) = \delta - \frac{1}{2} \sin(\theta_e) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta_e), \quad (1.263)$$

$$\cos \theta_e = \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{3}}. \quad (1.264)$$

Et puisque  $1 + j + j^2 = 0$  et  $j^3 = 1$  :

$$\sin(\theta_e) + \sin(\theta_\mu) + \sin(\theta_\tau) = 0, \quad (1.265)$$

$$c_3^k = c_0^k; \quad s_3^k = s_0^k; \quad c_0^k + c_1^k + c_2^k = 0; \quad s_0^k + s_1^k + s_2^k = 0, \quad (1.266)$$

$$3\delta = r_0 + r_1 + r_2 = \frac{\sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau}}{\sqrt{K}} \quad (1.267)$$

Ceci nous donne :

$$r_2 - r_1 = \sqrt{3} \cos \theta_e; \quad r_1 + r_2 = 2\delta - \sin \theta_e \quad (1.268)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3}(r_0 + r_1 + r_2) - \sin \theta_e; \quad \sin \theta_e = \frac{2}{3}r_0 - \frac{1}{3}(r_1 + r_2), \\ \tan \theta_e &= \frac{\frac{2}{3}r_0 - \frac{1}{3}(r_1 + r_2)}{\frac{r_2 - r_1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \frac{\frac{2}{3}\sqrt{m_e} - \frac{1}{3}(\sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau})}{\sqrt{m_\tau} - \sqrt{m_\mu}} \end{aligned} \quad (1.269)$$

$$\theta_e = \text{Arctan} \left[ \frac{2\sqrt{m_e} - \sqrt{m_\mu} - \sqrt{m_\tau}}{\sqrt{3}(\sqrt{m_\tau} - \sqrt{m_\mu})} \right]. \quad (1.270)$$

L'identité  $1 = \cos^2 \theta_e + \sin^2 \theta_e$  nous donne ensuite :

$$\begin{aligned} 1 &= \left( \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{2}{3}r_0 - \frac{1}{3}(r_1 + r_2) \right)^2 \\ &= \frac{4}{9}[r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - (r_0r_1 + r_1r_2 + r_2r_0)], \end{aligned} \quad (1.271)$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} &= r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 - (r_0r_1 + r_1r_2 + r_2r_0) \\ &= (r_0 + r_1 + r_2)^2 - 3(r_0r_1 + r_1r_2 + r_2r_0) \\ &= 9\delta^2 - 3(r_0r_1 + r_1r_2 + r_2r_0), \end{aligned} \quad (1.272)$$

$$r_0r_1 + r_1r_2 + r_2r_0 = 3\delta^2 - \frac{3}{4}, \quad (1.273)$$

$$\begin{aligned} 9\delta^2 &= (r_0 + r_1 + r_2)^2 = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2(r_0r_1 + r_1r_2 + r_2r_0) \\ &= r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + 6\delta^2 - \frac{3}{2}, \end{aligned} \quad (1.274)$$

On a donc :

$$r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 = 3\left(\delta^2 + \frac{1}{2}\right), \quad (1.275)$$

$$\frac{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2}{(r_0 + r_1 + r_2)^2} = 3 \frac{\delta^2 + \frac{1}{2}}{9\delta^2} = \frac{1 + \frac{1}{2\delta^2}}{3}, \quad (1.276)$$

$$\frac{r_0^2 + r_1^2 + r_2^2}{(r_0 + r_1 + r_2)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2\delta^2} = 2 \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1.277)$$

Obtenir exactement  $\frac{2}{3}$  dans la formule de Koide est ainsi équivalent à mettre la valeur  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  dans les formules (1.253). On en déduit les valeurs de  $m_\tau$  et de l'angle  $\epsilon$  :

$$m_\tau \approx 1776,969028(39)\text{MeV}/c^2; \quad \epsilon \approx 2,23761847(51)^\circ \quad (1.278)$$

La valeur obtenue pour la masse du tau est parfaitement conforme aux dernières mesures de cette masse. La valeur approchée de l'angle  $\theta_e$  est elle aussi très précise. Et comme pour la valeur du rapport de Koide, si proche de  $\frac{2}{3}$  qu'on est amené à estimer la valeur  $\frac{2}{3}$  exacte, la valeur de  $\epsilon$  vérifie :

$$\theta_e = -\frac{\pi}{4} + \epsilon = -\frac{\pi}{6} - 0,22222204711 \approx -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}. \quad (1.279)$$

Regardons maintenant ce qui se passe si les fractions  $\frac{2}{3}$  et  $-\frac{2}{9}$  sont des valeurs exactes.<sup>31</sup> On a alors :

$$\theta_e = -\frac{\pi}{4} + \epsilon = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{9} - \frac{2\pi}{3}, \quad (1.280)$$

$$\epsilon = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{9} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{9}; \quad \theta_e = -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}. \quad (1.281)$$

31. Ceci a alors pour premier avantage de réduire de deux unités au lieu d'une seule le nombre des constantes du modèle standard dont la valeur est déterminée expérimentalement.

Donc on a :

$$\sqrt{m_k} = \sqrt{K} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \left( -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} - k \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \quad (1.282)$$

$$m_e = m_0; \quad m_\mu = m_1; \quad m_\tau = m_2, \quad (1.283)$$

$$r_0 r_1 + r_1 r_2 + r_2 r_0 = 3\delta^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad (1.284)$$

$$\frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{K} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 3; \quad K = \frac{m_e + m_\mu + m_\tau}{3}, \quad (1.285)$$

$$m_\tau = 3K - m_e - m_\mu; \quad 3 \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2}} = \sqrt{m_e} + \sqrt{m_\mu} + \sqrt{m_\tau} \quad (1.286)$$

Et donc on obtient :

$$\sin \theta_e = \sin \left( -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right); \quad r_0 = \frac{\sqrt{m_e}}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin \theta_e, \quad (1.287)$$

$$\sqrt{K} = \frac{\sqrt{m_e}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin \left( \frac{2}{9} + \frac{\pi}{6} \right)} \approx 25,05419727 \quad (1.288)$$

$$\sqrt{m_\mu} = \sqrt{K} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{2}{9} + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( \frac{2}{9} + \frac{\pi}{6} \right) \right], \quad (1.289)$$

$$m_\mu \approx 105,6594144827 \quad (1.290)$$

$$\sqrt{m_\tau} = \sqrt{K} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{2}{9} + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( \frac{2}{9} + \frac{\pi}{6} \right) \right]. \quad (1.291)$$

$$m_\tau \approx 1776,984971 \quad (1.292)$$

La valeur obtenue pour la masse propre du muon se trouve alors tout à fait en dehors de l'intervalle de confiance retenu aujourd'hui. Mais cette valeur est tout à fait conforme à ce que l'on indiquait il y a un demi-siècle (105.659 MeV/c<sup>2</sup>). La masse du muon est-elle connue avec une précision expérimentale directement issue de nouvelles expériences, ou la précision est-elle due à une amélioration de la théorie interprétant ces expériences ? Si la précision expérimentale est nettement meilleure qu'il y a 50 ans, on devra considérer la valeur 2/9 comme une première approximation. Si la précision sur la masse propre du muon vient seulement d'un meilleur calcul de cette valeur, on devra chercher pourquoi les 2/3 et 2/9 donnent, avec une précision extraordinaire, ces rapports de masse.

## 1.8 La dimension – numérique (invdim)

On définit la *dimension – invariante* d'une quantité comme la puissance du rapport de similitude  $\sqrt{r}$  dans la transformation de cette quantité par la similitude  $R$  de dilatateur quelconque  $M$  de  $Cl_3$ . On abrège ceci avec l'acronyme **invdim**.

1. Comme  $\phi$  devient  $\phi' = M\phi$  et  $M = \sqrt{r}e^{i\theta}P$ , où  $P$  appartient à  $SL(2, \mathbb{C})$ , l'invariance de  $\phi$  est 1. L'invariance de  $\widehat{\phi}$ , de  $\widetilde{\phi} = \phi^\dagger$ , de  $\overline{\phi}$  est aussi 1. L'invariance de  $\phi^{-1}$  est  $-1$ .
2. Ensuite un vecteur contravariant tel que  $x$  ou  $J = D_0 = \phi\phi^\dagger$ , qui se transforme en  $J' = MJM^\dagger$ , a une invdim égale à 2.
3. Un vecteur covariant comme  $\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}$  a une invdim égale à  $-2$ .
4. Puisqu'on a  $m = m'r$  et  $\rho' = r\rho$ , on peut dire que  $\rho$  a une invdim de 2 et  $m$  a une invdim de  $-2$ .
5. Puisque le temps et l'espace varient de la même manière, toute vitesse a une invdim nulle.
6. Comme une accélération est la dérivée d'une vitesse son invdim est  $-2$ .
7. Le potentiel électromagnétique  $A$ , dans l'équation du second ordre, est lié au courant  $J$  par un produit scalaire. Ce vecteur doit donc être, comme  $J$ , un vecteur contravariant. On peut aussi utiliser le fait que le potentiel électromagnétique est lié à ses sources, qui sont les particules ayant une charge électrique (ou d'autres charges, notamment magnétique, forte et ainsi de suite). Donc  $A$  doit avoir une invdim égale à 2 et doit satisfaire :

$$A' = MAM^\dagger. \quad (1.293)$$

8. Pour que l'invariance de jauge puisse être compatible avec l'invariance relativiste,  $qA$  doit se transformer comme un vecteur covariant, tandis que  $A$  doit être contravariant. On obtient donc :

$$qA = \overline{M}q'A'\widehat{M} = \overline{M}q'MAM^\dagger\widehat{M} = q're^{i\theta}Ae^{-i\theta} = r^2q'A, \\ q = q'r^2; \quad q' = qr^{-2}. \quad (1.294)$$

L'invariance de  $q$  est donc  $-4$ . On peut remarquer que  $m$  et  $q$  n'ont pas la même invdim. Ceci est une différence importante entre la masse et la charge, qui ont le même statut d'invariant en relativité restreinte, mais qui ne l'ont plus dans l'invariance étendue à  $Cl_3^*$ . C'est pour cela que la synthèse entre gravitation et théories de jauge a été si difficile jusqu'ici.

9. Ensuite on a :

$$q = \frac{e}{\hbar c}; \quad qe = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha = q'e'; \quad qe = q'r^2e = q'e'. \quad (1.295)$$

$$e' = r^2e. \quad (1.296)$$

Une charge électrique, ou une charge magnétique, ont donc une invdim de 4, qui est aussi l'invariance d'une surface.

10. On a donc :

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{e'^2}{\hbar' c} = \frac{r^4 e^2}{\hbar' c} ; \quad e^2 \hbar' c = \hbar c r^4 e^2. \quad (1.297)$$

$$\hbar' = r^4 \hbar. \quad (1.298)$$

La constante de Planck est donc en réalité une variable quand le rapport de similitude n'est pas réduit à 1, et l'invariance de l'action est 8, c'est l'invariance d'un volume d'espace-temps (cela convient bien à la thermodynamique relativiste). On peut aussi remarquer qu'il n'est pas cohérent de donner à  $J^0$  le statut de densité de probabilité, mais que c'est cohérent pour  $J^0/\hbar c$  qui a la invariance attendue : -6.

11. Pour une masse propre  $m_0$  on a :

$$\frac{m_0 c}{\hbar} = m = r m' = r \frac{m'_0 c}{\hbar'} = r \frac{m'_0 c}{r^4 \hbar} = \frac{m'_0 c}{r^3 \hbar}. \quad (1.299)$$

Et ceci donne :

$$m'_0 = r^3 m_0. \quad (1.300)$$

Une masse propre a donc une invariance de 6. C'est l'invariance d'un volume. Charge et masse propre ne sont plus invariants, et ceci nécessite un changement dans nos habitudes. Parmi ces mauvaises habitudes dont on doit se débarrasser au plus vite est la supposition  $\hbar = 1$ . C'est un non sens ici puisque  $\hbar$  varie avec  $r$ . Toutes ces variations ne contredisent pas l'invariance relativiste au sens strict, qui est le cas particulier où  $r = 1$  : le concept d'invariance n'est plus pertinent dans ce cas<sup>32</sup>.

12. La pression, de dimension  $ML^{-1}T^{-2}$  a donc une invariance nulle.

13. On considère maintenant la part classique  $F = \nabla \hat{A}$  du champ électromagnétique. On a :

$$F = \overline{M} \nabla' \hat{M} \hat{A},$$

$$M F M^{-1} = M \overline{M} \nabla' \hat{M} \hat{A} M^{-1} = r e^{i\theta} \nabla' \hat{M} \hat{A} M^{-1} \quad (1.301)$$

$$= \nabla' \hat{M} \hat{A} r e^{i\theta} M^{-1} = \nabla' \hat{M} \hat{A} \overline{M} M M^{-1} = \nabla' \hat{A}' = F'. \quad (1.302)$$

32. Les variations de  $r$  changeant  $m_0$  et  $\hbar$  n'ont aucune conséquence sur les mesures de masse, qui sont toujours des mesures de rapport entre deux masses. Quand la physique est passée de la mécanique classique, où la masse est fixe, à la mécanique relativiste où les masses ne sont plus invariantes, seulement les masses au repos, il n'a pas été nécessaire de changer la masse unité : toute mesure de masse s'obtient à vitesse nulle dans le laboratoire, ou bien cette mesure est corrigée pour tenir compte de la vitesse de l'objet dont on mesure la masse. C'est la même chose ici, parce que toute masse propre et toute action varient dans le même rapport ( $r^3$  pour une masse propre,  $r^4$  pour une action), dans le laboratoire au moment où on effectue la mesure. Les variations de  $\hbar$ , qui reste un invariant relativiste au sens de l'invariance restreinte, sont donc parfaitement compatibles avec le remplacement de la masse standard par une action standard, plus précise et plus stable que le précédent prototype international de masse (IPK).

Comme  $M$  amène un  $\sqrt{r}$  tandis que  $M^{-1}$  amène un facteur  $1/\sqrt{r}$ , le champ électromagnétique a une invdim nulle et il en est de même pour les autres champs de jauge. Tous ces résultats sont cohérents avec les lois de la mécanique et de l'électromagnétisme : masse, énergie et impulsion ont la même invdim de 6. Une force mécanique ou électromagnétique a une invdim de 4, ce qui est cohérent avec la force exercée sur une charge puisque l'invdim de la charge est 4 tandis que l'invdim du champ est nulle.

Le fait que la invdim des champs de jauge soit nulle, et le fait qu'ils se transforment suivant  $F' = MFM^{-1}$  est très important, car ceci implique qu'un produit  $F_1F_2$  de deux tels champs vérifie la même loi de transformation :

$$F'_1F'_2 = MF_1M^{-1}MF_2M^{-1} = MF_1F_2M^{-1}. \quad (1.303)$$

C'est pourquoi les produits de champs de photons peuvent s'ajouter ensemble et peuvent suivre la statistique de Bose-Einstein (trouvée en fait en premier par Louis de Broglie dans sa thèse [55]). Pour les champs de la seconde quantification qui agissent comme opérateurs sur l'onde elle-même, ceci permet aussi la définition d'opérateurs de création et d'annihilation.

## 1.9 Espace-temps invariant

Quand nous avons présenté l'espace-temps double dans le livre du même nom [22], nous avons travaillé implicitement avec  $\rho$  sur un pied d'égalité avec  $r$ . C'est naturel car  $\rho' = r\rho$ . Plus généralement il n'y a pas de différence de structure entre un dilatateur  $M$  définissant la similitude  $R$ , et  $\phi(x)$ , qui sont tous deux des matrices complexes  $2 \times 2$ , c'est-à-dire des éléments de l'algèbre  $Cl_3$ . Pour être précis,  $\phi$  est une fonction de l'espace-temps à valeur dans  $Cl_3$ , ou, dit autrement,  $\phi$  est un champ de dilatateurs. Par conséquent,  $\phi$ , comme  $M$ , définit en chaque point de l'espace-temps une similitude  $D_x$ , de rapport  $\rho = \rho(x)$ , par :

$$D_x : X \mapsto x = \phi X \phi^\dagger. \quad (1.304)$$

Et les composantes  $D_\mu^\nu$  des quatre vecteurs  $D_\mu$  sont les termes de la matrice de la similitude  $D_x$  car on a :

$$\begin{aligned} x &= x^\mu \sigma_\mu = \phi X^\nu \sigma_\nu \phi^\dagger = X^\nu \phi \sigma_\nu \phi^\dagger = X^\nu D_\nu = X^\nu D_\nu^\mu \sigma_\mu, \\ x^\mu &= D_\nu^\mu X^\nu. \end{aligned} \quad (1.305)$$

Il n'y a pas de différence de nature entre le produit  $M'M$  induisant la composition des similitudes  $R' \circ R$  et le produit  $M\phi$  utilisé pour la transformation de l'onde dans une similitude, et qui induit aussi une composition des similitudes  $D_{x'} = R \circ D_x$ , car :

$$x' = MxM^\dagger = M\phi X \phi^\dagger M^\dagger = (M\phi)X(M\phi)^\dagger = \phi' X \phi'^\dagger \quad (1.306)$$

Donc le  $X$  introduit en (1.304) ne change pas quand il est vu par l'observateur en  $x$  ou par l'observateur en  $x'$ . Il est indépendant de l'observateur. On peut aussi remarquer que la invdim de  $X$  est nulle, parce que la invdim de  $x$  est 1 tandis que celle de  $\phi$  ou de  $\phi^\dagger$  est 1/2. On peut donc appeler l'ensemble des  $X$  **l'espace-temps invariant**.

## 1.10 Impulsion-énergie, force de Lorentz

Le calcul de la force de Lorentz peut être fait en algèbre d'espace-temps ; cela nécessite l'utilisation de la méthode de calcul expliquée en [82] et [88]. Comme l'onde de l'électron est à valeur seulement dans la sous-algèbre paire, et comme cette sous-algèbre paire est isomorphe à l'algèbre  $Cl_3$ , il est possible, et plus simple, de calculer avec  $Cl_3$ . Première question à se poser : quelle est la densité d'impulsion-énergie qui peut être attachée à l'onde de l'électron ? La théorie quantique des champs déduit cette densité de la densité lagrangienne, invariante sous les translations d'espace-temps. Mais la densité lagrangienne pose aussi un problème : plusieurs références, anciennes [2][111] ou nouvelles comme Wikipédia, donnent pour cette densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (1.307)$$

Outre une erreur de signe, parce qu'ils indiquent une densité d'énergie négative, ces auteurs semblent apparemment ignorer le caractère complexe de leur densité lagrangienne. D'autres auteurs sont plus précis [101] et donnent pour la densité lagrangienne :

$$\mathcal{L} = \Re(-i\bar{\psi}\partial\psi) + m\bar{\psi}\psi. \quad (1.308)$$

C'est mieux, même si le terme d'interaction électromagnétique est absent, donc il s'agit d'un électron sans charge électrique ! Il faut aussi rappeler que le passage de cette forme de densité à celle de notre équation d'onde améliorée remplace  $\bar{\psi}\psi = \rho \cos \beta$  par  $\rho$  et tient compte des deux masses propres. Il est intéressant de voir pourquoi l'absence de rigueur dans ce domaine de la théorie n'a pas eu d'impact sur les calculs qui viennent ensuite, et donc reste inaperçue. Cette densité lagrangienne a été obtenue en (1.135) comme la partie réelle de l'onde (le corps des réels est, par convention, inclus dans toute algèbre de Clifford sur ce corps), qui est aussi la partie réelle (au sens des complexes) de la trace de la matrice, puisqu'on calcule en algèbre de Pauli. Cette trace a aussi une partie imaginaire qui donne la conservation du courant de probabilité ( $\partial_\mu J^\mu = 0$ ). Ceci explique pourquoi la densité lagrangienne avec la forme complexe (1.308) est néanmoins correcte, la partie imaginaire étant automatiquement nulle. De plus la formule avec les complexes est plus courte, plus simple et donc convient bien à une introduction. La raison pour laquelle les deux formules de calcul de  $\mathcal{L}$  donnent les mêmes résultats est l'invariance de jauge électrique, associée par le théorème de Noether à la conservation du courant de probabilité. On peut donc

commencer les calculs à partir de (1.308), et utiliser des grandeurs à valeur complexe pour calculer des densités qui seront néanmoins toutes réelles, ceci résultant de l'invariance de jauge électrique.

On a vu en 1.5.5 que la densité lagrangienne était somme d'une partie droite et d'une partie gauche. Il en résulte que le tenseur d'impulsion-énergie lié à cette densité lagrangienne est aussi somme d'une impulsion-énergie gauche dépendant de l'onde gauche  $\eta$  et d'une impulsion-énergie droite dépendant de l'onde droite  $\xi$  (mais avec en commun, dans les deux parties de la somme, le vecteur  $\mathbf{v}$  et l'angle  $\beta$ , qui dépendent de  $\xi$  et  $\eta$ ). On retrouvera au chapitre 2 cette importante distinction entre onde droite et onde gauche, une partition qui est invariante sous  $Cl_3^*$ , donc invariante relativiste. L'idée que ces ondes gauche et droite sont les champs fondamentaux, nous la devons à G. Lochak [89]–[95]. Il est parti de là pour sa théorie du monopôle magnétique. Cette partition gauche-droite de l'onde est en fait importante pour toutes les densités tensorielles qu'on obtient à partir des spineurs. L'existence d'un tenseur d'impulsion-énergie  $T_R$  pour les ondes droites et d'un autre tenseur  $T_L$  pour les ondes gauches entraîne l'existence de **deux tenseurs d'impulsion-énergie**, le tenseur de Tétrode  $T = T_R + T_L$  et le tenseur  $V = T_L - T_R$  dont O. Costa de Beauregard avait noté l'existence et le caractère ininterprété jusqu'alors. [54] L'interprétation de ce tenseur est donc simple, c'est la différence entre l'impulsion-énergie droite et l'impulsion-énergie gauche. Pour l'équation de Dirac on a :

$$T_\nu^\mu = \frac{m_a}{k\mathbf{l}} T_{L\nu}^\mu + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} T_{R\nu}^\mu; \quad V_\nu^\mu = \frac{m_a}{k\mathbf{l}} T_{L\nu}^\mu - \frac{m_a}{k\mathbf{r}} T_{R\nu}^\mu, \quad (1.309)$$

$$T_{L\nu}^\mu = \Re \left[ \eta^{1\dagger} \sigma^\mu \left( -i\partial_\nu + qA_\nu + m_g(\cos\beta)\mathbf{v}_\nu \right) \eta^1 \right] = \Re(\eta^{1\dagger} \sigma^\mu d_\nu \eta^1),$$

$$d_\nu = -i\partial_\nu + qA_\nu + m_g(\cos\beta)\mathbf{v}_\nu, \quad (1.310)$$

$$T_{R\nu}^\mu = \Re \left[ \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \left( -i\partial_\nu + qA_\nu + m_g(\cos\beta)\mathbf{v}_\nu \right) \xi^1 \right] = \Re(\xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_\nu \xi^1).$$

Pour l'équation améliorée, on a toujours (1.309) Les tenseurs  $T_L$  et  $T_R$  se simplifient en :

$$T_{L\nu}^\mu = \Re \left[ \eta^{1\dagger} \sigma^\mu \left( -i\partial_\nu + qA_\nu + m_g\mathbf{v}_\nu \right) \eta^1 \right], \quad (1.311)$$

$$T_{R\nu}^\mu = \Re \left[ \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \left( -i\partial_\nu + qA_\nu + m_g\mathbf{v}_\nu \right) \xi^1 \right]. \quad (1.312)$$

Utilisant l'algèbre d'espace-temps, Hestenes [78]<sup>33</sup> interprète le tenseur d'impulsion-énergie  $T(u) = T(u, x)$  comme donnant le flux d'impulsion-énergie

33. Pour obtenir la dynamique de l'électron, Hestenes s'est servi d'un tenseur différent [78], contenant seulement les termes différentiels. Cependant il a ajouté une partie électromagnétique, son tenseur est donc identique au nôtre. Le calcul d'Hestenes est plus compliqué car ne séparant pas une partie droite et une partie gauche. Ce n'est qu'avec un choix adéquat des matrices  $\gamma_\mu$  que l'on sépare aisément partie droite et partie gauche. Mais Hestenes, parce qu'il n'utilise que l'algèbre d'espace-temps  $Cl_{1,3}$ , différente de l'algèbre  $M_2(\mathbb{C})$  des matrices de Dirac, n'utilise jamais les commodités du calcul matriciel.

à travers une hypersurface de normale  $u$  au point d'espace-temps  $x$ . C'est une fonction vectorielle d'une variable vectorielle <sup>34</sup> :

$$T(u) = T(u_\mu \sigma^\mu) = u_\mu T(\sigma^\mu). \quad (1.313)$$

Donc ce tenseur est complètement défini par les vecteurs :

$$T^\mu = T(\sigma^\mu), \quad (1.314)$$

qui vérifient :

$$T^\mu = T^\mu_\nu \sigma^\nu ; \quad T^\mu_\nu = T^\mu \cdot \sigma_\nu. \quad (1.315)$$

On obtient alors, avec l'équation améliorée :

$$\partial_\mu T^\mu = (\partial_\mu T^\mu) \sigma^\nu, \quad (1.316)$$

$$\partial_\mu T^\mu_{L\nu} = \frac{i}{2} \partial_\mu [-\eta^{1\dagger} \sigma^\mu \partial_\nu \eta^1 + (\partial_\nu \eta^{1\dagger}) \sigma^\mu \eta^1] + \partial_\mu [(qA_\nu + m_g v_\nu) D_L^{1\mu}],$$

$$\partial_\mu T^\mu_{R\nu} = \frac{i}{2} \partial_\mu [-\xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\nu \xi^1 + (\partial_\nu \xi^{1\dagger}) \hat{\sigma}^\mu \xi^1] + \partial_\mu [(qA_\nu + m_g v_\nu) D_R^{1\mu}],$$

où les dérivées partielles commutent, et le courant  $\mathbf{J}$  se conserve. On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_\mu [(qA_\nu + m_g v_\nu) D_L^{1\mu}] &= (q\partial_\mu A_\nu + m_g \partial_\mu v_\nu) D_L^{1\mu} + (qA_\nu + m_g v_\nu) \partial_\mu D_L^{1\mu} \\ &= (q\partial_\mu A_\nu + m_g \partial_\mu v_\nu) D_L^{1\mu} \end{aligned} \quad (1.317)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu [(qA_\nu + m_g v_\nu) D_R^{1\mu}] &= (q\partial_\mu A_\nu + m_g \partial_\mu v_\nu) D_R^{1\mu} + (qA_\nu + m_g v_\nu) \partial_\mu D_R^{1\mu} \\ &= (q\partial_\mu A_\nu + m_g \partial_\mu v_\nu) D_R^{1\mu} \end{aligned} \quad (1.318)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu_{L\nu} &= \frac{i}{2} [-(\nabla \eta^1)^\dagger \partial_\nu \eta^1 - \eta^{1\dagger} \partial_\nu (\nabla \eta^1) + \partial_\nu (\nabla \eta^1)^\dagger \eta^1 + \partial_\nu \eta^{1\dagger} \nabla \eta^1] \\ &\quad + (q\partial_\mu A_\nu + m_g \partial_\mu v_\nu) D_L^{1\mu}, \end{aligned} \quad (1.319)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu_{R\nu} &= \frac{i}{2} [-(\widehat{\nabla} \xi^1)^\dagger \partial_\nu \xi^1 - \xi^{1\dagger} \partial_\nu (\widehat{\nabla} \xi^1) + \partial_\nu (\widehat{\nabla} \xi^1)^\dagger \xi^1 + \partial_\nu \xi^{1\dagger} \widehat{\nabla} \xi^1] \\ &\quad + (q\partial_\mu A_\nu + m_g \partial_\mu v_\nu) D_R^{1\mu}. \end{aligned} \quad (1.320)$$

Puis on utilise les équations d'onde de  $\eta^1$  et de  $\xi^1$  qui équivalent au système :

$$\begin{aligned} \nabla \eta^1 &= -i(qA + m_g v) \eta^1; \quad (\nabla \eta^1)^\dagger = i\eta^{1\dagger} (qA + m_g v), \\ \widehat{\nabla} \xi^1 &= -i(q\hat{A} + m_g \hat{v}) \xi^1; \quad (\widehat{\nabla} \xi^1)^\dagger = i\xi^{1\dagger} (q\hat{A} + m_g \hat{v}). \end{aligned} \quad (1.321)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu_{L\nu} &= [q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + m_g(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)] D_L^{1\mu}, \\ \partial_\mu T^\mu_{R\nu} &= [q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + m_g(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)] D_R^{1\mu}, \\ k\partial_\mu T^\mu_\nu &= q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \left( \frac{m_a}{1} D_L^{1\mu} + \frac{m_a}{\mathbf{r}} D_R^{1\mu} \right) + \frac{m_a m_g}{m} (\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu) J^\mu. \end{aligned} \quad (1.322)$$

<sup>34</sup>. Pour la relativité générale, la physique quantique semble indiquer que les vecteurs sont les seuls tenseurs utiles.

Les champs électromagnétique  $F$  et gravitationnel  $G$  s'introduisent ici avec :

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad G_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu. \quad (1.323)$$

On obtient alors :

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = q F_{\mu\nu} \frac{m_a}{m} \mathbf{J}^\mu + \frac{m_a m_g}{m k} G_{\mu\nu} \mathbf{J}^\mu, \quad (1.324)$$

$$\frac{m_a}{m} \mathbf{J} = \frac{m_a}{k \mathbf{l}} D_L^1 + \frac{m_a}{k \mathbf{r}} D_R^1. \quad (1.325)$$

Lorsque  $m \approx \mathbf{l} \approx \mathbf{r}$  et avec le champ total :

$$\mathbf{F} := F + \frac{m}{q} G, \quad (1.326)$$

on obtient :

$$\partial_\mu T^\mu \approx (F_{\mu\nu} + \frac{m}{q} G_{\mu\nu}) q \mathbf{J}^\mu \sigma^\nu = \mathbf{F}_{\mu\nu} q \mathbf{J}^\mu \sigma^\nu. \quad (1.327)$$

On obtient alors la relation de Lorentz pour un vecteur d'espace-temps  $\mathbf{j}$  (densité de charge – densité de courant électrique) sous la forme relativiste :

$$\mathbf{j} = q \mathbf{J} = \frac{q}{k} (D_L^1 + D_R^1); \quad \partial_\mu T^\mu = \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{j}^\mu \sigma^\nu. \quad (1.328)$$

Donc avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \vec{E} + i \vec{H} \\ \mathbf{j} &= q \mathbf{J} = \rho_e + \vec{\mathbf{j}}; \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \vec{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (1.329)$$

où  $\vec{E}$  est le champ électrique,  $\vec{H}$  est le champ magnétique,  $\rho_e$  est la densité de charge électrique,  $\vec{\mathbf{j}}$  est la densité de courant électrique et  $\vec{\mathbf{f}}$  est la densité de force, (1.328) est équivalent à :

$$\vec{\mathbf{f}} = \rho_e \vec{E} + \vec{\mathbf{j}} \times \vec{H}; \quad \mathbf{f}_0 = \vec{E} \cdot \vec{\mathbf{j}}. \quad (1.330)$$

Ceci est très important pour l'unification des lois physiques : en dehors de la force de Lorentz que l'on obtient comme conséquence de l'équation de Dirac, linéaire ou améliorée, seul le champ de gravitation est capable de donner la force gravitationnelle comme une conséquence des équations du champ. On peut même dire que la mécanique quantique relativiste fait mieux que la relativité générale, car elle obtient ce résultat avec une charge quantifiée, finie, alors que la force gravitationnelle n'est obtenue que comme un cas limite, pour une masse infinitésimale. On peut donc dire que le modèle standard, dans la forme complètement relativiste utilisée ici, est au moins aussi apte que la relativité générale à obtenir le mouvement des sources du champ à partir de la loi d'évolution du champ.

### 1.11 Le champ électromagnétique

Les lois de l'électromagnétisme, en admettant l'existence de charges magnétiques (monopôles magnétiques), se réduisent aux deux lois simples suivantes (le calcul détaillé est en A.3.10) :

$$F = \nabla \widehat{A + iB}; \quad \nabla \widehat{F} = \mathbf{j} - i\mathbf{k}, \quad (1.331)$$

où  $F$  est le champ électromagnétique (bivecteur d'espace-temps),  $A$  le potentiel électrique et  $\mathbf{j}$  la densité de courant électrique,  $B$  le potentiel magnétique et  $\mathbf{k}$  la densité de courant magnétique.  $A$ ,  $B$ ,  $\mathbf{j}$  et  $\mathbf{k}$  sont des vecteurs d'espace-temps, par exemple  $\mathbf{j}$  comporte un vecteur d'espace  $\vec{\mathbf{j}}$  et une composante de temps qui est la densité de charge électrique. En présence de charges et courants magnétiques, les lois de l'électromagnétisme sans charge magnétique ne changent que par l'ajout de potentiels et courants magnétiques. Comme  $\bar{F} = -F$  et  $\widehat{F} = -F^\dagger$ , on a au second ordre :

$$\square \widehat{A + iB} = (\widehat{\nabla} \nabla) \widehat{A + iB} = \widehat{\nabla} (\nabla \widehat{A + iB}) = \widehat{\nabla} F = \widehat{\mathbf{j}} + i\widehat{\mathbf{k}} \quad (1.332)$$

$$F = F_e + F_m; \quad F_e := \nabla \widehat{A}; \quad F_m := \nabla (\widehat{iB}); \quad \square A = \mathbf{j}; \quad \square B = -\mathbf{k}. \quad (1.333)$$

Comme  $\mathbf{J}$  est la somme des courants chiraux, on étudie les champs gauche et droit tels que :

$$F_L := \nabla i \widehat{D}_L^1; \quad F_R := \nabla i \widehat{D}_R^1. \quad (1.334)$$

Le champ gauche  $F_L$  vérifie :

$$\begin{aligned} F_L &= \vec{E}_L + i\vec{H}_L = (-i)(\partial_0 - \vec{\partial})(D_L^{10} - \vec{D}_L^1) \\ &= -i\partial_\mu D_L^{1\mu} + i(\partial_0 \vec{D}_L^1 + \vec{\partial} D_L^{10}) + \vec{\partial} \times \vec{D}_L^1. \end{aligned} \quad (1.335)$$

On obtient donc :

$$0 = \partial_\mu D_L^{1\mu} \quad (1.336)$$

$$\vec{H}_L = \partial_0 \vec{D}_L^1 + \vec{\partial} D_L^{10}; \quad \vec{E}_L = \vec{\partial} \times \vec{D}_L^1. \quad (1.337)$$

Le champ droit  $F_R$  vérifie de même :

$$0 = \partial_\mu D_R^{1\mu} \quad (1.338)$$

$$\vec{H}_R = \partial_0 \vec{D}_R^1 + \vec{\partial} D_R^{10}; \quad \vec{E}_R = \vec{\partial} \times \vec{D}_R^1. \quad (1.339)$$

On écrit les dérivations covariantes de (1.208), pour l'équation améliorée, sous la forme :

$$d_\mu = -i\partial_\mu + s_\mu; \quad s_\mu := qA_\mu + m_g v_\mu. \quad (1.340)$$

Les équations d'onde de  $\eta^1$  et  $\xi^1$  s'expriment alors sous la forme :

$$\sigma^\mu \partial_\mu \eta^1 = -i\sigma^\mu s_\mu \eta^1, \quad (1.341)$$

$$\widehat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^1 = -i\widehat{\sigma}^\mu s_\mu \xi^1. \quad (1.342)$$

Les densités tensorielles d'impulsion-énergie gauche et droite s'écrivent avec (1.205), tant pour l'équation de Dirac que pour l'équation améliorée :

$$\begin{aligned} T_{L\nu}^\mu &= \frac{1}{2} \left[ \eta^{1\dagger} \sigma^\mu (-i\partial_\nu \eta^1 + s_\nu \eta^1) + (i\partial_\nu \eta^{1\dagger} + s_\nu \eta^{1\dagger}) \sigma^\mu \eta^1 \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[ -\eta^{1\dagger} \sigma^\mu \partial_\nu \eta^1 + (\partial_\nu \eta^{1\dagger}) \sigma^\mu \eta^1 \right] + s_\nu \eta^{1\dagger} \sigma^\mu \eta^1, \end{aligned} \quad (1.343)$$

$$\begin{aligned} T_{R\nu}^\mu &= \frac{1}{2} \left[ \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu (-i\partial_\nu \xi^1 + s_\nu \xi^1) + (i\partial_\nu \xi^{1\dagger} + s_\nu \xi^{1\dagger}) \hat{\sigma}^\mu \xi^1 \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[ -\xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\nu \xi^1 + (\partial_\nu \xi^{1\dagger}) \hat{\sigma}^\mu \xi^1 \right] + s_\nu \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu \xi^1. \end{aligned} \quad (1.344)$$

L'équation améliorée donne pour l'onde gauche :

$$\partial_0 \eta^1 + \sigma^1 \partial_1 \eta^1 = \sigma_2 \partial_2 \eta^1 + \sigma_3 \partial_3 \eta^1 - i(s_0 + s_1 \sigma^1 + s_2 \sigma^2 + s_3 \sigma^3) \eta^1, \quad (1.345)$$

Multipliant à gauche par  $\eta^{1\dagger} \sigma^1$  on obtient :

$$\begin{aligned} &\eta^{1\dagger} \sigma^1 \partial_0 \eta^1 + \eta^{1\dagger} \partial_1 \eta^1 \\ &= i\eta^{1\dagger} \sigma^3 \partial_2 \eta^1 - i\eta^{1\dagger} \sigma^2 \partial_3 \eta^1 - i\eta^{1\dagger} (s_0 \sigma^1 + s_1 - i\sigma^3 s_2 + i\sigma^2 s_3) \eta^1. \end{aligned} \quad (1.346)$$

En prenant l'adjoint, puis en ajoutant, on obtient :

$$\begin{aligned} &\partial_0 (\eta^{1\dagger} \sigma^1 \eta^1) + \partial_1 (\eta^{1\dagger} \sigma^0 \eta^1) \\ &= i\eta^{1\dagger} \sigma^3 \partial_2 \eta^1 - i(\partial_2 \eta^{1\dagger}) \sigma^3 \eta^1 - 2s_2 \eta^{1\dagger} \sigma^3 \eta^1 + 2s_3 \eta^{1\dagger} \sigma^2 \eta^1 \\ &\quad - i\eta^{1\dagger} \sigma^2 \partial_3 \eta^1 + i(\partial_3 \eta^{1\dagger}) \sigma^2 \eta^1. \end{aligned} \quad (1.347)$$

Il faut noter que le présent calcul est complètement dépendant de la dimension trois de l'espace. C'est lié à l'existence du produit vectoriel et du produit mixte, par l'intermédiaire de la dimension  $1 + 3 + 3 + 1$  de l'algèbre  $Cl_3$ , qui donne  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i$ , etc. Ces égalités sont à peu près invisibles lorsqu'on se cantonne à l'algèbre de Clifford de l'espace-temps. On obtient :

$$\begin{aligned} \partial_0 D_L^{11} + \partial_1 D_L^{10} &= -2T_{L2}^3 + 2T_{L3}^2, \\ H_L^1 &= 2(T_{L3}^2 - T_{L2}^3). \end{aligned} \quad (1.348)$$

Une permutation circulaire des indices nous donne :

$$\begin{aligned} H_L^1 &= 2(T_{L3}^2 - T_{L2}^3), \\ H_L^2 &= 2(T_{L1}^3 - T_{L3}^1), \\ H_L^3 &= 2(T_{L2}^1 - T_{L1}^2), \end{aligned} \quad (1.349)$$

En repartant maintenant de (1.346) et en soustrayant, on obtient :

$$\begin{aligned} &\eta^{1\dagger} \sigma^1 \partial_0 \eta^1 - (\partial_0 \eta^{1\dagger}) \sigma^1 \eta^1 + 2is_0 \eta^{1\dagger} \sigma^1 \eta^1 \\ &+ \eta^{1\dagger} \sigma^0 \partial_1 \eta^1 - (\partial_1 \eta^{1\dagger}) \sigma^0 \eta^1 + 2is_1 \eta^{1\dagger} \sigma^0 \eta^1 \\ &= i\partial_2 (\eta^{1\dagger} \sigma^3 \eta^1) - i\partial_3 (\eta^{1\dagger} \sigma^2 \eta^1). \end{aligned} \quad (1.350)$$

En divisant par  $i$  et en permutant les indices, on obtient :

$$\begin{aligned} E_L^1 &= 2(T_{L0}^1 + T_{L1}^0), \\ E_L^2 &= 2(T_{L0}^2 + T_{L2}^0), \\ E_L^3 &= 2(T_{L0}^3 + T_{L1}^0). \end{aligned} \quad (1.351)$$

Le lien étroit obtenu ici entre le champ électromagnétique et le tenseur d'impulsion-énergie de l'électron est donc propre à l'espace de dimension trois. C'est une raison suffisante de suivre Baylis [2] et de préférer  $Cl_3$  à  $Cl_{1,3}$ , algèbre d'espace-temps utilisée précédemment par de nombreux physiciens, comme Hestenes, Boudet, Lasenby. Aucun d'eux n'a obtenu les relations (1.351), parce que l'algèbre d'espace-temps n'est pas l'outil idéal pour distinguer gauche et droite. L'équation de Dirac nous donne pour les ondes droites :

$$\partial_0 \xi^1 + \sigma_1 \partial_1 \xi^1 = \sigma^2 \partial_2 \xi^1 + \sigma^3 \partial_3 \xi^1 - i(s_0 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3) \xi^1. \quad (1.352)$$

Multipliant à gauche par  $\xi^{1\dagger} \sigma_1$  on obtient :

$$\begin{aligned} \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^1 \partial_0 \xi^1 + \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^0 \partial_1 \xi^1 + i \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^3 \partial_2 \xi^1 - i \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^2 \partial_3 \xi^1 \\ = -i(s_0 D_R^{11} + s_1 D_R^{10} + i s_2 D_R^{13} - i s_3 D_R^{12}). \end{aligned} \quad (1.353)$$

Puis on utilise l'adjoint et on ajoute, ce qui donne :

$$\partial_0 D_R^{11} + \partial_1 D_R^{10} = 2T_{R2}^3 - 2T_{R3}^2, \quad (1.354)$$

$$\begin{aligned} H_R^1 &= 2(T_{R3}^2 - T_{R2}^3), \\ H_R^2 &= 2(T_{R1}^3 - T_{R3}^1), \\ H_R^3 &= 2(T_{R2}^1 - T_{R1}^2). \end{aligned} \quad (1.355)$$

Tandis qu'en retranchant, on obtient :

$$\begin{aligned} E_R^1 &= 2(T_{R0}^1 + T_{R1}^0), \\ E_R^2 &= 2(T_{R0}^2 + T_{R2}^0), \\ E_R^3 &= 2(T_{R0}^3 + T_{R3}^0). \end{aligned} \quad (1.356)$$

En considérant le champ électromagnétique complet, avec partie gauche et partie droite :

$$F = \vec{E} + i\vec{H} = \frac{m_a}{k\mathbf{l}} F_L + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} F_R, \quad (1.357)$$

$$\vec{E} = \frac{m_a}{k\mathbf{l}} \vec{E}_L + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} \vec{E}_R; \quad \vec{H} = \frac{m_a}{k\mathbf{l}} \vec{H}_L + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} \vec{H}_R, \quad (1.358)$$

ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
 H^1 &= \frac{m_a}{k\mathbf{l}} H_L^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} H_R^1 \\
 &= \frac{2m_a}{k\mathbf{l}} (T_{L3}^2 - T_{L2}^3) + \frac{2m_a}{k\mathbf{r}} (T_{R3}^2 - T_{R2}^3) \\
 &= 2 \left( \frac{m_a}{k\mathbf{l}} T_{L3}^2 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} T_{R3}^2 \right) - 2 \left( \frac{m_a}{k\mathbf{l}} T_{L2}^3 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} T_{R2}^3 \right) \\
 &= 2(T_3^2 - T_2^3).
 \end{aligned} \tag{1.359}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
 E^1 &= \frac{m_a}{k\mathbf{l}} E_L^1 - \frac{m_a}{k\mathbf{r}} E_R^1 \\
 &= \frac{2m_a}{k\mathbf{l}} (T_{L0}^1 + T_{L1}^0) + \frac{2m_a}{k\mathbf{r}} (T_{R0}^1 + T_{R1}^0) \\
 &= 2 \left( \frac{m_a}{k\mathbf{l}} T_{L0}^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} T_{R0}^1 \right) + 2 \left( \frac{m_a}{k\mathbf{l}} T_{L1}^0 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} T_{R1}^0 \right) \\
 &= 2(T_0^1 + T_1^0).
 \end{aligned} \tag{1.360}$$

Si donc on suppose :

$$B = \frac{m_a}{m} \mathbf{J} = \frac{m_a}{k\mathbf{l}} D_L^1 + \frac{m_a}{k\mathbf{r}} D_R^1; \quad F = \vec{E} + i\vec{H} = \nabla i\widehat{B}, \tag{1.361}$$

alors on a :

$$\begin{aligned}
 H^1 &= 2(T_3^2 - T_2^3); \quad E^1 = 2(T_0^1 + T_1^0), \\
 H^2 &= 2(T_1^3 - T_3^1); \quad E^2 = 2(T_0^2 + T_2^0), \\
 H^3 &= 2(T_2^1 - T_1^2); \quad E^3 = 2(T_0^3 + T_3^0).
 \end{aligned} \tag{1.362}$$

Les composantes du champ électromagnétique sont donc somme et différence des composantes du tenseur d'impulsion-énergie de l'onde électronique, le tenseur de Tétrade  $T$ . Ce champ électromagnétique est un champ purement bivectoriel, ( $F = \vec{E} + i\vec{H}$ ) sans partie scalaire ni partie pseudo-scalaire : ( $F = a + \vec{E} + i\vec{H} + ib$  avec  $a = 0$  et  $b = 0$ ). Cela vient du fait que  $F$  est le gradient d'un pseudo-vecteur d'espace-temps (donc sans partie pseudo-scalaire) et de divergence d'espace-temps nulle, donc sans partie scalaire et cela vient aussi de la conservation des courants  $D_L$  et  $D_R$ . On a vu en 1.8 que le champ  $F$  est de invdim nulle, car il se transforme, sous une similitude induite par un dilatateur  $M$  de  $Cl_3^*$  comme :  $F \mapsto F' = MFM^{-1}$ .

Le potentiel  $A$  présent dans l'équation d'onde ne peut être confondu avec le potentiel  $iB$ , qui n'est pas un vecteur d'espace-temps mais un pseudo-vecteur. En outre le potentiel  $A$ , on l'a vu dans le cas de l'atome d'hydrogène, est exactement en  $1/r$ . On a :

$$\square(A + iB) = q(j - ik); \quad \square A = qj; \quad \square B = -qk. \tag{1.363}$$

Donc le potentiel  $A$  n'est pas proportionnel à  $\mathbf{J}$ , mais dépend du courant par l'intermédiaire du dalembertien :

$$A = \square^{-1}(e\mathbf{J}), \quad (1.364)$$

ce qui amène le calcul avec les potentiels avancés ou retardés des fonctions de Green.

Le champ électromagnétique n'a pas en propre une densité lagrangienne et un tenseur d'impulsion-énergie associé, parce que **le champ électromagnétique lui-même est cette impulsion-énergie**. Dans la lumière, ceci est directement lié à l'existence de quanta d'impulsion-énergie, comme Einstein l'a compris en 1905 [67], quanta nommés aujourd'hui photons.

## 1.12 Le principe d'exclusion de Pauli

Le calcul des niveaux d'énergie dans le cas de l'ion  $\text{He}^+$  fut considéré comme un succès majeur du modèle de Bohr, où l'électron est une particule ponctuelle chargée se déplaçant dans le champ électrique créé par la double charge du noyau. Lorsque, par la suite, l'onde quantique de l'électron fut découverte, le calcul devint beaucoup plus difficile, notamment parce qu'il a fallu expliquer pourquoi les deux électrons d'un atome d'hélium neutre ne peuvent pas occuper le même état. Cette impossibilité fut de plus généralisée par Pauli : la liste des nombres quantiques caractérisant chaque état quantique est nécessairement différente pour chacun des électrons d'un cortège électronique (principe d'exclusion), dans n'importe quel atome. On a rendu compte de ce principe en supposant que l'onde d'un système de deux électrons était le produit antisymétrique  $\psi = \psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1$  de l'onde de chaque électron [59]. Même dans le cas non relativiste, d'ondes à valeur dans  $\mathbb{C}$ , cela entraîne des difficultés, parce que l'onde  $\psi$  devient une fonction de sept variables, les trois coordonnées spatiales de chaque particule, plus le temps. Et pour un atome comportant  $n$  électrons, l'onde devient une fonction de  $3n + 1$  variables. Même si l'utilisation d'un espace de configuration est usuelle en mécanique hamiltonienne, c'est forcément étrange par rapport au champ de gravitation, qui ne change pas de nature quand on casse un objet en deux parties séparées. Et les difficultés sont encore plus grandes quand on doit tenir compte du spin, parce qu'avec le spin 1/2 l'onde est à valeur dans  $\mathbb{C}^2$  avec l'équation de Pauli, et dans  $\mathbb{C}^4$  avec l'équation de Dirac. Or  $\mathbb{C}^4$  n'est pas un anneau, donc on utilise un produit tensoriel pour pouvoir antisymétriser l'onde. On retombe sur la difficulté du changement de nature de l'onde suivant le nombre de particules, qui éloigne toute perspective de champ unitaire incluant la gravitation.

La mécanique quantique non relativiste utilise une équation d'onde linéaire, ce qui rend compte de l'addition et de la soustraction des ondes et permet donc une explication simple des phénomènes d'interférence. En

conséquence, c'est de la multiplication que l'on se sert pour justifier le principe d'exclusion, pour un système de deux électrons on suppose :

$$\psi_{12} = \psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1 = -\psi_{21}; \quad \psi_{11} = 0. \quad (1.365)$$

Or nous disposons maintenant d'une équation d'onde non linéaire, pour laquelle la somme de deux fonctions d'onde solutions de l'équation d'onde n'a aucune raison d'être, sauf possible exception, une solution de l'équation d'onde. La première version du principe d'exclusion, s'exprime simplement par : **pour les électrons des atomes et pour chaque liste de nombres quantiques, un seul électron peut être présent.** Si l'électron est l'onde électronique et rien d'autre, l'exclusion est automatiquement réalisée si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1- Pour chaque liste de nombres quantiques, il existe une solution unique à l'équation d'onde. On explique au chapitre C pourquoi, avec l'équation améliorée, cette règle est toujours satisfaite.

2- La somme d'une fonction d'onde avec elle-même est impossible. Et c'est aussi le cas si l'onde est normalisée et si l'ajout des ondes concerne aussi les courants, car on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 + \phi_2 | \phi_1 + \phi_2 \rangle &= \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle + \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1 + 1 = 2, \\ \langle \phi + \phi | \phi + \phi \rangle &= 4 \langle \phi | \phi \rangle = 4 \neq 2, \end{aligned} \quad (1.366)$$

or la normalisation vient de l'identité entre la masse-énergie de l'onde et la somme sur tout l'espace de la densité d'énergie de l'onde. L'impossibilité d'avoir deux électrons dans le même état peut donc découler de ce que les courants gauche et droit des deux électrons s'ajoutent (addition des potentiels électromagnétiques) et de ce que les densités d'énergie, composantes de temps du tenseur de Tétrode, s'ajoutent également (addition des champs électromagnétiques). De plus les lois de la mécanique comportent l'additivité des moments cinétiques, qui se traduit en mécanique quantique relativiste par l'addition des nombres quantiques magnétiques  $\lambda$ . Comme ces nombres quantiques peuvent être négatifs, cette addition des moments cinétiques peut se traduire par une soustraction des nombres  $|\lambda|$ . La forme générale des solutions de l'équation améliorée, en coordonnées sphériques, est (voir le Chapitre C) :

$$\begin{aligned} \phi &= \Omega X e^{(\lambda\varphi - Ex^0)i_3}; \quad X = \begin{pmatrix} AU & -\bar{C}V \\ BV & \bar{D}U \end{pmatrix}; \quad \Omega = \frac{e^{(-\varphi/2)i_3} e^{(-\theta/2)i_2}}{r\sqrt{\sin\theta}}, \\ U' - \frac{\lambda}{\sin\theta}U &= -\kappa V; \quad V' + \frac{\lambda}{\sin\theta}V = \kappa U. \end{aligned} \quad (1.367)$$

où  $\kappa$  est un entier naturel non nul, et où  $\lambda$  peut prendre toutes les valeurs demi-entières depuis  $-\kappa + \frac{1}{2}$  jusqu'à  $\kappa - \frac{1}{2}$ . Les fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des fonctions de la variable radiale  $r$  à valeur complexe, solutions du

système radial :

$$\begin{aligned}
\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)D - iD' - i\frac{\kappa}{r}B + \mathbf{l}e^{ir_1}A &= 0, \\
\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)B + iB' + i\frac{\kappa}{r}D + \mathbf{l}e^{ir_1}C &= 0, \\
\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)A + iA' + i\frac{\kappa}{r}C - \mathbf{r}e^{-ir_1}D &= 0, \\
\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)C - iC' - i\frac{\kappa}{r}A - \mathbf{r}e^{-ir_1}B &= 0.
\end{aligned} \tag{1.368}$$

où  $r_1$  est un réel quelconque. Comme  $\lambda$  peut être positif ou négatif et comme soustraire équivaut à ajouter l'opposé, on peut ne considérer que l'addition des nombres quantiques  $\lambda$ . Pour deux ondes électroniques, quand les électrons ajoutent leurs nombres quantiques magnétiques  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  leur onde ne peut pas avoir pour nombre quantique magnétique  $\lambda_1 + \lambda_2$ , qui n'est pas un nombre demi-impair, mais un entier, ce qui rendrait la fonction d'onde  $\phi$  multivaluée. L'onde du système est donc nécessairement la somme d'une onde de nombre quantique magnétique  $\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}$  et d'une onde de nombre quantique magnétique  $\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}$ . Pour les nombres  $\kappa$ , qui sont positifs, le nombre  $\kappa$  devient  $\kappa_1 + \kappa_2 - 1$ , ce qui ajoute les  $j_1 = \kappa_1 - 1/2$ ,  $j_2 = \kappa_2 - 1/2$ , ou  $\kappa_1 - \kappa_2$  qui retranche  $j_2$  de  $j_1$  et n'est possible que si  $\kappa_1 > \kappa_2$ .

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \phi_2 + \phi_1, \tag{1.369}$$

$$\phi_1 = \Omega X_1 e^{[(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2})\varphi - \frac{E_1 + E_2}{2}x^0]}; \quad X_1 = \begin{pmatrix} A_1 U_1 & -\bar{C}_1 V_1 \\ B_1 V_1 & \bar{D}_1 U_1 \end{pmatrix}, \tag{1.370}$$

$$U_1' - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}}{\sin \theta} U_1 = -(\kappa_1 + \kappa_2 - 1)V_1, \tag{1.371}$$

$$V_1' + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}}{\sin \theta} V_1 = (\kappa_1 + \kappa_2 - 1)U_1,$$

$$\phi_2 = \Omega X_2 e^{[(\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2})\varphi - \frac{E_1 + E_2}{2}x^0]}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} A_2 U_2 & -\bar{C}_2 V_2 \\ B_2 V_2 & \bar{D}_2 U_2 \end{pmatrix}, \tag{1.372}$$

$$U_2' - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}}{\sin \theta} U_2 = -(\kappa_1 + \kappa_2 - 1)V_2, \tag{1.373}$$

$$V_2' + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2})}{\sin \theta} V_2 = (\kappa_1 + \kappa_2 - 1)U_2.$$

C'est la commutativité de la somme qui donne le caractère indiscernable des deux électrons : on ne peut pas savoir lequel est lequel. Notons aussi que la participation à un système d'électron n'abolit pas l'existence de chaque électron, avec pour chacun ses nombres quantiques, et simplement ajoute à ces ondes individuelles l'onde (ou les ondes s'il y a plus de deux électrons) des systèmes ajoutant les phases et les nombres quantiques. En tenant compte du fait que la masse et la charge électrique de deux électrons sont doublées, les fonctions radiales ne sont plus celles des électrons isolés, et satisfont les

systèmes :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) D_1 - iD'_1 - i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} B_1 + \mathbf{l}e^{ir_1} A_1 = 0, \\
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) B_1 + iB'_1 + i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} D_1 + \mathbf{l}e^{ir_1} C_1 = 0, \\
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) A_1 + iA'_1 + i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} C_1 - \mathbf{r}e^{-ir_1} D_1 = 0, \\
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) C_1 - iC'_1 - i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} A_1 - \mathbf{r}e^{-ir_1} B_1 = 0.
\end{aligned} \tag{1.374}$$

où  $Z$  est le nombre de protons contribuant au potentiel électrique, et  $r_1$  est un réel quelconque,

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) D_2 - iD'_2 - i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} B_2 + \mathbf{l}e^{ir_2} A_2 = 0, \\
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) B_2 + iB'_2 + i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} D_2 + \mathbf{l}e^{ir_2} C_2 = 0, \\
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) A_2 + iA'_2 + i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} C_2 - \mathbf{r}e^{-ir_2} D_2 = 0, \\
& \left( \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{Z\alpha}{r} \right) C_2 - iC'_2 - i \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - 1}{r} A_2 - \mathbf{r}e^{-ir_2} B_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.375}$$

où  $r_2$  est un réel quelconque. On notera que, dans le cas particulier où  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  et où les deux nombres quantiques magnétiques possibles  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  et  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  sont occupés, ces nombres quantiques ne changent pas, puisque  $\kappa_1 + \kappa_2 - 1 = 1$ , que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  et que  $\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ .

Dans le cas d'un système de trois électrons d'ondes  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ , ce qui précède s'applique à chacune des trois paires constituées des électrons 1 et 2, des électrons 2 et 3, 1 et 3, plus une onde formée avec les trois électrons. Et ainsi de suite pour les systèmes de  $n$  électrons.

### 1.13 Forme itérative de l'équation améliorée

On calcule  $\widehat{\mathbf{J}}\phi$  :

$$\widehat{\mathbf{J}}\phi = \widehat{\phi}\phi\phi = \widehat{\phi}\rho e^{i\beta}. \tag{1.376}$$

En utilisant la conjugaison  $P$  on obtient alors :

$$\mathbf{J}\widehat{\phi} = \rho e^{-i\beta}\phi; \quad e^{-i\beta}\phi = \frac{\mathbf{J}}{\rho}\widehat{\phi}. \tag{1.377}$$

Avec (1.109) et (1.110), on définit le vecteur unitaire :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^\mu \sigma_\mu = \frac{\mathbf{J}}{\rho}; \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\widehat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{J}\widehat{\mathbf{J}}}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1; \quad \widehat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^{-1}. \tag{1.378}$$

De même on obtient le terme de masse :

$$\mathbf{m}\hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{lr} & 0 \\ 0 & \mathbf{rl} \end{pmatrix} = m_g^2 \quad (1.379)$$

Ceci permet d'écrire l'équation d'onde améliorée sous la forme [48][50] :

$$\hat{\phi} = -\hat{\mathbf{v}}(\nabla\hat{\phi}\sigma_{21} + qA\hat{\phi})\frac{\hat{\mathbf{m}}}{m_g^2}. \quad (1.380)$$

En conjuguant, cela nous donne l'équation sous forme fonctionnelle récursive :

$$\phi = f(\phi); f(\phi) = -\mathbf{v}(\hat{\nabla}\phi\sigma_{21} + q\hat{A}\phi)\frac{\mathbf{m}}{m_g^2}. \quad (1.381)$$

On obtient alors en itérant :

$$\phi = f(f(\phi)); \phi = f(f(f(\phi))), \dots \quad (1.382)$$

Pour avoir uniquement des multiplications à gauche, on utilise la forme décroisée (1.172) :

$$\begin{aligned} i\nabla\eta^1 &= qA\eta^1 + \mathbf{l}\mathbf{v}\eta^1; \quad i\nabla\eta^1 = p_L\eta^1; \quad p_L := qA + \mathbf{l}\mathbf{v}, \\ i\hat{\nabla}\xi^1 &= q\hat{A}\xi^1 + \mathbf{r}\hat{\mathbf{v}}\xi^1; \quad i\hat{\nabla}\xi^1 = \hat{p}_R\xi^1; \quad \hat{p}_R := q\hat{A} + \mathbf{r}\hat{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (1.383)$$

Ceci donne au second ordre :

$$i\hat{\nabla}\nabla\eta^1 = \hat{\nabla}(p_L\eta^1); \quad i\nabla\hat{\nabla}\xi^1 = \nabla(\hat{p}_R\xi^1). \quad (1.384)$$

Itérant l'équation d'onde une fois, on obtient des dérivées secondes, on se sert alors du dalembertien :

$$\square = \hat{\nabla}\nabla = \nabla\hat{\nabla} = \partial_{00}^2 - \partial_{11}^2 - \partial_{22}^2 - \partial_{33}^2. \quad (1.385)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} i\square\eta^1 &= (\hat{\nabla}p_L)\eta^1 + 2p_L^\mu\partial_\mu\eta^1 - \hat{p}_L\nabla\eta^1, \\ i\square\xi^1 &= (\nabla(\hat{p}_R))\xi^1 + 2p_R^\mu\partial_\mu\xi^1 - p_R\hat{\nabla}\xi^1. \end{aligned} \quad (1.386)$$

On pose :

$$F := \nabla\hat{A}; \quad F_l := \nabla\hat{p}_L; \quad F_r := \nabla\hat{p}_R. \quad (1.387)$$

Ceci donne :

$$i(\square - p_L \cdot p_L)\eta^1 = \hat{F}_l\eta^1 + 2p_L^\mu\partial_\mu\eta^1, \quad (1.388)$$

$$i(\square - p_R \cdot p_R)\xi^1 = F_r\xi^1 + 2p_R^\mu\partial_\mu\xi^1. \quad (1.389)$$

Ces équations sont plus semblables du côté gauche, mais c'est seulement parce que le dalembertien efface toute différence entre  $\hat{\nabla}\nabla$  et  $\nabla\hat{\nabla}$ . Deux

remarques : ces équations ne sont pas des équations de Klein-Gordon, exactement comme dans le cas de l'équation linéaire de Dirac, où l'équation du second ordre comporte aussi un terme  $A^\mu \partial_\mu$ . Ce résultat est plutôt bien caché dans la plupart des manuels, qui affirment obtenir l'équation de Klein-Gordon au second ordre, et qui pour ce faire présentent un électron sans interaction électrique, donc sans réelle existence physique. Ensuite le champ électromagnétique s'introduit avec deux champs chiraux  $F_l$  et  $F_r$ . On a :

$$\nabla \widehat{\mathbf{v}} = \nabla \left( \frac{\widehat{\mathbf{J}}}{\rho} \right) = \nabla \left( \frac{\rho \widehat{\mathbf{J}}}{\rho^2} \right) = \nabla \left( \frac{\rho \widehat{\mathbf{J}}}{\widehat{\mathbf{J}} \widehat{\mathbf{J}}} \right) = \nabla (\rho \mathbf{J}^{-1}) := G. \quad (1.390)$$

Ces champs vérifient :

$$F_l = qF + \mathbf{l}G; \quad F_r = qF + \mathbf{r}G. \quad (1.391)$$



## Chapitre 2

# Interactions faibles (Cas des leptons)

On utilise l'algèbre de Clifford  $Cl_{3,3}$  pour décrire les ondes de tous les fermions et anti-fermions de la première génération. Ceci inclut un monopôle magnétique qui est aussi le neutrino complet, avec onde gauche et onde droite. On étudie les nouvelles densités tensorielles qui proviennent de l'extension de l'onde de l'électron. On transpose à l'algèbre de Clifford la dérivation covariante du groupe de jauge électro-faible. Cette dérivée covariante est compatible avec le terme de masse de l'équation d'onde améliorée de l'électron. On généralise à l'onde leptonique la densité lagrangienne de l'électron ainsi que son double lien avec les équations d'onde. La récursivité des équations d'onde permet d'obtenir les propriétés des bosons de jauge. L'onde leptonique est invariante de forme sous  $Cl_3^*$ . Son groupe d'invariance de jauge est le groupe  $U(1) \times SU(2)$  des interactions électro-faibles. On obtient aussi la valeur de la charge de chaque particule et antiparticule. Les contraintes imposées par ce groupe de jauge permettent de calculer les potentiels de jauge et de simplifier l'équation d'onde. Le cas particulier de l'électron fixe la valeur de l'angle de Weinberg-Salam à  $30^\circ$ . On étudie la densité tensorielle d'impulsion-énergie. On obtient la force de Lorentz. On déduit la dynamique du monopôle magnétique. On étudie la densité tensorielle de moment cinétique, on déduit la quantification du moment cinétique à partir de l'invariance du moment cinétique sous  $Cl_3^*$ . Enfin on présente une solution de type soliton pour l'électron n'interagissant qu'avec lui-même.

## 2.1 De l'onde de l'électron à l'onde complète

Au Chapitre 1 on a attribué une invdim de 1 à l'onde de l'électron, et on a vu que le champ électromagnétique a une invdim nulle. Donc certaines quantités ont une invdim tandis que d'autres non. L'origine du concept de invdim est la physique quantique relativiste. Puisque la théorie quantique des champs remplace le champ électromagnétique par un champ d'opérateurs de création et d'annihilation, on supposera aussi le champ fermionique comme un champ d'opérateurs :

$$\Psi : \phi \mapsto \phi_e, \phi_e = \Psi(\phi); \Psi \in \text{End}(Cl_3); x = \phi_e X \tilde{\phi}_e. \quad (2.1)$$

où  $X$  appartient à la partie auto-adjointe de  $Cl_3$ , et  $\phi_e$  est l'onde de l'électron. Ceci est le quatrième changement important que l'on introduit ici : **l'espace-temps n'est plus un point de départ, mais la conséquence des valeurs de l'onde fermionique**. Cela sera essentiel pour intégrer la gravitation dans la théorie du tout au chapitre 4. Le  $x = x^\mu \sigma_\mu \in Cl_3$  est l'élément général de l'espace-temps de la relativité restreinte, et l'élément général de l'espace-temps tangent en relativité générale. Le temps est la quatrième composante :  $x^0 = ct$ . On n'a pas besoin de dimensions supplémentaires pour la variété d'espace-temps.

Pour la première génération de fermions fondamentaux, le modèle standard comprend seize fermions : huit particules et leurs antiparticules. Nous venons d'étudier le cas de l'électron et de son antiparticule le positron. Ces objets ne sont pas les seuls dans le modèle standard. Ils sont seulement des exemples de ce que l'on appelle *fermions*. Dans la matière ordinaire composant les atomes, d'autres fermions existent, qui forment les protons et les neutrons des noyaux, les quarks de couleur. Outre l'électron et son neutrino ainsi que leurs antiparticules, la matière ordinaire forme ce qu'on appelle la "première génération". Chaque génération comprend deux quarks avec chacun trois états de couleur. Donc on obtient huit ondes semblables à l'onde  $\phi_e$  de l'électron. On étiquette ces ondes de un à huit. Chacune de ces ondes ainsi nommées comporte une onde gauche et une onde droite (y compris le neutrino). On étudie dans ce chapitre le cas général, alors qu'en [29] on avait simplifié l'étude en ne considérant que les ondes gauches et en négligeant les ondes droites des quarks. En [51] l'image suivante résumait la situation :

|                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| L <sup>3</sup> | L <sup>2</sup> | R <sup>2</sup> | R <sup>3</sup> |
| L <sup>4</sup> | L <sup>1</sup> | R <sup>1</sup> | R <sup>4</sup> |
| L <sup>7</sup> | L <sup>8</sup> | R <sup>8</sup> | R <sup>7</sup> |
| L <sup>6</sup> | L <sup>5</sup> | R <sup>5</sup> | R <sup>6</sup> |

Les quarks de la première génération sont appelés  $u$  (up) et  $d$  (down), et le couple  $d - u$  est semblable à  $n - e$  dans les interactions électro-faibles, avec cependant une différence puisque la charge électrique du quark  $u$  est  $\frac{2}{3}|e|$  et celle du quark  $d$  est  $-\frac{1}{3}|e|$ . Dans le secteur leptonique de chaque génération, la charge de l'antiparticule apparaît opposée à la charge de la particule. Comme on l'a vu au chapitre 1, ni la charge ni la masse ne changent vraiment, mais l'équation d'onde change parce que toutes les dérivées partielles changent de signe, et les parties droite et gauche des ondes sont échangées. Sans cette identité entre l'onde de la particule et celle de l'antiparticule, on devrait compter non plus 64, mais 128 paramètres, et  $\text{End}(Cl_3)$  n'offre que 64 dimensions. Les trois "charges de couleur" sont appelées  $r, g, b$  (red, green, blue). L'onde leptonique que nous étudions dans ce chapitre correspond aux cases en blancs au centre de la figure. Les ondes des quarks sont placées dans les cases périphériques de la figure. On les étudiera au chapitre 3. La figure montre deux symétries qui sont toutes deux des symétries gauche droite : on a placé les ondes gauches à gauche et les ondes droites à droite. On rappelle que le groupe d'invariance relativiste agit différemment sur les ondes droites  $R^n$  et les ondes gauches  $L^n$ , c'est précisément l'origine de cette symétrie. Le groupe d'invariance élargie  $Cl_3^*$  est aussi l'origine de la seconde symétrie, entre la partie haute du diagramme, où il agit par multiplication à gauche, tandis que l'action sur la partie basse de la figure est une multiplication à droite.<sup>1</sup> Cette seconde symétrie échange, par exemple, les quatre cases rouges : celles de la partie haute contiennent les ondes  $L^2$  et  $R^2$  du quark  $d$  de couleur  $r$ , et celles de la partie basse contiennent les ondes  $L^5$  et  $R^5$  du quark  $u$  de couleur  $r$ . Cette double symétrie est bien connue en théorie des groupes et algèbres de Lie : les groupes  $GL(n, \mathbb{C})$  ont quatre sortes de représentations. Dans ces symétries, quarks et leptons sont très semblables.

Pour chaque quartier de la figure on a une case blanche et trois cases colorées, donc l'onde complète de première génération, leptons et quarks compris, vient d'un même objet mathématique lié à  $Cl_3$  puisqu'il prend ses valeurs dans l'algèbre  $\text{End}(Cl_3)$  de tous les endomorphismes sur l'espace vectoriel  $Cl_3$ . Or cet anneau des endomorphismes est aussi une algèbre de Clifford, c'est  $Cl_{3,3}$  (on étudie cette algèbre en B.2). Cette algèbre est un espace vectoriel de dimension 64 sur le corps des réels. Donc on se servira de la fonction  $\Psi$ , à valeur dans  $Cl_{3,3}$ , comme onde quantique de seconde quantification. Cette algèbre contient huit espaces vectoriels supplémentaires semblables à  $Cl_3$ . On se servira de ces huit espaces vectoriels pour obtenir huit ondes linéairement semblables à celle de l'électron du chapitre 1. Avec (B.94) on obtient :

$$\Psi^{3,3} = \begin{pmatrix} \Psi_l + i\Psi_b & \Psi_r + \Psi_g \\ \Psi_r - \Psi_g & \Psi_l - i\Psi_b \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

1. Cette symétrie, qui inverse l'ordre de tous les produits est appelée en algèbre de Clifford réversion (voir A.1).

$$\Psi_l := \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1 = \Psi^1 = \alpha + \mathbf{A} + \zeta \mathbf{i} - i(\mathbf{g} + \mathbf{ci}), \quad (2.3)$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \phi_e & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_e \end{pmatrix}; \mathcal{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_n \\ \hat{\phi}_n & 0 \end{pmatrix}; \Psi^1 = \begin{pmatrix} \phi^1 & \phi^{8\dagger} \\ -\bar{\phi}^8 & \hat{\phi}^1 \end{pmatrix},$$

$$i\Psi_r = \mathcal{P}_2 + i\mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} \phi_{dr} & i\phi_{ur} \\ i\hat{\phi}_{ur} & \hat{\phi}_{dr} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$i\Psi_g = \mathcal{P}_3 + i\mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} \phi_{dg} & i\phi_{ug} \\ i\hat{\phi}_{ug} & \hat{\phi}_{dg} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$i\Psi_b = \mathcal{P}_4 + i\mathcal{I}_4 = \begin{pmatrix} \phi_{db} & i\phi_{ub} \\ i\hat{\phi}_{ub} & \hat{\phi}_{db} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

L'onde globale  $\Psi$  est donc composée de deux sortes de termes :  $\Psi_l$  qui est un terme seul de son espèce, et  $\Psi_r, \Psi_g, \Psi_b$ , qui sont trois termes semblables, tous différents de  $\Psi_l$ . La distinction entre une partie leptonique  $\Psi_l$  et la partie des quarks ( $\Psi_r, \Psi_g, \Psi_b$ ) n'est pas postulée, elle vient directement de la nature mathématique de l'onde quantique complète.

Dans ce chapitre on étudie l'onde  $\Psi_l$ , qui est une fonction de l'espace-temps à valeur dans  $Cl_{3,1}$ . Et comme  $i$  est le trivecteur de  $Cl_3$ , qu'il commute avec chaque terme de  $Cl_3$ , quand on restreint la matrice de  $\Psi_l$  à sa première ligne contenant les indices 1 et 8 on peut considérer une fonction à valeur dans  $Cl_{3,1}$  comme une fonction à valeur dans  $Cl_3 \times Cl_3$  :

$$\Psi_l = (\phi_e \quad -i\phi_n) = (\phi^1 \quad \phi^{8\dagger}) \in Cl_3 \times Cl_3. \quad (2.7)$$

L'onde  $\Psi_l$  se compose de deux ondes similaires,  $\phi_e = \phi^1$  qui est, dans ce cadre de la seconde quantification, l'onde de l'électron. L'onde électronique joue donc un rôle dual très spécial, étant à la fois incluse dans  $Cl_3$  et dans  $\text{End}(Cl_3)$  grâce à (2.2) et à (2.3). Donc on peut dire que l'électron est à la fois un exemple de fermion, et le fermion typique. L'onde  $\phi_n = \phi^{8\dagger}$  est l'onde du neutrino, mais aussi l'onde du monopôle magnétique de Lochak quand son onde droite n'est pas nulle. Ce sont les effets observés sur les monopôles magnétiques [104] [52] [53] qui ont amené l'hypothèse d'une masse propre différente pour les ondes gauches et droites. On a précédemment placé les ondes des antiparticules sur la seconde ligne de chaque matrice, dans les relations similaires à (2.3) – (2.6) de [50, 51]. Avec la conjugaison de charge étudiée en 1.4.1 la seconde ligne de la matrice est entièrement déterminée par la première ligne, la conjugaison  $P$  étant un automorphisme involutif, et on peut utiliser ad libitum la matrice complète élément de  $Cl_{3,1}$  ou juste la première ligne, permettant de travailler avec  $Cl_3 \times Cl_3$ . On emploiera donc les facilités de ces algèbres, comme en [51].

On a aussi rencontré cette propriété essentielle de l'onde électronique : elle est double, avec un spineur droit et un spineur gauche (voir (1.62)). L'origine mathématique de cette propriété est l'existence de deux homomorphismes non équivalents du groupe de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$  dans le groupe de

Lorentz propre [100]. On sait aussi que l'électron n'existe pas seul : la radioactivité  $\beta$  qui émet des électrons émet aussi une autre particule, appelée aujourd'hui l'anti-neutrino électronique. Le neutrino électronique et son antiparticule induisent l'existence d'une autre paire de spineurs, un gauche et un droit. Dans une théorie qui veut unifier toutes les interactions, et puisque la gravitation et la géométrie de l'espace-temps sont intimement reliées, l'origine de ce quartet de spineurs qui constituent l'onde leptonique est nécessairement géométrique. Or la totalité de l'électromagnétisme, y compris l'onde de l'électron, est invariante de forme sous le groupe géométrique  $Cl_3^*$ . Ce groupe est isomorphe au groupe  $GL(2, \mathbb{C})$  qui contient  $SL(2, \mathbb{C})$  comme sous-groupe. Les groupes  $GL(n, \mathbb{C})$  sont bien connus pour être les groupes de Lie classiques les plus simples. Leur algèbre de Lie est l'algèbre matricielle  $M_n(\mathbb{C})$ . Il est aussi bien connu qu'il existe quatre sortes de représentations (et pas seulement deux) pour ces groupes, ce qui vaut aussi pour  $n = 2$ . Notre hypothèse est donc : ces quatre sortes de représentations sont l'origine de l'existence des quatre sortes de spineurs formant l'onde leptonique (et aussi pour l'onde complète où les 16 spineurs se répartissent en quatre parties de quatre spineurs, ce que nous étudierons dans le prochain chapitre consacré aux quarks).

Le modèle standard a d'abord considéré un neutrino réduit à sa seule onde gauche, et sans masse propre. Les expériences récentes sur les neutrinos montrent qu'ils doivent avoir une masse propre, qui est certes très petite et cependant n'est pas nulle, et par conséquent une onde droite du neutrino doit aussi exister. Le modèle standard n'a en vérité pas d'objection interdisant à cette onde droite d'exister, il n'a cependant aucune utilité pour elle. Cependant le fait est que le neutrino voyage dans l'espace à la vitesse de la lumière, ou au moins avec une vitesse extraordinairement proche de la vitesse de la lumière, cela justifie une masse propre nulle. Avec l'équation de Dirac pour l'onde du neutrino, il y a donc un problème, qui est dû à la connexion que fait le terme de masse entre l'onde droite et l'onde gauche. On verra dans ce chapitre comment l'équation d'onde améliorée, non linéaire, résout aisément toutes ces difficultés.

Le point de départ de tout ce travail fut la théorie de Lochak du monopôle magnétique leptonique [89]-[96], où l'onde du monopôle est aussi une fonction de l'espace-temps à valeur dans  $Cl_3$ . Que ce soit pour la paire électron-positron, pour la paire électron-neutrino ou pour la paire électron-monopôle, on obtient dans chaque cas quatre sortes de spineurs, deux gauches et deux droits. De plus, comme cas particulier, on doit toujours pouvoir finir avec l'électron seul ou avec le neutrino électronique gauche seul. On a vu dans le premier chapitre que la conjugaison de charge était simplement le changement de  $\sigma_{21}$  en  $\sigma_{12}$  dans l'équation d'onde de l'électron. Donc les deux paires de spineurs doivent pouvoir rendre compte à la fois des leptons et anti-leptons, ou décrire à la fois l'électron et le monopôle magnétique. Cela amène donc à penser que les deux objets, **le neutrino avec une masse propre et le monopôle magnétique, sont une seule**

et même chose.

Une extension de l'équation de Dirac pour les interactions électro-faibles [113] a été étudiée par Hestenes [80] et par Boudet [5] [6], dans le cadre de l'algèbre  $Cl_{1,3}$ . Par ailleurs l'extension de l'invariance de jauge de l'équation améliorée conduit nécessairement à l'invariance de jauge sous  $U(1) \times SU(2)$ , invariance obtenue aussi dès [12]. Ceci résulte de l'existence de quatre générateurs indépendants de carré  $-1$  dans l'algèbre  $Cl_3 : i = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ . Ce sont aussi les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe  $U(1) \times SU(2)$ . Comme l'invariance de forme est toujours gouvernée par le groupe  $Cl_3^*$  et puisque  $Cl_3 \times Cl_3$  est un  $Cl_3$ -module à gauche, on peut tout exprimer avec seulement  $Cl_3$  : toutes les matrices complexes  $4 \times 4$  de la théorie de Dirac peuvent s'écrire par blocs de matrices  $2 \times 2$ .

Avec la similitude  $D$  engendrée par un dilatateur  $M$  quelconque de  $Cl_3^*$ , on rappelle que l'on a :  $x \mapsto x' = D(x) = MxM^\dagger$ ,  $\nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}$ , que  $\det(M) = re^{i\theta}$ , et aussi :

$$R^1 \mapsto R'^1 = MR^1; \widehat{L}^1 \mapsto \widehat{L}'^1 = \widehat{M}\widehat{L}^1.$$

Les ondes droite  $R^8$  et gauche  $L^8$  utilisent les deux autres homomorphismes, avec une réversion :

$$\begin{aligned} R^8 \mapsto R'^8 &= R^8 \widetilde{M}; \widetilde{R}'^8 = M\widetilde{R}^8, \\ \widehat{L}^8 \mapsto \widehat{L}'^8 &= \widehat{L}^8 \overline{M}; \overline{L}'^8 = \widehat{M}\overline{L}^8, \end{aligned} \quad (2.8)$$

La dualité entre un lepton chargé et un autre sans charge électrique se retrouve dans chacune des deux autres générations, avec la simple généralisation de 1.7. Pour les quatre spineurs on utilise les expressions suivantes<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \xi^n &= \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \end{pmatrix}; \eta^n = \begin{pmatrix} \eta_1^n \\ \eta_2^n \end{pmatrix}; \widehat{\eta}^n = \begin{pmatrix} -\bar{\eta}_2^n \\ \bar{\eta}_1^n \end{pmatrix}; \widehat{\xi}^n = \begin{pmatrix} -\bar{\xi}_2^n \\ \bar{\xi}_1^n \end{pmatrix}, \\ \phi^1 &= R^1 + L^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^1 & \widehat{\eta}^1 \end{pmatrix}; R^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & 0 \\ \xi_2^1 & 0 \end{pmatrix}; L^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\eta}_2^1 \\ 0 & \bar{\eta}_1^1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\phi}^1 &= \widehat{R}^1 + \widehat{L}^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta^1 & \widehat{\xi}^1 \end{pmatrix}; \widehat{R}^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\xi}_2^1 \\ 0 & \bar{\xi}_1^1 \end{pmatrix}; \widehat{L}^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^1 & 0 \\ \eta_2^1 & 0 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\phi}^8 &= \widetilde{R}^8 + \widetilde{L}^8 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^8 & \widehat{\eta}^8 \end{pmatrix}; \widetilde{R}^8 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^8 & 0 \\ \xi_2^8 & 0 \end{pmatrix}; \widetilde{L}^8 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^8 & 0 \\ \eta_2^8 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

On a vu que les équations d'onde des deux parties droite et gauche de l'onde de l'électron vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, avec seulement deux termes supplémentaires, un terme de jauge et un terme de masse. Le terme de jauge est du point de vue géométrique un vecteur covariant, et le terme de masse est le produit de la masse réduite

2. Ici on se sert de la notation mathématique usuelle  $\bar{z}$  pour le complexe conjugué de  $z$ .

par un vecteur unitaire  $\mathbf{v}$ . Ce vecteur est la vitesse locale réduite du fluide relativiste. La invdim des différents termes permet de comprendre pourquoi aucun autre terme n'est possible dans une équation d'onde du premier ordre (voir 5.6), donc on ne peut que généraliser ces équations aux quatre parties de l'onde :

$$i\nabla\eta^1 = l^1\eta^1, \quad (2.10)$$

$$i\widehat{\nabla}\xi^1 = \widehat{r}^1\xi^1, \quad (2.11)$$

$$i\nabla\eta^8 = l^8\eta^8, \quad (2.12)$$

$$i\widehat{\nabla}\xi^8 = \widehat{r}^8\xi^8. \quad (2.13)$$

Dans ce chapitre, l'élément  $M$  de  $Cl_3^*$  qui permet d'obtenir l'invariance de forme des équations d'onde est constant. De plus on a  $\nabla = \widetilde{\nabla}$  et les quatre opérateurs différentiels se réduisent à  $\nabla$  et  $\widehat{\nabla}$ . Les  $l^n$  et  $r^n$  sont quatre vecteurs d'espace-temps covariants et on verra leur lien avec les potentiels du groupe de jauge électro-faible, ainsi qu'avec la masse propre réduite généralisant les termes de masse propre de l'électron.

Regardons d'abord comment, lorsque  $\phi^8$  est nul, les deux équations (2.10) (2.11) peuvent être les équations d'onde de l'électron. Comme  $\eta^1$  est, une fois multiplié par  $\sqrt{2}$ , la colonne de gauche de  $\widehat{\phi}^1$  tandis que  $\xi^1$  donne la colonne de droite, ces équations, après multiplication par le facteur constant  $\sqrt{2}$  et en utilisant la transformation  $P$  sur (2.11), les équations d'onde (2.10) et (2.11) donnent :

$$\begin{aligned} i\nabla\widehat{\phi}_e p_r &= l^1\widehat{\phi}_e p_r; \quad p_r := \frac{1 + \sigma_3}{2} \\ -i\nabla\widehat{\phi}_e p_l &= r^1\widehat{\phi}_e p_l; \quad p_l := \frac{1 - \sigma_3}{2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

En ajoutant les deux équations on obtient :

$$i\nabla\widehat{\phi}_e\sigma_3 = \frac{l^1 + r^1}{2}\widehat{\phi}_e + \frac{l^1 - r^1}{2}\widehat{\phi}_e\sigma_3. \quad (2.15)$$

Si on a posé :

$$l^1 := qA + \mathbf{l}\mathbf{v}; \quad r^1 := qA + \mathbf{r}\mathbf{v} \quad (2.16)$$

on retrouve alors l'équation d'onde améliorée de l'électron <sup>3</sup> :

$$\nabla\widehat{\phi}_e\sigma_{12} = qA\widehat{\phi}_e + \mathbf{v}\widehat{\phi}_e\mathbf{m}, \quad (2.17)$$

car le vecteur  $\mathbf{v}$  est égal au vecteur  $\underline{J}/\rho$  du chapitre 1. On a utilisé aussi

---

3. On sait que l'impulsion-énergie de l'électron est somme d'un terme matériel et d'un terme électromagnétique. Cette dualité est obtenue à nouveau ici pour les densités.

dans le chapitre 1 les vecteurs suivants, qu'il conviendra de généraliser :

$$\mathbf{J} := \frac{m}{k\mathbf{l}}\mathbf{D}_L^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}}\mathbf{D}_R^1 = \frac{1}{k}\left(\mathbf{J} + \frac{d}{m_a}\mathbf{K}\right), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{K} := -\frac{m}{k\mathbf{l}}\mathbf{D}_L^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}}\mathbf{D}_R^1 = \frac{1}{k}\left(-\mathbf{J} + \frac{d}{m_a}\mathbf{K}\right). \quad (2.19)$$

### 2.1.1 Nouvelles densités tensorielles

Dans le cas d'un électron seul on a utilisé quatre courants  $\mathbf{D}_\mu = \phi\sigma_\mu\phi^\dagger$ , en particulier le courant  $\mathbf{J} = \mathbf{D}_0 = \phi\phi^\dagger$ . Il est la somme des deux courants chiraux  $\mathbf{D}_R^1 = R^1\tilde{R}^1$  et  $\mathbf{D}_L^1 = L^1\tilde{L}^1$ . De plus ces courants sont maintenant semblables à deux autres courants :

$$\mathbf{D}_R^8 := \tilde{R}^8 R^8; \quad \mathbf{D}_L^8 := \tilde{L}^8 L^8. \quad (2.20)$$

Et chacun de ces courants, tout comme ceux de l'électron, a un carré scalaire nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_R^8 \cdot \mathbf{D}_R^8 &= \mathbf{D}_R^8 \hat{\mathbf{D}}_R^8 = \tilde{R}^8 (R^8 \bar{R}^8) \hat{R}^8 = 0, \\ \mathbf{D}_L^8 \cdot \mathbf{D}_L^8 &= \mathbf{D}_L^8 \hat{\mathbf{D}}_L^8 = \tilde{L}^8 (L^8 \bar{L}^8) \hat{L}^8 = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

car les quantités entre parenthèses ci-dessus sont toutes deux nulles. La généralisation naturelle du courant de probabilité de l'électron est le courant leptonique  $\mathbf{J}_l$  tel que :

$$\xi^1 = \sqrt{\frac{\mathbf{r}^1 l_P^3}{2m}} \begin{pmatrix} a_1^1 + ia_2^1 \\ a_3^1 + ia_4^1 \end{pmatrix}; \quad \eta^1 = \sqrt{\frac{\mathbf{l}^1 l_P^3}{2m}} \begin{pmatrix} a_5^1 + ia_6^1 \\ a_7^1 + ia_8^1 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\xi^8 = \sqrt{\frac{\mathbf{r}^8 l_P^3}{2m}} \begin{pmatrix} a_1^8 + ia_2^8 \\ a_3^8 + ia_4^8 \end{pmatrix}; \quad \eta^8 = \sqrt{\frac{\mathbf{l}^8 l_P^3}{2m}} \begin{pmatrix} a_5^8 + ia_6^8 \\ a_7^8 + ia_8^8 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{J}_l = \frac{m}{k} \left( \frac{\mathbf{D}_R^1}{\mathbf{r}^1} + \frac{\mathbf{D}_L^1}{\mathbf{l}^1} + \frac{\mathbf{D}_R^8}{\mathbf{r}^8} + \frac{\mathbf{D}_L^8}{\mathbf{l}^8} \right). \quad (2.24)$$

Ce courant généralise bien le courant  $\mathbf{J}$  car :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_l^0 &= \frac{m}{k\mathbf{r}^1}(|\xi_1^1|^2 + |\xi_2^1|^2) + \frac{m}{k\mathbf{l}^1}(|\eta_1^1|^2 + |\eta_2^1|^2) \\ &+ \frac{m}{k\mathbf{r}^8}(|\xi_1^8|^2 + |\xi_2^8|^2) + \frac{m}{k\mathbf{l}^8}(|\eta_1^8|^2 + |\eta_2^8|^2), \end{aligned} \quad (2.25)$$

La norme et le produit scalaire associé, généralisant ce qui se passe pour le cas de l'électron seul, devient :

$$\|\Psi_l\| := \iiint dv \left( \sum_{j=1}^{j=8} (a_j^1)^2 + (a_j^8)^2 \right), \quad (2.26)$$

$$\langle \Psi_l | \Psi_l' \rangle := \iiint dv \left( \sum_{j=1}^{j=8} a_j^1 a_j^{1'} + a_j^8 a_j^{8'} \right). \quad (2.27)$$

Cette densité de probabilité est la généralisation de la densité de probabilité de l'électron étudiée au chapitre 1. La composante de temps  $\mathbf{J}_l^0$  est maintenant l'une des  $17 \times 16/2 = 136$  densités tensorielles qu'on peut définir sans avoir besoin d'utiliser des dérivées partielles, à partir des quatre spineurs à quatre composantes, soit 16 paramètres pour l'onde leptonique, ce qui fait donc  $(16 + 1)16/2$  densités. Nous sommes maintenant très au-delà des seules 16 densités accessibles à partir de l'algèbre  $M_4(\mathbb{C})$  engendrée par les matrices de Dirac, pourtant toujours présentées dans la plupart des cours<sup>4</sup> comme les seules densités possibles ! Avec (2.21) on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_l \cdot \mathbf{J}_l &= \hat{\mathbf{J}}_l \mathbf{J}_l \\
&= \frac{m^2}{k^2} \left( \frac{\hat{D}_R^1}{\mathbf{r}^1} + \frac{\hat{D}_L^1}{\mathbf{l}^1} + \frac{\hat{D}_R^8}{\mathbf{r}^8} + \frac{\hat{D}_L^8}{\mathbf{l}^8} \right) \left( \frac{D_R^1}{\mathbf{r}^1} + \frac{D_L^1}{\mathbf{l}^1} + \frac{D_R^8}{\mathbf{r}^8} + \frac{D_L^8}{\mathbf{l}^8} \right) \\
&= \frac{m^2}{k^2} \left( \frac{\hat{D}_R^1 D_R^1}{\mathbf{r}^1 \mathbf{r}^1} + \frac{\hat{D}_L^1 D_L^1}{\mathbf{l}^1 \mathbf{l}^1} + \frac{\hat{D}_R^8 D_R^8}{\mathbf{r}^8 \mathbf{r}^8} + \frac{\hat{D}_L^8 D_L^8}{\mathbf{l}^8 \mathbf{l}^8} \right. \\
&\quad + \frac{\hat{D}_R^1 D_L^1}{\mathbf{r}^1 \mathbf{l}^1} + \frac{\hat{D}_L^1 D_R^1}{\mathbf{l}^1 \mathbf{r}^1} + \frac{\hat{D}_R^8 D_L^8}{\mathbf{r}^8 \mathbf{l}^8} + \frac{\hat{D}_L^8 D_R^8}{\mathbf{l}^8 \mathbf{r}^8} + \frac{\hat{D}_R^1 D_R^8}{\mathbf{r}^1 \mathbf{r}^8} + \frac{\hat{D}_R^8 D_R^1}{\mathbf{r}^8 \mathbf{r}^1} + \frac{\hat{D}_L^1 D_L^8}{\mathbf{l}^1 \mathbf{l}^8} + \frac{\hat{D}_L^8 D_L^1}{\mathbf{l}^8 \mathbf{l}^1} \\
&\quad + \frac{\hat{D}_L^1 D_R^8}{\mathbf{l}^1 \mathbf{r}^8} + \frac{\hat{D}_R^1 D_L^8}{\mathbf{r}^1 \mathbf{l}^8} + \frac{\hat{D}_L^8 D_R^1}{\mathbf{l}^8 \mathbf{r}^1} + \frac{\hat{D}_R^8 D_L^1}{\mathbf{r}^8 \mathbf{l}^1} \left. \right) \\
&= \frac{2m^2}{k^2} \left( \frac{D_R^1}{\mathbf{r}^1} \cdot \frac{D_L^1}{\mathbf{l}^1} + \frac{D_R^1}{\mathbf{r}^1} \cdot \frac{D_R^8}{\mathbf{r}^8} + \frac{D_L^1}{\mathbf{l}^1} \cdot \frac{D_L^8}{\mathbf{l}^8} \right. \\
&\quad \left. + \frac{D_L^1}{\mathbf{l}^1} \cdot \frac{D_R^8}{\mathbf{r}^8} + \frac{D_R^1}{\mathbf{r}^1} \cdot \frac{D_L^8}{\mathbf{l}^8} + \frac{D_R^8}{\mathbf{r}^8} \cdot \frac{D_L^8}{\mathbf{l}^8} \right). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

On a vu que  $2D_R^1 \cdot D_L^1 = a_1 a_1^*$  où  $a_1 = \Omega_1 + i\Omega_2$ , somme obtenue à partir des deux invariants relativistes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  l'onde électronique. Avec quatre spineurs on peut former  $6 = 4 \times 3/2$  paires, chacune donnant un terme semblable à  $a_1$ . On a donc maintenant 12 densités invariantes qui donnent les 6 termes suivants :

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2(\xi_1^1 \bar{\eta}_1^1 + \xi_2^1 \bar{\eta}_2^1) = R^1 \bar{L}^1 + L^1 \bar{R}^1, \\
a_2 &= 2(\eta_1^8 \eta_2^1 - \eta_2^8 \eta_1^1) = \hat{L}^1 \sigma_1 L^8 - \bar{L}^8 \sigma_1 \tilde{L}^1, \\
a_3 &= 2(\xi_1^1 \bar{\eta}_1^8 + \xi_2^1 \bar{\eta}_2^8) = R^1 \hat{L}^8 + \tilde{L}^8 \bar{R}^1, \\
a_4 &= 2(\xi_1^8 \bar{\eta}_1^1 + \xi_2^8 \bar{\eta}_2^1) = \tilde{R}^8 \bar{L}^1 + L^1 \hat{R}^8, \\
a_5 &= 2(\xi_1^1 \xi_2^8 - \xi_2^1 \xi_1^8) = \tilde{R}^8 \sigma_1 \bar{R}^1 - R^1 \sigma_1 \hat{R}^8, \\
a_6 &= 2(\xi_1^8 \bar{\eta}_1^8 + \xi_2^8 \bar{\eta}_2^8) = \tilde{R}^8 \hat{L}^8 + \tilde{L}^8 \hat{R}^8. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

4. Il est donc surprenant et fâcheux que cette erreur importante concernant le nombre des densités tensorielles constructibles à partir de l'onde de l'électron en théorie de Dirac, erreur découverte il y a plus de vingt ans [15] par l'un des auteurs, ne soit toujours pas corrigée. Cela prouve que le contrôle des erreurs commises par cette "communauté scientifique" qui propage les dites erreurs, est imparfaite, inefficace [39], car beaucoup trop conservatrice, trop sûre d'elle-même. Mais ce contrôle peut quand même être le moins mauvais de tous les systèmes de contrôle.

Dans la similitude  $D$  engendrée par un dilatateur  $M$  quelconque de  $Cl_3^*$  on a, pour  $j = 1, 2, \dots, 6$  :

$$a'_j = Ma_j\overline{M} = M\overline{M}a_j = re^{i\theta}a_j, \quad (2.30)$$

$$a'_ja'^*_j = re^{i\theta}a_jre^{-i\theta}a_j^* = r^2a_ja_j^*. \quad (2.31)$$

On peut alors généraliser l'invariant  $\rho$  de l'onde de l'électron en  $\rho_l$  tel que :

$$\rho_l^2 = m^2 \left[ \frac{a_1a_1^*}{\mathbf{r}^1\mathbf{l}^1} + \frac{a_2a_2^*}{\mathbf{l}^1\mathbf{l}^8} + \frac{a_3a_3^*}{\mathbf{r}^1\mathbf{l}^8} + \frac{a_4a_4^*}{\mathbf{l}^1\mathbf{r}^8} + \frac{a_5a_5^*}{\mathbf{r}^1\mathbf{r}^8} + \frac{a_6a_6^*}{\mathbf{r}^8\mathbf{l}^8} \right]. \quad (2.32)$$

qui vérifie, comme  $\rho$  précédemment :

$$\rho_l'^2 = r^2\rho_l^2; \quad \rho_l' = r\rho_l; \quad m'\rho_l' = m\rho_l. \quad (2.33)$$

A la fois les  $a_j$  et  $\rho_l$  ont donc une invdim de 1 et  $m$  a une invdim de  $-1$  (voir 1.8). Dans les interactions faibles le neutrino semble sans masse propre. Il est cependant nécessaire de le doter d'un terme de masse quand la théorie physique essaie de comprendre le comportement des neutrinos changeant de génération. Or on peut remarquer que  $m\rho_l$  est nul lorsque  $\rho_l$  est nul, et que c'est le cas si le neutrino possède seulement une onde gauche. Les courants vérifient en effet dans ce cas  $\mathbf{J}_l = \frac{m}{k}\mathbf{D}_L^8$  et  $\mathbf{D}_L^8 \cdot \mathbf{D}_L^8 = 0$ , et donc  $m\rho_l = 0$  : **le neutrino gauche tout seul apparaît sans masse**. Le comportement du terme de masse qui semble apparaître et disparaître ad libitum n'est pas si mystérieux si l'on veut bien considérer que l'on n'est capable de détecter un neutrino que quand il interagit avec un lepton chargé ou un quark. Le terme de masse réapparaît dès que  $R^8$  n'est pas nul ou dès que l'onde de l'électron n'est pas nulle. Pour l'électron on a  $\rho^2 = a_1a_1^* = 2\mathbf{D}_R^1 \cdot \mathbf{D}_L^1$ . On obtient de même :

$$a_1a_1^* = 2\mathbf{D}_R^1 \cdot \mathbf{D}_L^1, \quad (2.34)$$

$$a_5a_5^* = 2\mathbf{D}_R^1 \cdot \mathbf{D}_R^8, \quad (2.35)$$

parce qu'on a :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{D}_R^1 \cdot \mathbf{D}_R^8 &= \mathbf{D}_R^1\widehat{\mathbf{D}}_R^8 + \mathbf{D}_R^8\widehat{\mathbf{D}}_R^1 = R^1\widetilde{R}^1\overline{R}^8\widehat{R}^8 + \widetilde{R}^8R^8\widehat{R}^1\overline{R}^1, \\ \widetilde{R}^1\overline{R}^8 &= \begin{pmatrix} 0 & -a_5^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad R^8\widehat{R}^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_5^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{D}_R^1 \cdot \mathbf{D}_R^8 &= R^1 \begin{pmatrix} 0 & -a_5^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widehat{R}^8 + \widetilde{R}^8 \begin{pmatrix} 0 & a_5^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{R}^1 \\ &= (\widetilde{R}^8\sigma_1\overline{R}^1 - R^1\sigma_1\widehat{R}^8)a_5^* = a_5a_5^*. \end{aligned} \quad (2.37)$$

On peut de la même manière établir que :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{D}_R^1 \cdot \mathbf{D}_L^8 &= a_3a_3^*; \quad 2\mathbf{D}_L^1 \cdot \mathbf{D}_R^8 = a_4a_4^*, \\ 2\mathbf{D}_L^1 \cdot \mathbf{D}_L^8 &= a_2a_2^*; \quad 2\mathbf{D}_R^8 \cdot \mathbf{D}_L^8 = a_6a_6^*. \end{aligned} \quad (2.38)$$

On déduit alors de ces relations et de (2.28), (2.30) et (2.32) que l'on a :

$$\mathbf{J}_l \cdot \mathbf{J}_l = \rho_l^2; \quad \|\mathbf{J}_l\| = \rho_l. \quad (2.39)$$

Comme dans le cas de l'électron seul on peut définir un vecteur unitaire (vitesse réduite)  $\mathbf{v}$  tel que :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{J}_l}{\rho_l} = \mathbf{v}^\mu \sigma_\mu; \quad \mathbf{v} \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}} \mathbf{v} = 1; \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^{-1}. \quad (2.40)$$

On garde ici la même notation  $\mathbf{v}$  que dans le cas de l'électron, parce que ce vecteur est exactement celui du chapitre 1 quand l'onde du neutrino est nulle. La généralisation naturelle de la densité lagrangienne de l'électron est donc capable de contenir les mêmes termes de masse, et l'équation d'onde pourra aussi contenir le même vecteur  $\mathbf{v}$  dans ses termes de masse

On ne doit jamais oublier que les précédentes densités tensorielles ne sont qu'une petite partie des nombreuses densités tensorielles que l'on peut construire à partir de l'onde. En effet la dérivation de ces tenseurs en produit d'autres, qui à leur tour en donnent de nouveaux par dérivation, et ceci indéfiniment. On verra plus loin certaines de ces autres densités tensorielles, par exemple pour l'impulsion-énergie.

### 2.1.2 L'invariance de jauge électro-faible

On commence avec le cas de l'électron en suivant [70]. On ne change rien à l'onde de l'électron que l'on note  $\psi^1$  dans le formalisme usuel des matrices de Dirac complexes et que l'on note  $\phi^1$  dans  $Cl_3$ . L'onde du positron est notée  $\psi_p$  dans le formalisme de Dirac et l'onde de l'antineutrino est notée  $\psi_a$ . Le lien entre l'onde de la particule et l'onde de l'antiparticule restera celui vu en 1.4.1. On part de l'onde des particules. Les spineurs droits sont notés  $\xi^n$  et les spineurs gauches sont notés  $\eta^n$  :

$$\psi^1 = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \eta^1 \end{pmatrix}; \quad \psi^8 = \begin{pmatrix} \xi^8 \\ \eta^8 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

On utilise à nouveau la notation (2.9) qui donne :

$$\phi^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^1 & \hat{\eta}^1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\phi}^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta^1 & \hat{\xi}^1 \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\tilde{\phi}^8 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^8 & \hat{\eta}^8 \end{pmatrix}; \quad \bar{\phi}^8 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta^8 & \hat{\xi}^8 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Avec le lien que fait le modèle standard entre l'onde de la particule et celle de l'antiparticule, en utilisant  $Cl_{1,3}$  et le module à gauche  $Cl_3 \times Cl_3$ , on se servira de :

$$\Psi_l = \Psi^1 = \begin{pmatrix} \phi^1 & \tilde{\phi}^8 \\ -\bar{\phi}^8 & \hat{\phi}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^1 & \tilde{\phi}^8 \end{pmatrix} = (\phi_e \quad \phi_n) \quad (2.44)$$

Et la multiplication interne à  $Cl_{1,3}$  se traduit dans  $Cl_3 \times Cl_3$  par :

$$\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC + B\widehat{D} & AD + B\widehat{C} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

On notera que l'ordre dans les multiplications est conservé, et qu'il faut utiliser l'opérateur de parité  $P : M \mapsto \widehat{M}$ , qui est l'automorphisme principal de  $Cl_{1,3}$ . Par ailleurs l'opérateur différentiel  $\partial = \gamma^\mu \partial_\mu$  utilisé dans  $Cl_{1,3}$  devient, avec le module  $Cl_3 \times Cl_3$ , par :

$$\partial = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \end{pmatrix}; \quad \nabla = \sigma^\mu \partial_\mu \quad (2.46)$$

$$\partial \Psi_l = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_e & \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \widehat{\phi}_n & \nabla \widehat{\phi}_e \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Le modèle de Weinberg-Salam utilise  $\xi^1, \eta^1, \eta^8$  et suppose que  $\xi^8$  est nul. On utilisera l'onde complète pour le monopôle magnétique de Lochak tandis que le neutrino lui-même n'aura pas d'onde droite. Cela revient à considérer le monopôle magnétique comme un neutrino complet, avec onde droite et onde gauche, et à considérer le neutrino du modèle standard comme un monopôle magnétique dont l'onde droite est absente. Pour la séparation de  $\xi^1, \eta^1$  et  $\eta^8$  le modèle standard utilise les projecteurs  $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$  qui se présentent de la manière suivante, avec notre choix (1.4) des matrices de Dirac :

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \psi_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi = \psi_R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Donc pour les particules les ondes gauches sont des ondes  $\eta$  et les ondes droites sont des ondes  $\xi$ . C'est invariant sous  $Cl_3^*$  et donc c'est invariant relativiste, car dans une similitude  $D$  engendrée par le dilatateur  $M$  tel que  $D : x \mapsto x' = MxM^\dagger$ , on a (1.62) :  $\xi' = M\xi, \eta' = \widehat{M}\eta$ . Donc on utilise :

$$\begin{aligned} R^1 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^1 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^1 & \widehat{\eta}^1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sigma_3), \\ L^1 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\eta}^1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^1 & \widehat{\eta}^1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sigma_3). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Et on obtient des formules semblables pour  $\widetilde{R}^8$  et  $\widetilde{L}^8$ . On définit maintenant deux projecteurs  $P_\pm$  et quatre opérateurs  $P_0, P_1, P_2, P_3$  agissant sur tout  $\Psi \in Cl_3 \times Cl_3$  selon :

$$P_\pm(\Psi) := \frac{1}{2}(\Psi \pm \mathbf{i}\Psi\gamma_{21}); \quad \mathbf{i} := (i \ 0); \quad \gamma_{21} = (\sigma_{12} \ 0), \quad (2.51)$$

Donc on obtient :

$$P_+(\Psi_l) = \begin{pmatrix} L^1 & \widetilde{L}^8 \end{pmatrix}; \quad P_-(\Psi_l) = \begin{pmatrix} R^1 & \widetilde{R}^8 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Aussi  $P_+$  est le projecteur sur la partie gauche de l'onde et  $P_-$  est le projecteur sur la partie droite de l'onde. On pose :

$$P_0(\Psi) = \Psi\gamma_{21} + (1-p)P_-(\Psi)\mathbf{i} + p\mathbf{i}P_-(\Psi), \quad (2.53)$$

$$P_1(\Psi) = P_+(\Psi)\gamma_3\mathbf{i}, \quad (2.54)$$

$$P_2(\Psi) = P_+(\Psi)\gamma_3, \quad (2.55)$$

$$P_3(\Psi) = P_+(\Psi)(-\mathbf{i}). \quad (2.56)$$

On introduit ici un nombre  $p$  qui est lié à la charge du monopôle magnétique et qui agit seulement sur la partie droite du neutrino, inconnue du modèle standard.<sup>5</sup> Notant  $P_\mu P_\nu(\Psi) = P_\mu[P_\nu(\Psi)]$ , les  $P_j$  vérifient :

$$P_1P_2 = P_3 = -P_2P_1; \quad P_2P_3 = P_1 = -P_3P_2; \quad P_3P_1 = P_2 = -P_1P_3, \quad (2.57)$$

$$P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = -P_+; \quad P_0P_j = P_jP_0 = -\mathbf{i}P_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Le modèle de Weinberg-Salam remplace les dérivées partielles  $\partial_\mu$  par les dérivées covariantes :

$$D_\mu := \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 T_j W_\mu^j, \quad (2.58)$$

avec  $T_j = \tau_j/2$  pour un doublet de particules gauches et  $T_j = 0$  pour un singulet d'onde droite.<sup>6</sup>  $Y$  est l'hyper-charge faible, avec  $Y_L = -1$ ,  $Y_R = -2$  pour l'électron. Pour transposer cela à  $Cl_3 \times Cl_3$  on pose :

$$D := \sigma^\mu D_\mu; \quad B := \sigma^\mu B_\mu; \quad W^j := \sigma^\mu W_\mu^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{D} := \gamma^\mu D_\mu; \quad \mathbf{B} := \gamma^\mu B_\mu; \quad \mathbf{W}^j := \gamma^\mu W_\mu^j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \boldsymbol{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu. \quad (2.60)$$

On remplace maintenant (2.58) par :

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\partial} + \frac{g_1}{2} \mathbf{B} P_0 + \frac{g_2}{2} (\mathbf{W}^1 P_1 + \mathbf{W}^2 P_2 + \mathbf{W}^3 P_3). \quad (2.61)$$

D'abord on a :

$$\boldsymbol{\partial}\Psi_l = \begin{pmatrix} \nabla \bar{\phi}_n & \nabla \hat{\phi}_e \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{D}\Psi_l = \begin{pmatrix} D \bar{\phi}_n & D \hat{\phi}_e \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Et l'on obtient :

$$P_0(\Psi_l) = \begin{pmatrix} 2iR^1 - iL^1 & 2ip\tilde{R}^8 - i\tilde{L}^8 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

De la forme de ces  $P_\mu$  on peut voir que le modèle de Weinberg-Salam des interactions faibles, qui se sert uniquement de  $R^1$ ,  $L^1$  et  $L^8$ , ne dépend

5. Si  $R^8 = 0$ , ce que nous utilisons fait partie du modèle standard. Si  $R^8 \neq 0$ , ce que nous obtenons est considéré, sans doute à tort, comme au-delà du modèle standard.

6. Cette préférence pour les ondes gauches est supposée et n'est pas expliquée dans le modèle de Weinberg-Salam. On expliquera l'origine de cette préférence en 3.8.

pas de la valeur de  $p$  qui peut être n'importe quel nombre. On verra plus loin comment cette valeur est liée à la charge du monopôle magnétique. On obtient ensuite :

$$\mathbf{B}P_0(\Psi_l) = \begin{pmatrix} -iB(2p\bar{R}^8 - \bar{L}^8) & iB(-2\hat{R}^1 + \hat{L}^1) \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Ensuite on a :

$$P_1(\Psi_l) = \begin{pmatrix} i\tilde{L}^8 & iL^1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}^1 P_1(\Psi_l) = \begin{pmatrix} -iW^1\hat{L}^1 & -iW^1\bar{L}^8 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$P_2(\Psi_l) = \begin{pmatrix} \tilde{L}^8 & -L^1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}^2 P_2(\Psi_l) = \begin{pmatrix} -W^2\hat{L}^1 & W^2\bar{L}^8 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

On obtient pour  $j = 3$  :

$$P_3(\Psi_l) = \begin{pmatrix} -iL^1 & i\tilde{L}^8 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}^3 P_3(\Psi_l) = \begin{pmatrix} -iW^3\bar{L}^8 & iW^3\hat{L}^1 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Par conséquent (2.61) est équivalent au système :

$$\begin{aligned} D\hat{\phi}^1 &= \nabla\hat{\phi}^1 - i\frac{g_1}{2}B(2\hat{R}^1 - \hat{L}^1) - i\frac{g_2}{2}[(W^1 + iW^2)\bar{L}^8 - W^3\hat{L}^1], \\ D\bar{\phi}^8 &= \nabla\bar{\phi}^8 - \frac{g_1}{2}B(2p\bar{R}^8 - \bar{L}^8) - \frac{g_2}{2}[(W^1 - iW^2)\hat{L}^1 + W^3\bar{L}^8]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Le terme de jauge de l'électron comprend la partie gauche  $L^8$  de l'onde neutrinique, tandis que le terme de jauge de la partie gauche  $L^8$  comprend la partie gauche  $L^1$  de l'onde électronique. On voit donc comment les interactions faibles mélangent les ondes gauches de l'électron et du neutrino. Comme  $\xi^1$  est la colonne de gauche de  $R^1$ , et  $\xi^8$  est la colonne de gauche de  $\tilde{R}^8$ , tandis que  $\eta^1$  est la colonne de gauche de  $\hat{L}^1$ , et  $\eta^8$  est la colonne de gauche de  $\bar{L}^8$  (en n'oubliant pas les facteurs  $\sqrt{2}$ ), ce système donne pour les particules (électron et neutrino), en se servant de l'automorphisme principal  $P : M \mapsto \hat{M}$  pour les ondes droites :

$$\begin{aligned} \hat{D}R^1 &= \hat{\nabla}R^1 + ig_1\hat{B}R^1, \\ D\hat{L}^1 &= \nabla\hat{L}^1 + i\frac{g_1}{2}B\hat{L}^1 - \frac{ig_2}{2}[(W^1 + iW^2)\bar{L}^8 - W^3\hat{L}^1], \\ D\bar{L}^8 &= \nabla\bar{L}^8 + \frac{ig_1}{2}B\bar{L}^8 - \frac{ig_2}{2}[(W^1 - iW^2)\hat{L}^1 + W^3\bar{L}^8]; \\ \hat{D}\tilde{R}^8 &= \hat{\nabla}\tilde{R}^8 + ipg_1\hat{B}\tilde{R}^8. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Pour les ondes du positron et de l'antineutrino on obtient de même :

$$\begin{aligned} D\hat{L}^{\bar{1}} &= \nabla\hat{L}^{\bar{1}} - ig_1B\hat{L}^{\bar{1}}, \\ \hat{D}R^{\bar{1}} &= \hat{\nabla}R^{\bar{1}} - \frac{ig_1}{2}\hat{B}R^{\bar{1}} - \frac{ig_2}{2}[(\hat{W}^1 - i\hat{W}^2)\tilde{R}^{\bar{8}} + \hat{W}^3R^{\bar{1}}], \\ \hat{D}\tilde{R}^{\bar{8}} &= \hat{\nabla}\tilde{R}^{\bar{8}} - i\frac{g_1}{2}\hat{B}\tilde{R}^{\bar{8}} - i\frac{g_2}{2}[(\hat{W}^1 + i\hat{W}^2)R^{\bar{1}} - \hat{W}^3\tilde{R}^{\bar{8}}], \\ D\bar{L}^{\bar{8}} &= \nabla\bar{L}^{\bar{8}} - ig_1pB\bar{L}^{\bar{8}}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Le système (2.70) est équivalent à :

$$D_\mu \xi^1 = \partial_\mu \xi^1 + ig_1 B_\mu \xi^1, \quad (2.72)$$

$$D_\mu \eta^1 = \partial_\mu \eta^1 + i\frac{g_1}{2} B_\mu \eta^1 - i\frac{g_2}{2} [(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \eta^8 - W_\mu^3 \eta^1], \quad (2.73)$$

$$D_\mu \eta^8 = \partial_\mu \eta^8 + i\frac{g_1}{2} B_\mu \eta^8 - i\frac{g_2}{2} [(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \eta^1 + W_\mu^3 \eta^8], \quad (2.74)$$

$$D_\mu \xi^8 = \partial_\mu \xi^8 + ig_1 p B_\mu \xi^8, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.75)$$

pour les ondes des particules. Et (2.71) est de même équivalent à :

$$D_\mu \xi^{\bar{8}} = \partial_\mu \xi^{\bar{8}} - i\frac{g_1}{2} B_\mu \xi^{\bar{8}} - i\frac{g_2}{2} [(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \xi^{\bar{1}} - W_\mu^3 \xi^{\bar{8}}], \quad (2.76)$$

$$D_\mu \eta^{\bar{8}} = \partial_\mu \eta^{\bar{8}} - ig_1 p B_\mu \eta^{\bar{8}}, \quad (2.77)$$

$$D_\mu \eta^{\bar{1}} = \partial_\mu \eta^{\bar{1}} - ig_1 B_\mu \eta^{\bar{1}}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.78)$$

$$D_\mu \xi^{\bar{1}} = \partial_\mu \xi^{\bar{1}} - i\frac{g_1}{2} B_\mu \xi^{\bar{1}} - i\frac{g_2}{2} [(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \xi^{\bar{8}} + W_\mu^3 \xi^{\bar{1}}], \quad (2.79)$$

pour les antiparticules. Pour le doublet  $\psi_L = \begin{pmatrix} \eta^8 \\ \eta^1 \end{pmatrix}$  d'isospin faible  $Y = -1$  les opérateurs de (2.73) et (2.74) donnent :

$$D_\mu \psi_L = \partial_\mu \psi_L - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \psi_L - i\frac{g_2}{2} W_\mu^j \tau_j \psi_L, \quad (2.80)$$

$$\tau_1 = \gamma_0 ; \tau_2 = \gamma_{123} ; \tau_3 = \gamma_5.$$

Seul l'opérateur de (2.75) n'est pas pris en compte par le modèle de Weinberg-Salam, parce que celui-ci ne peut pas utiliser l'onde droite du neutrino (à cause du terme de masse de l'équation de Dirac). On arrive donc à obtenir, à partir de l'équation améliorée, exactement le même résultat lorsque l'onde droite est nulle. L'opérateur de (2.72) est interprété comme un singulet sous  $SU(2)$  :  $\psi_R = \xi^1$  d'isospin faible  $Y = -2$  :

$$D_\mu \psi_R = \partial_\mu \psi_R - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \psi_R. \quad (2.81)$$

Finalement on peut voir ici que tous les aspects des interactions faibles dans le cas électron-neutrino : un doublet d'ondes gauches, une onde droite qui est un singulet, un neutrino droit sans aucune interaction, une conjugaison de charge échangeant les ondes droite et gauche, tout cela est obtenu ici à partir d'hypothèses simples :

- 1 - L'onde de toutes les composantes du secteur leptonique (électron, positron, neutrino de l'électron et son antineutrino) est la fonction (2.44) de l'espace et du temps à valeur dans l'algèbre de Clifford d'espace-temps.
- 2 - Quatre opérateurs  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  sont définis en (2.53) à (2.56).
- 3 - Une dérivée covariante est définie en (2.61).

Pour les antiparticules, dans le cas où l'onde du monopôle magnétique est réduit à l'onde du neutrino, nous avons un singulet d'onde gauche et un doublet d'ondes droites. En posant :

$$\psi_L = \eta^{\bar{1}}; \quad \psi_R = \begin{pmatrix} \xi^{\bar{2}} \\ \xi^{\bar{1}} \end{pmatrix}; \quad \bar{\tau}_1 = -\gamma_0; \quad \bar{\tau}_2 = \gamma_{123}; \quad \bar{\tau}_3 = \gamma_5, \quad (2.82)$$

on obtient :

$$D_\mu \psi_L = \partial_\mu \psi_L - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \psi_L, \quad (2.83)$$

avec un isospin faible  $Y = 2$ , en accord avec la règle usuelle de changement du signe des charges. Pour le doublet des ondes droites on obtient :

$$D_\mu \psi_R = \partial_\mu \psi_R - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \psi_R + i \frac{g_2}{2} W_\mu^j \bar{\tau}_j \psi_R. \quad (2.84)$$

La règle du changement de signe de toutes les charges est équivalente au changement de signe de  $g_1 Y$  et  $g_2$ . Mais ces règles ne sont pas suffisantes ; un autre changement de signe concerne  $\bar{\tau}_1 = -\tau_1$ . Ceci amène deux remarques : d'abord, le groupe de jauge  $SU(2)$  pensé dans la théorie quantique comme une "symétrie interne" est en fait un groupe d'invariance géométrique. C'est complètement oublié quand dans cette exposé on passe de (2.71), où les équations contiennent des vecteurs d'espace-temps, à (2.72)–(2.79) où les équations ne contiennent plus que des composantes de tenseurs qui ne sont plus contraintes par l'invariance sous  $Cl_3^*$  mais seulement par l'invariance sous le groupe de Lorentz. Bien sûr les deux points de vue ne sont pas équivalents : le point de vue du modèle de Weinberg-Salam est moins contraint, moins efficient que l'algèbre de Clifford. Le résultat est que nos équations d'onde sont invariantes sous  $Cl_3^*$ , mais pas le modèle de Weinberg-Salam qui est en fait déconnecté de l'invariance relativiste du champ fermionique : l'invariance relativiste y travaille classiquement pour les champs de jauge (où la transformation de Lorentz  $R$  définit une matrice  $4 \times 4$  réelle  $R_\nu^\mu$  qui change les  $x^\mu$  en  $x'^\mu = R_\nu^\mu x^\nu$ , et où le champ électromagnétique  $F_{\mu\nu}$  devient  $F'_{\rho\sigma} = R_\rho^\mu R_\sigma^\nu F_{\mu\nu}$ ), et travaille à la manière de la physique quantique pour les ondes spinorielles (où le dilatateur induit une similitude  $R$  qui change  $F$  en  $F' = MFM^{-1}$ , ce qui n'est pas du tout la même transformation). La connexion nouvelle que l'on établit ici entre l'onde fermionique de l'électron et de son neutrino, avec les densités tensorielles qu'elles permettent de construire, relie beaucoup plus la partie fermionique et la partie bosonique du modèle standard. Ceci nous permet d'arriver à une synthèse unifiée des différentes parties de la physique relativiste, ce qui était impossible avec la vieille théorie basée sur les tenseurs.

Avec la conjugaison de charge agissant simplement comme la symétrie  $PT$ , l'espace change d'orientation. Donc les trois  $\tau_j$  tournent en sens inverse des  $\bar{\tau}_j$ , et cela se voit avec le changement de signe de  $\tau_1$ .

## 2.2 Conserver les termes de masse

La première amélioration que  $Cl_3$  apporte à la théorie quantique se limitant aux matrices de Dirac est la possibilité de se servir aussi du spineur droit  $R^8$  qu'on associe au monopôle magnétique. La seconde amélioration, encore plus importante : on n'est plus obligé de supprimer les termes de masse dans les équations d'onde. Cette suppression était nécessaire quand on utilisait l'équation de Dirac, parce que les termes de masse lient l'onde gauche  $\eta$  et l'onde droite  $\xi$ , alors que  $\eta$  et  $\xi$  changent de manière complètement différente dans les transformations de jauge du groupe électro-faible [40] [41] [42] [45]. Cette suppression était un moindre mal, du point de vue expérimental, parce que la masse propre<sup>7</sup> de l'électron, et encore plus, la masse propre du neutrino de l'électron sont très petites comparées à la masse-énergie des bosons  $W$  et  $Z^0$ . Néanmoins cette suppression du terme de masse est nécessairement une approximation, puisque l'électron a une masse-énergie, et puisque l'onde du neutrino a aussi très probablement un terme de masse. Comme il était impossible de rendre compte à la fois de la masse propre et de la jauge électro-faible, un mécanisme de symétrie spontanément brisée a été construit. Le boson de Higgs (qui a été pensé pour réintroduire les masses dans les équations d'onde) a été finalement observé à très haute énergie ( $\approx 126$  GeV). L'existence d'un tel champ scalaire de très grande masse avait été suspectée dès les années trente par de Broglie avec sa théorie du photon [57, 58].

Ce que l'on va établir restaure la compatibilité entre la dérivation covariante électro-faible étudiée précédemment, et les équations d'ondes (2.10) à (2.13). L'équation d'onde améliorée de l'électron, non linéaire, peut être réécrite sous une forme qui semble décroisée et agissant sur chaque spineur chiral. Ceci peut être aisément généralisé. Maintenir des termes de masse dans les équations d'onde permettra au chapitre 4 de mettre directement ensemble la gravitation et les autres forces, dans les équations d'onde. C'est donc un important pas vers l'unification de toutes les interactions. La forme des termes de masse de l'onde de l'électron est conservée :

$$\begin{aligned} 0 &= -iD\widehat{L}^1 + \mathbf{l}^1 \widehat{v} \widehat{L}^1; \quad 0 = -i\widehat{D}R^1 + \mathbf{r}^1 \widehat{v} R^1, \\ 0 &= -i\widetilde{D}\widetilde{L}^8 + \mathbf{l}^8 \widetilde{v} \widetilde{L}^8; \quad 0 = -i\widetilde{D}\widetilde{R}^8 + \mathbf{r}^8 \widetilde{v} \widetilde{R}^8. \end{aligned} \quad (2.85)$$

On ne suppose pas que les nombres  $\mathbf{l}^1$ ,  $\mathbf{r}^1$ ,  $\mathbf{l}^8$ ,  $\mathbf{r}^8$  ont des propriétés particulières. Le vecteur unitaire  $\mathbf{v}$  (vitesse réduite) reste défini à partir des quatre spineurs de l'onde leptonique, par (2.40). On simplifie l'étude qui suit en ne considérant, dans un premier temps, que l'onde de l'électron et du neutrino-monopôle. On déduira les propriétés du positron et de l'anti-neutrino-monopôle en changeant simplement de signe le terme différentiel

<sup>7</sup> L'équation améliorée du chapitre 1 tolère deux masses éventuellement différentes  $\mathbf{r}^1$  pour l'onde droite et  $\mathbf{l}^1$  pour l'onde gauche de l'électron. L'origine de cette hypothèse est l'étude expérimentale des neutrinos-monopôles [53].

de l'équation d'onde, et en échangeant les ondes droites et gauches. Avec la forme obtenue en (2.70) pour les dérivées avec termes de jauge, l'équation d'onde devient :

$$0 = \widehat{\nabla} R^1 + i g_1 \widehat{B} R^1 + i \mathbf{r}^1 \widehat{\mathbf{v}} R^1, \quad (2.86)$$

$$0 = \nabla \widehat{L}^1 + i \frac{g_1}{2} B \widehat{L}^1 - i \frac{g_2}{2} [(W^1 + i W^2) \overline{L}^8 - W^3 \widehat{L}^1] + i \mathbf{l}^1 \mathbf{v} \widehat{L}^1, \quad (2.87)$$

$$0 = \widetilde{\nabla} \overline{L}^8 + i \frac{g_1}{2} B \overline{L}^8 - i \frac{g_2}{2} [(W^1 - i W^2) \widehat{L}^1 + W^3 \overline{L}^8] + i \mathbf{l}^8 \mathbf{v} \overline{L}^8, \quad (2.88)$$

$$0 = \overline{\nabla} \widehat{R}^8 + i g_1 p \widehat{B} \widehat{R}^8 + i \mathbf{r}^8 \widehat{\mathbf{v}} \widehat{R}^8. \quad (2.89)$$

On peut remarquer que les coefficients de  $B$  sont les mêmes seulement pour  $L^1$  et  $L^8$ . Ainsi les ondes gauches, tournant de la même manière dans la jauge chirale, peuvent se mélanger dans le groupe de jauge  $SU(2)$ . En regardant les termes de potentiel on peut voir que ces équations sont bien entendu des équations comportant deux spineurs différents. On regarde maintenant les invariances de ces équations d'onde.

## 2.3 Invariance élargie

Dans la similitude induite par un dilatateur non nul  $M$  de  $Cl_3$  tel que  $\det(M) = r e^{i\theta}$ , on a :

$$\begin{aligned} D_R'^1 &= R'^1 \widetilde{R}'^1 = M R^1 \widetilde{M} R^1 = M R^1 \widetilde{R}^1 \widetilde{M} = M D_R^1 \widetilde{M}, \\ J_l' &= M J_l \widetilde{M}; \quad \rho' = r \rho; \quad m = m' r; \quad (m = \mathbf{l}^1, \mathbf{r}^1, \mathbf{l}^8, \mathbf{r}^8), \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} m' \mathbf{v}' &= \frac{m}{r} \frac{J_l'}{\rho'} = \frac{m}{r} \frac{M J_l \widetilde{M}}{r \rho} = m \frac{M}{r e^{i\theta}} \mathbf{v} \frac{\widetilde{M}}{r e^{-i\theta}} = m \widetilde{M}^{-1} \mathbf{v} \widehat{M}^{-1}, \\ \overline{M} m' \mathbf{v}' \widehat{L}'^1 &= m \mathbf{v} \widehat{M}^{-1} \widehat{M} \widehat{L}^1 = m \mathbf{v} \widehat{L}^1, \end{aligned} \quad (2.91)$$

on simplifie les équations d'onde (2.86)–(2.89) avec :

$$\begin{aligned} p_L^1 &:= \frac{g_1}{2} B + \mathbf{l}^1 \mathbf{v} = b + \mathbf{l}^1 \mathbf{v}; \quad w^j := \frac{g_2}{2} W^j, \quad j = 1, 2, 3, \\ p_L^1 &:= g_1 B + \mathbf{r}^1 \mathbf{v} = 2b + \mathbf{r}^1 \mathbf{v}; \quad p_L^8 := \frac{g_1}{2} B + \mathbf{l}^8 \mathbf{v} = b + \mathbf{l}^8 \mathbf{v}, \\ p_R^8 &:= g_1 p B + \mathbf{r}^8 \mathbf{v} = 2p b + \mathbf{r}^8 \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Pour obtenir l'invariance relativiste de l'équation de  $L^1$ , par exemple, on doit avoir, pour les potentiels de jauge, la même variance que pour le terme différentiel. Et ce terme est covariant, il vérifie  $\nabla = \overline{M} \nabla' \widetilde{M}$ . Il doit en être de même pour  $p$ ,  $b$ ,  $w^j$ , qui seront covariants parce qu'ils intègrent les coefficients  $g_1$  et  $g_2$ . On a :

$$0 = \widehat{\nabla} R^1 + i \widehat{p}_R^1 R^1 = \widetilde{M} [\widehat{\nabla}' R'^1 + i \widehat{p}_R'^1 R'^1], \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \widehat{L}^1 + i p_L^1 \widehat{L}^1 - i[(w^1 + i w^2) \overline{L}^8 - w^3 \widehat{L}^1] \\
&= \overline{M} \left[ \nabla \widehat{L}^1 + i p_L^1 \widehat{L}^1 - i[(w'^1 + i w'^2) \overline{L}^8 - w'^3 \widehat{L}^1] \right]; \quad (2.94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \overline{L}^8 + i p_L^8 \overline{L}^8 - i[(w^1 - i w^2) \widehat{L}^1 + w^3 \overline{L}^8]; \\
&= \overline{M} \left[ \nabla \overline{L}^8 + i p_L^8 \overline{L}^8 - i[(w'^1 - i w'^2) \widehat{L}^1 + w'^3 \overline{L}^8] \right]; \quad (2.95)
\end{aligned}$$

$$0 = \widehat{\nabla} \widetilde{R}^8 + i \widehat{p}_R^8 \widetilde{R}^8 = \widetilde{M} [\widehat{\nabla}' \widetilde{R}^8 + i \widehat{p}_R'^8 \widetilde{R}^8]. \quad (2.96)$$

Cela fournit l'invariance de forme des équations d'onde, comme dans le cas de l'électron seul étudié au chapitre 1.

Les transformations de jauge sont engendrées par les opérateurs  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Cela donne un groupe à quatre paramètres  $a^0, a^1, a^2, a^3$ . On rappelle la définition de la fonction exponentielle :

$$\exp(a^0 P_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^0 P_0)^n}{n!}; \quad \exp(a^j P_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a^1 P_1 + a^2 P_2 + a^3 P_3)^n}{n!}. \quad (2.97)$$

Comme ces opérateurs sont définis dans  $Cl_3 \times Cl_3$  et qu'ils sont différents pour les ondes droites et les ondes gauches, on les étudiera sous la forme (voir ??) :

$$\Psi_R^1 = (R^1 \quad 0); \quad \Psi_L^1 = (L^1 \quad 0); \quad \Psi_R^8 = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{R}^8 \end{pmatrix}; \quad \Psi_L^8 = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{L}^8 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Avec  $P_0$  on a :

$$\begin{aligned}
P_0(\Psi_R^8) &= 2p \Psi_R^8 \gamma_{21}; \quad \exp(a^0 P_0)(\Psi_R^8) = \Psi_R^8 \exp[2pa^0 \gamma_{21}], \\
P_0(\Psi_R^1) &= 2\Psi_R^1 \gamma_{21}; \quad \exp(a^0 P_0)(\Psi_R^1) = \Psi_R^1 \exp[2a^0 \gamma_{21}], \\
P_0(\Psi_L) &= \Psi_L \gamma_{21}; \quad \exp(a^0 P_0)(\Psi_L) = \Psi_L \exp[a^0 \gamma_{21}].
\end{aligned} \quad (2.99)$$

Ensuite on pose :

$$\begin{aligned}
s &:= \theta u = \theta(s_1 P_1 + s_2 P_2 + s_3 P_3); \quad u^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, \\
U &:= e^s = e^{\theta u}, \quad (2.100)
\end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}
\Psi_R'^1 &= U \Psi_R^1 = \Psi_R^1; \quad \Psi_R'^8 = U \Psi_R^8 = \Psi_R^8, \\
\Psi_L' &= U \Psi_L = \cos(\theta) \Psi_L + \sin(\theta) u(\Psi_L), \\
u(\Psi_L) &= s_1 \Psi_L \gamma_3 \mathbf{i} + s_2 \Psi_L \gamma_3 + s_3 \Psi_L (-\mathbf{i}), \\
\Psi_L &= U^{-1} \Psi_L' = \cos(\theta) \Psi_L' - \sin(\theta) u(\Psi_L') \\
&= \cos(\theta) \Psi_L' - \sin(\theta) [s_1 \Psi_L' \gamma_3 \mathbf{i} + s_2 \Psi_L' \gamma_3 + s_3 \Psi_L' (-\mathbf{i})].
\end{aligned} \quad (2.101)$$

Comme  $P_0$  commute avec  $s$  on a :

$$\exp(S) = \exp(a^0 P_0) e^s = e^s \exp(a^0 P_0); \exp(-S) = \exp(S)^{-1}. \quad (2.102)$$

L'ensemble des  $\exp(S) = e^S$  est un groupe de Lie  $U(1) \times SU(2)$ . La transformation de jauge utilise la dérivée de la fonction exponentielle et vérifie :

$$\Psi' = [\exp(S)](\Psi); D = \sigma^\mu D_\mu; D' = \sigma^\mu D'_\mu, \quad (2.103)$$

et ainsi  $D_\mu \Psi$  est remplacé par  $D'_\mu \Psi'$  tel que :

$$(0 \ D')\Psi' = (0 \ \nabla)\Psi' + G'(\Psi') = \exp(S)[(0 \ \nabla)\Psi + G(\Psi)], \quad (2.104)$$

$$G'(\Psi') = (e^S)(X + Y); X = [(0 \ \nabla)[e^{(-S)}]](\Psi'); Y = G(\Psi). \quad (2.105)$$

La transformation des potentiels de jauge comprend donc deux parties : une partie qui vient de la dérivée de la fonction exponentielle et une autre qui vient de la non-commutation de  $\exp(S)$  avec les  $P_j$ .

### 2.3.1 Le groupe $U(1)$ engendré par $P_0$

Comme  $P_0$  commute avec  $s$ , la relation entre  $w^0 = b'$  et  $w^0 = b$  est réduite à la seule part venant de la dérivation, et l'on obtient :

$$b'_\mu = b_\mu - \partial_\mu a^0. \quad (2.106)$$

Les différents vecteurs d'espace-temps que l'on peut former à partir de l'onde de spin 1/2, pour obtenir les potentiels de jauge  $w^j$ , où  $j = 0, 1, 2, 3$ , doivent se comporter dans une similitude comme  $J_l$ , qui est la somme de  $D_R^1, D_R^8, D_L^1$  et  $D_L^8$ . Outre ces quatre vecteurs, on peut aussi considérer les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} D_{RL}^1 &= D_1 = R^1 \sigma_1 \tilde{L}^1 + L^1 \sigma_1 \tilde{R}^1; d_{RL}^1 = D_2 = i(R^1 \sigma_1 \tilde{L}^1 - L^1 \sigma_1 \tilde{R}^1), \\ D_L^{18} &= L^1 L^8 + \tilde{L}^8 \tilde{L}^1; d_L^{18} = i(L^1 L^8 - \tilde{L}^8 \tilde{L}^1), \\ D_{RL}^{18} &= R^1 \sigma_1 L^8 + \tilde{L}^8 \sigma_1 \tilde{R}^1; d_{RL}^{18} = i(R^1 \sigma_1 L^8 - \tilde{L}^8 \sigma_1 \tilde{R}^1), \\ D_R^{18} &= R^1 R^8 + \tilde{R}^8 \tilde{R}^1; d_R^{18} = i(R^1 R^8 - \tilde{R}^8 \tilde{R}^1), \\ D_{RL}^{81} &= \tilde{R}^8 \sigma_1 \tilde{L}^1 + L^1 \sigma_1 R^8; d_{RL}^{81} = i(\tilde{R}^8 \sigma_1 \tilde{L}^1 + L^1 \sigma_1 R^8), \\ D_{RL}^{88} &= \tilde{R}^8 \sigma_1 L^8 + \tilde{L}^8 \sigma_1 R^8; d_{RL}^{88} = i(\tilde{R}^8 \sigma_1 L^8 - \tilde{L}^8 \sigma_1 R^8). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Tous ces vecteurs  $D$  se transforment, comme  $J_l$ , dans la similitude définie par un dilatateur  $M$ , en  $D' = M D M$ . Avec (2.99) on a :

$$\begin{aligned} \tilde{L}'^8 &= e^{-ia^0} \tilde{L}^8; \tilde{R}'^8 = e^{2ipa^0} \tilde{R}^8; L'^1 = e^{-ia^0} L^1; R'^1 = e^{2ia^0} R^1, \\ \tilde{R}'^8 &= e^{ia^0} \tilde{R}^8; \tilde{L}'^8 = e^{-2ipa^0} \tilde{L}^8; R'^1 = e^{ia^0} R^1; L'^1 = e^{-2ia^0} L^1. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} R'^1 \sigma_1 \tilde{L}'^1 &= e^{3ia^0} R^1 \sigma_1 \tilde{L}^1; \quad R'^1 \sigma_1 L'^8 = e^{3ia^0} R^1 \sigma_1 L^8, \\ L'^1 L'^8 &= L^1 L^8; \quad \tilde{R}'^8 \sigma_1 \tilde{L}'^1 = e^{i(1+2p)a^0} \tilde{R}^8 \sigma_1 \tilde{L}^1, \\ R'^1 R'^8 &= e^{2i(1-p)a^0} R^1 R^8; \quad \tilde{R}'^8 \sigma_1 L'^8 = e^{i(1+2p)a^0} \tilde{R}^8 \sigma_1 L^8. \end{aligned} \quad (2.109)$$

On a aussi :

$$D'_R{}^1 = R'^1 \tilde{R}'^1 = e^{2ia^0} R^1 e^{-2ia^0} \tilde{R}^1 = R^1 \tilde{R}^1 = D_R^1, \quad (2.110)$$

et de même :

$$D'_R{}^8 = D_R^8; \quad D'_L{}^1 = D_L^1; \quad D'_L{}^8 = D_L^8; \quad D'_R{}^8 = D_R^8; \quad J'_l = J_l; \quad v' = v. \quad (2.111)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla} R'^1 &= \widehat{\nabla}(e^{2ia^0} R^1) = e^{2ia^0} [2i(\widehat{\nabla} a^0) R^1 + \widehat{\nabla} R^1] \\ &= e^{2ia^0} [2i(\widehat{\nabla} a^0) R^1 - i(2\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{r}^1 \widehat{\mathbf{v}}) R^1] \\ &= i[2e^{2ia^0} (\widehat{\nabla} a^0 - \widehat{\mathbf{b}}) - \mathbf{r}^1 \widehat{\mathbf{v}} e^{2ia^0}] R^1 = -i(2\widehat{\mathbf{b}}' + \mathbf{r}^1 \widehat{\mathbf{v}}) R'^1, \end{aligned} \quad (2.112)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}' = \widehat{\mathbf{b}} - \widehat{\nabla} a^0. \quad (2.113)$$

L'invariance de jauge avec  $P_0$  des autres parties de l'onde leptonique fonctionne de la même manière; c'est le cas avec (2.113) tout comme avec  $\Psi_R^8$ ,  $\Psi_R^1$  ou  $\Psi_L^n$ .

### 2.3.2 Le groupe de jauge $SU(2)$

Ce groupe de jauge agit seulement sur la partie gauche des ondes dans le cas des leptons. On n'a donc besoin de s'occuper que de  $\Psi_L := \Psi_L^1 + \Psi_L^8$ . La transformation de jauge s'écrit :

$$\Psi'_L = U(\Psi_L) = \cos(\theta) \Psi_L + \sin(\theta) [s_1 \Psi_L \gamma_3 + s_2 \Psi_L \gamma_3 (-\mathbf{i}) + s_3 \Psi_L (-\mathbf{i})]. \quad (2.114)$$

L'invariance de jauge signifie qu'avec :

$$\mathbf{D} = (0 \quad \mathbf{D}) = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{G}; \quad \boldsymbol{\partial} = (0 \quad \nabla); \quad (0 \quad \mathbf{D}') = \mathbf{D}' = \boldsymbol{\partial} + \mathbf{G}', \quad (2.115)$$

on doit avoir :

$$\mathbf{D}' \Psi'_L = U(\mathbf{D} \Psi_L), \quad (2.116)$$

ce qui nécessite :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(\Psi'_L) &= U(X) + U(Y); \quad X = [\boldsymbol{\partial}(U^{-1})](\Psi'_L); \quad Y = \mathbf{G}(\Psi_L) \\ X &= \boldsymbol{\partial}(\cos \theta) \Psi'_L - [\boldsymbol{\partial}(s_1 \sin \theta) \Psi'_L \gamma_3 + \boldsymbol{\partial}(s_2 \sin \theta) \Psi'_L \gamma_3 (-\mathbf{i}) \\ &\quad + \boldsymbol{\partial}(s_3 \sin \theta) \Psi'_L (-\mathbf{i})]. \end{aligned} \quad (2.117)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{w}^j = (0 \quad \mathbf{w}^j); \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} U(X) = & -[s_1 \partial \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \partial s_1 + \sin^2(\theta)(s_2 \partial s_3 - s_3 \partial s_2)] \Psi'_L \gamma_3 \\ & - [s_2 \partial \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \partial s_2 + \sin^2(\theta)(s_3 \partial s_1 - s_1 \partial s_3)] \Psi'_L \gamma_3(-\mathbf{i}) \\ & - [s_3 \partial \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \partial s_3 + \sin^2(\theta)(s_1 \partial s_2 - s_2 \partial s_1)] \Psi'_L(-\mathbf{i}). \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} U(Y) = & \cos(2\theta)[\mathbf{w}^1 \Psi'_L \gamma_3 + \mathbf{w}^2 \Psi'_L \gamma_3(-\mathbf{i}) + \mathbf{w}^3 \Psi'_L(-\mathbf{i})] + \sin(2\theta) \\ & \times [(s_2 \mathbf{w}^3 - s_3 \mathbf{w}^2) \Psi'_L \gamma_3 \mathbf{i} + (s_3 \mathbf{w}^1 - s_1 \mathbf{w}^3) \Psi'_L \gamma_3(-\mathbf{i}) \\ & + (s_1 \mathbf{w}^2 - s_2 \mathbf{w}^1) \Psi'_L(-\mathbf{i})] \\ & + 2 \sin^2(\theta)(s_1 \mathbf{w}^1 + s_2 \mathbf{w}^2 + s_3 \mathbf{w}^3)[s_1 \Psi'_L \gamma_3 + s_2 \Psi'_L \gamma_3(-\mathbf{i}) + s_3 \Psi'_L(-\mathbf{i})]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'^1 = & -[s_1 \partial \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \partial s_1 + \sin^2(\theta)(s_2 \partial s_3 - s_3 \partial s_2)] \\ & + \cos(2\theta) \mathbf{w}^1 + \sin(2\theta)(s_2 \mathbf{w}^3 - s_3 \mathbf{w}^2) + 2 \sin^2(\theta) s_1 (s_1 \mathbf{w}^1 + s_2 \mathbf{w}^2 + s_3 \mathbf{w}^3), \\ \mathbf{w}'^2 = & -[s_2 \partial \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \partial s_2 + \sin^2(\theta)(s_3 \partial s_1 - s_1 \partial s_3)] \\ & + \cos(2\theta) \mathbf{w}^2 + \sin(2\theta)(s_3 \mathbf{w}^1 - s_1 \mathbf{w}^3) + 2 \sin^2(\theta) s_2 (s_1 \mathbf{w}^1 + s_2 \mathbf{w}^2 + s_3 \mathbf{w}^3), \\ \mathbf{w}'^3 = & -[s_3 \partial \theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \partial s_3 + \sin^2(\theta)(s_1 \partial s_2 - s_2 \partial s_1)] \\ & + \cos(2\theta) \mathbf{w}^3 + \sin(2\theta)(s_1 \mathbf{w}^2 - s_2 \mathbf{w}^1) + 2 \sin^2(\theta) s_3 (s_1 \mathbf{w}^1 + s_2 \mathbf{w}^2 + s_3 \mathbf{w}^3). \end{aligned} \quad (2.121)$$

On peut noter la symétrie d'ordre trois de ces égalités :  $SU(2)$  est un groupe de Lie de dimension trois. Cette symétrie n'est plus une "symétrie interne", mais une invariance sous un groupe géométrique émergeant des propriétés de la multiplication dans l'algèbre  $Cl_3$ .

### Jauge en $P_3$

On arrive sur le groupe à un paramètre engendré par l'opérateur  $P_3$  lorsque  $a^0 = s_1 = s_2 = 0$  et  $s_3 = 1$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} S = & s = \theta P_3, \\ \Psi' = & [\exp(S)](\Psi) = P_-(\Psi) + \cos(\theta) P_+(\Psi) + \sin(\theta) P_3(\Psi) \\ = & \left( R^1 + e^{-i\theta} L^1 \quad \tilde{R}^8 + e^{i\theta} \tilde{L}^8 \right). \end{aligned} \quad (2.122)$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} R'^1 = & R^1; \quad \tilde{R}'^8 = \tilde{R}^8; \quad L'^1 = e^{-i\theta} L^1; \quad \tilde{L}'^8 = e^{i\theta} \tilde{L}^8; \quad J'_l = J_l, \\ L'^{\bar{1}} = & L^{\bar{1}}; \quad \tilde{L}'^{\bar{8}} = \tilde{L}^{\bar{8}}; \quad R'^{\bar{1}} = e^{-i\theta} R^{\bar{1}}; \quad \tilde{R}'^{\bar{8}} = e^{i\theta} \tilde{R}^{\bar{8}}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

On a aussi  $w_\mu'^0 = w_\mu^0$ , ce qui signifie  $b' = b$ . Les équations (2.121) deviennent :

$$\begin{aligned} w'^1 &= \cos(2\theta)w^1 - \sin(2\theta)w^2, \\ w'^2 &= \cos(2\theta)w^2 + \sin(2\theta)w^1, \\ w'^3 &= -i\nabla\theta + w^3. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Et l'on a :

$$\begin{aligned} D_L'^{18} - id_L'^{18} &= 2L'^1 L'^8 = 2e^{-i\theta} L^1 e^{-i\theta} L^8 = e^{-2i\theta} (D_L^{18} - id_L^{18}) \\ &= \cos(2\theta)D_L^{18} - \sin(2\theta)d_L^{18} - i[\sin(2\theta)D_L^{18} + \cos(2\theta)d_L^{18}], \\ D_L'^{18} &= \cos(2\theta)D_L^{18} - \sin(2\theta)d_L^{18}, \\ d_L'^{18} &= \sin(2\theta)D_L^{18} + \cos(2\theta)d_L^{18}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

C'est compatible avec :

$$\begin{aligned} (\square + m_W^2)W^1 &= D_L^{18}; \quad (\square + m_W^2)W^2 = d_L^{18}; \quad (\square + m_W^2)w^1 = \frac{g_2}{2}D_L^{18}, \\ (\square + m_W^2)w^2 &= \frac{g_2}{2}d_L^{18}; \quad W^1 = (\square + m_W^2)^{-1}D_L^{18}; \quad W^2 = (\square + m_W^2)^{-1}d_L^{18}, \end{aligned} \quad (2.126)$$

où  $\square$  est l'opérateur dalembertien ( $\square = \partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3$ ). Le coefficient  $g_2$  appelé "constante de couplage" est nécessaire pour transformer le vecteur contravariant  $W^j$  en un vecteur covariant  $w_j$  (voir 1.8).

### Jauge en $P_1$

On a maintenant  $a^0 = s_2 = s_3 = 0$  et  $s_1 = 1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} S &= s = \theta P_1, \\ \Psi' &= [\exp(S)](\Psi) = P_-(\Psi) + \cos(\theta)P_+(\Psi) + \sin(\theta)P_1(\Psi) \\ &= \left( R^1 + \cos(\theta)L^1 + i\sin(\theta)\tilde{L}^8 \quad \tilde{R}^8 + \cos(\theta)\tilde{L}^8 + i\sin(\theta)L^1 \right). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} R'^1 &= R^1; \quad R'^8 = R^8; \quad L'^{\bar{1}} = L^{\bar{1}}; \quad L'^{\bar{8}} = L^{\bar{8}}, \\ L'^1 &= \cos(\theta)L^1 + i\sin(\theta)\tilde{L}^8; \quad R'^{\bar{1}} = \cos(\theta)R^{\bar{1}} + i\sin(\theta)\tilde{R}^{\bar{8}}, \\ \tilde{L}'^8 &= \cos(\theta)\tilde{L}^8 + i\sin(\theta)L^1; \quad \tilde{R}'^{\bar{8}} = \cos(\theta)\tilde{R}^{\bar{8}} + i\sin(\theta)R^{\bar{1}}. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} D_L'^1 &= L'^1 \tilde{L}'^1 = [\cos(\theta)L^1 + i\sin(\theta)\tilde{L}^8][\cos(\theta)\tilde{L}^1 - i\sin(\theta)L^8] \\ &= \cos^2(\theta)L^1\tilde{L}^1 + i\sin(\theta)\cos(\theta)(\tilde{L}^8\tilde{L}^1 - L^1L^8) + \sin^2(\theta)\tilde{L}^8L^8, \\ D_L'^8 &= \tilde{L}'^8 L'^8 = [\cos(\theta)\tilde{L}^8 + i\sin(\theta)L^1][\cos(\theta)L^8 - i\sin(\theta)\tilde{L}^1] \\ &= \sin^2(\theta)L^1\tilde{L}^1 - i\sin(\theta)\cos(\theta)(\tilde{L}^8\tilde{L}^1 - L^1L^8) + \cos^2(\theta)\tilde{L}^8L^8. \end{aligned} \quad (2.129)$$

On en déduit :

$$D_L'^1 + D_L'^8 = D_L^1 + D_L^8; \quad J_l' = J_l; \quad \rho_l' = \rho_l; \quad v' = v. \quad (2.130)$$

Le terme de masse est donc invariant dans la transformation de jauge. On déduit aussi de (2.129) :

$$D_L'^8 - D_L'^1 = \cos(2\theta)(D_L^8 - D_L^1) + \sin(2\theta)d_L^{18}. \quad (2.131)$$

Ensuite on a :

$$\begin{aligned} 2L'^1 L'^8 &= D_L'^{18} - i d_L'^{18} \\ &= 2[\cos(\theta)L^1 + i\sin(\theta)\tilde{L}^8][\cos(\theta)L^8 - i\sin(\theta)\tilde{L}^1] \\ &= D_L^{18} - i[\cos(2\theta)d_L^{18} - \sin(2\theta)(D_L^8 - D_L^1)]. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Les équations (2.121) deviennent :

$$\begin{aligned} w'^2 &= \cos(2\theta)w^2 - \sin(2\theta)w^3, \\ w'^3 &= \cos(2\theta)w^3 + \sin(2\theta)w^2, \\ w'^1 &= -\nabla\theta + w^1. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Tout ceci est donc compatible avec :

$$(\square + m_W^2)W^3 = (D_L^8 - D_L^1); \quad W^3 = (\square + m_W^2)^{-1}(D_L^8 - D_L^1). \quad (2.134)$$

### Jauge en $P_2$

On a maintenant  $a^0 = s_1 = s_3 = 0$  et  $s_2 = 1$ . On obtient alors :

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} L^1 & \tilde{L}^8 \end{pmatrix}; \quad P_2(\Psi_L) = \Psi_L \gamma_3 = \begin{pmatrix} \tilde{L}^8 & -L^1 \end{pmatrix}, \quad (2.135)$$

$$S = s = \theta P_2,$$

$$\begin{aligned} \Psi' &= [\exp(S)](\Psi) = P_-(\Psi) + \cos(\theta)P_+(\Psi) + \sin(\theta)P_2(\Psi) \\ &= \begin{pmatrix} R^1 + \cos(\theta)L^1 + \sin(\theta)\tilde{L}^8 & \tilde{R}^8 + \cos(\theta)\tilde{L}^8 - \sin(\theta)L^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} R'^1 &= R^1; \quad R'^8 = R^8, \quad D_R'^1 = D_R^1; \quad D_R'^8 = D_R^8; \quad L'^{\bar{1}} = L^{\bar{1}}; \quad L'^{\bar{8}} = L^{\bar{8}}, \\ L'^1 &= \cos(\theta)L^1 + \sin(\theta)\tilde{L}^8; \quad R'^{\bar{1}} = \cos(\theta)R^{\bar{1}} - \sin(\theta)\tilde{R}^{\bar{8}}, \\ \tilde{L}'^8 &= \cos(\theta)\tilde{L}^8 - \sin(\theta)L^1; \quad \tilde{R}'^{\bar{8}} = \cos(\theta)\tilde{R}^{\bar{8}} + \sin(\theta)R^{\bar{1}}. \end{aligned} \quad (2.137)$$

On peut noter ceci : le changement de signe, quand on passe de l'onde de la particule à l'onde de l'antiparticule, est à l'origine de ce que l'on a vu en

2.1.2, la conjugaison de charge change la rotation des indices de matrices pour le doublet d'ondes droites. On a alors

$$\begin{aligned} D_L'^1 &= L'^1 \tilde{L}'^1 = [\cos(\theta)L^1 + \sin(\theta)\tilde{L}^8][\cos(\theta)\tilde{L}^1 + \sin(\theta)L^8] \\ &= \cos^2(\theta)L^1\tilde{L}^1 + \sin(\theta)\cos(\theta)(\tilde{L}^8\tilde{L}^1 + L^1L^8) + \sin^2(\theta)\tilde{L}^8L^8, \\ D_L'^8 &= \tilde{L}'^8 L'^8 = [\cos(\theta)\tilde{L}^8 - \sin(\theta)L^1][\cos(\theta)L^8 - \sin(\theta)\tilde{L}^1] \\ &= \sin^2(\theta)L^1\tilde{L}^1 - \sin(\theta)\cos(\theta)(\tilde{L}^8\tilde{L}^1 + L^1L^8) + \cos^2(\theta)\tilde{L}^8L^8. \end{aligned} \quad (2.138)$$

On arrive donc à :

$$D_L'^1 + D_L'^8 = D_L^1 + D_L^8; \quad J'_l = J_l. \quad (2.139)$$

On déduit aussi de (2.138) :

$$D_L'^8 - D_L'^1 = \cos(2\theta)(D_L^8 - D_L^1) - \sin(2\theta)D_L^{18}. \quad (2.140)$$

Ensuite on a :

$$\begin{aligned} 2L'^1 L'^8 &= D_L'^{18} - id_L'^{18} \\ &= 2[\cos(\theta)L^1 + \sin(\theta)\tilde{L}^8][\cos(\theta)L^8 - \sin(\theta)\tilde{L}^1] \\ &= -id_L^{18} + [\cos(2\theta)D_L^{18} + \sin(2\theta)(D_L^8 - D_L^1)]. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Les équations (2.121) deviennent :

$$\begin{aligned} w'^3 &= \cos(2\theta)w^3 - \sin(2\theta)w^1, \\ w'^1 &= \cos(2\theta)w^1 + \sin(2\theta)w^3, \\ w'^2 &= -\nabla\theta + w^2. \end{aligned} \quad (2.142)$$

C'est compatible avec (2.126) et (2.134).

### 2.3.3 Simplification des équations

Puisque  $W^3$  et  $B$  sont, comme  $J_l$ , des combinaisons linéaires des courants chiraux  $D_R^1$ ,  $D_R^8$ ,  $D_L^1$  et  $D_L^8$ , et puisque  $\tilde{L}^1\hat{L}^1 = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} (\square + m_W^2)[(W^1 + iW^2)\bar{L}^8 - W^3\hat{L}^1] &= i[2\tilde{L}^8\tilde{L}^1\bar{L}^8 - (\tilde{L}^8L^8 - L^1\tilde{L}^1)\hat{L}^1] \\ &= i[\tilde{L}^8(2\tilde{L}^1\bar{L}^8 - L^8\hat{L}^1)]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \tilde{L}^1\bar{L}^8 &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\eta_2^1 & \eta_1^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^8 & 0 \\ \eta_2^8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} = -a_2 \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}, \\ L^8\hat{L}^1 &= \overline{\tilde{L}^1\bar{L}^8} = a_2 \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2} = -\tilde{L}^1\bar{L}^8, \end{aligned} \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned} (\square + m_W^2)[(W^1 + iW^2)\bar{L}^8 - W^3\hat{L}^1] &= [-3\tilde{L}^8L^8\hat{L}^1] = [-3D_L^8\hat{L}^1] \\ &= [-3(D_L^8 - D_L^1)\hat{L}^1] = (\square + m_W^2)[-3W^3\hat{L}^1]. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Et de même on arrive à :

$$\begin{aligned}
(\square + m_W^2)[(W^1 - iW^2)\widehat{L}^1 + W^3\overline{L}^8] &= [2L^1L^8\widehat{L}^1 + (\widetilde{L}^8L^8 - L^1\widetilde{L}^1)\overline{L}^8] \\
&= [2L^1L^8\widehat{L}^1 - L^1\widetilde{L}^1\overline{L}^8] = [-3L^1\widetilde{L}^1\overline{L}^8] = [-3D_L^1\overline{L}^8] \\
&= [3(\widetilde{L}^8L^8 - L^1\widetilde{L}^1)\overline{L}^8] = (\square + m_W^2)[3W^3\overline{L}^8].
\end{aligned} \tag{2.146}$$

Donc les équations des ondes gauches peuvent s'écrire, en simplifiant les trois termes  $W^j$  :

$$0 = (\nabla + i\mathbf{b} + 3i\mathbf{w}^3 + i\mathbf{l}^1\mathbf{v})\widehat{L}^1; \quad 0 = (\nabla + i\mathbf{b} - 3i\mathbf{w}^3 + i\mathbf{l}^8\mathbf{v})\widehat{L}^8. \tag{2.147}$$

Les équations d'onde des quatre spineurs de l'onde leptonique deviennent :

$$i\nabla\eta^1 = (\mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{l}^1\mathbf{v})\eta^1; \quad i\widehat{\nabla}\xi^1 = (2\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{r}^1\widehat{\mathbf{v}})\xi^1, \tag{2.148}$$

$$i\widetilde{\nabla}\eta^8 = (\mathbf{b} - 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{l}^8\mathbf{v})\eta^8; \quad i\overline{\nabla}\xi^8 = (2p\widehat{\mathbf{b}} + \mathbf{r}^8\widehat{\mathbf{v}})\xi^8. \tag{2.149}$$

Avec (2.10) à (2.13), ceci correspond à :

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3; \quad l^1 = \mathbf{a}^1 + \mathbf{l}^1\mathbf{v} = \mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{l}^1\mathbf{v}; \quad 0 = -i\nabla\eta^1 + l^1\eta^1, \tag{2.150}$$

$$\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{b}; \quad r^1 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{r}^1\mathbf{v} = 2\mathbf{b} + \mathbf{r}^1\mathbf{v}; \quad 0 = -i\widehat{\nabla}\xi^1 + \widehat{r}^1\xi^1, \tag{2.151}$$

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{b} - 3\mathbf{w}^3; \quad l^8 = \mathbf{a}^3 + \mathbf{l}^8\mathbf{v} = \mathbf{b} - 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{l}^8\mathbf{v}; \quad 0 = -i\widetilde{\nabla}\eta^8 + l^8\eta^8, \tag{2.152}$$

$$\mathbf{a}^4 = 2p\mathbf{b}; \quad r^8 = \mathbf{a}^4 + \mathbf{r}^8\mathbf{v} = 2p\mathbf{b} + \mathbf{r}^8\mathbf{v}; \quad 0 = -i\overline{\nabla}\xi^8 + \widehat{r}^8\xi^8. \tag{2.153}$$

Les deux équations (2.150) et (2.151) s'assemblent en :

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla\widehat{\phi}^1\sigma_{21} + (\mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3)\widehat{\phi}^1p_r + 2\mathbf{b}\widehat{\phi}^1p_l + \mathbf{v}\widehat{\phi}^1\mathbf{m}^1, \\
p_r &= \frac{1 + \sigma_3}{2}; \quad p_l = \frac{1 - \sigma_3}{2}; \quad \mathbf{m}^1 := \begin{pmatrix} \mathbf{l}^1 & 0 \\ 0 & \mathbf{r}^1 \end{pmatrix} = \mathbf{l}^1p_r + \mathbf{r}^1p_l.
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Les deux équations (2.152) et (2.153) s'assemblent en :

$$0 = \widetilde{\nabla}\widehat{\phi}^8\sigma_{21} + (\mathbf{b} - 3\mathbf{w}^3)\widehat{\phi}^8p_r + 2p\mathbf{b}\widehat{\phi}^8p_l + \mathbf{v}\widehat{\phi}^8\mathbf{m}^8; \quad \mathbf{m}^8 = \mathbf{l}^8p_r + \mathbf{r}^8p_l. \tag{2.155}$$

### 2.3.4 Double lien avec la densité lagrangienne

On multiplie à gauche (2.150) par  $\eta^{1\dagger}$ , (2.151) par  $\xi^{1\dagger}$ , (2.152) par  $\eta^{8\dagger}$  et (2.153) par  $\xi^{8\dagger}$  :

$$0 = \mathcal{L}^1 = -i\eta^{1\dagger}\nabla\eta^1 + \eta^{1\dagger}l^1\eta^1, \tag{2.156}$$

$$0 = \mathcal{L}^2 = -i\xi^{1\dagger}\widehat{\nabla}\xi^1 + \xi^{1\dagger}\widehat{r}^1\xi^1, \tag{2.157}$$

$$0 = \mathcal{L}^3 = -i\eta^{8\dagger}\widetilde{\nabla}\eta^8 + \eta^{8\dagger}l^8\eta^8, \tag{2.158}$$

$$0 = \mathcal{L}^4 = -i\xi^{8\dagger}\overline{\nabla}\xi^8 + \xi^{8\dagger}\widehat{r}^8\xi^8, \tag{2.159}$$

$$0 = \mathcal{L} = \frac{m}{k\mathbf{l}^1}\mathcal{L}^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1}\mathcal{L}^2 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8}\mathcal{L}^3 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8}\mathcal{L}^4. \tag{2.160}$$

De par la construction même de cette densité lagrangienne, chaque  $\mathcal{L}^n$  est stationnaire, donc aussi la densité  $\mathcal{L}$ , puisqu'elle est identiquement nulle en tout point de l'espace-temps, et pas seulement en moyenne. Aucun principe physique n'est utilisé pour obtenir ce résultat : la densité lagrangienne est nulle comme somme de termes tous nuls. **Le principe de moindre action n'est plus un principe quasiment métaphysique.** On va écrire chacun des termes de cette densité lagrangienne comme somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. On peut d'abord remarquer qu'on répètera la même procédure quatre fois<sup>8</sup>, et donc il suffit de traiter complètement le cas de la partie  $\mathcal{L}^1$ . On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^{1\dagger}) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^{1\dagger}), \\ \mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^{1\dagger} &= -i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1) + \eta^{1\dagger}l^1\eta^1 + i(\partial_\mu\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1 + \eta^{1\dagger}l^{1\dagger}\eta^1 \\ &= -i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1) + i(\partial_\mu\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1 + \eta^{1\dagger}(l^1 + l^{1\dagger})\eta^1. \quad (2.161) \\ \mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^{1\dagger} &= -i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1) + \eta^{1\dagger}l^1\eta^1 - i(\partial_\mu\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1 - \eta^{1\dagger}l^{1\dagger}\eta^1 \\ &= -i\partial_\mu(\eta^{1\dagger}\sigma^\mu\eta^1) + \eta^{1\dagger}(l^1 - l^{1\dagger})\eta^1.\end{aligned}$$

Chaque  $l^n$  et  $r^n$  est une somme de vecteurs, et les vecteurs d'espace-temps forment la partie auto-adjointe de l'algèbre d'espace. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(l^1 + l^{1\dagger}) &= l^1 = l_\mu^1\sigma^\mu; \quad \frac{1}{2}(l^1 - l^{1\dagger}) = 0, \\ 0 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}^1 + \mathcal{L}^{1\dagger}) = \frac{1}{2}[-i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1) + i(\partial_\mu\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1] + \eta^{1\dagger}l^1\eta^1, \quad (2.162) \\ 0 &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^{1\dagger}) = \frac{1}{2}[-i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1) - i(\partial_\mu\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1] = -\frac{i}{2}\partial_\mu D_L^{1\mu}.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité signifie que le courant  $D_L^1$  se conserve. Et puisque les trois autres vecteurs sont semblables, les courants  $D_R^1$ ,  $D_L^8$  et  $D_R^8$  se conservent eux aussi. Par conséquent les  $\mathcal{L}^n$  qui ont une partie imaginaire identiquement nulle sont réels, et donc égaux à leur partie réelle :

$$0 = \mathcal{L}^n = \Re(\mathcal{L}^n). \quad (2.163)$$

Maintenant on va développer cette égalité, à l'aide de la représentation matricielle réelle suivante des matrices complexes :

$$\eta^1 = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \\ c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \quad (2.164)$$

---

8. Passer de  $\eta$  à  $\xi$  consiste simplement à remplacer  $\sigma^\mu$  par  $\hat{\sigma}^\mu$ , et donc on a seulement trois signes à changer, sinon tout est similaire.

$$\eta^{1\dagger} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \end{pmatrix}; \quad -i\eta^{1\dagger} = \begin{pmatrix} -b & a & -d & c \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix}, \quad (2.165)$$

$$\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & 0 & -\partial_1 & -\partial_2 \\ 0 & \partial_0 - \partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 \\ -\partial_1 & \partial_2 & \partial_0 + \partial_3 & 0 \\ -\partial_2 & -\partial_1 & 0 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix}, \quad (2.166)$$

$$l^1 = \begin{pmatrix} l^{10} + l^{13} & 0 & l^{11} & l^{12} \\ 0 & l^{10} + l^{13} & -l^{12} & l^{11} \\ l^{11} & -l^{12} & l^{10} - l^{13} & 0 \\ l^{12} & l^{11} & 0 & l^{10} - l^{13} \end{pmatrix}. \quad (2.167)$$

La matrice de  $\eta^1$  contient  $a, b, c, d$  une fois dans chaque colonne, et c'est la même chose pour chaque ligne de  $\eta^{1\dagger}$  et de  $-i\eta^{1\dagger}$ . Il y a exactement deux signes moins dans la colonne de droite de  $\eta^1$ . Il y a deux signes moins et deux signes plus dans chaque ligne, ou quatre signes plus, ou quatre signes moins dans  $\eta^{1\dagger}$  et  $-i\eta^{1\dagger}$ . Pour les matrices  $4 \times 4$ , chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement une seule fois les  $\partial_\mu$  ou les  $l^{1\mu}$ . On compte exactement huit signes plus et huit signes moins dans la matrice  $\nabla$ , et seulement quatre signes moins dans la matrice  $l^1$ , et ces deux matrices sont symétriques. Tout cela n'est évidemment pas un hasard mais résulte des propriétés de la multiplication dans l'algèbre  $Cl_3$ , propriétés qui sont elles-mêmes le résultat de l'anti-commutation des vecteurs orthogonaux. Donc la densité lagrangienne  $\mathcal{L}^1$  vérifie :

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}^1 = & a\delta_0 b + c\delta_0 d + (aa + bb + cc + dd)l^{10} \\ & + b\delta_1 c + d\delta_1 a + (ac + bd + ca + db)l^{11} \\ & + a\delta_2 c + b\delta_2 d + (ad - bc - cb + da)l^{12} \\ & + b\delta_3 a + c\delta_3 d = (aa + bb - cc - dd)l^{13}. \end{aligned} \quad (2.168)$$

où l'on définit ainsi la notation  $\delta$  :

$$u\delta_\mu v := u(\partial_\mu v) - (\partial_\mu u)v. \quad (2.169)$$

On remarque que tous les termes différentiels dans cette densité lagrangienne sont des termes  $\delta_\mu$ , que chaque variable réelle  $a, b, c, d$  est présente une fois et une seule avec chacun des  $\delta_\mu$ . Et de même chaque variable  $a, b, c, d$  est présente une fois et une seule dans chacun des  $l^{1\mu}$ . Ce sont là toutes les propriétés nécessaires et suffisantes pour permettre d'obtenir les équations d'onde à partir des équations de Lagrange, ce que l'on va maintenant détailler. L'équation de Lagrange relative au paramètre  $a$  s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu a)} \right), \quad (2.170)$$

elle donne l'équation d'onde :

$$\begin{aligned} \partial_0 b - \partial_1 d + \partial_2 c - \partial_3 b + 2(al^{10} + cl^{11} + dl^{12} + al^{13}) \\ = \partial_0(-b) + \partial_1 d + \partial_2(-c) + \partial_3 b. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Les termes différentiels de la première partie sont exactement les opposés des termes différentiels de la seconde partie, parce que la densité lagrangienne ne contient que des  $\delta_\mu$ . Et il y a exactement un terme de chaque variable parce que chaque variable est contenue une fois et une seule avec chaque valeur de l'indice  $\mu$ . L'origine de cette propriété est bien sûr la structure de l'algèbre  $Cl_3$ . Le facteur deux vient de ce que chaque variable est présent deux fois comme facteur de chaque  $l^{1\mu}$ , pour les mêmes raisons de structure et de signes qui résultent de l'anticommutation. Le résultat est qu'on peut simplifier l'équation d'onde :

$$0 = \partial_0 b - \partial_1 d + \partial_2 c - \partial_3 b + (al^{10} + cl^{11} + dl^{12} + al^{13}). \quad (2.172)$$

Et on peut utiliser la même méthode pour obtenir chaque équation de Lagrange. Pour la variable  $b$  on obtient :

$$\begin{aligned} -\partial_0 a + \partial_1 c + \partial_2 d + \partial_3 a + 2(bl^{10} + dl^{11} - cl^{12} + bl^{13}) \\ = \partial_0(a) + \partial_1(-c) + \partial_2(-d) + \partial_3(-a), \\ 0 = -\partial_0 a + \partial_1 c + \partial_2 d + \partial_3 a + (bl^{10} + dl^{11} - cl^{12} + bl^{13}). \end{aligned} \quad (2.173)$$

Ensuite ces deux équations peuvent être combinées en posant  $a + ib = \eta_1^1$  et  $c + id = \eta_2^1$  :

$$0 = (\partial_0 - \partial_3)\eta_1^1 + (-\partial_1 + i\partial_2)\eta_2^1 + i[(l^{10} + l^{13})\eta_1^1 + (l^{11} - il^{12})\eta_2^1]. \quad (2.174)$$

On continue le calcul avec les équations de Lagrange relatives aux variables  $c$  et  $d$ . On simplifie les équations, on les regroupe et elles donnent :

$$0 = (-\partial_1 - i\partial_2)\eta_1^1 + (\partial_0 + \partial_3)\eta_2^1 + i[(l^{11} + il^{12})\eta_1^1 + (l^{10} - l^{13})\eta_2^1]. \quad (2.175)$$

Finalement on regroupe les deux équations d'ondes à valeur complexe en une seule :

$$\begin{aligned} 0 = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ \eta_2^1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} l^{10} + l^{13} & l^{11} - il^{12} \\ l^{11} + il^{12} & l^{10} - l^{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^1 \\ \eta_2^1 \end{pmatrix} \\ 0 = -i\nabla\eta^1 + l^1\eta^1. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Ce calcul est souvent présenté d'une manière très concise, utilisant la fonction  $\psi$ , où  $\psi(x, y, z, t)$  est une matrice colonne à quatre composantes complexes, comme si ça pouvait être une variable réelle ! Cette manière ultra-concise de calcul est néanmoins toujours correcte, le calcul détaillé ci-dessus en étant précisément la preuve.

En résumé, l'égalité  $0 = \mathcal{L}$  est la conséquence nécessaire des équations d'onde des quatre  $\eta^1, \xi^1, \eta^8$  et  $\xi^8$ . Et réciproquement cette densité identiquement nulle  $\mathcal{L} = 0$ , étant donné les règles découlant de l'identité  $\mathbf{u}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$  pour tout vecteur  $\mathbf{u}$ , de la dimension 3 de l'espace, du fait que l'espace-temps de la relativité restreinte est la partie auto-adjointe de l'algèbre de Clifford, et bien cette équation, par les équations de Lagrange, redonne exactement les quatre équations d'onde dont on est parti.<sup>9</sup> De plus, quand on calcule la variation de la densité lagrangienne par rapport à l'une des variables spinorielles, on effectue le calcul comme si les potentiels ne dépendaient pas de ces spineurs. Et pourtant ils dépendent en fait de ces spineurs, comme dans n'importe quelle théorie de champ cohérente. On verra comment tous les termes des équations, autres que le terme différentiel, termes de jauge et termes de masse, dépendent, dans la densité lagrangienne, des spineurs par l'intermédiaire des courants chiraux. Il arrive alors que le calcul des équations de Lagrange est néanmoins correct, par suite d'identités qui suppriment les conséquences de cette dépendance. C'est pour cela que les potentiels de jauge paraissent extérieurs même lorsqu'ils dépendent étroitement des spineurs. Pour voir ça on peut considérer par exemple le terme  $B_\mu \eta^{1\dagger} \sigma^\mu \eta^1 = \eta^{1\dagger} B \eta^1$ . Quand on dérive ce terme par rapport à  $\eta^1$ , on suppose que cette dérivation n'affecte pas  $B$ . Néanmoins ce potentiel  $B$  pourrait inclure un terme dépendant de  $D_L^1 = L^1 \tilde{L}^1$ . Mais en pratique ce terme ne donne aucune contribution supplémentaire à l'équation de Lagrange concernée, parce que :

$$\eta^{1\dagger} L^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1^1 & \bar{\eta}_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\eta}_2^1 \\ 0 & \bar{\eta}_1^1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} (0 \quad -\bar{\eta}_1^1 \bar{\eta}_2^1 + \bar{\eta}_2^1 \bar{\eta}_1^1) = 0. \quad (2.177)$$

$$\eta^{1\dagger} D_L^1 \eta^1 = \eta^{1\dagger} L^1 \tilde{L}^1 \eta^1 = 0.$$

En physique lagrangienne, les équations de Lagrange sont obtenues en négligeant les termes qui restent après une intégration par parties, ce qui suppose que ces termes peuvent être négligés. En fait la seule chose qui est vraiment négligée, c'est justement la preuve du fait qu'on peut négliger les termes restants ! Il n'a en fait jamais été vraiment compris **pourquoi** les équations de Maxwell régissant le champ électromagnétique, ou les équations d'Einstein gouvernant le champ gravitationnel, doivent nécessairement se déduire d'un formalisme lagrangien. Les équations de Lagrange sont certes utilisables pour obtenir une partie des lois de l'électromagnétisme, cette

9. Ce double lien logique entre l'équation d'onde et la densité lagrangienne n'est pas une propriété générale des algèbres de Clifford. Il existe des dimensions et des signatures où cette dérivation automatique des équations d'onde fonctionne, à partir de la seule équation correspondant à la partie réelle cliffordienne des équations, et d'autres cas où on ne peut pas. Donc il n'y a pas de principe général derrière ce comportement automatique du formalisme lagrangien en physique quantique relativiste, c'est seulement la conséquence inévitable des propriétés particulières de l'espace-temps. Ces propriétés particulières résultent de la dimension de l'espace et du temps, qui sont toujours respectivement un et trois dans n'importe quel espace tangent en n'importe quel point de la variété d'espace-temps.

partie qui relie les dérivées partielles du champ aux courants (détails en A.3.6). Ce calcul est techniquement correct, mais les lois reliant les champs aux potentiels ne sont pas issues d'équations de Lagrange. Il en résulte que les potentiels ne sont considérés que comme des intermédiaires de calcul sans réalité physique, alors qu'ils font partie des grandeurs physiques dans l'électromagnétisme du photon de Louis de Broglie [57] [58]. De plus, la propagation des champs, aussi loin des sources que l'on voudra, n'est pas prise en compte. Cette propagation à l'infini, sans atténuation autre que celle due à la distance de la source, suffit à invalider l'annulation des termes qui restent après intégration par parties : l'augmentation du volume compense exactement la décroissance de l'amplitude des termes de potentiel.

Si cette physique lagrangienne opère à la perfection, si les termes qu'il faut faire disparaître ont la bonne fortune de se supprimer, cela ne vient pas d'un principe métaphysique, mais cela résulte simplement des propriétés très particulières de l'algèbre  $Cl_3$ . Le double lien logique a une origine purement algébrique, il est toujours valide pour toutes les interactions de la physique, sans condition, parce qu'il est directement relié à la dimension trois de l'espace et la dimension un du temps, ainsi qu'à la signature de la géométrie d'espace-temps. L'équivalence entre la forme usuelle et la forme complètement invariante des équations d'onde implique la déduction des équations réelles formant le système d'équations numériques qui équivaut à l'équation de Dirac (linéaire ou améliorée). Cette déduction toujours possible prend la forme des équations de Lagrange. En conséquence il est toujours correct d'utiliser le théorème de Noether, qui associe les lois de conservation à l'invariance de la densité lagrangienne. On doit donc noter qu'il suffit de changer la dimension ou la signature de l'espace-temps pour se trouver éventuellement privé des certitudes fournies par le théorème de Noether pour le fonctionnement de la dynamique de la matière.<sup>10</sup>

L'étude détaillée que l'on vient de faire de la partie  $\mathcal{L}^1$  de la densité lagrangienne peut bien évidemment se généraliser aux trois autres parties de l'onde leptonique, ainsi qu'aux équations de l'onde anti-leptonique, qui sont les mêmes au changement près de  $\nabla$  en  $-\nabla$  et à l'échange des ondes droites et gauches, et donc aussi à la densité lagrangienne qui en est la partie réelle.

### 2.3.5 Itération et équations des champs de jauge

Pour l'onde leptonique, la densité lagrangienne du modèle standard est composée de deux parties : L'une décrit l'onde quantique de l'électron et de son neutrino, et une autre partie décrit les bosons de jauge, c'est-à-dire B et les  $W^j$ . On a vu qu'obtenir la densité lagrangienne, en ce qui concerne les

---

10. Ceci est une raison suffisante à la faillite générale des théories à un grand nombre de dimensions, lorsqu'elles essaient d'obtenir une description réaliste du modèle standard de la physique quantique. C'est la même chose pour toute théorie basée sur les variétés riemanniennes utilisant un nombre indéterminé  $n$  de dimensions.

quatre spineurs, était automatique. Cela ne fonctionne pas du tout pareil pour la partie des bosons de jauge, elle n'est pas reliée de manière relativiste aux spineurs. On a vu en outre que le lien classique entre potentiels et champs n'est pas le même qu'en physique classique, parce qu'il apparait des opérateurs, et que le champ des bosons est, très généralement, un champ d'opérateurs. On a donc le droit de s'interroger sur la raison d'être d'un mécanisme lagrangien pour la partie bosonique du modèle standard. On a néanmoins la possibilité de contourner complètement la difficulté en se passant complètement de cette partie litigieuse du formalisme lagrangien, en utilisant la forme fonctionnelle récursive des équations d'onde de la partie fermionique du modèle standard. On utilise à nouveau la décomposition (2.98) de  $\Psi_l$  en ses quatre parties chirales. On pose :

$$p_1 := l^1; p_2 := r^1; p_3 := l^8; p_4 := r^8; p_n^{-1} = p_{n\mu}^{-1} \hat{\sigma}^\mu. \quad (2.178)$$

Avec (2.150) à (2.153) on obtient :

$$\eta^1 = ip_1^{-1} \nabla \eta^1; \nabla \eta^1 = -ip_1 \eta_1, \quad (2.179)$$

$$\xi^1 = i\hat{p}_2^{-1} \hat{\nabla} \xi^1; \hat{\nabla} \xi^1 = -i\hat{p}_2 \xi^1, \quad (2.180)$$

$$\eta^8 = ip_3^{-1} \tilde{\nabla} \eta^8; \tilde{\nabla} \eta^8 = -ip_3 \eta^8, \quad (2.181)$$

$$\xi^8 = i\hat{p}_4^{-1} \bar{\nabla} \xi^8; \bar{\nabla} \xi^8 = -i\hat{p}_4 \xi^8. \quad (2.182)$$

On obtient alors en itérant ces équations :

$$\eta^1 = ip_1^{-1} \nabla (ip_1^{-1} \nabla \eta^1) = ip_1^{-1} \nabla [ip_1^{-1} \nabla (ip_1^{-1} \nabla \eta^1)] \quad (2.183)$$

$$\xi^1 = i\hat{p}_2^{-1} \hat{\nabla} (i\hat{p}_2^{-1} \hat{\nabla} \xi^1) = i\hat{p}_2^{-1} \hat{\nabla} [i\hat{p}_2^{-1} \hat{\nabla} (i\hat{p}_2^{-1} \hat{\nabla} \xi^1)], \quad (2.184)$$

$$\eta^8 = ip_3^{-1} \tilde{\nabla} (ip_3^{-1} \tilde{\nabla} \eta^8) = ip_3^{-1} \tilde{\nabla} [ip_3^{-1} \tilde{\nabla} (ip_3^{-1} \tilde{\nabla} \eta^8)], \quad (2.185)$$

$$\xi^8 = i\hat{p}_4^{-1} \bar{\nabla} (i\hat{p}_4^{-1} \bar{\nabla} \xi^8) = i\hat{p}_4^{-1} \bar{\nabla} [i\hat{p}_4^{-1} \bar{\nabla} (i\hat{p}_4^{-1} \bar{\nabla} \xi^8)]. \quad (2.186)$$

Ces équations ne sont pas optionnelles, elles sont une conséquence obligatoire de l'équation d'onde de chaque spineur. Itérées une fois, les équations d'onde permettent de définir les champs de jauge à partir des potentiels et des termes de masse inclus dans les  $p_n^{-1}$ . Le modèle standard a des problèmes avec les champs de Yang-Mills, et on peut en voir une raison : ces champs ne sont pas indépendants de l'onde quantique puisqu'ils sont définis à partir de ces équations d'onde. Et cette définition se fait en quatre parties puisqu'il y a quatre sortes de représentations du groupe  $Cl_3^*$ . On remplace maintenant les spineurs colonnes  $\xi$  et  $\eta$  par les termes correspondants dans  $Cl_3$ . On obtient :

$$\nabla \hat{L}^1 = -ip_1 \hat{L}^1; \hat{\nabla} (\nabla \hat{L}^1) = -i\hat{\nabla} (p_1 \hat{L}^1), \quad (2.187)$$

$$\hat{\nabla} R^1 = -i\hat{p}_2 R^1; \nabla (\hat{\nabla} R^1) = -i\nabla (\hat{p}_2 R^1), \quad (2.188)$$

$$\nabla \bar{L}^8 = -ip_3 \bar{L}^8; \hat{\nabla} (\nabla \bar{L}^8) = -i\hat{\nabla} (p_3 \bar{L}^8), \quad (2.189)$$

$$\hat{\nabla} \tilde{R}^8 = -i\hat{p}_4 \tilde{R}^8; \nabla (\hat{\nabla} \tilde{R}^8) = -i\nabla (\hat{p}_4 \tilde{R}^8). \quad (2.190)$$

On définit maintenant les champs de jauge  $F$  comme :

$$\widehat{\nabla}(\mathbf{p}_1 \widehat{L}^1) = F_L^1(\widehat{L}^1) + \widehat{\mathbf{p}}_1 \nabla \widehat{L}^1, \quad (2.191)$$

$$\nabla(\widehat{\mathbf{p}}_2 R^1) = \widehat{F}_R^1(R^1) + \mathbf{p}_2 \widehat{\nabla} R^1, \quad (2.192)$$

$$\widehat{\nabla}(\mathbf{p}_3 \overline{L}^8) = F_L^8(\overline{L}^8) + \widehat{\mathbf{p}}_3 \nabla \overline{L}^8, \quad (2.193)$$

$$\nabla(\widehat{\mathbf{p}}_4 \widetilde{R}^8) = \widehat{F}_R^8(R^8) + \mathbf{p}_4 \widehat{\nabla} \widetilde{R}^8. \quad (2.194)$$

Dans toute théorie physique de champs, le lien entre les termes de potentiels et les termes de champs ne sont pas arbitraires. Par exemple, le potentiel gravitationnel du Soleil n'est pas postulé, mais calculé à partir des équations du champ de gravitation. La principale nouveauté des relations précédentes, c'est que les champs de jauge sont différents pour les ondes droites et les ondes gauches. Et on doit rappeler qu'un photon est droit ou gauche. Comme :

$$\square \widehat{L}^1 = -i[F_L^1(\widehat{L}^1) + \widehat{\mathbf{p}}_1 \nabla \widehat{L}^1] = -iF_L^1(\widehat{L}^1) - i\widehat{\mathbf{p}}_1(-i\mathbf{p}_1 \widehat{L}^1), \quad (2.195)$$

et avec :

$$\mathbf{p}_n^2 = \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n \widehat{\mathbf{p}}_n = \widehat{\mathbf{p}}_n \mathbf{p}_n, \quad (2.196)$$

les équations du second ordre s'écrivent :

$$0 = (\square + \mathbf{p}_1^2 + iF_L^1)(\widehat{L}^1), \quad (2.197)$$

$$0 = (\square + \mathbf{p}_2^2 + i\widehat{F}_R^1)(R^1), \quad (2.198)$$

$$0 = (\square + \mathbf{p}_3^2 + iF_L^8)(\overline{L}^8), \quad (2.199)$$

$$0 = (\square + \mathbf{p}_4^2 + i\widehat{F}_R^8)(\widetilde{R}^8). \quad (2.200)$$

On a donc :

$$F_L^1(\widehat{L}^1) = i(\square + \mathbf{p}_1^2)(\widehat{L}^1), \quad (2.201)$$

$$\widehat{F}_R^1(R^1) = i(\square + \mathbf{p}_2^2)(R^1), \quad (2.202)$$

$$F_L^8(\overline{L}^8) = i(\square + \mathbf{p}_3^2)(\overline{L}^8), \quad (2.203)$$

$$\widehat{F}_R^8(\widetilde{R}^8) = i(\square + \mathbf{p}_4^2)(\widetilde{R}^8). \quad (2.204)$$

### 2.3.6 Angle de Weinberg-Salam

Ce paramètre du modèle standard est un angle qui mesure le mélange entre le photon et les autres bosons de jauge du groupe  $U(1) \times SU(2)$ . Cet angle  $\theta_W$  vérifie :

$$g_1 = \frac{q}{\cos(\theta_W)} ; \quad g_2 = \frac{q}{\sin(\theta_W)} ; \quad q = \frac{e}{\hbar c}, \quad (2.205)$$

$$-g_1 B + g_2 W^3 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} Z^0 = \frac{2q}{\sin(2\theta_W)} Z^0, \quad (2.206)$$

$$B = \cos(\theta_W)A - \sin(\theta_W)Z^0; \quad W^3 = \sin(\theta_W)A + \cos(\theta_W)Z^0, \quad (2.207)$$

$$B + iW^3 = e^{i\theta_W}(A + iZ^0); \quad A + iZ^0 = e^{-i\theta_W}(B + iW^3). \quad (2.208)$$

Avec les équations (2.143) et (2.144), en regroupant les trois termes  $W^j$ , on remplace  $3W^3$  par  $W$  et au lieu des précédentes équations, on pose maintenant :

$$g_1 = \frac{q}{\cos(\theta_W)}; \quad g_2 = \frac{q}{\sin(\theta_W)}; \quad q = \frac{e}{\hbar c}, \quad (2.209)$$

$$A = \cos(\theta_W)B + \sin(\theta_W)W; \quad Z^0 = -\sin(\theta_W)B + \cos(\theta_W)W, \quad (2.210)$$

$$B = \cos(\theta_W)A - \sin(\theta_W)Z^0; \quad W = \sin(\theta_W)A + \cos(\theta_W)Z^0, \quad (2.211)$$

$$B + iW = e^{i\theta_W}(A + iZ^0); \quad A + iZ^0 = e^{-i\theta_W}(B + iW). \quad (2.212)$$

Le système des équations d'onde de l'électron s'exprime alors comme :

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla + i\frac{g_1}{2}B + i\frac{g_2}{2}W + i\mathbf{l}^1\mathbf{v})\hat{L}^1, \\ 0 &= (\nabla - ig_1B - i\mathbf{r}^1\mathbf{v})\hat{R}^1. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Et avec les précédentes définitions c'est équivalent à :

$$\begin{aligned} 0 &= [\nabla - i(qA + \mathbf{r}^1\mathbf{v}) + iqTZ^0]\hat{R}^1; \quad T = \tan(\theta_W), \\ 0 &= \left[ \nabla + i(qA + \mathbf{l}^1\mathbf{v}) + i\frac{q}{2}\left(-T + \frac{1}{T}\right)Z^0 \right]\hat{L}^1. \end{aligned} \quad (2.214)$$

Comme il y a une seule manière d'exprimer des termes  $X$  et  $Y$  quelconques comme somme et différence :  $X = 1/2(X + Y) + 1/2(X - Y)$  et  $Y = 1/2(X + Y) - 1/2(X - Y)$ , on récrit le système précédent sous la forme :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \nabla - i[qA + \mathbf{r}^1\mathbf{v}] - i\frac{q}{4}\left(\frac{1}{T} - 3T\right)Z^0 + i\frac{q}{4}\left(\frac{1}{T} + T\right)Z^0 \right]\hat{R}^1, \\ 0 &= \left[ \nabla + i[qA + \mathbf{l}^1\mathbf{v}] + i\frac{q}{4}\left(\frac{1}{T} - 3T\right)Z^0 + i\frac{q}{4}\left(\frac{1}{T} + T\right)Z^0 \right]\hat{L}^1. \end{aligned} \quad (2.215)$$

On n'obtient l'équation d'onde de l'électron (1.149) que si le terme en  $Z^0$  n'est que d'un seul signe, positif, et donc seulement si  $3T - 1/T$  s'annule. Et c'est le cas justement si  $\theta_W = 30^\circ$ , qu'on a obtenu en [33] par un autre raisonnement, indépendant de celui-ci. De plus, ce résultat a aussi été obtenu par Stoica d'une manière encore différente [109], ce qui conforte le résultat et donne :

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{1}{T} = \sqrt{3} = 3T; \quad 3T - \frac{1}{T} = 0; \quad \frac{q}{4}\left(T + \frac{1}{T}\right) = \frac{q}{\sqrt{3}}. \quad (2.216)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \nabla - i(qA + \mathbf{r}^1\mathbf{v}) + i\frac{q}{\sqrt{3}}Z^0 \right]\hat{R}^1, \\ 0 &= \left[ \nabla + i(qA + \mathbf{l}^1\mathbf{v}) + i\frac{q}{\sqrt{3}}Z^0 \right]\hat{L}^1. \end{aligned} \quad (2.217)$$

La rotation de  $30^\circ$  de l'angle de Weinberg-Salam est donc la simple réécriture des termes de jauge comme somme et différence de termes qui s'appliquent au spineur gauche et au spineur droit de l'électron. De plus, il s'avère que le calcul de cet angle à partir des données expérimentales, par la méthode d'approximation de la théorie quantique des champs, donne une valeur proche de  $30^\circ$  et qui s'en approche quand on utilise des données à faible impulsion-énergie.

### 2.3.7 Conséquence pour le neutrino-monopôle

L'angle de Weinberg-Salam concerne plusieurs propriétés : le boson  $Z^0$  a une masse propre supérieure à celle des bosons  $W^n$ . Le rapport expérimental des masses est dans le voisinage du rapport  $2/\sqrt{3}$  résultant de la valeur  $30^\circ$  de l'angle de Weinberg-Salam. Les autres propriétés sont la charge électrique nulle du neutrino, et la masse propre nulle du photon. Les équations de l'onde gauche et de l'onde droite du neutrino-monopôle sont maintenant :

$$0 = (-i\tilde{\nabla} + b - 3w^3 + \mathbf{l}^8 \mathbf{v}) \bar{L}^8, \quad (2.218)$$

$$0 = (i\tilde{\nabla} + 2pb + \mathbf{r}^8 \mathbf{v}) \bar{R}^8. \quad (2.219)$$

Avec les  $30^\circ$  de l'angle, ceci devient :

$$0 = \left[ -i\nabla + \frac{q}{2}(A - Z'^0) - \frac{q}{2}(A + Z'^0) + \mathbf{l}^8 \mathbf{v} \right] \bar{L}^8, \quad (2.220)$$

$$0 = [i\nabla + pq(A - Z'^0) + \mathbf{r}^8 \mathbf{v}] \bar{R}^8; \quad Z'^0 := \frac{Z^0}{\sqrt{3}}. \quad (2.221)$$

Le terme  $A$  disparaît dans l'équation d'onde de  $\bar{L}^8$ , c'est ce qui fait du neutrino gauche un objet "neutre", c'est-à-dire sans interaction électrique. On rappelle que ce système de deux équations est en fait équivalent à l'équation unique obtenue en sommant les deux équations du système, parce que les termes non nuls de  $\bar{L}^8$  et  $\bar{R}^8$  occupent les deux parties d'une même matrice,  $\bar{\phi}^8$  :

$$0 = \nabla \bar{\phi}^8 (-i\sigma_3) - 2qZ'^0 \bar{L}^8 + pqA \bar{R}^8 - pqZ'^0 \bar{R}^8 + \mathbf{l}^8 \mathbf{v} \bar{L}^8 + \mathbf{r}^8 \mathbf{v} \bar{R}^8 \quad (2.222)$$

Si  $p = -2$ , une valeur qu'on justifiera au chapitre 4, on peut rassembler les deux termes contenant  $Z'^0$  :

$$0 = \nabla \bar{\phi}^8 \sigma_{21} + qA \bar{\phi}^8 (1 - \sigma_3) - 2qZ'^0 \bar{\phi}^8 \sigma_3 + \mathbf{v} \bar{\phi}^8 \begin{pmatrix} \mathbf{l}^8 & 0 \\ 0 & \mathbf{r}^8 \end{pmatrix}, \quad (2.223)$$

$$0 = \nabla \bar{\phi}^8 \sigma_{21} + qA \bar{\phi}^8 (1 - \sigma_3) - 2qZ'^0 \bar{\phi}^8 \sigma_3 + \mathbf{v} \bar{\phi}^8 \mathbf{m}^8; \quad \mathbf{m}^8 := \begin{pmatrix} \mathbf{l}^8 & 0 \\ 0 & \mathbf{r}^8 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Densités tensorielles d'impulsion-énergie

L'équation de Dirac utilise une densité lagrangienne unique, mais en fait plusieurs densités lagrangiennes différentes sont possibles, toutes stationnaires parce qu'elles sont identiquement nulles. En (2.160) on a posé :

$$0 = \mathcal{L} = \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \mathcal{L}^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \mathcal{L}^2 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \mathcal{L}^3 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \mathcal{L}^4.$$

On a rencontré au chapitre 1 l'autre densité que l'on peut former à partir de l'électron seul. Ces deux densités se généralisent en :

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}^+ = \mathcal{L} &= \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \mathcal{L}^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \mathcal{L}^2 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \mathcal{L}^3 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \mathcal{L}^4, \\ 0 = \mathcal{L}^- &= \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \mathcal{L}^1 - \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \mathcal{L}^2 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \mathcal{L}^3 - \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \mathcal{L}^4. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Chacune de ces densités lagrangiennes est invariante sous le groupe d'invariance étendue  $Cl_3^*$ . A chacun des sous-groupes à un paramètre de ces invariances est associé un courant qui se conserve (théorème de Noether). Le tenseur d'impulsion-énergie, appelé tenseur  $T$  de Tétrode, est associé à l'invariance sous les translations d'espace-temps de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}^+$ . Le tenseur associé à  $\mathcal{L}^-$  généralise le tenseur non-interprété  $V$  de O. Costa de Beauregard.<sup>11</sup> Ils vérifient :

$$\begin{aligned} T_\lambda^\mu &= \Re \left[ \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^1 \eta^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^1 \xi^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^8 \eta^8 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^8 \xi^8 \right) \right], \end{aligned} \quad (2.225)$$

$$\begin{aligned} V_\lambda^\mu &= \Re \left[ - \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^1 \eta^1 - \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^1 \xi^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^8 \eta^8 - \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^8 \xi^8 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.226)$$

où les opérateurs  $d_\lambda$  sont définis par :

$$d_{L\lambda}^1 \eta^1 = (-i\partial_\lambda + l_\lambda^1) \eta^1, \quad (2.227)$$

$$d_{R\lambda}^1 \xi^1 = (-i\partial_\lambda + r_\lambda^1) \xi^1, \quad (2.228)$$

$$d_{L\lambda}^8 \eta^8 = (-i\partial_\lambda + l_\lambda^8) \eta^8, \quad (2.229)$$

$$d_{R\lambda}^8 \xi^8 = (-i\partial_\lambda + r_\lambda^8) \xi^8. \quad (2.230)$$

11. En [54], O. Costa de Beauregard remarqua que le tenseur  $V_{ij}$  est non interprété, ce qui veut dire qu'il est sans équivalent en physique classique. On peut voir que ce tenseur s'obtient [22] en remplaçant  $\gamma_0$  par  $\gamma_3$  dans la définition du tenseur de Tétrode. Cette substitution change aussi le courant  $J$  en le courant  $K$  et elle est équivalente au passage de  $\mathcal{L}^+$  à  $\mathcal{L}^-$ . Ceci amène l'idée surprenante que **deux tenseurs d'impulsion-énergie de nature différente existent avec l'onde de l'électron**. L'existence de deux densités lagrangiennes et de deux tenseurs d'impulsion-énergie est apparue en premier dans la théorie du photon de Louis de Broglie [57][58].

Le tenseur d'impulsion-énergie  $T$  est donc la somme de quatre tenseurs, un pour chacun des spineurs de l'onde leptonique :

$$T = \frac{m}{k\mathbf{l}^1} T_L^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} T_R^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} T_R^8 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} T_L^8, \quad (2.231)$$

$$T_{L\lambda}^{1\mu} = \Re(\eta^{1\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^1 \eta^1). \quad (2.232)$$

On obtient les trois autres en remplaçant simplement  $\eta^1$  par  $\xi^1$ ,  $\eta^8$  et  $\xi^8$ , et en remplaçant les  $\sigma^\mu$  par des  $\widehat{\sigma}^\mu$  si on remplace un  $\eta$  par un  $\xi$ . Il suffit donc d'étudier en détail  $T_L^1$  puis d'utiliser la procédure de remplacement. Ce qu'on calcule ici est une généralisation de l'étude du chapitre 1. Donc il suffit de reprendre la méthode de calcul utilisée pour l'électron, qui, avec (1.310), donne :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_L^{1\mu} &= \partial_\mu T_{L\lambda}^{1\mu} \sigma^\lambda = \Re[\partial_\mu[\eta^{1\dagger} \sigma^\mu (-i\partial_\lambda + l_\lambda^1) \eta^1]] \sigma^\lambda \\ &= \Re[\partial_\mu[-i\eta^{1\dagger} \sigma^\mu \partial_\lambda \eta^1 + l_\lambda^1 D_L^{1\mu}]] \sigma^\lambda. \end{aligned} \quad (2.233)$$

Puis on utilise l'équation d'onde de  $\eta^1$ , ce qui donne :

$$\nabla \eta^1 = -il^1 \eta^1; \quad \partial_\mu D_L^{1\mu} = 0, \quad (2.234)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_L^{1\mu} &= \Re[[-i(\nabla \eta^1)^\dagger \partial_\lambda \eta^1 - i\eta^{1\dagger} \partial_\lambda (\nabla \eta^1) - D_L^{1\mu} \partial_\mu l_\lambda^1]] \sigma^\lambda \\ &= \Re[-i(i\eta^{1\dagger} l^1) \partial_\lambda \eta^1 - i\eta^{1\dagger} \partial_\lambda (-il^1 \eta^1) + (\partial_\mu l_\lambda^1) D_L^{1\mu}] \sigma^\lambda \\ &= (\partial_\mu l_\lambda^1 - \partial_\lambda l_\mu^1) D_L^{1\mu} \sigma^\lambda. \end{aligned} \quad (2.235)$$

De même, avec les trois autres spineurs, on obtient :

$$\partial_\mu T_R^{1\mu} = (\partial_\mu r_\lambda^1 - \partial_\lambda r_\mu^1) D_R^{1\mu} \sigma^\lambda, \quad (2.236)$$

$$\partial_\mu T_L^{8\mu} = (\partial_\mu l_\lambda^8 - \partial_\lambda l_\mu^8) D_L^{8\mu} \sigma^\lambda, \quad (2.237)$$

$$\partial_\mu T_R^{8\mu} = (\partial_\mu r_\lambda^8 - \partial_\lambda r_\mu^8) D_R^{8\mu} \sigma^\lambda. \quad (2.238)$$

Le champ électromagnétique complet  $F$ , c'est-à-dire avec monopôles magnétiques, est la somme d'un champ purement électrique, noté  $F^e$ , et d'un champ purement magnétique, noté  $F^m$ . Ils vérifient :

$$\partial_\mu A^\mu = 0; \quad \partial_\mu Z^{0\mu} = 0, \quad (2.239)$$

$$\begin{aligned} F &= F^e + F^m; \quad F^e = \nabla \widehat{A} = \vec{E} + i\vec{H}; \quad \vec{E} = -\partial_0 \vec{A} - \vec{\partial} A_0; \quad \vec{H} = \vec{\partial} \times \vec{A} \\ F^m &= \nabla i \widehat{Z^0} = \vec{E}^m + i\vec{H}^m; \quad \vec{E}^m = \vec{\partial} \times \vec{Z^0}; \quad \vec{H}^m = \partial_0 \vec{Z'^0} + \vec{\partial} Z_0'^0. \end{aligned} \quad (2.240)$$

On a donc :

$$F_{\mu\lambda}^e = \partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu; \quad iF_{\mu\lambda}^m = \partial_\mu Z_\lambda'^0 - \partial_\lambda Z_\mu'^0, \quad (2.241)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu &= \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \partial_\mu T_L^{1\mu} + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \partial_\mu T_R^{1\mu} + \frac{m}{km_l} \partial_\mu T_L^{8\mu} + \frac{m}{km_r} \partial_\mu T_R^{8\mu} = \partial_\mu T_\lambda^\mu \sigma^\lambda, \\ \partial_\mu T_\lambda^\mu &= \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \partial_\mu T_{L\lambda}^{1\mu} + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \partial_\mu T_{R\lambda}^{1\mu} + \frac{m}{km_l} \partial_\mu T_{L\lambda}^{8\mu} + \frac{m}{km_r} \partial_\mu T_{R\lambda}^{8\mu}. \end{aligned} \quad (2.242)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} l^1 &= b + 3w^3 + \mathbf{l}^1 \mathbf{v} = \frac{q}{2}(A - Z'^0) + \frac{q}{2}(A + Z'^0) + \mathbf{l}^1 \mathbf{v} \\ &= qA + \mathbf{l}^1 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.243)$$

$$r^1 = 2b + \mathbf{r}^1 \mathbf{v} = q(A - Z'^0) + \mathbf{r}^1 \mathbf{v}, \quad (2.244)$$

$$\begin{aligned} l^8 &= b - 3w^3 + \mathbf{l}^8 \mathbf{v} = \frac{q}{2}(A - Z'^0) - \frac{q}{2}(A + 3Z'^0) + \mathbf{l}^8 \mathbf{v} \\ &= -2qZ'^0 + \mathbf{l}^8 \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.245)$$

$$r^8 = 2pb + \mathbf{r}^8 \mathbf{v} = pq(A - Z'^0) + \mathbf{r}^8 \mathbf{v}. \quad (2.246)$$

On obtient avec l'onde gauche de l'électron :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{L\lambda}^{1\mu} &= (\partial_\mu l_\lambda^1 - \partial_\lambda l_\mu^1) D_L^{1\mu} \\ &= [q(\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) + q(\partial_\mu Z'^0_\lambda - \partial_\lambda Z'^0_\mu) + \mathbf{l}(\partial_\mu \mathbf{v}_\lambda - \partial_\lambda \mathbf{v}_\mu)] D_L^{1\mu} \\ &= (qF_{\mu\lambda}^e + iqF_{\mu\lambda}^m + \mathbf{l}^1 G_{\mu\lambda}) D_L^{1\mu} \end{aligned} \quad (2.247)$$

$$G_{\mu\lambda} := \partial_\mu \mathbf{v}_\lambda - \partial_\lambda \mathbf{v}_\mu, \quad (2.248)$$

où  $G$  est un bivecteur similaire au champ électromagnétique. On obtient avec l'onde droite de l'électron :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{R\lambda}^{1\mu} &= (\partial_\mu r_\lambda^1 - \partial_\lambda r_\mu^1) D_R^{1\mu} \\ &= [q(\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) - (\partial_\mu Z'^0_\lambda - \partial_\lambda Z'^0_\mu) + \mathbf{r}(\partial_\mu \mathbf{v}_\lambda - \partial_\lambda \mathbf{v}_\mu)] D_R^{1\mu} \\ &= (qF_{\mu\lambda}^e - iqF_{\mu\lambda}^m + \mathbf{r}^1 G_{\mu\lambda}) D_R^{1\mu}. \end{aligned} \quad (2.249)$$

On obtient avec l'onde gauche du neutrino-monopôle :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{L\lambda}^{8\mu} &= (\partial_\mu l_\lambda^8 - \partial_\lambda l_\mu^8) D_L^{8\mu} \\ &= [0(\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) - 2q(\partial_\mu Z'^0_\lambda - \partial_\lambda Z'^0_\mu) + m_l(\partial_\mu \mathbf{v}_\lambda - \partial_\lambda \mathbf{v}_\mu)] D_L^{8\mu} \\ &= (0F_{\mu\lambda}^e - 2iqF_{\mu\lambda}^m + \mathbf{l}^8 G_{\mu\lambda}) D_L^{8\mu}. \end{aligned} \quad (2.250)$$

On obtient avec l'onde droite du neutrino-monopôle :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_{R\lambda}^{8\mu} &= (\partial_\mu r_\lambda^8 - \partial_\lambda r_\mu^8) D_R^{8\mu} \\ &= [pq(\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu) - pq(\partial_\mu Z'^0_\lambda - \partial_\lambda Z'^0_\mu) + m_r(\partial_\mu \mathbf{v}_\lambda - \partial_\lambda \mathbf{v}_\mu)] D_R^{8\mu} \\ &= (pqF_{\mu\lambda}^e - ipqF_{\mu\lambda}^m + \mathbf{r}^8 G_{\mu\lambda}) D_R^{8\mu}. \end{aligned} \quad (2.251)$$

Ajoutant les différents termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_\lambda^\mu &= \frac{q}{k} F_{\mu\lambda}^e \left( \frac{m}{\mathbf{l}^1} D_L^{1\mu} + \frac{m}{\mathbf{r}^1} D_R^{1\mu} + \frac{mp}{\mathbf{r}^8} D_R^{8\mu} \right) \\ &\quad + i \frac{q}{k} F_{\mu\lambda}^m \left( \frac{m}{\mathbf{l}^1} D_L^{1\mu} - \frac{m}{\mathbf{r}^1} D_R^{1\mu} - 2 \frac{m}{\mathbf{l}^8} D_L^{8\mu} - p \frac{m}{\mathbf{r}^8} D_R^{8\mu} \right) \\ &\quad + \frac{m}{k} G_{\mu\lambda} (D_L^{1\mu} + D_R^{1\mu} + D_L^{8\mu} + D_R^{8\mu}). \end{aligned} \quad (2.252)$$

Et on a donc :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu = & \left[ qF_{\mu\lambda}^e (\underline{J}^\mu + \frac{mp}{k\mathbf{r}^8} D_R^{8\mu}) \right. \\ & \left. + iqF_{\mu\lambda}^m (\frac{m}{k\mathbf{l}^1} D_L^{1\mu} - \frac{m}{k\mathbf{r}^1} D_R^{1\mu} - 2\frac{m}{k\mathbf{l}^8} D_L^{8\mu} - p\frac{m}{k\mathbf{r}^8} D_R^{8\mu}) + \frac{m}{k} G_{\mu\lambda} J_l^\mu \right] \sigma^\lambda. \end{aligned} \quad (2.253)$$

On peut remarquer que le terme  $D_L^{8\mu}$  manque sur la première ligne : cela correspond au fait que le neutrino gauche ne voit pas l'interaction électrique, c'est la raison du nom "neutrino". Lorsque l'électron est seul, lorsque les interactions faibles ne sont pas en jeu, ni le champ  $G$ , il reste :

$$\partial_\mu T^\mu = qF_{\mu\lambda}^e (\frac{m}{k\mathbf{l}^1} D_L^{1\mu} + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} D_R^{1\mu}) \sigma^\lambda, \quad (2.254)$$

Ceci donne la force de Lorentz (1.328) agissant sur le courant électrique  $\mathbf{j}_e = e(\frac{m}{k\mathbf{l}^1} D_R^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} D_L^1)$  de l'électron.

### 2.4.1 Densité de probabilité

La composante  $T_0^0$  de la densité d'impulsion-énergie vérifie :

$$\begin{aligned} T_0^0 = \Re \left[ -i \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} d_{L0}^1 \eta^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} d_{R0}^1 \xi^1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} d_{L0}^8 \eta^8 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} d_{R0}^8 \xi^8 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.255)$$

Pour une solution de l'équation d'onde d'énergie  $E$ , la même pour la totalité de l'onde, on a :

$$\begin{aligned} -id_{R0}^1 \xi^1 &= \frac{E}{\hbar c} \xi^1(\vec{x}); \quad -id_{R0}^8 \xi^8 = \frac{E}{\hbar c} \xi^8(\vec{x}), \\ -id_{L0}^1 \eta^1 &= \frac{E}{\hbar c} \eta^1(\vec{x}); \quad -id_{L0}^8 \eta^8 = \frac{E}{\hbar c} \eta^8(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.256)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{E}{\hbar c} \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} \eta^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} \xi^1 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} \eta^8 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} \xi^8 \right) \\ &= \frac{E}{\hbar c} \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} D_L^{10} + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} D_R^{10} + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} D_L^{80} + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} D_R^{80} \right) = \frac{E}{\hbar c} \underline{J}_l^0, \end{aligned} \quad (2.257)$$

C'est le courant  $\underline{J}_l$  qui généralise le courant  $\mathbf{J}$  du chapitre 1. La cause de l'existence d'une densité de probabilité est donc la même que pour l'électron seul, c'est le principe d'équivalence entre la masse-énergie d'inertie et la masse-énergie gravitante, qui implique :

$$E = \iiint dv T_0^0; \quad \iiint dv \frac{\underline{J}_l^0}{\hbar c} = 1. \quad (2.258)$$

## 2.5 Quantification du moment cinétique

Le théorème de Noether déduit la conservation de l'impulsion-énergie de l'invariance de la densité lagrangienne sous les translations. De la même manière ce théorème permet de déduire la conservation du moment cinétique de l'invariance de la densité lagrangienne sous les rotations. La mécanique relativiste remplace le groupe des rotations de l'espace par le groupe de Lorentz. Or la physique quantique remplace le groupe des rotations  $SO(3)$  par le groupe  $SU(2)$  tout comme elle remplace le groupe de Lorentz orthochrone par le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ . Enfin, on a étendu d'une part cette invariance au groupe  $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$  contenant le précédent, et d'autre part on dispose non plus d'une seule, mais de deux densités lagrangiennes invariantes,  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$ . On va utiliser ici la seconde,  $\mathcal{L}^-$  et la densité d'impulsion-énergie correspondante, définie par :

$$V_\lambda^\mu := \Re \left[ -i \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^1 \eta^1 - \frac{m}{k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^1 \xi^1 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^8 \eta^8 - \frac{m}{k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^8 \xi^8 \right) \right]. \quad (2.259)$$

Comme la méthode de calcul utilisant les facilités de l'algèbre de Clifford de [88] ne spécifie pas ce qu'il advient dans le cas du spin 1/2, on utilisera ici la méthode usuelle de la théorie quantique des champs avec les notations de Bailin [2]. On considère une transformation de la forme :

$$M = 1 + \frac{1}{2}(\delta\omega^0 + \delta\omega^1\sigma_1 + \delta\omega^2\sigma_2 + \delta\omega^3\sigma_3 + \delta\omega^4i\sigma_1 + \delta\omega^5i\sigma_2 + \delta\omega^6i\sigma_3 + \delta\omega^7i) \quad (2.260)$$

où les huit  $\delta\omega^n$  sont infiniment petits. On a :

$$\begin{aligned} M^\dagger &= 1 + \frac{1}{2}(\delta\omega^0 + \delta\omega^1\sigma_1 + \delta\omega^2\sigma_2 + \delta\omega^3\sigma_3 - \delta\omega^4i\sigma_1 \\ &\quad - \delta\omega^5i\sigma_2 - \delta\omega^6i\sigma_3 - \delta\omega^7i) \\ x' &= x'^\mu \sigma_\mu = MxM^\dagger = x + \delta x^\mu \sigma_\mu; \quad \delta x^\mu = X_i^\mu \delta\omega^i \end{aligned} \quad (2.261)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} \delta x^0 &= x^0 \delta\omega^0 + x^1 \delta\omega^1 + x^2 \delta\omega^2 + x^3 \delta\omega^3, \\ \delta x^1 &= x^0 \delta\omega^1 + x^1 \delta\omega^0 + x^2 \delta\omega^6 - x^3 \delta\omega^5, \\ \delta x^2 &= x^0 \delta\omega^2 - x^1 \delta\omega^6 + x^2 \delta\omega^0 + x^3 \delta\omega^4, \\ \delta x^3 &= x^0 \delta\omega^3 + x^1 \delta\omega^5 - x^2 \delta\omega^4 + x^3 \delta\omega^0. \end{aligned} \quad (2.262)$$

Les seuls termes  $X_i^\mu$  non nuls sont :

$$\begin{aligned} X_0^0 &= x^0; \quad X_1^0 = x^1; \quad X_2^0 = x^2; \quad X_3^0 = x^3, \\ X_0^1 &= x^1; \quad X_1^1 = x^0; \quad X_5^1 = -x^3; \quad X_6^1 = x^2, \\ X_0^2 &= x^2; \quad X_2^2 = x^0; \quad X_6^2 = -x^1; \quad X_4^2 = x^3, \\ X_0^3 &= x^3; \quad X_3^3 = x^0; \quad X_4^3 = -x^2; \quad X_5^3 = x^1, \end{aligned} \quad (2.263)$$

Bailin note  $\varphi_a$  les différents champs, et note leurs variations :

$$\delta\varphi_a = \phi_i^a \delta\omega^i. \quad (2.264)$$

Comme on peut utiliser l'adjoint pour obtenir la partie réelle, on peut considérer seulement quatre champs de spineurs :

$$\varphi_1 = \eta^1; \varphi_2 = \xi^1; \varphi_3 = \eta^8; \varphi_4 = \xi^8. \quad (2.265)$$

Et l'on a :

$$\begin{aligned} \eta^1 + \delta\eta^1 &= \widehat{M}\eta^1; \xi^1 + \delta\xi^1 = M\xi^1; \eta^8 + \delta\eta^8 = \widehat{M}\eta^8; \xi^8 + \delta\xi^8 = M\xi^8, \\ \widehat{M} &= 1 + \frac{1}{2}(\delta\omega^0 - \delta\omega^1\sigma_1 - \delta\omega^2\sigma_2 - \delta\omega^3\sigma_3 \\ &\quad + \delta\omega^4i\sigma_1 + \delta\omega^5i\sigma_2 + \delta\omega^6i\sigma_3 - \delta\omega^7i). \end{aligned} \quad (2.266)$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} 2\delta\xi^1 &= \delta\omega^0\xi^1 + \delta\omega^1\sigma_1\xi^1 + \delta\omega^2\sigma_2\xi^1 + \delta\omega^3\sigma_3\xi^1 \\ &\quad + \delta\omega^4i\sigma_1\xi^1 + \delta\omega^5i\sigma_2\xi^1 + \delta\omega^6i\sigma_3\xi^1 + \delta\omega^7i\xi^1, \end{aligned} \quad (2.267)$$

$$\begin{aligned} 2\delta\eta^1 &= \delta\omega^0\eta^1 - \delta\omega^1\sigma_1\eta^1 - \delta\omega^2\sigma_2\eta^1 - \delta\omega^3\sigma_3\eta^1 \\ &\quad + \delta\omega^4i\sigma_1\eta^1 + \delta\omega^5i\sigma_2\eta^1 + \delta\omega^6i\sigma_3\eta^1 - \delta\omega^7i\eta^1. \end{aligned} \quad (2.268)$$

Et on obtient deux formules semblables pour  $\xi^8$  et  $\eta^8$ . Avec la numérotation de (2.265) on a :

$$\begin{aligned} \phi_0^1 &= \frac{\eta^1}{2}; \phi_1^1 = -\sigma_1 \frac{\eta^1}{2}; \phi_2^1 = -\sigma_2 \frac{\eta^1}{2}; \phi_3^1 = -\sigma_3 \frac{\eta^1}{2}, \\ \phi_4^1 &= i\sigma_1 \frac{\eta^1}{2}; \phi_5^1 = i\sigma_2 \frac{\eta^1}{2}; \phi_6^1 = i\sigma_3 \frac{\eta^1}{2}; \phi_7^1 = -i \frac{\eta^1}{2}, \end{aligned} \quad (2.269)$$

$$\begin{aligned} \phi_0^2 &= \frac{\xi^1}{2}; \phi_1^2 = \sigma_1 \frac{\xi^1}{2}; \phi_2^2 = \sigma_2 \frac{\xi^1}{2}; \phi_3^2 = \sigma_3 \frac{\xi^1}{2}, \\ \phi_4^2 &= i\sigma_1 \frac{\xi^1}{2}; \phi_5^2 = i\sigma_2 \frac{\xi^1}{2}; \phi_6^2 = i\sigma_3 \frac{\xi^1}{2}; \phi_7^2 = i \frac{\xi^1}{2}, \end{aligned} \quad (2.270)$$

$$\begin{aligned} \phi_0^3 &= \frac{\eta^8}{2}; \phi_1^3 = -\sigma_1 \frac{\eta^8}{2}; \phi_2^3 = -\sigma_2 \frac{\eta^8}{2}; \phi_3^3 = -\sigma_3 \frac{\eta^8}{2}, \\ \phi_4^3 &= i\sigma_1 \frac{\eta^8}{2}; \phi_5^3 = i\sigma_2 \frac{\eta^8}{2}; \phi_6^3 = i\sigma_3 \frac{\eta^8}{2}; \phi_7^3 = -i \frac{\eta^8}{2}, \end{aligned} \quad (2.271)$$

$$\begin{aligned} \phi_0^4 &= \frac{\xi^8}{2}; \phi_1^4 = \sigma_1 \frac{\xi^8}{2}; \phi_2^4 = \sigma_2 \frac{\xi^8}{2}; \phi_3^4 = \sigma_3 \frac{\xi^8}{2}, \\ \phi_4^4 &= i\sigma_1 \frac{\xi^8}{2}; \phi_5^4 = i\sigma_2 \frac{\xi^8}{2}; \phi_6^4 = i\sigma_3 \frac{\xi^8}{2}; \phi_7^4 = +i \frac{\xi^8}{2}. \end{aligned} \quad (2.272)$$

Comme les  $\xi^m$  et  $\eta^m$  sont aussi des solutions des équations d'onde, la densité lagrangienne vérifie toujours  $0 = \mathcal{L}'^-$ ; donc le théorème de Noether associe

à chacun des huit sous-groupes à un paramètre  $\omega^i$  du groupe d'invariance un courant conservatif :

$$j_i^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} (\partial_\nu \varphi_a) - \mathcal{L}^- \delta_\nu^\mu \right) X_i^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \phi_i^a. \quad (2.273)$$

Par rapport à cette formule générale on a une simplification due à ce que les équations d'onde sont homogènes, ceci étant associé au fait que la densité lagrangienne s'annule pour chaque solution. Donc les courants vérifient :

$$j_i^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} (\partial_\nu \varphi_a) \right) X_i^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \phi_i^a. \quad (2.274)$$

Avec (2.156) à (2.159) la densité lagrangienne (2.224) donne :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_1)} = \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \eta^1)} = -\frac{im}{2k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} \sigma^\mu; \quad \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_2)} = \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \xi^1)} = +\frac{im}{2k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} \sigma^\mu, \quad (2.275)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_3)} = \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \eta^8)} = -\frac{im}{2k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} \sigma^\mu; \quad \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_4)} = \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \xi^8)} = +\frac{im}{2k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} \sigma^\mu.$$

Auparavant, la théorie quantique n'utilisait que les six vecteurs  $j_1^\mu$  à  $j_6^\mu$ , le groupe d'invariance étant un groupe à six dimensions. Ces six vecteurs sont maintenant rejoints par deux autres, et c'est précisément l'un de ces deux nouveaux vecteurs,  $j_7$ , que l'on va utiliser. On a :

$$j_7^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} (\partial_\nu \varphi_a) \right) X_7^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \phi_7^a. \quad (2.276)$$

Tous les  $X_i^\nu$  non nuls sont listés en (2.263), et cette liste ne contient aucun  $X_7^\nu$ . Cela vient de la propriété suivante : le générateur  $i$  de la jauge chirale  $U(1)$  appartient au noyau de l'homomorphisme  $f : M \mapsto R$  de  $Cl_3^*$  dans le groupe  $D^*$  des similitudes (voir 1.1.2 et 1.2). On a donc :

$$j_7^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \phi_7^a. \quad (2.277)$$

Avec (2.269) à (2.272) et avec (2.275), et comme l'adjoint d'un nombre réel est justement ce même nombre, on a :

$$\begin{aligned} j_7^\mu = & 2\frac{im}{2k\mathbf{l}^1} \eta^{1\dagger} \sigma^\mu (-i) \frac{\eta^1}{2} - 2\frac{im}{2k\mathbf{r}^1} \xi^{1\dagger} \sigma^\mu (+i) \frac{\xi^1}{2} \\ & + 2\frac{im}{2k\mathbf{l}^8} \eta^{8\dagger} \sigma^\mu (-i) \frac{\eta^8}{2} - 2\frac{im}{2k\mathbf{r}^8} \xi^{8\dagger} \sigma^\mu (+i) \frac{\xi^8}{2}, \end{aligned} \quad (2.278)$$

ce qui signifie :

$$j_7 = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{k\mathbf{l}^1} D_L^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}^1} D_R^1 + \frac{m}{k\mathbf{l}^8} D_L^8 + \frac{m}{k\mathbf{r}^8} D_R^8 \right) = \frac{1}{2} J_l^0. \quad (2.279)$$

Avec (2.258), le moment cinétique, aussi appelé spin, vérifie donc :

$$\iiint dv \frac{1}{c} j_7^0 = \frac{1}{2c} \iiint dv \mathbb{J}_l^0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.280)$$

On rappelle que cette dernière égalité a été obtenue en application du principe d'équivalence : l'énergie totale de l'onde (liée à la fréquence, donc à la géométrie d'espace-temps c'est-à-dire à la gravitation), se doit d'être égale à l'intégrale sur tout l'espace de la densité d'énergie de l'onde quantique,  $T_0^0$  (densité donnant les forces, donc l'inertie). Ainsi on peut dire que **La quantification elle-même, et la relativité générale, découlent toutes deux du même principe d'équivalence entre masse d'inertie et masse gravitationnelle**. Cette quantification du moment cinétique à partir des propriétés des équations d'onde ne pouvait pas s'obtenir auparavant, parce que manquaient deux choses : d'abord personne avant nous n'a suspecté l'existence d'un groupe d'invariance de forme plus vaste, plus contraignant donc, que le groupe de Lorentz<sup>12</sup>. Et puis personne, à l'exception du très avisé O. Costa de Beauregard [54], n'a vu l'existence de cet étrange tenseur  $V$  dans l'onde de l'électron.

Cette quantification du spin est une propriété du lepton complet, avec ses deux parties que sont l'électron et le neutrino-monopôle. C'est la composante de temps d'un vecteur d'espace-temps qui est quantifiée, et cette composante de temps est obtenue en sommant une densité tensorielle sur tout l'espace. Ceci est très proche de ce que nous donne la physique expérimentale, puisque c'est la valeur exacte  $\hbar/2$  que l'on obtient, et c'est par contre très loin de la théorie quantique non relativiste, car ça n'est pas obtenu comme valeur propre d'un opérateur hermitien.

## 2.6 Dynamique du neutrino-monopôle

Le monopôle magnétique peut être regardé de trois manières différentes, parce qu'il peut être doté d'une onde droite, d'une onde gauche ou des deux. Le monopôle magnétique sans onde droite est appelé neutrino ou neutrino de l'électron dans la physique contemporaine. Le courant  $j_m = gD_R^8$  est alors nul et ensuite le courant  $k_m$  se réduit au courant gauche. La force agissant sur le neutrino est :

$$\partial_\mu T^\mu = F_{\mu\lambda}^m i k_m^\mu \sigma^\lambda; \quad k_m = -\frac{2q}{k} D_L^8, \quad (2.281)$$

$$\partial_\mu T^\mu = f^0 + \vec{f}; \quad \frac{i}{2} F_{\mu\lambda}^m k_m^\mu \sigma^\lambda = \vec{k}_m \cdot \vec{H}^m + k_m^0 \vec{H}^m - \vec{k}_m \times \vec{E}^m, \quad (2.282)$$

$$\frac{\hbar c}{2} \vec{f} = k_m^0 \vec{H}^m - \vec{k}_m \times \vec{E}^m; \quad F^m = \vec{E}^m + i \vec{H}^m. \quad (2.283)$$

12. Ce groupe aurait pu être aperçu dès 1928, mais pour cela il aurait fallu ne pas se contenter des transformations infinitésimales, qui masquent la différence entre le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  et le groupe de Lorentz.

Seconde possibilité, qui n'a pas été encore utilisée dans le modèle standard, le neutrino-monopôle peut n'avoir qu'une onde droite. Dans ce cas il interagit à la fois avec les particules à charge électrique et avec les particules à charge magnétique, et (2.253) se réduit à :

$$\hbar c \partial_\mu T^\mu = F_{\mu\lambda}^e j_m^\mu \sigma^\lambda + F_{\mu\lambda}^m i k_m^\mu \sigma^\lambda; \quad k_m = -\frac{pm}{k\mathbf{r}^8} D_R^8; \quad j_m = \frac{pm}{k\mathbf{r}^8} D_R^8. \quad (2.284)$$

où  $g$  est la charge magnétique. On peut remarquer que les deux courants liés à cette onde droite sont opposés. On doit donc s'attendre à un résultat différent pour la force agissant sur cette onde suivant qu'une charge électrique ou une charge magnétique agit sur elle. L'interaction entre une charge électrique et une charge magnétique a été décrite précédemment d'une manière compliquée, en calculant le champ électromagnétique du monopôle comme s'il était d'origine électrique :  $F = \nabla \widehat{W}$  au lieu de  $F = \nabla i \widehat{W}$ . De même l'interaction entre une charge magnétique et une charge électrique a été décrite par Lochak [89, 90] en utilisant le champ électromagnétique créé par un électron comme s'il était d'origine magnétique :  $F = \nabla i \widehat{A}$  au lieu de  $F = \nabla \widehat{A}$ . Mais ces calculs sont corrects parce que l'on a évidemment :

$$F_{\mu\lambda}^e j_m^\mu = \nabla \widehat{A} j_m^\mu = \nabla i \widehat{A} i g D_R^\mu. \quad (2.285)$$

On peut donc se référer à ces travaux [89, 90] pour la démonstration de la formule de Dirac  $eg/\hbar c = 1/2$ . Puisqu'on vient juste d'expliquer comment la quantification du moment cinétique découle du principe d'équivalence, et que la quantification de la charge électrique et de la charge magnétique résulte de la formule de Dirac, on voit que la quantification des charges est aussi une conséquence du principe d'équivalence et de l'invariance étendue.

## 2.7 L'onde solitaire de l'électron

L'électron a d'abord été considéré comme une particule élémentaire. Il est aussi porteur d'une charge électrique, donc les premiers modèles d'électron ont associé sa masse-énergie à l'énergie proportionnelle à  $\vec{E}^2$  du champ électrique à symétrie sphérique  $\vec{E}$  qu'il crée. Or on a, en 1.11, directement associé le champ électromagnétique au tenseur d'impulsion-énergie de l'onde  $\phi$  de l'électron. On peut donc penser l'électron comme un soliton de l'onde électronique, [46][47] avec une onde suivant le même type d'équation que pour un état lié de l'atome d'hydrogène. L'électron étant porteur d'une charge électrique est créateur, autour de lui, d'un champ électrique lié au courant électrique de l'onde électronique. Étant donné la masse nulle du neutrino, le potentiel vérifie :

$$-\square A = \Delta A = q\mathbf{J}; \quad A = \Delta^{-1}(q\mathbf{J}) = -\frac{u}{r}, \quad (2.286)$$

où  $u$  est une constante numérique à déterminer (la charge de l'électron "nu"). L'équation d'onde devient alors :

$$0 = \nabla \hat{\phi} \sigma_{21} - \frac{u}{r} \hat{\phi} + m_g \mathbf{v} \hat{\phi}. \quad (2.287)$$

En multipliant à gauche par  $\bar{\phi}$  pour obtenir la forme invariante de l'équation d'onde, et avec :

$$\bar{\phi} \phi = \rho e^{i\beta}; \quad \mathbf{lr} = m_g^2 = m m_a; \quad m_g \bar{\phi} \mathbf{v} \hat{\phi} = \rho \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad (2.288)$$

on obtient :

$$0 = \bar{\phi} (\nabla \hat{\phi}) \sigma_{21} - \frac{u}{r} \bar{\phi} \hat{\phi} + \rho \mathbf{m}. \quad (2.289)$$

L'équation améliorée est résolue, dans le chapitre C, par séparation des variables en coordonnées sphériques. Grâce aux identités de Krüger [85], on sait séparer, en une seule fois, les variables  $t$  et  $\varphi$  des variables  $r$  et  $\theta$ , et on va chercher une solution de la forme :

$$\begin{aligned} S &:= e^{-\frac{\varphi}{2} i_3} e^{-\frac{\theta}{2} i_2}; \quad \Omega = \hat{\Omega} := r^{-1} (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} S; \quad p := \lambda \varphi - E x^0, \\ \phi &:= \Omega X e^{p i_3}; \quad \hat{\phi} = \Omega \hat{X} e^{p i_3}; \quad \bar{\phi} = e^{-p i_3} \bar{X} \bar{\Omega}, \\ X &:= \begin{pmatrix} AU & -\bar{B}V \\ CV & \bar{D}U \end{pmatrix}; \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} DU & -\bar{C}V \\ BV & \bar{A}U \end{pmatrix}; \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{D}U & \bar{B}V \\ -CV & AU \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.290)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont des fonctions à valeur complexe de la variable radiale  $r$ ,  $U$  et  $V$  étant des fonctions à valeur réelle de la variable angulaire  $\theta$ .  $\lambda$  est une constante réelle appelée nombre quantique magnétique qui peut être positif ou négatif, ce qui donne les deux états up-down du spin de l'électron.  $U$  et  $V$  sont solutions du système d'équations :

$$U' - \frac{\lambda U}{\sin \theta} = -\kappa V; \quad V' + \frac{\lambda V}{\sin \theta} = \kappa U, \quad (2.291)$$

La constante  $\kappa$  est un nombre entier positif non nul. Le nombre quantique magnétique  $\lambda$  de l'électron libre est un nombre demi-impair vérifiant  $|\lambda| < \kappa$ . Les deux valeurs du spin de l'électron libre correspondent donc à  $\kappa = 1$  qui donne  $\lambda = \pm 1/2$ . Ces valeurs de  $\kappa$  et  $\lambda$  sont les mêmes que pour les états  $1s1/2$ , on peut donc utiliser les mêmes calculs, au remplacement près du terme d'interaction  $-\alpha/r$  contenant la constante de structure fine  $\alpha \approx \frac{1}{137}$  par le terme d'interaction interne  $-u/r$ . Dans le cas  $\lambda = 1/2$  on a :

$$U = U_1 \sqrt{\sin \theta} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right); \quad V = V_1 \sqrt{\sin \theta} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.292)$$

Comme  $\kappa = 1$  et  $\lambda = 1/2$ , (C.48) et (C.52) donnent :

$$U_1 = -1; \quad V_1 = -1; \quad U = -\sqrt{\sin \theta} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right); \quad V = -\sqrt{\sin \theta} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.293)$$

On pose :

$$\mathbf{F}_1 := -\frac{A}{r}; \quad \mathbf{F}_2 := -\frac{\bar{D}}{r}; \quad \mathbf{F}_3 := -\frac{C}{r}; \quad \mathbf{F}_4 := -\frac{\bar{B}}{r}, \quad (2.294)$$

$$p := \frac{\varphi}{2} - Ex^0; \quad \underline{c} := \cos\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad \underline{s} := \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.295)$$

$$\theta_1 := \underline{c}^2 = \frac{1 + \cos\theta}{2}; \quad \theta_2 := \underline{s}^2 = \frac{1 - \cos\theta}{2}; \quad \theta_3 := \underline{c}\underline{s} = \frac{\sin\theta}{2}. \quad (2.296)$$

Avec (C.74) on obtient alors ;

$$\phi = S \frac{X}{r\sqrt{\sin\theta}} e^{pi_3} = S \begin{pmatrix} \underline{c}\mathbf{F}_1 & -\underline{s}\mathbf{F}_4 \\ \underline{s}\mathbf{F}_3 & \underline{c}\mathbf{F}_2 \end{pmatrix} e^{pi_3}, \quad (2.297)$$

$$\bar{X} = r\sqrt{\sin\theta} \begin{pmatrix} \underline{c}\mathbf{F}_2 & \underline{s}\mathbf{F}_4 \\ -\underline{s}\mathbf{F}_3 & \underline{c}\mathbf{F}_1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\phi} = e^{-pi_3} \begin{pmatrix} \underline{c}\mathbf{F}_2 & \underline{s}\mathbf{F}_4 \\ -\underline{s}\mathbf{F}_3 & \underline{c}\mathbf{F}_1 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (2.298)$$

On a alors :

$$\phi\bar{\phi} = \bar{\phi}\phi = \det(\phi) = \rho e^{i\beta} = \underline{c}^2 \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 + \underline{s}^2 \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4. \quad (2.299)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &= 1; \quad \theta_1 - \theta_2 = \cos\theta : \quad \theta_3^2 = \frac{1 - \cos(2\theta)}{8}, \\ \theta_1^2 &= \frac{3 + 4\cos\theta + \cos(2\theta)}{8}; \quad \theta_1^2 = \frac{3 - 4\cos\theta + \cos(2\theta)}{8}, \end{aligned} \quad (2.300)$$

$$\det(X) = \rho_X e^{i\beta} = X\bar{X} = r^2 \sin\theta (\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \theta_1 + \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \theta_2), \quad (2.301)$$

$$\det(\phi) = \rho e^{i\beta} = \frac{\det(X)}{r^2 \sin\theta} = \mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \theta_1 + \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \theta_2, \quad (2.302)$$

$$\rho^2 = (\rho e^{i\beta})(\rho e^{-i\beta}) = |\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \theta_1 + \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \theta_2|^2, \quad (2.303)$$

$$\rho = |\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \theta_1 + \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \theta_2|; \quad e^{i\beta} = \frac{\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \theta_1 + \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \theta_2}{|\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \theta_1 + \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4 \theta_2|}. \quad (2.304)$$

De même pour  $\kappa = 1$  et  $\lambda = -1/2$ , on obtient :

$$U = -\sqrt{\sin\theta} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \quad V = \sqrt{\sin\theta} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (2.305)$$

$$U^2 = \sin\theta \frac{1 - \cos\theta}{2}; \quad V^2 = \sin\theta \frac{1 + \cos\theta}{2}; \quad UV = -\frac{\sin^2\theta}{2}. \quad (2.306)$$

On a alors :

$$\det(X) = \rho_X e^{i\beta} = \sin\theta \left[ A\bar{D} \frac{1 - \cos\theta}{2} + C\bar{B} \frac{1 + \cos\theta}{2} \right], \quad (2.307)$$

$$\frac{\det(X)}{r^2 \sin\theta} = A\bar{D} \frac{1 - \cos\theta}{2r^2} + C\bar{B} \frac{1 + \cos\theta}{2r^2}, \quad (2.308)$$

$$\frac{\rho_X^2}{r^4 \sin^2\theta} = \left[ A\bar{D} \frac{1 - \cos\theta}{2r^2} + C\bar{B} \frac{1 + \cos\theta}{2r^2} \right] \left[ D\bar{A} \frac{1 - \cos\theta}{2r^2} + B\bar{C} \frac{1 + \cos\theta}{2r^2} \right].$$

On peut noter que les seuls changements, entre les deux signes du spin, sont le remplacement de  $\cos \theta$  par  $-\cos \theta$ , ce qui échange  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et change de signe  $\theta_3$ . On peut donc ne détailler le calcul que dans le cas  $\lambda = +1/2$ . Posons maintenant :

$$\begin{aligned} k_1 &:= |\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2| \theta_1; \quad k_2 := |\mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4| \theta_2, \\ k_3^2 &= (\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2 \bar{\mathbf{F}}_3 \bar{\mathbf{F}}_4 + \bar{\mathbf{F}}_1 \bar{\mathbf{F}}_2 \mathbf{F}_3 \mathbf{F}_4) \theta_3^2. \end{aligned} \quad (2.309)$$

On a :

$$\rho^2 = \frac{\rho_X^2}{r^4 \sin^2 \theta} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2; \quad \rho = \frac{\rho_X}{r^2 \sin \theta} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \quad (2.310)$$

En présence de l'interaction électromagnétique interne, un terme  $-\frac{u}{r}$  s'ajoute et l'on obtient alors, avec (??) :

$$\nabla'(\hat{X} e^{pi_3}) \sigma_{21} - \frac{u}{r} \hat{X} e^{pi_3} = -\sqrt{\sin \theta} \begin{pmatrix} \underline{c}\mathcal{D} & -\underline{s}\mathcal{C} \\ \underline{s}\mathcal{B} & \underline{c}\mathcal{A} \end{pmatrix}. \quad (2.311)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= -\left(E + \frac{u}{r}\right) D + iD' + \frac{i\kappa}{r} B, \\ \mathcal{B} &:= -\left(E + \frac{u}{r}\right) B - iB' - \frac{i\kappa}{r} D, \\ \mathcal{C} &:= -\left(E + \frac{u}{r}\right) \bar{C} - i\bar{C}' - \frac{i\kappa}{r} \bar{A}, \\ \mathcal{A} &:= -\left(E + \frac{u}{r}\right) \bar{A} + i\bar{A}' + \frac{i\kappa}{r} \bar{C}, \end{aligned} \quad (2.312)$$

L'équation d'onde équivaut alors au système (??)-(??) :

$$\begin{aligned} \bar{D}\mathcal{D}U^2 + \bar{B}\mathcal{B}V^2 &= -\rho_X \mathbf{l}, \\ \bar{D}\mathcal{C} &= \bar{B}\mathcal{A}, \\ C\mathcal{D} &= A\mathcal{B}, \\ A\mathcal{A}U^2 + C\mathcal{C}V^2 &= -\rho_X \mathbf{r} \end{aligned}$$

La séparation des variables a été effectuée en C.1, on obtient le système radial :

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) D - iD' - i\frac{\kappa}{r} B + \mathbf{l}e^{il_1} A = 0, \quad (2.313)$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) B + iB' + i\frac{\kappa}{r} D + \mathbf{l}e^{il_1} C = 0, \quad (2.314)$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) A + iA' + i\frac{\kappa}{r} C - \mathbf{r}e^{-ir_1} D = 0, \quad (2.315)$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) C - iC' - i\frac{\kappa}{r} A - \mathbf{r}e^{-ir_1} B = 0, \quad (2.316)$$

où  $l_1$  et  $r_1$  sont deux réels quelconques.

### 2.7.1 Résolution du système radial

Le système d'équations radiales (2.313), 2.314 (2.315) et (2.316) est identique au système linéaire résultant de l'équation de Dirac, si l'on y suppose la nullité de  $l_1$  et de  $r_1$ . Le comportement asymptotique à l'infini des fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  est donc le même que pour l'équation de Dirac. C'est ce comportement asymptotique qui impose de ne considérer que des fonctions de la forme (C.116) :

$$\begin{aligned} A &= (a_0 r^s + a_1 r^{s+1} + \dots + a_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \\ B &= (b_0 r^s + b_1 r^{s+1} + \dots + b_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \\ C &= (c_0 r^s + c_1 r^{s+1} + \dots + c_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \\ D &= (d_0 r^s + d_1 r^{s+1} + \dots + d_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \end{aligned}$$

où  $s$  et  $\Lambda$  sont deux réels positifs. On obtient alors trois sortes de systèmes d'équations numériques : avec indice 0, avec indice entre 0 et  $n$ , et avec indice  $n$ . Pour l'indice zéro, le système dépend seulement de  $u$ ,  $\kappa$  et  $s$  :

$$\begin{aligned} 0 &= (-u - is)a_0 - i\kappa c_0; \quad 0 = (-u - is)b_0 - i\kappa d_0, \\ 0 &= i\kappa a_0 + (-u + is)c_0; \quad 0 = i\kappa b_0 + (-u + is)d_0. \end{aligned} \quad (2.317)$$

Ces systèmes sont exactement les mêmes qu'avec l'équation de Dirac linéaire. Ils sont constitués de sous-systèmes. On n'obtient une solution non nulle que si le déterminant de chaque sous-système est nul, et donc si  $s$  est tel que :

$$0 = (-u - is)(-u + is) - \kappa^2; \quad \kappa^2 = s^2 + u^2; \quad s = \sqrt{\kappa^2 - u^2}. \quad (2.318)$$

C'est de là que vient la condition  $\kappa \neq 0$ . Posons :

$$s + iu := |\kappa| e^{i\gamma}; \quad s - iu = |\kappa| e^{-i\gamma}. \quad (2.319)$$

Le système (2.317) donne :

$$c_0 = \frac{i u - s}{|\kappa|} a_0 = -e^{-i\gamma} a_0; \quad d_0 = \frac{i u - s}{|\kappa|} b_0 = -e^{-i\gamma} b_0. \quad (2.320)$$

Avec l'indice  $n$  on a le système suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= (-E + i\Lambda m)a_n + e^{-ir_1} \mathbf{r} d_n; \quad 0 = (-E + i\Lambda m)b_n - e^{il_1} \mathbf{l} c_n, \\ 0 &= -(E + i\Lambda m)d_n - e^{il_1} \mathbf{l} a_n; \quad 0 = -(E + i\Lambda m)c_n + e^{-ir_1} \mathbf{r} b_n. \end{aligned} \quad (2.321)$$

Ce système forme deux sous-systèmes semblables, avec le même déterminant  $D$ . Une solution non nulle n'existe que si le déterminant est nul, ce qui donne :

$$0 = D = \begin{vmatrix} -E + i\Lambda m & e^{-ir_1} \mathbf{r} \\ -e^{il_1} \mathbf{l} & -E - i\Lambda m \end{vmatrix} = E^2 + \Lambda^2 m^2 - e^{i(l_1 - r_1 + \pi)} \mathbf{l} \mathbf{r}, \quad (2.322)$$

On n'obtient la relation attendue pour la masse-énergie que si :

$$l_1 - r_1 = \pi \bmod 2\pi; \quad e^{ir_1} = -e^{il_1}. \quad (2.323)$$

Et alors on a :

$$\begin{aligned} 0 = D &\Leftrightarrow \mathbf{lr} = E^2 + \Lambda^2 m^2, \\ 0 = D &\Leftrightarrow E^2 + \Lambda^2 m^2 = m_g^2. \end{aligned} \quad (2.324)$$

Comme pour les états de l'électron dans l'atome d'hydrogène, on suppose que les deux masses ne sont pas égales, donc que la moyenne harmonique  $m$  des deux masses, vérifiant  $\frac{2}{m} = \frac{1}{\mathbf{l}} + \frac{1}{\mathbf{r}}$ , est inférieure à la moyenne géométrique  $m_g = \sqrt{\mathbf{lr}}$ , ce qui permet de définir un angle  $\delta$  tel que :

$$E = m; \quad E + i\Lambda m = m_g e^{i\delta}; \quad E - i\Lambda m = m_g e^{-i\delta}, \quad (2.325)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{m_g^2}{m^2} - 1} = \sqrt{\frac{(\mathbf{l} - \mathbf{r})^2}{4\mathbf{lr}}} = \frac{|d|}{m_g}; \quad d = \frac{\mathbf{l} - \mathbf{r}}{2}. \quad (2.326)$$

Le système (2.321) se réduit alors à :

$$d_n = \frac{E - i\Lambda m}{e^{-ir_1} \mathbf{r}} a_n = \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 - \delta)} a_n, \quad (2.327)$$

$$b_n = \frac{E + i\Lambda m}{e^{-ir_1} \mathbf{r}} c_n = \sqrt{\frac{\mathbf{l}}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 + \delta)} c_n. \quad (2.328)$$

Si  $n = 0$ , c'est-à-dire si les polynômes radiaux sont des constantes, le système radial se réduit à (C.125), (C.131) et (C.132), et on a donc :

$$d_0 = \frac{E - i\Lambda m}{e^{-ir_1} \mathbf{r}} a_0 = \frac{iu - s}{|\kappa|} b_0, \quad (2.329)$$

$$c_0 = \frac{E + i\Lambda m}{e^{ir_1} \mathbf{l}} b_0 = \frac{iu - s}{|\kappa|} a_0. \quad (2.330)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{(E - i\Lambda m)^2}{\mathbf{lr}} a_0 b_0 &= \frac{(iu - s)^2}{\kappa^2} b_0 a_0, \\ \frac{E - i\Lambda m}{m_g} &= \mp \frac{s - iu}{|\kappa|}. \end{aligned} \quad (2.331)$$

Comme le moment cinétique vaut  $j = |\kappa| - 1/2$ , on a  $\kappa = 1$  Et comme  $E$ ,  $s$  et  $m_g$  sont positifs, on a une seule possibilité :

$$\begin{aligned} \frac{E}{m_g} &= s; \quad \frac{\Lambda m}{m_g} = \frac{u}{1}; \quad uE = s\Lambda m, \\ u^2 E^2 &= s^2 (m_g^2 - E^2); \quad E^2 = \frac{s^2 m_g^2}{s^2 + u^2}, \\ E &= \frac{m_g}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{(s+0)^2}}}, \end{aligned} \quad (2.332)$$

Avec (2.290) l'onde-électron a la forme :

$$\begin{aligned}\phi &= e^{-(\varphi/2)i_3} X(r, \theta) e^{(\varphi/2 - Ex^0)i_3} \\ &= \begin{pmatrix} X_1(r, \theta) e^{-iEx^0} & X_3(r, \theta) e^{-i\varphi} e^{iEx^0} \\ X_2(r, \theta) e^{i\varphi} e^{-iEx^0} & X_4(r, \theta) e^{iEx^0} \end{pmatrix}; \quad X_j = r^{s-1} e^{-\Lambda mr} f_j(\theta).\end{aligned}\quad (2.333)$$

L'onde de l'électron isolé présente une singularité à l'origine : l'électron est une onde étendue à tout l'espace, **et**, en même temps, une particule strictement ponctuelle, comme le pensait Louis de Broglie. La décroissance à l'infini des amplitudes est très rapide, par suite de la décroissance du facteur exponentiel. Elle est cependant moins rapide que pour une loi de probabilité gaussienne. Cela permet de comprendre que, lorsqu'un électron passe dans un dispositif d'interférence comme des fentes d'Young, même si la singularité passe par une seule des fentes, l'autre fente voit passer une onde qui est certes de petite amplitude, mais qui n'est pas infiniment petite. Cette onde étendue à tout l'espace peut donc guider le mouvement de la particule-singularité.

### 2.7.2 Normalisation de l'onde

Cette normalisation de l'onde est une conséquence de l'égalité entre énergie gravitationnelle (proportionnelle à la fréquence) et énergie inertielle (voir 1.5.5), c'est-à-dire  $E = \iiint dv T_0^0$ . Cette égalité équivaut en effet, à :

$$\iiint dv \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = 1 : \quad \mathbf{J} := \frac{m}{k\mathbf{l}} \mathbf{D}_L + \frac{m}{k\mathbf{r}} \mathbf{D}_R. \quad (2.334)$$

On a, toujours pour  $\kappa = 1$  et  $\lambda = 1/2$  :

$$\mathbf{J} = \frac{m}{k} \left( \frac{\mathbf{D}_L}{\mathbf{l}} + \frac{\mathbf{D}_R}{\mathbf{r}} \right) = \frac{1}{km_a} \phi \begin{pmatrix} \mathbf{l} & 0 \\ 0 & \mathbf{r} \end{pmatrix} \phi^\dagger \quad (2.335)$$

$$\mathbf{J}^0 = \frac{1}{km_a} \left[ \frac{\mathbf{l} + \mathbf{r}}{2} \mathbf{D}_0^0 + \frac{\mathbf{l} - \mathbf{r}}{2} \mathbf{D}_3^0 \right] \quad (2.336)$$

$$\mathbf{D}_0^0 = \frac{1}{2} (\underline{c}^2 |\mathbf{F}_1|^2 + \underline{s}^2 |\mathbf{F}_4|^2 + \underline{c}^2 |\mathbf{F}_2|^2 + \underline{s}^2 |\mathbf{F}_3|^2), \quad (2.337)$$

$$\mathbf{D}_3^0 = \frac{1}{2} (\underline{c}^2 |\mathbf{F}_1|^2 - \underline{s}^2 |\mathbf{F}_4|^2 - \underline{c}^2 |\mathbf{F}_2|^2 + \underline{s}^2 |\mathbf{F}_3|^2). \quad (2.338)$$

On a alors :

$$\frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3 m_a} \left[ \frac{a_1^2 + a_3^2}{2} + \cos \theta \frac{a_1^2 - a_3^2}{2} \right] \quad (2.339)$$

Comme  $\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$ , comme  $\cos \delta = \frac{m}{m_g}$ , on a :

$$a_1^2 + a_3^2 = 4ya_1^2 \cos \delta = 4y \frac{m}{m_g} a_1^2, \quad (2.340)$$

$$1 = \frac{4a_1^2 y m l}{l_P^3 m_a m_g} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dr r^{2s+2} e^{-2\Lambda m r} = \frac{4a_1^2 y m l (4\pi) \Gamma(2s+3)}{l_P^3 m_a m_g (2\Lambda m)^{2s+3}}.$$

On a donc :

$$a_1 = \sqrt{\frac{l_P^3 m_a m_g (2\Lambda m)^{2s+3}}{16\pi y m l \Gamma(2s+3)}}. \quad (2.341)$$

Dans le repère propre de l'électron, la densité de probabilité n'est pas à symétrie sphérique. Cette densité n'est pas statique, elle tourne autour de la direction n°3, c'est ce qui fait de l'électron une particule à spin, et lui permet d'être un aimant [56]. Il est tout à fait remarquable que l'électron isolé est toujours stationnaire dans son repère propre. L'onde  $\phi' = M\phi$  vue par tout observateur en mouvement par rapport à l'électron est une onde progressive, par suite de la transformation  $R : x \mapsto x' = MxM^\dagger$  qui agit sur le temps, donc sur la phase de l'onde, qui se propage. La particule comme petite horloge vue par de Broglie, et accompagnée par une onde progressive dans son mouvement, peut donc bien être ce **soliton** de l'équation d'onde quantique, qui fut recherché par de nombreux physiciens. On pourrait même faire remonter cette quête aux tourbillons de Descartes. L'onde solitaire de l'électron, normalisée en conséquence du principe d'équivalence, est en effet dotée d'un moment cinétique propre de valeur  $\hbar/2$ . La nécessité du formalisme lagrangien fait aussi partie des propriétés de l'onde, ce qui détermine les tenseurs d'impulsion-énergie et de moment cinétique. On peut aussi remarquer la disparition des difficultés liées au caractère ponctuel de la charge de l'électron dans le premier modèle de Lorentz, car au centre de l'électron le champ  $\phi$  a certes une valeur infinie mais la somme de la densité d'énergie est finie. De plus le champ électromagnétique créé par l'électron résulte de l'existence des deux tenseurs d'impulsion-énergie.



## Chapitre 3

# Interactions faibles et fortes des quarks

On étudie le sous-espace vectoriel de l'algèbre  $Cl_{3,3}$  correspondant à la partie quarks de l'onde fermionique de première génération. Dans le cadre de cette algèbre on étudie les interactions faibles des quarks  $d$  et  $u$ . On présente, dans ce même cadre le groupe  $SU(3)$  de la chromodynamique. On généralise le terme de masse de l'onde leptonique et on obtient les équations d'onde des quarks avec termes de masse. Ces équations d'onde sont invariantes de forme sous un groupe de jauge qui est précisément celui du modèle standard. Les équations d'onde découlent d'équation de Lagrange, et cette déduction est uniquement conséquence des propriétés algébriques de l'algèbre de la géométrie. La dynamique de l'onde des quarks rend compte des forces agissant sur le fluide chargé et coloré. Cette dynamique implique la quantification du moment cinétique du proton et du neutron, mais aussi le confinement des quarks. L'inclusion de  $Cl_3^*$  dans  $\text{End}(Cl_3)$  fixe l'orientation de l'espace. On justifie la préférence pour les ondes gauches. On étudie l'équation de Dirac dans une algèbre sans nombre complexe.

### 3.1 Le secteur des quarks

On étudie maintenant la partie  $\Psi_q$  de l'onde fermionique (2.2), qui fait partie de l'onde  $\Psi^D$  telle que :

$$\Psi^D := \Psi^{3,3} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1 + \mathcal{P}_4 + i\mathcal{I}_4 & \mathcal{I}_2 - i\mathcal{P}_2 + \mathcal{I}_3 - i\mathcal{P}_3 \\ \mathcal{I}_2 - i\mathcal{P}_2 - \mathcal{I}_3 + i\mathcal{P}_3 & \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1 - \mathcal{P}_4 - i\mathcal{I}_4 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

Dans toute algèbre de Clifford donc en particulier dans  $Cl_{3,3}$  on peut séparer une partie paire  $\Psi^+$  d'une partie impaire  $\Psi^-$  par :

$$\Psi^+ := \Psi_0^{3,3} + \Psi_2^{3,3} + \Psi_4^{3,3} + \Psi_6^{3,3}; \quad \Psi^- := \Psi_1^{3,3} + \Psi_3^{3,3} + \Psi_5^{3,3} \quad (3.2)$$

On peut aussi séparer parties contenant ou non un facteur  $i$  dans les matrices  $4 \times 4$  :

$$\begin{aligned} \Psi^H &:= \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_4 & \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \\ \mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3 & \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_e + \phi_{db} & 0 & 0 & \phi_{ur} + \phi_{ug} \\ 0 & \hat{\phi}_e + \hat{\phi}_{db} & \hat{\phi}_{ur} + \hat{\phi}_{ug} & 0 \\ 0 & \phi_{ur} - \phi_{ug} & \phi_e - \phi_{db} & 0 \\ \hat{\phi}_{ur} - \hat{\phi}_{ug} & 0 & 0 & \hat{\phi}_e - \hat{\phi}_{db} \end{pmatrix}, \quad (3.3) \\ \Psi^N &:= \begin{pmatrix} -i\mathcal{I}_1 + i\mathcal{I}_4 & -i\mathcal{P}_2 - i\mathcal{P}_3 \\ -i\mathcal{P}_2 + i\mathcal{P}_3 & -i\mathcal{I}_1 - i\mathcal{I}_4 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_4 & \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 \\ \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3 & \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_4 \end{pmatrix} \\ &= -i \begin{pmatrix} 0 & \phi_n - \phi_{ub} & \phi_{dr} + \phi_{dg} & 0 \\ \hat{\phi}_n - \hat{\phi}_{ub} & 0 & 0 & \hat{\phi}_{dr} + \hat{\phi}_{dg} \\ \phi_{dr} - \phi_{dg} & 0 & 0 & \phi_n + \phi_{ub} \\ 0 & \hat{\phi}_{dr} - \hat{\phi}_{dg} & \hat{\phi}_n + \hat{\phi}_{ub} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

La partie sans facteur  $i$  a été nommée  $\Psi^H$  car elle contient tous les éléments d'un atome d'hydrogène :  $\phi_e$  désigne l'électron, tandis que l'onde du proton est constitué des trois autres termes, un quark  $d$  et deux quarks  $u$ , avec les trois couleurs, ce qui correspond bien aux trois termes  $\phi_{db}$ ,  $\phi_{ur}$  et  $\phi_{ug}$ . La partie avec facteurs  $i$  a été nommée  $\Psi^N$  car elle contient tous les éléments d'un neutron : l'onde  $\phi_n$  du neutrino-monopôle étudié dans le précédent chapitre, et les trois quarks d'un neutron, un quark  $u$  et deux quarks  $d$ , avec là aussi les trois couleurs, ce qui correspond aux trois termes  $\phi_{ub}$ ,  $\phi_{dr}$  et  $\phi_{dg}$ . Et donc on a nommé  $\phi^D$  l'onde complète, à valeur dans  $\text{End}(Cl_3)$ , parce qu'elle comporte tous les éléments d'un atome de deutérium, et s'écrit :

$$\Psi^D = \begin{pmatrix} \phi_e + \phi_{db} & -i(\phi_n - \phi_{ub}) & -i(\phi_{dr} + \phi_{dg}) & \phi_{ur} + \phi_{ug} \\ -i(\hat{\phi}_n - \hat{\phi}_{ub}) & \hat{\phi}_e + \hat{\phi}_{db} & \hat{\phi}_{ur} + \hat{\phi}_{ug} & -i(\hat{\phi}_{dr} + \hat{\phi}_{dg}) \\ -i(\phi_{dr} - \phi_{dg}) & \phi_{ur} - \phi_{ug} & \phi_e - \phi_{db} & -i(\phi_n + \phi_{ub}) \\ \hat{\phi}_{ur} - \hat{\phi}_{ug} & -i(\hat{\phi}_{dr} - \hat{\phi}_{dg}) & -i(\hat{\phi}_n + \hat{\phi}_{ub}) & \hat{\phi}_e - \hat{\phi}_{db} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

On remplace l'indice de couleur  $r, g, b$  par un indice numérique haut :

$$\begin{aligned} \Psi^1 &:= \Psi_l; \quad \Psi^2 := \Psi_r; \quad \Psi^3 := \Psi_g; \quad \Psi^4 := \Psi_b, \\ \Psi^D &= \begin{pmatrix} \Psi^1 + i\Psi^4 & \Psi^2 + \Psi^3 \\ \Psi^2 - \Psi^3 & \Psi^1 - i\Psi^4 \end{pmatrix}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\Psi_l = \Psi^1 = \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1 = \begin{pmatrix} \phi_e & -i\phi_n \\ -i\hat{\phi}_n & \hat{\phi}_e \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \phi^1 & \phi^{8\dagger} \\ -\phi^8 & \hat{\phi}^1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

On utilise l'identité dans  $Cl_3$  entre l'adjoint  $\phi^\dagger$  et le retourné  $\tilde{\phi}$ . La transformation  $P : \phi \mapsto \hat{\phi}$  est l'automorphisme principal dans  $Cl_3$ . On peut identifier  $\mathcal{P}_n + \mathcal{I}_n$  avec sa première ligne :

$$\Psi^2 = \mathcal{I}_2 - i\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -i\phi_{dr} & \phi_{ur} \\ \hat{\phi}_{ur} & -i\hat{\phi}_{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 & \tilde{\phi}^5 \\ \tilde{\phi}^5 & -\phi^2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \phi^2 & \tilde{\phi}^5 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\Psi^3 = \mathcal{I}_3 - i\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -i\phi_{dg} & \phi_{ug} \\ \hat{\phi}_{ug} & -i\hat{\phi}_{dg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^3 & \tilde{\phi}^6 \\ \tilde{\phi}^6 & -\phi^3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \phi^3 & \tilde{\phi}^6 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\Psi^4 = \mathcal{I}_4 - i\mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} -i\phi_{db} & \phi_{ub} \\ \hat{\phi}_{ub} & -i\hat{\phi}_{db} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^4 & \tilde{\phi}^7 \\ \tilde{\phi}^7 & -\phi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^4 & \tilde{\phi}^7 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\Psi^n = \begin{pmatrix} \phi^n & \tilde{\phi}^{3+n} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \quad (3.11)$$

de façon à simplifier les calculs, par l'utilisation de la structure de module sur l'anneau  $Cl_3 : Cl_3 \times Cl_3$ . Les deux dimensions supplémentaires de temps qui permettraient de passer de l'algèbre d'espace-temps  $Cl_{1,3}$  à  $Cl_{3,3}$  n'ont pas de réalité physique. Ce  $Cl_{3,3}$  n'a d'utilité que comme algèbre de Lie du groupe de Lie réel  $Cl_{3,3}^* = \text{End}(Cl_3)$ . Les six  $R^n$  et les six  $L^n$  sont les seuls objets mathématiques réellement importants dans ce chapitre :

$$R^n = \phi^n \frac{1 + \sigma_3}{2}; \quad L^n = \phi^n \frac{1 - \sigma_3}{2}; \quad n = 2, 3, 4, \quad (3.12)$$

$$\tilde{R}^{3+n} = \tilde{\phi}^{3+n} \frac{1 + \sigma_3}{2}; \quad \tilde{L}^{3+n} = \tilde{\phi}^{3+n} \frac{1 - \sigma_3}{2}. \quad (3.13)$$

Comme précédemment, les interactions électro-faibles (et plus loin les interactions fortes) sont obtenues par le remplacement des dérivées partielles par des dérivées invariantes de jauge. On utilise à nouveau les notations de B.2. On indique dans quelle algèbre on calcule de la manière suivante : les mêmes vecteurs d'espace-temps sont soulignés quand on les exprime dans  $Cl_{3,3}$ . Ils sont en caractères gras quand on les exprime dans  $Cl_{1,3}$  et ils sont en police romane ou ordinaire quand on les exprime dans  $Cl_3$ . Dans ce chapitre on se sert de l'indice 0 pour la composante de temps des vecteurs d'espace-temps, tandis que les indices 4 et 5 sont ceux des deux dimensions fictives supplémentaires. On pose :

$$\begin{aligned} \underline{W}^j &= \Gamma^\mu W_\mu^j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \underline{D} = \Gamma^\mu D_\mu; \quad \Gamma^0 = \Gamma_0; \quad \Gamma^j = -\Gamma_j; \quad \mathbf{i} = \Gamma_{0123}, \\ \Gamma^\mu &= \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}; \quad \mathbf{W}^j = W_\mu^j \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & W^j \\ \widehat{W}^j & 0 \end{pmatrix}; \quad W^j = W_\mu^j \sigma^\mu, \quad (3.14) \\ \underline{D} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = D_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & D \\ \widehat{D} & 0 \end{pmatrix}; \quad D = D_\mu \sigma^\mu; \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les dérivées partielles deviennent, pour la jauge électro-faible :

$$\begin{aligned} \underline{D}(\Psi) &= \underline{\partial}(\Psi) + \frac{g_1}{2} \underline{B} \underline{P}_0(\Psi) + \frac{g_2}{2} \underline{W}^j \underline{P}_j(\Psi), \\ \underline{\partial} &= \Gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \underline{\partial} & 0 \\ 0 & \underline{\partial} \end{pmatrix}; \quad \underline{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \hat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}; \quad \nabla = \sigma^\mu \partial_\mu, \\ \underline{B} &= \Gamma^\mu B_\mu = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{B}} & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{B}} \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathbf{B}} = B_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & B \\ \hat{B} & 0 \end{pmatrix}; \quad B = B_\mu \sigma^\mu. \end{aligned} \quad (3.15)$$

On utilise deux projecteurs  $\underline{P}_\pm$  satisfaisant :

$$\underline{P}_\pm(\Psi_q) = \frac{1}{2}(\Psi_q \pm \mathbf{i}\Psi_q \Gamma_{21}); \quad \underline{P}_\pm(\Psi^n) = \frac{1}{2}(\Psi^n \pm \mathbf{i}\Psi^n \gamma_{21}), \quad (3.16)$$

$$\underline{P}_+(\Psi^n) = \Psi_L^n; \quad \underline{P}_-(\Psi^n) = \Psi_R^n. \quad (3.17)$$

Et on définit les  $\underline{P}_j(\Psi^n)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$  (on rappelle que  $\Psi_l = \Psi^1$ ) par :

$$\underline{P}_1(\Psi) = \Gamma_{0123} \underline{P}_+(\Psi) \Gamma_{35}, \quad (3.18)$$

$$\underline{P}_2(\Psi) = \Gamma_{0123} \underline{P}_+(\Psi) \Gamma_{5012}, \quad (3.19)$$

$$\underline{P}_3(\Psi) = \underline{P}_+(\Psi)(-\Gamma_{0123}), \quad (3.20)$$

$$\underline{P}_j(\Psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P_j(\Psi_l) + i P_j(\Psi^4) & P_j(\Psi^2) + P_j(\Psi^3) \\ P_j(\Psi^2) - P_j(\Psi^3) & P_j(\Psi_l) - i P_j(\Psi^4) \end{pmatrix}, j = 0, 1, 2, 3.$$

Les trois opérateurs  $\underline{P}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  agissent dans le secteur des quarks de la même manière qu'ils le font dans le secteur des leptons :

$$P_1(\Psi^n) = \mathbf{i} P_+(\Psi^n) \gamma_3 \gamma_5, \quad (3.21)$$

$$P_2(\Psi^n) = \mathbf{i} P_+(\Psi^n)(-i\gamma_3), \quad (3.22)$$

$$P_3(\Psi^n) = P_+(\Psi^n)(-\mathbf{i}). \quad (3.23)$$

C'est le contraire pour le quatrième opérateur, qui agit différemment dans le cas de l'onde des leptons par rapport au cas de l'onde des quarks (on expliquera cette différence à la fin de cette section). On reprend l'opérateur  $P_0$  défini en (2.53). Les opérateurs agissant sur les ondes des quarks ont une forme similaire, mais néanmoins différente :

$$\begin{aligned} P_0(\Psi_l) &= \Psi_l \gamma_{21} + (1-p) P_-(\Psi_l) \mathbf{i} + p \mathbf{i} P_-(\Psi_l), \\ P_0(\Psi^n) &= -\frac{1}{3} \Psi^n \gamma_{21} + P_-(\Psi^n) \mathbf{i} \\ &= -\frac{1}{3} \Psi^n \gamma_{21} + \frac{1}{2} (\Psi^n \mathbf{i} - \mathbf{i} \Psi^n \gamma_{03}), \quad n = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Même si  $p$  était nul et donc même s'il n'existait pas de monopôle magnétique, il subsisterait une importante différence entre (2.53) et (3.24), car le

coefficient de  $\Psi_l \gamma_{21}$  est 1 tandis que le coefficient de chacun des trois  $\Psi^n \gamma_{21}$  est  $-1/3$ . On remarquera que, puisque les quarks, avec la couleur, vont par trois, la somme des coefficients est  $1 + 3(-1/3) = 0$ , ce qui bien sûr n'est pas un hasard.<sup>1</sup> Ensuite, pour  $n = 1, 2, 3, 4$  on pose :

$$\frac{\phi^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \xi_1^n & -\bar{\eta}_2^n \\ \xi_2^n & \bar{\eta}_1^n \end{pmatrix}; \quad \frac{R^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \xi_1^n & 0 \\ \xi_2^n & 0 \end{pmatrix}; \quad \xi^n = \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \end{pmatrix}; \quad \hat{\eta}^n = \begin{pmatrix} -\bar{\eta}_2^n \\ \bar{\eta}_1^n \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

et pour  $n = 5, 6, 7, 8$  on pose :

$$\frac{\tilde{\phi}^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \xi_1^n & -\bar{\eta}_2^n \\ \xi_2^n & \bar{\eta}_1^n \end{pmatrix}; \quad \frac{\tilde{R}^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \xi_1^n & 0 \\ \xi_2^n & 0 \end{pmatrix}; \quad \xi^n = \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \end{pmatrix}; \quad \hat{\eta}^n = \begin{pmatrix} -\bar{\eta}_2^n \\ \bar{\eta}_1^n \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

On a alors pour  $n = 1, 2, 3, 4$  :

$$\frac{\hat{\phi}^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \eta_1^n & -\bar{\xi}_2^n \\ \eta_2^n & \bar{\xi}_1^n \end{pmatrix}; \quad \frac{\hat{L}^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \eta_1^n & 0 \\ \eta_2^n & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta^n = \begin{pmatrix} \eta_1^n \\ \eta_2^n \end{pmatrix}; \quad \hat{\xi}^n = \begin{pmatrix} -\bar{\xi}_2^n \\ \bar{\xi}_1^n \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

et pour  $n = 5, 6, 7, 8$  :

$$\frac{\bar{\phi}^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \eta_1^n & -\bar{\xi}_2^n \\ \eta_2^n & \bar{\xi}_1^n \end{pmatrix}; \quad \frac{\bar{L}^n}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \eta_1^n & 0 \\ \eta_2^n & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta^n = \begin{pmatrix} \eta_1^n \\ \eta_2^n \end{pmatrix}; \quad \hat{\xi}^n = \begin{pmatrix} -\bar{\xi}_2^n \\ \bar{\xi}_1^n \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

$P_+$  est le projecteur sur la partie gauche des ondes et  $P_-$  sur la partie droite. Pour  $n = 2, 3, 4$  on a :

$$P_-(\Psi^n) = \begin{pmatrix} R^n & \tilde{R}^{3+n} \\ \bar{R}^{3+n} & -\hat{R}^n \end{pmatrix}; \quad P_+(\Psi^n) = \begin{pmatrix} L^n & \tilde{L}^{3+n} \\ \bar{L}^{3+n} & -\hat{L}^n \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

où on rappelle que les ondes numérotées 2, 3, 4 sont les états de couleurs respectives  $r, g, b$  du quark  $d$ , tandis que les ondes numérotées 5, 6, 7 sont les états de couleur respective  $r, g, b$  du quark  $u$ . On a la même chose pour la partie leptonique de l'onde, avec cependant les indices hauts 1 et 8 au lieu des indices  $n$  et  $3 + n$ . On obtient alors pour  $n = 2, 3, 4$  :

$$\begin{aligned} P_0(\Psi^n) &= -\frac{1}{3} \Psi^n \gamma_{21} + P_-(\Psi^n) \mathbf{i} \\ &= \frac{i}{3} \begin{pmatrix} 2R^n + L^n & -4\tilde{R}^{3+n} + \tilde{L}^{3+n} \\ 4\bar{R}^{3+n} - \bar{L}^{3+n} & 2\hat{R}^n + \hat{L}^n \end{pmatrix}, \\ \frac{g_1}{2} \mathbf{B} P_0(\Psi^n) &= \mathbf{b} P_0(\Psi^n) = \frac{i}{3} \begin{pmatrix} \mathbf{b}(4\bar{R}^{3+n} - \bar{L}^{3+n}) & \mathbf{b}(2\hat{R}^n + \hat{L}^n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

1. Cette annulation est très utile dans le modèle standard pour supprimer les "anomalies" liées à la chiralité des interactions faibles. Ceci a joué un rôle important dans la découverte des quarks et de leurs trois charges de couleur.

Comme  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  demeurent inchangés quand on passe au secteur des quarks, on a sur le modèle de (2.66) et (2.68) :

$$P_1(\Psi^n) = i \begin{pmatrix} \tilde{L}^{3+n} & L^n \\ -\hat{L}^n & \bar{L}^{3+n} \end{pmatrix}; \quad P_2(\Psi^n) = i^2 \begin{pmatrix} -\tilde{L}^{3+n} & L^n \\ \hat{L}^n & \bar{L}^{3+n} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Si  $j = 3$  on obtient :

$$P_3(\Psi^n) = i \begin{pmatrix} -L^n & \tilde{L}^{3+n} \\ -\bar{L}^{3+n} & -\hat{L}^n \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

On a alors :

$$\mathbf{w}^j P_j(\Psi^n) = \begin{pmatrix} -i[(\mathbf{w}^1 - i\mathbf{w}^2)\hat{L}^n + \mathbf{w}^3\bar{L}^{3+n}] & i[(\mathbf{w}^1 + i\mathbf{w}^2)\bar{L}^{3+n} - \mathbf{w}^3\hat{L}^n] \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Maintenant (3.15) entraîne :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Psi^n &= \boldsymbol{\partial}\Psi^n + \frac{g_1}{2}\mathbf{B}P_0(\Psi^n) + \frac{g_2}{2}\mathbf{W}^j P_j(\Psi^n) \\ &= \boldsymbol{\partial}\Psi^n + \mathbf{b}P_0(\Psi^n) + \mathbf{w}^j P_j(\Psi^n). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ceci donne pour les ondes droites :

$$D\hat{R}^n = \nabla\hat{R}^n - \frac{2i}{3}\mathbf{b}\hat{R}^n; \quad D\bar{R}^{3+n} = \nabla\bar{R}^{3+n} + \frac{4i}{3}\mathbf{b}\bar{R}^{3+n}. \quad (3.35)$$

Et pour les ondes gauches on a :

$$D\hat{L}^n = \nabla\hat{L}^n - \frac{i}{3}\mathbf{b}\hat{L}^n - i[(\mathbf{w}^1 + i\mathbf{w}^2)\bar{L}^{3+n} - \mathbf{w}^3\hat{L}^n], \quad (3.36)$$

$$D\bar{L}^{3+n} = \nabla\bar{L}^{3+n} - \frac{i}{3}\mathbf{b}\bar{L}^{3+n} - i[(\mathbf{w}^1 - i\mathbf{w}^2)\hat{L}^n + \mathbf{w}^3\bar{L}^{3+n}]. \quad (3.37)$$

Comme les opérateurs  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  agissent exactement de la même manière dans le secteur des leptons que dans celui des quarks, l'invariance de jauge étudiée en 2.3 fonctionne de la même manière. Ceci permet d'obtenir la valeur des champs de jauge. Et au lieu de (2.125) on a :

$$\begin{aligned} D_L^{n,3+n} - i d_L^{n,3+n} &= 2L^n L^{3+n}; \quad D_L^n = L^n \tilde{L}^n; \quad D_L^{3+n} = \tilde{L}^{3+n} L^{3+n}, \\ W_n^1 &= D_L^{n,3+n}; \quad W_n^2 = d_L^{n,3+n}; \quad W_n^3 = D_L^{3+n} - D_L^n. \end{aligned} \quad (3.38)$$

On a ajouté un indice  $n$  aux vecteurs  $W^j$  : même s'ils possèdent les mêmes propriétés, les  $W_n^j$  changent selon la couleur ou quand on passe des leptons aux quarks. L'invariance de jauge électro-faible est semblable à celle

de l'onde leptonique. Il en résulte, comme avec la partie leptonique, une simplification de la dérivation covariante qui devient :

$$\begin{aligned} D\hat{R}^n &= \nabla\hat{R}^n - \frac{2i}{3}\mathbf{b}\hat{R}^n, \\ D\hat{L}^n &= \nabla\hat{L}^n - \frac{i}{3}\mathbf{b}\hat{L}^n + 3i\mathbf{w}_3^3\hat{L}^n; \quad \mathbf{w}_n^j = \frac{g_2}{2}W_n^j, \\ D\bar{R}^{3+n} &= \nabla\bar{R}^{3+n} + \frac{4i}{3}\mathbf{b}\bar{R}^{3+n}, \\ D\bar{L}^{3+n} &= \nabla\bar{L}^{3+n} - \frac{i}{3}\mathbf{b}\bar{L}^{3+n} - 3i\mathbf{w}_n^3\bar{L}^{3+n}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} D\bar{R}^{3+n} &= \nabla\bar{R}^{3+n} + \frac{4i}{3}\mathbf{b}\bar{R}^{3+n}, \\ D\bar{L}^{3+n} &= \nabla\bar{L}^{3+n} - \frac{i}{3}\mathbf{b}\bar{L}^{3+n} - 3i\mathbf{w}_n^3\bar{L}^{3+n}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

En utilisant l'angle de Weinberg-Salam de  $30^\circ$  du cas leptonique on a :

$$\mathbf{b} = \frac{q}{2}\mathbf{A} - \frac{q}{2\sqrt{3}}Z_n^0; \quad 3\mathbf{w}_n^3 = \frac{q}{2}\mathbf{A} + \frac{q\sqrt{3}}{2}Z_n^0. \quad (3.41)$$

On a donc pour le quark  $d$  :

$$\begin{aligned} D\hat{R}^n &= (\nabla - i\frac{q}{3}\mathbf{A} + i\frac{q}{3\sqrt{3}}Z_n^0)\hat{R}^n, \\ D\hat{L}^n &= (\nabla + i\frac{q}{3}\mathbf{A} + i\frac{5q}{3\sqrt{3}}Z_n^0)\hat{L}^n, \\ D\hat{\phi}^n &= \nabla\hat{\phi}^n + \frac{q}{3}\mathbf{A}\hat{\phi}^n\sigma_{12} + i\frac{q}{3\sqrt{3}}Z_n^0(\hat{R}^n + 5\hat{L}^n). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Cela correspond bien à ce qu'on attend : la charge électrique du quark  $d$  est exactement un tiers de la charge de l'électron (négative). Quant au quark  $u$  on a :

$$\begin{aligned} D\hat{R}^{3+n} &= (\nabla + i\frac{2q}{3}\mathbf{A} - i\frac{2q}{3\sqrt{3}}Z_n^0)\hat{R}^{3+n} \\ D\hat{L}^{3+n} &= (\nabla - i\frac{2q}{3}\mathbf{A} - i\frac{4q}{3\sqrt{3}}Z_n^0)\hat{L}^{3+n}, \\ D\hat{\phi}^{3+n} &= \nabla\hat{\phi}^{3+n} - \frac{2q}{3}\mathbf{A}\hat{\phi}^{3+n}\sigma_{12} - i\frac{2q}{3\sqrt{3}}Z_n^0(\hat{R}^{3+n} + 2\hat{L}^{3+n}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ici aussi on obtient le résultat attendu, puisque la charge du quark  $u$  est positive et égale à  $-2$  fois la charge du quark  $d$ . Ce que l'on a dit dans le premier chapitre au sujet de la conjugaison de charge est bien entendu en vigueur ici aussi : l'antiquark de  $d$  paraît avoir une charge égale à la moitié de celle du quark  $u$ , et l'antiquark de  $u$  paraît avoir une charge double de celle du quark  $d$ . On rappelle aussi que la conjugaison de charge ne fait pas que changer le signe apparent des charges, il change l'orientation en échangeant le rôle des ondes droites et gauches. Résultat important qui doit être signalé ici : le nombre des paramètres libres du modèle standard vient de se réduire, puisque le simple remplacement du coefficient 1 du terme  $\Psi\gamma_{21}$  par  $-1/3$  dans le projecteur  $\underline{P}_0$  suffit à obtenir les deux valeurs de la charge électrique des deux types de quarks. On a donc un seul paramètre libre au lieu de deux.

### 3.2 Chromodynamique

Dans le modèle standard, les interactions fortes sont décrites comme résultant elles aussi d'une invariance de jauge, mais sous un groupe  $SU(3)$  cette fois, groupe dit "de couleur", d'où le nom de "chromodynamique". On transpose ce groupe à l'algèbre de Clifford d'une manière similaire à ce qui a été fait pour les interactions faibles. On définit d'abord des  $\Gamma_k$  de la même manière qu'on a défini des  $\underline{P}_j$  dans la section précédente. On connaît les générateurs  $i\lambda_k$  du groupe  $SU(3)$  :

$$\begin{aligned} i\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ i\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ i\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_8 = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Pour simplifier les notations, on écrit  $l, r, g, b$  au lieu de  $\Psi_l, \Psi_r = \Psi^2, \Psi_g = \Psi^3, \Psi_b = \Psi^4$ . Ainsi on a :

$$\Psi = \begin{pmatrix} l + ib & r + g \\ r - g & l - ib \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Le  $i$  unique de la mécanique quantique non relativiste ne doit pas être confondu avec le  $i$  des relations ci-dessus, qui est responsable de l'orientation de  $Cl_3$ . Donc dans  $Cl_3 \times Cl_3$  on doit à la place utiliser  $\mathbf{i} = \gamma_{0123}$ , qui ne commute pas. Par conséquent (3.44) donne :

$$i\lambda_1 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}g \\ \mathbf{i}r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_2 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i\lambda_3 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}r \\ -\mathbf{i}g \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

$$i\lambda_4 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}b \\ 0 \\ \mathbf{i}r \end{pmatrix}, \quad i\lambda_5 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}, \quad i\lambda_6 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{i}b \\ \mathbf{i}g \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

$$i\lambda_7 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -g \end{pmatrix}, \quad i\lambda_8 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \mathbf{i}r \\ \mathbf{i}g \\ -2\mathbf{i}b \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Les  $\mathbf{\Lambda}_k$  correspondant aux  $i\lambda_k$  agissant sur  $\Psi$  sont (voir B.2) :

$$\mathbf{\Lambda}_1(\Psi) = -\frac{1}{2}(\Gamma_{45}\Psi + \Gamma_{0123}\Psi S); \quad S = \Gamma_{012345}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{\Lambda}_2(\Psi) = -\frac{1}{2}(\Gamma_4\Psi\Gamma_{01235} + \Gamma_{01235}\Psi\Gamma_4), \quad (3.50)$$

$$\mathbf{\Lambda}_3(\Psi) = \frac{1}{2}(\Gamma_5\Psi\Gamma_{01235} - \Gamma_{01234}\Psi\Gamma_4), \quad (3.51)$$

$$\mathbf{\Lambda}_4(\Psi) = \frac{1}{2}(\Gamma_{0123}\Psi\Gamma_4 - \Gamma_{01234}\Psi), \quad (3.52)$$

$$\mathbf{\Lambda}_5(\Psi) = -\frac{1}{2}(S\Psi\Gamma_{01235} + \Gamma_{01235}\Psi S) \quad (3.53)$$

$$\mathbf{\Lambda}_6(\Psi) = \frac{1}{2}(\Gamma_{01234}\Psi S - \Gamma_{45}\Psi\Gamma_4), \quad (3.54)$$

$$\mathbf{\Lambda}_7(\Psi) = \frac{1}{2}(\Gamma_{01235}\Psi - \Psi\Gamma_{01235}), \quad (3.55)$$

$$\mathbf{\Lambda}_8(\Psi) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(2\Gamma_{45}\Psi S + \Gamma_5\Psi\Gamma_{01235} + \Gamma_{01234}\Psi\Gamma_4). \quad (3.56)$$

Le précédent système équivaut à :

$$\mathbf{\Lambda}_1(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_1(\Psi_r) = \mathbf{i}\Psi_g; \quad \mathbf{\Lambda}_1(\Psi_g) = \mathbf{i}\Psi_r; \quad \mathbf{\Lambda}_1(\Psi_b) = 0, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{\Lambda}_2(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_2(\Psi_r) = \Psi_g; \quad \mathbf{\Lambda}_2(\Psi_g) = -\Psi_r; \quad \mathbf{\Lambda}_2(\Psi_b) = 0, \quad (3.58)$$

$$\mathbf{\Lambda}_3(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_3(\Psi_r) = \mathbf{i}\Psi_5; \quad \mathbf{\Lambda}_3(\Psi_g) = -\mathbf{i}\Psi_g; \quad \mathbf{\Lambda}_3(\Psi_b) = 0, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{\Lambda}_4(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_4(\Psi_r) = \mathbf{i}\Psi_b; \quad \mathbf{\Lambda}_4(\Psi_g) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_4(\Psi_b) = \mathbf{i}\Psi_r, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{\Lambda}_5(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_5(\Psi_r) = \Psi_b; \quad \mathbf{\Lambda}_5(\Psi_g) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_5(\Psi_b) = -\Psi_r, \quad (3.61)$$

$$\mathbf{\Lambda}_6(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_6(\Psi_r) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_6(\Psi_g) = \mathbf{i}\Psi_b; \quad \mathbf{\Lambda}_6(\Psi_b) = \mathbf{i}\Psi_g, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{\Lambda}_7(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_7(\Psi_r) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_7(\Psi_g) = \Psi_b; \quad \mathbf{\Lambda}_7(\Psi_b) = -\Psi_g, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{\Lambda}_8(\Psi_l) = 0; \quad \mathbf{\Lambda}_8(\Psi_r) = -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}}\Psi_g r; \quad \mathbf{\Lambda}_8(\Psi_g) = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}}\Psi_g; \quad \mathbf{\Lambda}_1(\Psi_b) = \frac{2\mathbf{i}}{\sqrt{3}}\Psi_b. \quad (3.64)$$

Chaque  $\mathbf{\Lambda}_k$  projette l'onde  $\Psi$  sur l'onde des quarks  $\Psi_q$ . Donc **la partie leptonique de l'onde ne voit pas la force de couleur** : c'est bien connu du point de vue expérimental, et on n'a plus besoin de le postuler. On étend la dérivation invariante de jauge des interactions électro-faibles en posant :

$$\underline{D}(\Psi) = \underline{\partial}(\Psi) + \frac{g_1}{2}\underline{B}\underline{P}_0(\Psi) + \frac{g_2}{2}\underline{W}^j\underline{P}_j(\Psi) + \frac{g_3}{2}\underline{G}^k\mathbf{\Lambda}_k(\Psi), \quad (3.65)$$

où  $g_3$  est une troisième constante et les  $\underline{G}^k$  sont huit vecteurs appelés "gluons". Comme  $I_4$  commute avec tout élément de  $Cl_{1,3}$  et comme on a  $P_j(\mathbf{i}\Psi_{ind}) = \mathbf{i}P_j(\Psi_{ind})$  pour  $j = 0, 1, 2, 3$  et  $ind = l, r, g, b$ , on trouve que chaque opérateur  $\mathbf{i}\Gamma_k$  commute avec chaque opérateur  $\underline{P}_j$ . Maintenant on

utilise douze réels  $a^0, a^j, j = 1, 2, 3, b^k, k = 1, 2, \dots, 8$ , et on pose :

$$S_0 = a^0 \underline{P}_0; S_1 = \sum_{j=1}^{j=3} a^j \underline{P}_j; S_2 = \sum_{k=1}^{k=8} b^k \mathbf{\Lambda}_k; \Sigma = S_0 + S_1 + S_2, \quad (3.66)$$

et en utilisant la fonction exponentielle on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(\Sigma) &= \exp(S_0) \exp(S_1) \exp(S_2) = \exp(S_1) \exp(S_0) \exp(S_2) \\ &= \exp(S_0) \exp(S_2) \exp(S_1) = \dots \end{aligned} \quad (3.67)$$

dans n'importe quel ordre, grâce à la commutation des  $\underline{P}_0$  avec les  $\underline{P}_j, j = 1, 2, 3$  ainsi qu'avec la commutation des  $\underline{P}_j, j = 0, 1, 2, 3$  avec les  $\mathbf{\Lambda}_k, k = 1, \dots, 8$ . L'ensemble des opérateurs  $\exp(S)$  est un groupe de Lie  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ . La seule différence par rapport au modèle standard, c'est qu'on n'a pas besoin de postuler la structure de ce groupe, car elle résulte du calcul des commutateurs. L'invariance sous  $Cl_3^*$  (et par conséquent l'invariance relativiste) de cette dérivée invariante de jauge est semblable à celle obtenue en 2.3. L'invariance de jauge [37][48][49] peut s'écrire sous la forme :

$$\Psi' = [\exp(a^0 \underline{P}_0 + S_1 + S_2)](\Psi); \underline{D} = \mathbf{\Lambda}^\mu \underline{D}_\mu; \underline{D}' = \mathbf{\Lambda}^\mu \underline{D}'_\mu, \quad (3.68)$$

$$\underline{D}'_\mu \Psi' = \exp(a^0 \underline{P}_0 + S_1 + S_2) \underline{D}_\mu \Psi, \quad (3.69)$$

$$B'_\mu = B_\mu - \frac{2}{g_1} \partial_\mu a^0, \quad (3.70)$$

$$W'^j_\mu \underline{P}_j = \left[ \exp(S_1) W^j_\mu \underline{P}_j - \frac{2}{g_2} \partial_\mu [\exp(S_1)] \right] \exp(-S_1), \quad (3.71)$$

$$\underline{G}'^k_\mu \mathbf{\Lambda}_k = \left[ \exp(S_2) \underline{G}^k_\mu \mathbf{\Lambda}_k - \frac{2}{g_3} \partial_\mu [\exp(S_2)] \right] \exp(-S_2). \quad (3.72)$$

Le groupe  $SU(3)$  de la chromodynamique engendré par les opérateurs  $\mathbf{\Lambda}_k$  agit seulement dans le secteur des quarks. En posant :

$$\text{diag}(\Psi) = \frac{1}{4} (\Psi + S \Psi S + \Gamma_4 \Psi \Gamma_4 - \Gamma_{01235} \Psi \Gamma_{01235}) = \begin{pmatrix} \Psi_l & 0 \\ 0 & \Psi_l \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

on a :

$$\text{diag}([\exp(b^k \mathbf{\Lambda}_k)](\Psi)) = \text{diag}(\Psi). \quad (3.74)$$

Cela vient du fait qu'on part d'opérateurs qui n'agissent pas sur  $\Psi_l$ . Pour rendre possible le cas contraire, il faudrait considérer des opérateurs similaires aux  $\mathbf{\Lambda}_k$  qui coupleraient l'onde  $\Psi_l$  avec l'une des trois ondes  $\Psi^n$ . Ça ne peut pas exister parce que ces opérateurs projettent les ondes droites sur des ondes droites, et les gauches sur des ondes gauches, et parce que les ondes droites et les ondes gauches de la partie leptonique, dans les interactions faibles, se transforment de manière différente par rapport aux ondes de la partie "colorée" de l'onde globale. On obtient ainsi un groupe de jauge

$U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  pour une onde comprenant tous les fermions de la première génération<sup>2</sup>. Tout ceci est très bien établi expérimentalement. La nouveauté ici est simplement que ça émerge directement de la structure de l'onde quantique. Comme c'est indépendant de l'échelle des énergies on peut comprendre pourquoi les théories de grande unification (GUTs) n'ont pas réussi : il est impossible d'obtenir un groupe plus grand, avec plus de générateurs. Donc il est impossible pour un quark de se désintégrer en donnant un lepton. Ceci entraîne la conservation d'une quantité construite par la théorie quantique des champs qu'on appelle le "nombre baryonique". De plus cette loi de conservation est confirmée expérimentalement par l'observation des neutrinos dans les observatoires comme Super-Kamiokande. On peut dire que cette transposition, le modèle standard traduit en algèbre de Clifford, vérifie automatiquement la conservation du nombre baryonique. Cela renforce le modèle standard par accord avec l'expérience.

### 3.2.1 Trois générations, quatre neutrinos

Le dessin de la théorie physique est la compréhension des faits expérimentaux. Actuellement nous devons justifier pourquoi il y a seulement trois sortes de leptons et de quarks, et aussi pourquoi il peut exister un quatrième neutrino, très différent des trois autres. Les résultats expérimentaux, notamment la désintégration du boson  $Z^0$ , sont interprétés comme permettant l'existence de trois sortes seulement de leptons légers. D'autres résultats paraissent suggérer la possibilité de l'existence d'un quatrième neutrino. On a justifié l'existence de trois sortes de leptons au chapitre précédent. C'est aisément généralisable aux trois générations du modèle standard. Les deux autres générations s'obtiennent en remplaçant le  $\sigma_3$  de l'équation de Dirac par  $\sigma_1$  ou  $\sigma_2$  partout où cette direction est utilisée. De plus, le passage d'une génération à l'autre peut être vu comme une permutation circulaire des indices  $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$  ou  $1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1$  pour l'autre génération. Par exemple, le  $\sigma_3$  utilisé pour le projecteur définissant l'onde droite et l'onde gauche doit être remplacé par  $\sigma_1$  ou par  $\sigma_2$ . Et le  $\sigma_1$  qui lie l'onde de la particule à l'onde de l'antiparticule doit être remplacé par  $\sigma_2$  ou par  $\sigma_3$ . Ces changements nous obligent à traiter séparément chaque génération, et ceci justifie donc le traitement séparé de chaque génération dans le modèle standard. Cependant pour une quatrième génération un tel traitement séparé n'est pas possible, parce que  $Cl_3$  est l'algèbre de l'espace ordinaire à trois dimensions. Il est impossible d'obtenir un quatrième ensemble d'opérateurs semblables aux  $P_\mu$ .

Mais l'existence d'un quatrième neutrino [28] est possible parce que  $Cl_3$  contient quatre termes indépendants de carré  $-1$ . L'équation d'onde de l'électron utilise l'un de ces quatre termes :  $i\sigma_3 = \sigma_{12}$ . En outre, les égalités

---

2. On verra plus loin que ce groupe agit sur le secteur des leptons par la seule partie  $U(1) \times SU(2)$  du groupe, avec l'interprétation que les leptons sont incapables d'interagir dans les interactions fortes.

$i\sigma_1 = \sigma_{23}$  et  $i\sigma_2 = \sigma_{31}$  expliquent pourquoi les deux autres sortes de leptons existent. On peut aussi construire une équation d'onde invariante de forme avec le quatrième générateur  $i = \sigma_{123}$  :

$$\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{123} + m\rho = 0. \quad (3.75)$$

Multipliant à gauche par  $\bar{\phi}^{-1}$ , et avec  $\rho = e^{-i\beta}\bar{\phi}\phi$ , on obtient l'équation équivalente :

$$\nabla\hat{\phi}i + me^{-i\beta}\phi = 0 ; \quad \nabla\hat{\phi} = ime^{-i\beta}\phi. \quad (3.76)$$

On peut rendre l'invariance de jauge locale avec :

$$0 = \nabla\hat{\phi}i + g_1B\hat{\phi} + me^{-i\beta}\phi. \quad (3.77)$$

C'est équivalent à :

$$0 = i\nabla\eta + g_1B\eta + me^{-i\beta}\xi, \quad (3.78)$$

$$0 = i\nabla\hat{\xi} + g_1B\hat{\xi} + me^{-i\beta}\hat{\eta}. \quad (3.79)$$

Contrairement à notre équation d'onde améliorée pour l'électron, qui a l'équation de Dirac comme approximation linéaire, cette équation d'onde ne peut pas venir de la théorie quantique linéaire : aucune approximation linéaire ne peut être obtenue en annulant l'angle  $\beta$  ou en le négligeant s'il est petit. Cet angle est maintenant la phase de l'onde. On peut néanmoins obtenir les ondes planes. On cherche des solutions vérifiant :

$$\phi = e^{-i\varphi}\phi_0 ; \quad \varphi = mv_\mu x^\mu ; \quad v = \sigma^\mu v_\mu, \quad (3.80)$$

où  $v$  est une vitesse réduite fixe et où  $\phi_0$  est aussi un facteur fixe. On obtient :

$$\nabla\hat{\phi} = \sigma^\mu \partial_\mu (e^{i\varphi}\hat{\phi}_0) = imve^{i\varphi}\hat{\phi}_0. \quad (3.81)$$

Et on a :

$$\bar{\phi}\bar{\phi} = e^{-i\varphi}\phi_0 e^{-i\varphi}\bar{\phi}_0 = e^{-2i\varphi}\phi_0\bar{\phi}_0. \quad (3.82)$$

Alors si on pose :

$$\phi_0\bar{\phi}_0 = \rho_0 e^{i\beta_0}, \quad (3.83)$$

on a finalement :

$$\beta = \beta_0 - 2\varphi ; \quad e^{-i\beta}\phi = e^{-i(\beta_0-2\varphi)}e^{-i\varphi}\phi_0 = e^{-i(\beta_0-\varphi)}\phi_0. \quad (3.84)$$

Donc (3.81) équivaut à :

$$imve^{i\varphi}\hat{\phi}_0 = ime^{-i(\beta_0-\varphi)}\phi_0 \quad (3.85)$$

$$v\hat{\phi}_0 = e^{-i\beta_0}\phi_0 ; \quad e^{i\beta_0}v\hat{\phi}_0 = \phi_0. \quad (3.86)$$

En conjuguant on obtient :

$$e^{-i\beta_0}\hat{v}\phi_0 = \hat{\phi}_0. \quad (3.87)$$

Donc on a :

$$\phi_0 = e^{i\beta_0} v \widehat{\phi}_0 = e^{i\beta_0} v [e^{-i\beta_0} \widehat{v} \phi_0] = v \widehat{v} \phi_0. \quad (3.88)$$

Alors si  $\phi_0 \neq 0$  on obtient :

$$1 = v \widehat{v}, \quad (3.89)$$

qui donne  $v^0 = \sqrt{1 + \vec{v}^2}$  ou  $v^0 = -\sqrt{1 + \vec{v}^2}$  et puisque (3.86) implique :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= v e^{i\beta_0} \widehat{\phi}_0; \quad D_0 = \phi_0 \widetilde{\phi}_0 = v e^{i\beta_0} \widehat{\phi}_0 \widetilde{\phi}_0 = v e^{i\beta_0} \rho_0 e^{-i\beta_0} = v \rho_0, \\ D_0^0 &= v^0 \rho_0; \quad v^0 > 0; \quad v^0 = \sqrt{1 + \vec{v}^2}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Donc aucune onde plane ne peut exister avec un signe de l'énergie opposé au signe de la masse. Cette équation d'onde peut avoir un terme de jauge et peut s'exprimer de manière complètement invariant de forme :

$$0 = \overline{\phi}(\nabla \widehat{\phi})i + \overline{\phi}qB\widehat{\phi} + m\rho. \quad (3.91)$$

Utilisant la réversion on obtient :

$$0 = -i(\overline{\phi}\nabla)\widehat{\phi} + \overline{\phi}qB\widehat{\phi} + m\rho. \quad (3.92)$$

Avec (1.122) à (1.125) on a :

$$\overline{\phi}(\nabla \widehat{\phi}) = \frac{1}{2}(\nabla \cdot D_\mu)\sigma^\mu + iw_\mu\sigma^\mu, \quad (3.93)$$

$$\overline{\phi}B\widehat{\phi} = (B \cdot D_\mu)\sigma^\mu. \quad (3.94)$$

Ajoutant et soustrayant (3.91) et (3.92) on obtient :

$$0 = \nabla \cdot D_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.95)$$

$$0 = -w_0 + B \cdot D_0 + m\rho, \quad (3.96)$$

$$0 = -w_j + B \cdot D_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.97)$$

Les quatre équations (3.95) sont les lois de conservation des courants  $D_\mu$ . Donc le courant de probabilité est conservé. Multipliant par  $\overline{\phi}^{-1}$  à gauche, (3.91) est équivalent à (3.77). C'est équivalent au système :

$$0 = i\nabla\eta + qB\eta + mv\eta, \quad (3.98)$$

$$0 = i\nabla\widehat{\xi} + qB\widehat{\xi} + mv\widehat{\xi}. \quad (3.99)$$

Donc avec  $v$  l'équation d'onde (3.91) devient :

$$0 = (\nabla \widehat{\phi})i + qB\widehat{\phi} + mv\widehat{\phi}. \quad (3.100)$$

Comme  $i$  commute avec  $\sigma_1$ , la multiplication par  $\sigma_1$  à droite ne change rien à cette équation : **le quatrième neutrino-monopole est sa propre antiparticule.**

### 3.3 Terme de masse conservé

Comme dans la section précédente, et comme au précédent chapitre, une généralisation du terme de masse est possible pour l'équation d'onde améliorée. Pour le voir on va commencer par simplifier le terme différentiel invariant de jauge de la chromodynamique : on prend en considération de la même manière les trois sous-groupes  $SU(2)$  de  $SU(3)$  grâce aux potentiels :

$$b = \frac{g_1}{2} B; \quad w^j = \frac{g_2}{2} W^j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} h_1^1 &= \frac{g_3}{2} G^1; \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2} G^2; \quad h_1^3 - h_3^3 = \frac{g_3}{2} \left( -G^3 - \frac{G^8}{\sqrt{3}} \right), \\ h_2^1 &= \frac{g_3}{2} G^6; \quad h_2^2 = \frac{g_3}{2} G^7; \quad h_2^3 - h_1^3 = \frac{g_3}{2} \left( G^3 - \frac{G^8}{\sqrt{3}} \right), \\ h_3^1 &= \frac{g_3}{2} G^4; \quad h_3^2 = -\frac{g_3}{2} G^5; \quad h_3^3 - h_2^3 = \frac{g_3}{2} \left( 2\frac{G^8}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Ces potentiels n'introduisent aucune dimension supplémentaire dans le groupe de jauge parce que la somme de  $h_1^3 - h_3^3$ ,  $h_2^3 - h_1^3$  et  $h_3^3 - h_2^3$  est nulle. Puis on utilise la notation :

$$\underline{n} = n \pmod{3}; \quad \underline{3} = 3; \quad \underline{4} = 1; \quad \underline{5} = 2. \quad (3.103)$$

Pour la dérivation invariante de jauge des termes supplémentaires apparaissent, contenant les potentiels de jauge  $G^k$  ou  $h_n^p$  :

$$\frac{g_3}{2} G^k \mathbf{\Lambda}_k(\Psi) = \begin{pmatrix} S(\Psi^2) - S(\Psi^3) & S(\Psi^1) - iS(\Psi^4) \\ S(\Psi^1) + iS(\Psi^4) & S(\Psi^2) + S(\Psi_3) \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

$$S(\Psi_1) = 0, \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} S(\Psi^2) &= \frac{g_3}{2} \left[ (\mathbf{G}^1 - \mathbf{G}^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^3 - \mathbf{G}^3 \mathbf{i} \Psi^2 + (\mathbf{G}^4 - \mathbf{G}^5 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^4 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} \mathbf{G}^8 \Psi^2 \right] \\ &= (\mathbf{h}_1^1 - \mathbf{h}_1^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^3 - \mathbf{h}_1^3 \mathbf{i} \Psi^2 + (\mathbf{h}_3^1 + \mathbf{h}_3^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^4 + \mathbf{h}_3^3 \mathbf{i} \Psi^2, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} S(\Psi^3) &= \frac{g_3}{2} \left[ (\mathbf{G}^1 + \mathbf{G}^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^2 + \mathbf{G}^3 \mathbf{i} \Psi^3 + (\mathbf{G}^6 - \mathbf{G}^7 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^4 - \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{G}^8 \mathbf{i} \Psi^3 \right] \\ &= (\mathbf{h}_2^1 - \mathbf{h}_2^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^4 - \mathbf{h}_2^3 \mathbf{i} \Psi^3 + (\mathbf{h}_1^1 + \mathbf{h}_1^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^2 + \mathbf{h}_1^3 \mathbf{i} \Psi^3, \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} S(\Psi^4) &= \frac{g_3}{2} \left[ (\mathbf{G}^4 + \mathbf{G}^5 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^2 + (\mathbf{G}^6 + \mathbf{G}^7 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{G}^8 \mathbf{i} \Psi^4 \right] \\ &= (\mathbf{h}_3^1 - \mathbf{h}_3^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^2 + \mathbf{h}_3^3 \mathbf{i} \Psi^4 + (\mathbf{h}_2^1 + \mathbf{h}_2^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^3 + \mathbf{h}_2^3 \mathbf{i} \Psi^4, \end{aligned} \quad (3.108)$$

L'annulation dans (3.105) signifie que les leptons sont insensibles aux interactions fortes. Ensuite l'usage des indices modulo 3 permet d'écrire la formule générale sous la forme :

$$S(\Psi^n) = (\mathbf{h}_{n-1}^1 - \mathbf{h}_{n-1}^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^{n+1} - \mathbf{h}_{n-1}^3 \mathbf{i} \Psi^n + (\mathbf{h}_{n+1}^1 + \mathbf{h}_{n+1}^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^{n+2} + \mathbf{h}_{n+1}^3 \mathbf{i} \Psi^n. \quad (3.109)$$

On a avec (3.65) :

$$\begin{aligned} \underline{D}(\Psi) &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}\Psi^2 - \mathbf{D}\Psi^3 & \mathbf{D}\Psi^1 - i\mathbf{D}\Psi^4 \\ \mathbf{D}\Psi_l + i\mathbf{D}\Psi^4 & \mathbf{D}\Psi^2 + \mathbf{D}\Psi^3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}\Psi_l &= \partial\Psi_l + \frac{g_1}{2}\mathbf{B}P_0(\Psi_l) + \frac{g_2}{2}\mathbf{W}^j P_j(\Psi_l) = \partial\Psi_l + \mathbf{b}P_0(\Psi_l) + \mathbf{w}^j P_j(\Psi_l), \\ \mathbf{D}\Psi^n &= \partial\Psi^n + \frac{g_1}{2}\mathbf{B}P_0(\Psi^n) + \frac{g_2}{2}\mathbf{W}^j P_j(\Psi^n) + S(\Psi^n) \\ &= \partial\Psi^n + \mathbf{b}P_0(\Psi^n) + \mathbf{w}^j P_j(\Psi^n) + S(\Psi^n). \end{aligned} \quad (3.110)$$

On a aussi avec les notations de B.1.2 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}_{n-1}^1 - \mathbf{h}_{n-1}^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^{n+1} &= i \left( -(\mathbf{h}_{n-1}^1 + i\mathbf{h}_{n-1}^2) \bar{\phi}^{3+n+1} - (\mathbf{h}_{n-1}^1 + i\mathbf{h}_{n-1}^2) \hat{\phi}^{n+1} \right), \\ -\mathbf{h}_{n-1}^3 \mathbf{i} \Psi^n &= i \left( \mathbf{h}_{n-1}^3 \bar{\phi}^{3+n} \quad \mathbf{h}_{n-1}^3 \hat{\phi}^n \right). \end{aligned} \quad (3.111)$$

On obtient ensuite :

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}_{n+1}^1 + \mathbf{h}_{n+1}^2 \mathbf{i}) \mathbf{i} \Psi^{n+2} &= i \left( -(\mathbf{h}_{n+1}^1 - i\mathbf{h}_{n+1}^2) \bar{\phi}^{3+n+2} - (\mathbf{h}_{n+1}^1 - i\mathbf{h}_{n+1}^2) \hat{\phi}^{n+2} \right), \\ \mathbf{h}_{n+1}^3 \mathbf{i} \Psi^n &= i \left( -\mathbf{h}_{n+1}^3 \bar{\phi}^{3+n} \quad -\mathbf{h}_{n+1}^3 \hat{\phi}^n \right). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Alors si on pose :

$$S(\Psi^n) = \begin{pmatrix} S(\bar{\phi}^{3+n}) & S(\hat{\phi}^n) \end{pmatrix}, \quad (3.113)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} S(\bar{\phi}^{3+n}) &= -i(\mathbf{h}_{n-1}^1 + i\mathbf{h}_{n-1}^2) \bar{\phi}^{3+n+1} + i\mathbf{h}_{n-1}^3 \bar{\phi}^{3+n} \\ &\quad - i(\mathbf{h}_{n+1}^1 - i\mathbf{h}_{n+1}^2) \bar{\phi}^{3+n+2} - i\mathbf{h}_{n+1}^3 \bar{\phi}^{3+n}, \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} S(\hat{\phi}^n) &= -i(\mathbf{h}_{n-1}^1 + i\mathbf{h}_{n-1}^2) \bar{\phi}^{3+n+1} + i\mathbf{h}_{n-1}^3 \hat{\phi}^n \\ &\quad - i(\mathbf{h}_{n+1}^1 - i\mathbf{h}_{n+1}^2) \hat{\phi}^{n+2} - i\mathbf{h}_{n+1}^3 \hat{\phi}^n. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Pour la partie des équations d'onde contenant les dérivées partielles et les termes des interactions électro-faibles, on utilise (3.35) à (3.37). Et on se sert de la conjugaison  $M \mapsto \widehat{M}$  pour les ondes droites, ce qui nous permet d'obtenir la dérivation indépendante de jauge :

$$\begin{aligned} -i\widehat{D}R^n &= -i\widehat{\nabla}R^n + \frac{2}{3}\widehat{\mathbf{b}}R^n + (\widehat{\mathbf{h}}_{n-1}^1 - i\widehat{\mathbf{h}}_{n-1}^2)R^{n+1} + (\widehat{\mathbf{h}}_{n+1}^1 + i\widehat{\mathbf{h}}_{n+1}^2)R^{n+2} \\ &\quad - (\widehat{\mathbf{h}}_{n-1}^3 - \widehat{\mathbf{h}}_{n+1}^3)R^n, \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$-i\bar{D}\tilde{R}^{3+n} = -i\hat{\nabla}\tilde{R}^{3+n} - \frac{4}{3}\hat{b}\tilde{R}^{3+n} + (\hat{h}_{n-1}^1 - i\hat{h}_{n-1}^2)\tilde{R}^{3+n+1} \quad (3.117)$$

$$+ (\hat{h}_{n+1}^1 + i\hat{h}_{n+1}^2)\tilde{R}^{3+n+2} - (\hat{h}_{n-1}^3 - \hat{h}_{n+1}^3)\tilde{R}^{3+n},$$

$$iD\hat{L}^n = i\nabla\hat{L}^n + \frac{b}{3}\hat{L}^n + [(w_n^1 + iw_n^2)\bar{L}^{3+n} - w_n^3\hat{L}^n] \quad (3.118)$$

$$+ (h_{n-1}^1 + ih_{n-1}^2)\hat{L}^{n+1} + (h_{n+1}^1 - ih_{n+1}^2)\hat{L}^{n+2} - (h_{n-1}^3 - h_{n+1}^3)\hat{L}^n,$$

$$i\tilde{D}\bar{L}^{3+n} = i\tilde{\nabla}\bar{L}^{3+n} + \frac{b}{3}\bar{L}^{3+n} + [(w_n^1 - iw_n^2)\hat{L}^n + w_n^3\bar{L}^{3+n}] \quad (3.119)$$

$$+ (h_{n-1}^1 + ih_{n-1}^2)\bar{L}^{3+n+1} + (h_{n+1}^1 - ih_{n+1}^2)\bar{L}^{3+n+2} - (h_{n-1}^3 - h_{n+1}^3)\bar{L}^{3+n}.$$

Pour rendre cette dérivée invariante de jauge compatible avec le terme de masse (et on rappelle que le terme de masse permet un lien direct avec l'inertie et la gravitation) on procède de manière totalement analogue à celle utilisée en 2.2 pour la partie leptonique de l'onde. La forme  $v\hat{\phi}\mathbf{m}\sigma_{12}$  du terme de masse est conservée. Ce qui change est d'abord la définition du vecteur unitaire  $v$ . On a en effet maintenant pas moins de douze courants chiraux :

$$D_R^n = R^n \tilde{R}^n; D_L^n = L^n \tilde{L}^n; D_R^{3+n} = \tilde{R}^{3+n} R^{3+n}; D_L^{3+n} = \tilde{L}^{3+n} L^{3+n}, \quad (3.120)$$

pour  $n = 2, 3, 4$ . Le courant  $J_q$  qui remplace  $J_l$  est la somme de ces douze courants :

$$J_q = \sum_{n=2}^{n=4} [D_R^n + D_R^{3+n} + D_L^n + D_L^{3+n}]; \rho_q^2 = (J_q)^2 = J_q \hat{J}_q; v_q = \frac{J_q}{\rho_q}. \quad (3.121)$$

Puisque le courant  $J_q$  est la somme de douze courants, le calcul du carré scalaire de ce vecteur comporte douze carrés, tous nuls parce que chaque courant chirale est sur le cône de lumière. Et il y a  $66 = 12 \times 11/2$  produits scalaires de deux courants distincts. Donc le terme  $\rho_q^2$  est la somme de 66 invariants relativistes :

$$\rho_q^2 = \sum_{n=2}^{n=7} d_n d_n^* + \sum_{n,p,q} s_n^{pq} (s_n^{pq})^* \quad (3.122)$$

$$d_n = R^n \bar{L}^n + L^n \bar{R}^n = 2\eta^{n\dagger} \xi^n = D_R^n \cdot D_L^n,$$

où dans les  $s_n^{pq}$ ,  $n = 2, 3, 4, 5$ , et  $pq$  est l'une des 15 paires possibles qu'on peut former avec deux nombres distincts pris parmi 2, 3, 4, 5, 6, 7 :

$$s_2^{pq} = 2\eta^{p\dagger} \hat{\eta}^q = -2\eta^{q\dagger} \hat{\eta}^p = D_L^p \cdot D_L^q,$$

$$s_3^{pq} = 2\eta^{q\dagger} \xi^p = D_R^p \cdot D_L^q; s_4^{pq} = 2\eta^{p\dagger} \xi^q = D_L^p \cdot D_R^q, \quad (3.123)$$

$$s_5^{pq} = 2\hat{\xi}^{p\dagger} \xi^q = -2\hat{\xi}^{q\dagger} \xi^p = D_R^p \cdot D_R^q.$$

Les équations avec termes de masse des quarks s'obtiennent comme les équations de la partie leptonique (2.85) [49] [48] :

$$\begin{aligned} 0 &= D\hat{L}^n + m_1 \mathbf{v}_q \hat{L}^n \sigma_{12}; \quad 0 = \hat{D}R^n + m_2 \hat{\mathbf{v}}_q R^n \sigma_{12}, \\ 0 &= D\tilde{L}^{3+n} + m_3 \mathbf{v}_q \tilde{L}^{3+n} \sigma_{12}; \quad 0 = \hat{D}\tilde{R}^{3+n} + m_4 \hat{\mathbf{v}}_q \tilde{R}^{3+n} \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (3.124)$$

ceci toujours pour  $n = 2, 3, 4$ . On a trois équations pour chacune des quatre équations ci-dessus. On considère donc quatre masses propres  $\hbar c m_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . Comme en 2.2 le terme de masse tient compte de la séparation de  $\Psi^n$  en quatre parties :

$$\begin{aligned} \Psi_{dL}^n &= (L^n \quad 0); \quad \Psi_{uL}^n = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{L}^{3+n} \end{pmatrix}, \\ \Psi_{dR}^n &= (R^n \quad 0); \quad \Psi_{uR}^n = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{R}^{3+n} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\Psi^n) &= m_1 \Psi_{dL}^n + m_2 \Psi_{dR}^n + m_3 \Psi_{uL}^n + m_4 \Psi_{uR}^n \\ &= \begin{pmatrix} m_1 L^n + m_2 R^n & m_3 \tilde{L}^{3+n} + m_4 \tilde{R}^{3+n} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Et on assemble les quatre équations (3.124) en :

$$0 = \mathbf{D}\Psi^n + \mathbf{v}_q \mathbf{m}(\Psi^n) \gamma_{21}; \quad \mathbf{v}_q = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v}_q \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_q^2 = 1. \quad (3.127)$$

Puis posant :

$$\underline{M}(\Psi) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_q [\mathbf{m}(\Psi^2) - \mathbf{m}(\Psi^3)] & \mathbf{v}_q \mathbf{m}(\Psi^1) - i \mathbf{v}_q \mathbf{m}(\Psi^4) \\ \mathbf{v}_q \mathbf{m}(\Psi^1) + i \mathbf{v}_q \mathbf{m}(\Psi^4) & \mathbf{v}_q [\mathbf{m}(\Psi^2) + \mathbf{m}(\Psi^3)] \end{pmatrix}, \quad (3.128)$$

L'équation d'onde qui généralise l'équation améliorée de l'électron s'écrit alors :

$$0 = \underline{D}\Psi \Gamma_{012} + \underline{M}(\Psi) \Gamma_0, \quad (3.129)$$

tandis que l'équation complètement invariante sous  $Cl_3^*$  (on rappelle que cette invariance entraîne automatiquement l'invariance relativiste) s'obtient simplement en multipliant à gauche par le renversé :

$$0 = \tilde{\Psi} \underline{D}\Psi \Gamma_{012} + \tilde{\Psi} \underline{M}(\Psi) \Gamma_0. \quad (3.130)$$

C'est le lien étroit entre la réversion dans  $Cl_{3,3}$  et la réversion dans  $Cl_{1,3}$  qui permet la séparation complète du terme de masse de l'onde leptonique de celui de l'onde des quarks.. Ce lien strict n'est pas trivial et est établi en B.2 . De plus, excepté dans un cas très particulier,  $\Psi(x)$  est inversible. On peut donc obtenir la forme invariante (3.130) à partir de (3.129) en multipliant à gauche par  $\tilde{\Psi}$ . Et multipliant à gauche (3.130) par  $\tilde{\Psi}^{-1}$ , on obtient la forme usuelle (3.129) de l'équation d'onde. On rappelle que ceci justifie, pour les ondes leptoniques, qu'on est capable de déduire les équations d'onde à partir d'une densité lagrangienne . Donc le même double lien équation – lagrangien s'observe aussi pour les ondes des quarks.

### 3.4 Invariance

L'invariance des équations (3.124) est semblable à celle de l'onde leptonique étudiée en 2.3. Pour l'invariance de forme qui inclue l'invariance relativiste, il suffit d'ajouter à (2.90) et à (2.91), et à la covariance des potentiels  $b$  et  $w^j$  celle des  $g_3 G^k$  ou  $h^m$  qui se déduisent de (3.102) :

$$h_n^m = \overline{M} h_n'^m \widehat{M}; \quad m_n = r m_n'; \quad r = |\det(M)|. \quad (3.131)$$

On déduit :

$$\begin{aligned} 0 &= D' \widehat{L}'^n + m'_1 v'_q \widehat{L}'^n \sigma_{12}; \quad 0 = \widehat{D}' R'^n + m'_2 \widehat{v}'_q R'^n \sigma_{12}, \\ 0 &= D' \overline{L}'^{3+n} + m'_3 v'_q \overline{L}'^{3+n} \sigma_{12}; \quad 0 = \widehat{D}' \widetilde{R}'^{3+n} + m'_4 \widehat{v}'_q \widetilde{R}'^{3+n} \sigma_{12}, \end{aligned} \quad (3.132)$$

ce qui entraîne l'invariance de forme des équations d'onde.

L'invariance de jauge sous le groupe  $U(1)$  engendré par  $\underline{P}_0$  résulte des égalités (2.102)–(2.103) dans lesquelles il suffit de remplacer  $P_0$  par  $\underline{P}_0$  avec le  $\Psi$  de (3.1). Ce qui change par rapport au cas des leptons vient seulement de  $\underline{P}_0$  qui donne :

$$\begin{aligned} \underline{P}_0(\Psi) &= \begin{pmatrix} P_0(\Psi^1) & P_0(\Psi^2) \\ P_0(\Psi^3) & P_0(\Psi^4) \end{pmatrix}; \quad P_0(\Psi^n) = -\frac{1}{3} \Psi^n \gamma_{21} + \frac{1}{2} (\Psi^n \mathbf{i} + \mathbf{i} \Psi^n \gamma_{30}), \\ P_0(\Psi^n) &= -\frac{i}{3} \begin{pmatrix} R^n - L^n & \widetilde{R}^{3+n} - \widetilde{L}^{3+n} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} R^n & -\widetilde{R}^{3+n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2i}{3} R^n + \frac{i}{3} L^n & -\frac{4i}{3} \widetilde{R}^{3+n} + \frac{i}{3} \widetilde{L}^{3+n} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (3.133)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Psi'^n &= [\exp(a^0 P_0)](\Psi^n) = \begin{pmatrix} R'^n + L'^n & \widetilde{R}'^{3+n} + \widetilde{L}'^{3+n} \end{pmatrix}, \\ R'^n &= e^{2ia^0/3} R^n; \quad L'^n = e^{ia^0/3} L^n, \\ \widetilde{R}'^{3+n} &= e^{-4ia^0/3} \widetilde{R}^{3+n}; \quad \widetilde{L}'^{3+n} = e^{ia^0/3} \widetilde{L}^{3+n}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Toutes les ondes gauches tournent du même angle  $a^0/3$ , et seules les ondes gauches ont cette propriété. C'est pourquoi elle arrivent à être invariante sous le groupe de jauge  $SU(2)$  qui combine les différentes ondes gauches. On obtient :

$$D'^n_R = R'^n \widetilde{R}'^n = e^{2ia^0/3} R^n e^{-2ia^0/3} \widetilde{R}^n = R^n \widetilde{R}^n = D^n_R. \quad (3.135)$$

Et de même on a :

$$D'^n_L = D^n_L; \quad D'^{3+n}_L = D^{3+n}_L; \quad D'^{3+n}_R = D^{3+n}_R; \quad J'_q = J_q; \quad v'_q = v_q, \quad (3.136)$$

et donc les termes de masse des équations d'onde sont invariants sous le groupe de jauge  $U(1)$ . Comme dans le cas de l'onde leptonique, toutes les

ondes gauches se transforment de la même manière : c'est ce qui est à l'origine de la commutation entre les opérateurs  $\underline{P}_0$  et les trois  $\underline{P}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Pour l'étude des autres parties du groupe de jauge, on part de (3.110), en sorte que pour  $n = 2$  et avec (3.106) on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Psi^2 &= \boldsymbol{\partial}\Psi^2 + \mathbf{b}P_0(\Psi^2) + \mathbf{w}^j P_j(\Psi^2) + S(\Psi^2) \\ &= \boldsymbol{\partial}\Psi^2 + \mathbf{b}P_0(\Psi^2) + \mathbf{w}^j P_j(\Psi^2) \\ &\quad + (\mathbf{h}_2^1 - \mathbf{h}_2^2)\mathbf{i}\Psi^4 - \mathbf{h}_2^3\mathbf{i}\Psi^3 + (\mathbf{h}_1^1 + \mathbf{h}_1^2)\mathbf{i}\Psi^2 + \mathbf{h}_1^3\mathbf{i}\Psi^3. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Avec (3.1) à (3.23) l'équation précédente est équivalente au système :

$$\begin{aligned} iD\bar{\phi}^5 &= i\nabla\bar{\phi}^5 - \mathbf{b}(\frac{4}{3}\bar{R}^5 + \frac{1}{3}\bar{L}^5) + [(\mathbf{w}_2^1 - i\mathbf{w}_2^2)\hat{L}^2 + \mathbf{w}_2^3\bar{L}^5] \\ &\quad + [(\mathbf{h}_1^1 + i\mathbf{h}_1^2)\bar{\phi}^6 - \mathbf{h}_1^3\bar{\phi}^5] + [(\mathbf{h}_3^1 - i\mathbf{h}_3^2)\bar{\phi}^7 + \mathbf{h}_3^3\bar{\phi}^5], \\ iD\hat{\phi}^2 &= i\nabla\hat{\phi}^2 + \mathbf{b}(\frac{2}{3}\hat{R}^2 + \frac{1}{3}\hat{L}^5) + [(\mathbf{w}_2^1 + i\mathbf{w}_2^2)\bar{L}^5 - \mathbf{w}_2^3\hat{L}^2] \\ &\quad + [(\mathbf{h}_1^1 + i\mathbf{h}_1^2)\hat{\phi}^3 - \mathbf{h}_1^3\hat{\phi}^2] + [(\mathbf{h}_3^1 - i\mathbf{h}_3^2)\hat{\phi}^4 + \mathbf{h}_3^3\hat{\phi}^2], \end{aligned} \quad (3.138)$$

Il y a deux équations de plus quand on se sert de la représentation matricielle de  $Cl_{1,3}$ , qui sont équivalentes aux deux équations ci-dessus, car elles résultent de l'application à ces équations de l'automorphisme principal  $P : M \mapsto \bar{M}$ . Puis, en utilisant cet automorphisme pour les ondes droites on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} iD\eta^5 &= i\nabla\eta^5 + \frac{\mathbf{b}}{3}\eta^5 + [(\mathbf{w}_2^1 - i\mathbf{w}_2^2)\eta^2 + \mathbf{w}_2^3\eta^5] \\ &\quad + [(\mathbf{h}_1^1 + i\mathbf{h}_1^2)\eta^6 - \mathbf{h}_1^3\eta^5] + [(\mathbf{h}_3^1 - i\mathbf{h}_3^2)\eta^7 + \mathbf{h}_3^3\eta^5], \\ iD\eta^2 &= i\nabla\eta^2 + \frac{\mathbf{b}}{3}\eta^2 + [(\mathbf{w}_2^1 + i\mathbf{w}_2^2)\eta^5 - \mathbf{w}_2^3\eta^2] \\ &\quad + [(\mathbf{h}_1^1 + i\mathbf{h}_1^2)\eta^3 - \mathbf{h}_1^3\eta^2] + [(\mathbf{h}_3^1 - i\mathbf{h}_3^2)\eta^4 + \mathbf{h}_3^3\eta^2], \\ -i\hat{D}\xi^2 &= -i\hat{\nabla}\xi^2 + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{b}}\xi^2 + [(\hat{\mathbf{h}}_1^1 - i\hat{\mathbf{h}}_1^2)\xi^3 - \hat{\mathbf{h}}_1^3\xi^2] + [(\hat{\mathbf{h}}_3^1 + i\hat{\mathbf{h}}_3^2)\xi^4 + \hat{\mathbf{h}}_3^3\xi^2], \\ -i\hat{D}\xi^5 &= -i\hat{\nabla}\xi^5 - \frac{4}{3}\hat{\mathbf{b}}\xi^5 + [(\hat{\mathbf{h}}_1^1 - i\hat{\mathbf{h}}_1^2)\xi^6 - \hat{\mathbf{h}}_1^3\xi^5] + [(\hat{\mathbf{h}}_3^1 + i\hat{\mathbf{h}}_3^2)\xi^7 + \hat{\mathbf{h}}_3^3\xi^5]. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Ensuite on a deux autres systèmes avec la même structure, qui sont obtenus par permutation circulaire des indices 2, 3, 4 et 5, 6, 7 (correspondant aux couleurs  $r, g, b$  des quarks) partout où ces indices sont présents :

$$\begin{aligned} iD\eta^6 &= i\nabla\eta^6 + \frac{\mathbf{b}}{3}\eta^6 + [(\mathbf{w}_3^1 - i\mathbf{w}_3^2)\eta^3 + \mathbf{w}_3^3\eta^6] \\ &\quad + [(\mathbf{h}_2^1 + i\mathbf{h}_2^2)\eta^7 - \mathbf{h}_2^3\eta^6] + [(\mathbf{h}_1^1 - i\mathbf{h}_1^2)\eta^5 + \mathbf{h}_1^3\eta^6], \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned}
iD\eta^3 &= i\nabla\eta^3 + \frac{b}{3}\eta^3 + [(w_3^1 + iw_3^2)\eta^6 - w_3^3\eta^3] \\
&\quad + [(h_2^1 + ih_2^2)\eta^4 - h_2^3\eta^3] + [(h_1^1 - ih_1^2)\eta^2 + h_1^3\eta^3], \quad (3.141) \\
-i\widehat{D}\xi^3 &= -i\widehat{\nabla}\xi^3 + \frac{2}{3}\widehat{b}\xi^3 + [(\widehat{h}_2^1 - i\widehat{h}_2^2)\xi^4 - \widehat{h}_2^3\xi^3] + [(\widehat{h}_1^1 + i\widehat{h}_1^2)\xi^2 + \widehat{h}_1^3\xi^3], \\
-i\widehat{D}\xi^6 &= -i\widehat{\nabla}\xi^6 - \frac{4}{3}\widehat{b}\xi^6 + [(\widehat{h}_2^1 - i\widehat{h}_2^2)\xi^7 - \widehat{h}_2^3\xi^6] + [(\widehat{h}_1^1 + i\widehat{h}_1^2)\xi^5 + \widehat{h}_1^3\xi^6]. \\
iD\eta^7 &= i\nabla\eta^7 + \frac{b}{3}\eta^7 + [(w_1^1 - iw_1^2)\eta^4 + w_1^3\eta^7] \\
&\quad + [(h_3^1 + ih_3^2)\eta^5 - h_3^3\eta^7] + [(h_2^1 - ih_2^2)\eta^6 + h_2^3\eta^7], \\
iD\eta^4 &= i\nabla\eta^4 + \frac{b}{3}\eta^4 + [(w_1^1 + iw_1^2)\eta^7 - w_1^3\eta^4] \\
&\quad + [(h_3^1 + ih_3^2)\eta^2 - h_3^3\eta^4] + [(h_2^1 - ih_2^2)\eta^3 + h_2^3\eta^4], \\
-i\widehat{D}\xi^4 &= -i\widehat{\nabla}\xi^4 + \frac{2}{3}\widehat{b}\xi^4 + [(\widehat{h}_3^1 - i\widehat{h}_3^2)\xi^2 - \widehat{h}_3^3\xi^4] + [(\widehat{h}_2^1 + i\widehat{h}_2^2)\xi^3 + \widehat{h}_2^3\xi^4], \\
-i\widehat{D}\xi^7 &= -i\widehat{\nabla}\xi^7 - \frac{4}{3}\widehat{b}\xi^7 + [(\widehat{h}_3^1 - i\widehat{h}_3^2)\xi^5 - \widehat{h}_3^3\xi^7] + [(\widehat{h}_2^1 + i\widehat{h}_2^2)\xi^6 + \widehat{h}_2^3\xi^7].
\end{aligned}$$

L'invariance sous le groupe  $SU(2)$  est la même que ce qu'on a vu au chapitre précédent pour l'onde leptonique. Cette invariance résulte de :

$$\begin{aligned}
D_L^{n,3+n} - id_L^{n,3+n} &= 2L^n L^{3+n}; \quad D_L^n = L^n \widetilde{L}^n; \quad D_L^{3+n} = \widetilde{L}^{3+n} L^{3+n}, \\
w_n^1 &= \frac{g_2}{2} D_L^{n,3+n}; \quad w_n^2 = \frac{g_2}{2} d_L^{n,3+n}; \quad w_n^3 = \frac{g_2}{2} (D_L^{3+n} - D_L^n), \quad (3.142)
\end{aligned}$$

ce qui suffit pour obtenir l'invariance de jauge, comme on l'a vu en 2.3.2. Et cela donne la structure  $U(1) \times SU(2)$  du groupe de jauge électro-faible. La seule différence par rapport au modèle standard est qu'on n'a pas besoin de postuler ce résultat : **On déduit la structure du groupe de jauge des opérateurs eux-mêmes.**

Pour la partie  $SU(2)$  du groupe de jauge électro-faible, et comme l'invariance a exactement la même forme qu'en 2.3.2, on obtient, en utilisant les mêmes identités qu'en (2.144) et (2.146) (un calcul détaillé est fait en D.3) :

$$\begin{aligned}
(W_n^1 + iW_n^2)\bar{L}^{3+n} - W_n^3\widehat{L}^n &= -3\widetilde{L}^{3+n}L^{3+n}\widehat{L}^n = -3D_L^{3+n}\widehat{L}^n = -3W_n^3\widehat{L}^n, \\
(W_n^1 - iW_n^2)\widehat{L}^n + W_n^3\bar{L}^{3+n} &= -3L^n\widetilde{L}^n\bar{L}^{3+n} = -3D_L^n\bar{L}^{3+n} = 3W_n^3\bar{L}^{3+n}. \quad (3.143)
\end{aligned}$$

Dans le cas des quarks on a de plus la même formule de transformation pour  $n = 2, 3, 4$ ; ceci donne la commutation entre les  $\underline{P}_n$  et les opérateurs  $\mathbf{A}^k$  du groupe de la chromodynamique qui agit seulement sur l'indice  $n$  (c'est-à-dire la couleur), donc induit la structure de groupe  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  du groupe de jauge du modèle standard. L'invariance de jauge sous le groupe  $SU(3)$  donne une simplification des équations d'onde avec terme de masse

(voir D.3). Les équations améliorées sont de la forme :

$$\begin{aligned} 0 &= D\hat{L}^n + im_1 v_q \hat{L}^n; \quad 0 = \hat{D}R^n + im_2 \hat{v}_q R^n, \\ 0 &= \tilde{D}\bar{L}^{3+n} + im_3 v_q \bar{L}^{3+n}; \quad 0 = \bar{D}\tilde{R}^{3+n} + im_4 \hat{v}_q \tilde{R}^{3+n}, \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned} D\hat{L}^n &= \sigma^\mu \left[ \partial_\mu + i \left( -\frac{b_\mu}{3} + 3w_{n\mu}^3 - 3h_{\underline{Ln+1}\mu}^{d3} + 3h_{\underline{Ln-1}\mu}^{d3} \right) \right] \hat{L}^n, \\ \hat{D}R^n &= \hat{\sigma}^\mu \left[ \partial_\mu + i \left( \frac{2b_\mu}{3} + 3h_{\underline{Rn+1}\mu}^{d3} - 3h_{\underline{Rn-1}\mu}^{d3} \right) \right] R^n, \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}\bar{L}^{3+n} &= \sigma^\mu \left[ \partial_\mu + i \left( -\frac{b_\mu}{3} - 3w_{n\mu}^3 - 3h_{\underline{Ln+1}\mu}^{u3} + 3h_{\underline{Ln-1}\mu}^{u3} \right) \right] \bar{L}^{3+n}, \\ \bar{D}\tilde{R}^{3+n} &= \hat{\sigma}^\mu \left[ \partial_\mu + i \left( -\frac{4b_\mu}{3} + 3h_{\underline{Rn+1}\mu}^{u3} - 3h_{\underline{Rn-1}\mu}^{u3} \right) \right] \tilde{R}^{3+n}. \end{aligned}$$

Ici les potentiels  $w$  dépendent de la couleur, et de plus les potentiels  $h$  ont une double dépendance : leurs deux indices de valeur 2, 3, 4 viennent des générateurs du groupe  $SU(3)$ , tandis que les indices  $L, R$  et  $d, u$  sont liés aux spineurs sur lesquels ils agissent. Donc les équations d'onde qui sont utilisées pour obtenir la densité lagrangienne sont les équations gouvernant les ondes droites et gauches.

### 3.5 Equation d'onde – densité lagrangienne

On multiplie l'équation (3.144) de  $\eta^n$  par  $-i\eta^{n\dagger}$ , l'équation d'onde de  $\xi^n$  par  $-i\xi^{n\dagger}$ , l'équation d'onde de  $\eta^{3+n}$  par  $-i\eta^{3+n\dagger}$  et enfin l'équation d'onde de  $\xi^{3+n}$  par  $-i\xi^{3+n\dagger}$ , toujours du côté gauche. Pour la partie leptonique on a vu au chapitre 2 comment la densité lagrangienne de l'onde de l'électron se généralise pour plusieurs densités lagrangiennes venant des différentes équations d'onde. Parmi ces densités,  $\mathcal{L}_q^+$  s'obtient comme somme des différentes parties réelles, tandis que  $\mathcal{L}_q^-$  s'obtient comme différence entre ondes droites et ondes gauches. Comme la densité  $\rho_q$  se calcule de la même manière que  $\rho_l$  on obtiendra des résultats semblables. On pose :

$$\mathcal{L}_q^+ = \sum_{n=2}^4 \left[ \frac{m}{km_1} \eta^{n\dagger} \sigma^\mu (-i\partial_\mu + d_{n\mu}^1) + \frac{m}{km_2} \xi^{n\dagger} \hat{\sigma}^\mu (-i\partial_\mu + d_{n\mu}^2) \right] + \frac{m}{km_3} \eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu (-i\partial_\mu + d_{n\mu}^3) + \frac{m}{km_4} \xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu (-i\partial_\mu + d_{n\mu}^4), \quad (3.146)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} d_{n\mu}^1 &= -\frac{b_\mu}{3} + 3w_{n\mu}^3 - 3h_{\underline{Ln+1}\mu}^{d3} + 3h_{\underline{Ln-1}\mu}^{d3} + m_1 v_{q\mu}, \\ d_{n\mu}^2 &= \frac{2b_\mu}{3} + 3h_{\underline{Rn+1}\mu}^{d3} - 3h_{\underline{Rn-1}\mu}^{d3} + m_2 v_{q\mu}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} d_{n\mu}^3 &= -\frac{b_\mu}{3} - 3w_{n\mu}^3 - 3h_{\underline{Ln+1}\mu}^{u3} + 3h_{\underline{Ln-1}\mu}^{u3} + m_3 v_{q\mu}, \\ d_{n\mu}^4 &= -\frac{4b_\mu}{3} + 3h_{\underline{Rn+1}\mu}^{u3} - 3h_{\underline{Rn-1}\mu}^{u3} + m_4 v_{q\mu}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Les densités lagrangiennes  $\mathcal{L}_q^+$  et  $\mathcal{L}_q^-$  vérifient :

$$0 = \mathcal{L}_q^+ = \sum_{n=2}^4 \left[ \begin{aligned} & \frac{m}{km_1} (-i\eta^{n\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^n + d_{n\mu}^1 D_L^{n\mu}) \\ & + \frac{m}{km_2} (-i\xi^{n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^n + d_{n\mu}^2 D_R^{n\mu}) \\ & + \frac{m}{km_3} (-i\eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^{3+n} + d_{n\mu}^3 D_L^{3+n\mu}) \\ & + \frac{m}{km_4} (-i\xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^{3+n} + d_{n\mu}^4 D_R^{3+n\mu}) \end{aligned} \right], \quad (3.149)$$

$$0 = \mathcal{L}_q^- = \sum_{n=2}^4 \left[ \begin{aligned} & -\frac{m}{km_1} (-i\eta^{n\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^n + d_{n\mu}^1 D_L^{n\mu}) \\ & + \frac{m}{km_2} (-i\xi^{n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^n + d_{n\mu}^2 D_R^{n\mu}) \\ & -\frac{m}{km_3} (-i\eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^{3+n} + d_{n\mu}^3 D_L^{3+n\mu}) \\ & + \frac{m}{km_4} (-i\xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^{3+n} + d_{n\mu}^4 D_R^{3+n\mu}) \end{aligned} \right]. \quad (3.150)$$

Le fait que ces densités lagrangiennes sont nulles en chaque point de l'espace-temps est dû à leur construction à partir de (3.144) et (3.145). De plus ces densités tensorielles sont réelles car leur partie imaginaire est nulle. On voit cela par exemple avec (3.144) qui donne pour  $n = 2$ , puis en prenant l'adjoint :

$$0 = \eta^{2\dagger} \sigma^\mu (-i\partial_\mu - \frac{b_\mu}{3} + 3w_{2\mu}^3 - 3h_{L3\mu}^{d3} + 3h_{L1\mu}^{d3} + m_1 v_\mu) \eta^2, \quad (3.151)$$

$$0 = i\partial_\mu \eta^{2\dagger} \sigma^\mu \eta^2 + \eta^{2\dagger} \sigma^\mu (-\frac{b_\mu}{3} + 3w_{2\mu}^3 - 3h_{L3\mu}^{d3} + 3h_{L1\mu}^{d3} + m_1 v_\mu) \eta^2.$$

Par soustraction on obtient :

$$0 = -i(\eta^{2\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^2 + \partial_\mu \eta^{2\dagger} \sigma^\mu \eta^2) = -i\partial_\mu (\eta^{2\dagger} \sigma^\mu \eta^2); \quad 0 = \partial_\mu D_L^{2\mu}. \quad (3.152)$$

La densité lagrangienne  $\mathcal{L}_q^+$  est une somme de douze termes, avec la même structure que les quatre termes que l'on avait au chapitre 2 pour la partie leptonique de l'onde. On peut donc refaire ce qu'on a détaillé en 2.3.4. Puisqu'on y a utilisé seulement les propriétés algébriques de la multiplication dans  $Cl_3$ , on peut aisément refaire dans le cas de  $\eta^n$  ce qu'on a établi pour  $\eta^1$ . De plus les  $\xi^n$  agissent comme  $\xi^1$ , les  $\eta^{3+n}$  comme  $\eta^8$ , les  $\xi^{3+n}$  comme  $\xi^8$ . Donc les équations d'onde nous permettent d'obtenir  $0 = \mathcal{L}_q^+$ , et en outre les équations de Lagrange, sans aucune condition supplémentaire sur les propriétés des solutions, permettent d'obtenir pour chaque spineur gauche ou droit les équations numériques réelles équivalentes à l'équation d'onde à valeur dans  $Cl_3$ . Quand on varie la densité lagrangienne par rapport aux variables contenues dans  $\eta^2$ , les potentiels de jauge n'introduisent aucun terme supplémentaire. Cela vient du mécanisme décrit en 2.3.4 pour les densités tensorielles du potentiel  $b$  et aussi bien pour les autres potentiels, parce que  $w_3^3$  agit sur  $\eta^2$  seulement par le terme  $D_L^5$ . C'est la même chose pour les potentiels de la chromodynamique. Le potentiel  $h_{L3}^{d3}$  agit sur  $\eta^2$  seulement à travers le terme  $D_L^3$ , et  $h_{L1}^{d3}$  agit sur  $\eta^2$  seulement à travers le terme  $D_L^4$ .

Au sujet des antiparticules on peut aussi utiliser sans changement ce qu'on a dit au sujet de l'électron dans le chapitre 1 et au sujet de l'onde

leptonique dans le chapitre 2. Le seul changement dans ce passage à "l'anti-monde" est le remplacement des  $\partial_\mu$  par des  $-\partial_\mu$ , et l'échange des  $\eta$  et des  $\xi$ . Le double lien logique entre équation d'onde et densité lagrangienne est totalement conservé.

### 3.6 Impulsion-énergie

Ici aussi on obtient ce qu'on a appris de l'équation de Dirac et de son extension à l'onde leptonique, à savoir l'existence non pas d'un tenseur d'impulsion-énergie lié à l'onde, mais de deux densités tensorielles liées aux densités lagrangiennes et associées à l'invariance de ces densités lagrangiennes sous les translations d'espace-temps. La densité lagrangienne  $\mathcal{L}_q^+$  est la somme de douze termes similaires. Donc un tenseur conservatif est associé à cette densité lagrangienne invariante sous les translations. Ce tenseur est aussi une somme de douze termes :

$$T = \sum_{n=2}^4 \left( \frac{m}{km_1} T_L^n + \frac{m}{km_2} T_R^n + \frac{m}{km_3} T_L^{3+n} + \frac{m}{km_4} T_R^{3+n} \right), \quad (3.153)$$

$$T_{L\lambda}^{n\mu} = \Re(-i\eta^{n\dagger} \sigma^\mu \partial_\lambda \eta^n) + d_{n\lambda}^1 \eta^{n\dagger} \sigma^\mu \eta^n, \quad (3.154)$$

$$T_{R\lambda}^{n\mu} = \Re(-i\xi^{n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\lambda \xi^n) + d_{n\lambda}^2 \xi^{n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \xi^n, \quad (3.155)$$

$$T_{L\lambda}^{3+n\mu} = \Re(-i\eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu \partial_\lambda \eta^{3+n}) + d_{n\lambda}^3 \eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu \eta^{3+n}, \quad (3.156)$$

$$T_{R\lambda}^{3+n\mu} = \Re(-i\xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\lambda \xi^{3+n}) + d_{n\lambda}^4 \xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \xi^{3+n}. \quad (3.157)$$

En particulier, pour la composante  $T_0^0$  on a :

$$T_0^0 = \sum_{n=2}^4 \left( \frac{m}{km_1} T_{L0}^n + \frac{m}{km_2} T_{R0}^n + \frac{m}{km_3} T_{L0}^{3+n} + \frac{m}{km_4} T_{R0}^{3+n} \right), \quad (3.158)$$

$$T_{L0}^{n0} = \Re(-i\eta^{n\dagger} \partial_0 \eta^n) + d_{n0}^1 \eta^{n\dagger} \eta^n, \quad (3.159)$$

$$T_{R0}^{n0} = \Re(-i\xi^{n\dagger} \partial_0 \xi^n) + d_{n0}^2 \xi^{n\dagger} \xi^n, \quad (3.160)$$

$$T_{L0}^{3+n0} = \Re(-i\eta^{3+n\dagger} \partial_0 \eta^{3+n}) + d_{n0}^3 \eta^{3+n\dagger} \eta^{3+n}, \quad (3.161)$$

$$T_{R0}^{3+n0} = \Re(-i\xi^{3+n\dagger} \partial_0 \xi^{3+n}) + d_{n0}^4 \xi^{3+n\dagger} \xi^{3+n}. \quad (3.162)$$

Pour une solution de l'équation d'onde d'énergie  $E$  commune à l'onde entière, on a :

$$\begin{aligned} -T_0^0 &= \frac{E}{\hbar c} \sum_{n=2}^4 \left[ \frac{m}{km_1} \eta^{n\dagger} \eta^n + \frac{m}{km_2} \xi^{n\dagger} \xi^n + \frac{m}{km_3} \eta^{3+n\dagger} \eta^{3+n} + \frac{m}{km_4} \xi^{3+n\dagger} \xi^{3+n} \right] \\ &= \frac{E}{\hbar c} \left( \frac{m}{km_1} S_L^d + \frac{m}{km_2} S_R^d + \frac{m}{km_3} S_L^u + \frac{m}{km_4} S_R^u \right)^0 = \frac{E}{\hbar c} J_q^0, \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$S_L^d = \sum_{n=2}^4 \eta^{n\dagger} \eta^n; \quad S_R^d = \sum_{n=2}^4 \xi^{n\dagger} \xi^n; \quad S_L^u = \sum_{n=2}^4 \eta^{3+n\dagger} \eta^{3+n}; \quad S_R^u = \sum_{n=2}^4 \xi^{3+n\dagger} \xi^{3+n},$$

appelant  $J_q$  le courant total. La raison de l'existence d'un courant de probabilité est là encore l'équivalence entre la masse d'inertie et la masse gravitationnelle, qui implique :

$$E = \iiint dv T_0^0; \quad \iiint \frac{J_q^0}{\hbar c} dv = 1. \quad (3.164)$$

Comme pour l'électron seul ou pour l'onde leptonique nous avons deux densités utiles pour l'impulsion-énergie de l'onde des quarks, au lieu d'une seule. Le second tenseur est le tenseur  $V$  de O. Costa de Beauregard [54] qui est conservé grâce à l'invariance sous les translations de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}_q^-$ . Ce  $V$  vérifie :

$$V = \sum_{n=2}^4 \left( \frac{m}{km_1} T_L^n - \frac{m}{km_2} T_R^n + \frac{m}{km_3} T_L^{3+n} - \frac{m}{km_4} T_R^{3+n} \right). \quad (3.165)$$

La dynamique des quarks résulte des variations du tenseur d'impulsion-énergie. Le calcul est semblable au cas leptonique. On a :

$$\partial_\mu T^\mu = \sum_{n=2}^4 \left( \frac{m}{km_1} \partial_\mu T_L^{n\mu} + \frac{m}{km_2} \partial_\mu T_R^{n\mu} + \frac{m}{km_3} \partial_\mu T_L^{3+n\mu} + \frac{m}{km_4} \partial_\mu T_R^{3+n\mu} \right). \quad (3.166)$$

Pour le premier de ces quatre termes on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_L^{n\mu} &= \partial_\mu T_{L\lambda}^{n\mu} \sigma^\lambda = \partial_\mu [-i\eta^{n\dagger} \sigma^\mu \partial_\lambda \eta^n + d_{n\lambda}^1 D_L^{n\mu}] \sigma^\lambda \\ &= [-i(\nabla \eta^n)^\dagger \partial_\lambda \eta^n - i\eta^{n\dagger} \partial_\lambda (\nabla \eta^n) + (\partial_\mu d_{n\lambda}^1) D_L^{n\mu} + d_{n\lambda}^1 \partial_\mu D_L^{n\mu}] \sigma^\lambda. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Et on a avec (3.120) et avec (B.94) et (B.95) :

$$\nabla \eta^n = -i d_n^1 \eta^n, \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu D_L^{n\mu} &= (\partial_\mu \eta^{n\dagger}) \sigma^\mu \eta^n + \eta^{n\dagger} \sigma^\mu (\partial_\mu \eta^n) \\ &= i\eta^{n\dagger} d_n^1 \eta^n - i\eta^{n\dagger} d_n^1 \eta^n = 0. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Cela donne :

$$-i(\nabla \eta^n)^\dagger \partial_\lambda \eta^n - i\eta^{n\dagger} \partial_\lambda (\nabla \eta^n) \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} &= \eta^{n\dagger} d_n^1 \partial_\lambda \eta^n - \eta^{n\dagger} (\partial_\lambda d_n^1) \eta^n - \eta^{n\dagger} d_n^1 \partial_\lambda \eta^n \\ &= -\partial_\lambda d_{n\mu}^1 D_L^{n\mu}. \end{aligned} \quad (3.171)$$

Et on obtient alors :

$$\partial_\mu T_L^{n\mu} = (\partial_\mu d_{n\lambda}^1 - \partial_\lambda d_{n\mu}^1) D_L^{n\mu} \sigma^\lambda. \quad (3.172)$$

De la même manière, on obtient :

$$\partial_\mu T_R^{n\mu} = (\partial_\mu d_{n\lambda}^2 - \partial_\lambda d_{n\mu}^2) D_R^{n\mu} \sigma^\lambda, \quad (3.173)$$

$$\partial_\mu T_L^{3+n\mu} = (\partial_\mu d_{n\lambda}^3 - \partial_\lambda d_{n\mu}^3) D_L^{3+n\mu} \sigma^\lambda, \quad (3.174)$$

$$\partial_\mu T_R^{3+n\mu} = (\partial_\mu d_{n\lambda}^4 - \partial_\lambda d_{n\mu}^4) D_R^{3+n\mu} \sigma^\lambda. \quad (3.175)$$

Avec :

$$g^k = \sum_{n=2}^4 d_n^k; \quad J_q = \sum_{n=2}^7 (D_R^n + D_L^n), \quad (3.176)$$

on obtient :

$$\partial_\mu T^\mu = \left[ \frac{m}{km_1} (\partial_\mu g_\lambda^1 - \partial_\lambda g_\mu^1) S_L^{d\mu} + \frac{m}{km_2} (\partial_\mu g_\lambda^2 - \partial_\lambda g_\mu^2) S_R^{d\mu} \right. \\ \left. + \frac{m}{km_3} (\partial_\mu g_\lambda^3 - \partial_\lambda g_\mu^3) S_L^{u\mu} + \frac{m}{km_4} (\partial_\mu g_\lambda^4 - \partial_\lambda g_\mu^4) S_R^{u\mu} \right] \sigma^\lambda. \quad (3.177)$$

On peut donc séparer les forces agissant sur l'onde globale en une partie agissant sur le quark  $d$  et une partie agissant sur le quark  $u$ . Pour le quark  $d$ , on a :

$$\partial_\mu T_d^\mu = \left[ \frac{m}{km_1} (\partial_\mu g_\lambda^1 - \partial_\lambda g_\mu^1) S_L^{d\mu} + \frac{m}{km_2} (\partial_\mu g_\lambda^2 - \partial_\lambda g_\mu^2) S_R^{d\mu} \right] \sigma^\lambda. \quad (3.178)$$

Et de même pour le quark  $u$  :

$$\partial_\mu T_u^\mu = \left[ \frac{m}{km_3} (\partial_\mu g_\lambda^3 - \partial_\lambda g_\mu^3) S_L^{u\mu} + \frac{m}{km_4} (\partial_\mu g_\lambda^4 - \partial_\lambda g_\mu^4) S_R^{u\mu} \right] \sigma^\lambda. \quad (3.179)$$

Et l'on obtient :

$$g^1 = d_2^1 + d_3^1 + d_4^1 = \begin{bmatrix} -\frac{b}{3} + 3w_2^3 - 3h_{L3}^{d3} + 3h_{L1}^{d3} \\ -\frac{b}{3} + 3w_3^3 - 3h_{L1}^{d3} + 3h_{L2}^{d3} \\ -\frac{b}{3} + 3w_4^3 - 3h_{L2}^{d3} + 3h_{L3}^{d3} \end{bmatrix} \\ = \left[ -\frac{g_1}{2} B + \frac{3g_2}{2} (D_L^5 - D_L^2 + D_L^6 - D_L^3 + D_L^7 - D_L^4) \right] \\ = \left[ -\frac{g_1}{2} B + \frac{3g_2}{2} (S_L^u - S_L^d) \right]. \quad (3.180)$$

Entre la première et la seconde ligne les potentiels de la chromodynamique disparaissent complètement. Ceci implique qu'il n'existe pas de force forte pour une onde de quarks contenant à égalité les trois états de couleur. Et ceci est bien connu en physique nucléaire où il n'existe aucun état stable formé par trois états de couleur  $r$ ,  $g$ ,  $b$ , d'un même quark  $d$  ou  $u$ .

Ce résultat est très important parce qu'il explique pourquoi on ne peut pas placer dans une même onde les quarks composant un proton plus un neutron. Surtout cela signifie que le proton ou le neutron sont chacun une onde unique contenant les trois états des quarks colorés, et jamais un quark seul.

### 3.7 Quantification du moment cinétique

On reprend la démarche du chapitre 2 qui traitait de la partie leptonique de l'onde. On a d'abord à la place de (2.249) :

$$V_\lambda^\mu = \sum_{n=2}^4 \Re \left[ \begin{aligned} & -i \left( \frac{m}{km_1} \eta^{n\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^n \eta^n - \frac{m}{km_2} \xi^{n\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^n \xi^n \right) \\ & -i \left( \frac{m}{km_3} \eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu d_{L\lambda}^{3+n} \eta^{3+n} - \frac{m}{km_4} \xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu d_{R\lambda}^{3+n} \xi^{3+n} \right) \end{aligned} \right]. \quad (3.181)$$

On a douze champs de spineurs, six gauches et six droits (dont un certain nombre peuvent être nuls), au lieu des quatre de l'onde leptonique, mais avec des propriétés très semblables. Maintenant on pose :

$$\varphi_n = \eta^n; \varphi_{6+n} = \xi^n, \quad n = 2, 3, \dots, 7. \quad (3.182)$$

Puis, comme en (2.264) et (2.266) :

$$\begin{aligned} \delta\varphi_a &= \phi_i^a \delta\omega^i \\ \eta^n + \delta\eta^n &= \widehat{M}\eta^n; \quad \xi^n + \delta\xi^n = M\xi^n. \end{aligned} \quad (3.183)$$

On obtient alors comme en (2.269) à (2.272) :

$$\begin{aligned} \phi_0^n &= \frac{\eta^n}{2}; \quad \phi_1^n = -\sigma_1 \frac{\eta^n}{2}; \quad \phi_2^n = -\sigma_2 \frac{\eta^n}{2}; \quad \phi_3^n = -\sigma_3 \frac{\eta^n}{2}, \\ \phi_4^n &= i\sigma_1 \frac{\eta^n}{2}; \quad \phi_5^n = i\sigma_2 \frac{\eta^n}{2}; \quad \phi_6^n = i\sigma_3 \frac{\eta^n}{2}; \quad \phi_7^n = -i \frac{\eta^n}{2}, \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \phi_0^{6+n} &= \frac{\xi^n}{2}; \quad \phi_1^{6+n} = \sigma_1 \frac{\xi^n}{2}; \quad \phi_2^{6+n} = \sigma_2 \frac{\xi^n}{2}; \quad \phi_3^{6+n} = \sigma_3 \frac{\xi^n}{2}, \\ \phi_4^{6+n} &= i\sigma_1 \frac{\xi^n}{2}; \quad \phi_5^{6+n} = i\sigma_2 \frac{\xi^n}{2}; \quad \phi_6^{6+n} = i\sigma_3 \frac{\xi^n}{2}; \quad \phi_7^{6+n} = i \frac{\xi^n}{2}. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Donc on a toujours (2.273) à (2.277), sans autre changement que le remplacement des densités lagrangiennes venant de l'onde leptonique par celles venant de l'onde des quarks. On a donc maintenant :

$$\begin{aligned} j_7^\mu &= -\frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \phi_7^a = \sum_{n=2}^4 \left[ i \frac{m}{km_1} \eta^{n\dagger} \sigma^\mu \left( \frac{-i}{2} \right) \eta^n - i \frac{m}{km_2} \xi^{n\dagger} \widehat{\sigma}^\mu \left( \frac{i}{2} \right) \xi^n \right. \\ &\quad \left. + i \frac{m}{km_3} \eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu \left( \frac{-i}{2} \right) \eta^{2+n} - i \frac{m}{km_4} \xi^{3+n\dagger} \widehat{\sigma}^\mu \left( \frac{i}{2} \right) \xi^{3+n} \right]. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Avec (3.163) on a donc :

$$j_7 = \frac{1}{2} \left[ \frac{m}{km_1} S_L^d + \frac{m}{km_2} S_R^d + \frac{m}{km_3} S_L^u + \frac{m}{km_4} S_R^u \right] = \frac{1}{2} \mathbf{J}_q. \quad (3.187)$$

Et donc (3.164) donne :

$$\iiint dv \mathbf{J}_q^0 = \hbar c; \quad \iiint dv \frac{j_7^0}{c} = \frac{1}{2c} \iiint dv \mathbf{J}_q^0 = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.188)$$

Ceci explique la quantification du moment cinétique du proton et du neutron. C'est conforme à tout ce que l'on sait de ces deux sortes de particules. La quantification du moment cinétique (ou spin) de l'électron, du proton, du neutron, est une conséquence directe des propriétés des équations d'onde de ces particules, et de l'invariance sous le groupe  $Cl_3^*$ .

La quantification du moment cinétique, non pas pour chaque quark séparément, mais pour le proton et pour le neutron avec leurs trois quarks colorés, a une conséquence expérimentale bien connue : il est impossible de déplacer un quark seul à l'extérieur d'un proton ou d'un neutron. En dépit du fait qu'ils sont composés de plusieurs ondes de quarks, seuls les protons et les neutrons peuvent présenter l'individualité d'une "particule". La raison en est qu'un moment cinétique propre est toujours un multiple entier de  $\hbar/2$ . Les seuls objets que l'on peut détecter individuellement dans n'importe quelle expérience de physique sont ceux qui ont un moment cinétique multiple de  $\hbar/2$ . Ce moment cinétique peut être multiple de  $\hbar$  dans le cas des bosons. On peut obtenir  $3\hbar/2$  pour certains hadrons ou pour des états à cinq quarks. Mais le moment cinétique ne peut pas être plus petit que  $\hbar/2$  et ce moment cinétique minimal nécessite trois quarks de couleur, pas seulement un.

On rappelle que la quantification du moment cinétique est à l'origine des inégalités de Heisenberg (voir [61]). Ces inégalités s'appliquent donc à n'importe quel proton ou neutron ou électron. Le fait que la mécanique quantique travaille de manière similaire pour l'électron, le proton ou le neutron donne le même statut de "particule élémentaire" à ces objets, et semble remettre en question le modèle des quarks, pourtant essentiel au modèle standard. Mais c'est l'onde d'un quark qui ressemble à l'onde d'un électron, pas l'onde du proton ou du neutron. Encore une fois, tout ceci conforte le modèle standard.

### 3.7.1 Cas du proton seul ou du neutron seul

Le proton se compose de deux quarks  $u$  et d'un quark  $d$ . Comme la couleur des différents nucléons ne s'ajoute pas, le modèle standard dit que le proton (ou le neutron) est neutre de couleur. On peut alors supposer, par exemple, que le proton est à un moment donné composé d'un quark  $u_r$ , d'un  $u_g$  et d'un quark  $d_b$ . Les précédents calculs indiquent que le proton est alors composé de six ondes spinorielles non nulles :  $L^4, L^5, L^6$  et  $R^4, R^5, R^6$ , tous les autres spineurs étant exactement nuls. Le courant de probabilité  $J_q$  est donc la somme de seulement six courants au lieu des douze possibles :

$$J_q = D_L^4 + D_L^5 + D_L^6 + D_R^4 + D_R^5 + D_R^6. \quad (3.189)$$

La densité lagrangienne du proton vient donc de (3.149) :

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{L}^+ = & \frac{m}{km_1} (-i\eta^{4\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^4 + d_{4\mu}^1 D_L^{4\mu}) + \frac{m}{km_2} (-i\xi^{4\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^4 + d_{4\mu}^2 D_R^{4\mu}) \\ & + \sum_{n=2}^3 \left[ \frac{m}{km_3} (-i\eta^{3+n\dagger} \sigma^\mu \partial_\mu \eta^{3+n} + d_{n\mu}^3 D_L^{3+n\mu}) \right. \\ & \left. + \frac{m}{km_4} (-i\xi^{3+n\dagger} \hat{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^{3+n} + d_{n\mu}^4 D_R^{3+n\mu}) \right], \end{aligned} \quad (3.190)$$

où les  $d_n^k$  viennent de (3.148), avec le remplacement de  $n$  par 4 pour le calcul de  $d_n^1$  et  $d_n^2$ , et où on ne considère que  $n = 2$  et  $n = 3$  pour le calcul

de  $d_n^3$  et  $d_n^4$ . Les mêmes restrictions sur les indices doivent être prises dans le calcul des densités d'impulsion-énergie et dans le calcul des densités de moment cinétique, et aussi dans le calcul des forces d'inertie. La seule partie du calcul qui change, c'est dans (3.180) où les crochets incluent seulement une ligne au lieu de trois. Et le quark  $u$  utilise deux des trois lignes des crochets. Or c'est la somme des trois lignes qui disparaît dans ce calcul, ce qui vient de la dimension 8 et non pas 9 du groupe de la chromodynamique. Donc les forces fortes ne disparaissent pas avec un proton isolé.

Le cas est semblable pour un neutron fait d'un quark  $u$  et de deux quarks  $d$ . Il y a aussi six ondes de spineurs non nulles, par exemple  $L^2, L^3, L^7$  et  $R^2, R^3, R^7$ . Les protons et les neutrons ont été découverts de nombreuses années avant que l'on en arrive à supposer qu'ils sont faits de trois quarks liés ensemble par les forces de la chromodynamique. Le principal problème de cette supposition était ce qu'on appelle le confinement des quarks, c'est-à-dire l'impossibilité en pratique de faire sortir un quark du sac que semblent constituer les mésons ou les baryons. Le calcul précédent explique ce confinement : le quantum de moment cinétique existe pour un proton composé de trois quarks ou pour un neutron, pas pour un quark isolé. Ce quantum de moment cinétique existe aussi pour un électron isolé, un monopôle magnétique isolé, ou pour une paire électron – neutrino de l'électron. Si un quark isolé était capable de posséder un quantum de moment cinétique il serait possible de pousser ce quark hors du sac, mais il n'y a pas de moment cinétique plus petit que  $\hbar/2$ . Les accélérateurs de particules utilisent des électrons ou des protons, ou leurs antiparticules, qui ont chacun un quantum de moment cinétique. Les seuls objets qu'une collision peut produire ont aussi un moment cinétique  $n\hbar/2$ , où  $n$  est un entier qui peut être nul si l'objet (un méson) contient deux moments cinétiques opposés  $\hbar/2$ .

De plus ce quantum de moment cinétique explique aussi un autre "confinement" : on n'a jamais observé un neutrino gauche seul, tout comme on n'a jamais détecté de quark seul. On ne détecte un neutrino gauche que lorsqu'il interagit avec une particule chargée, quand et où il interagit. Il est aussi détectable lorsque l'onde gauche est rejointe par une onde droite, ou à la fois une onde droite de neutrino et l'onde d'une particule chargée électriquement. Mais le neutrino complet, qu'on peut aussi appeler monopôle magnétique, possède un quantum de moment cinétique et peut donc être considéré comme une particule observable, déjà observée [37, 52, 53, 87].

### 3.8 Préférence pour les ondes gauches

Comme la transformation  $P : M \mapsto \widehat{M}$  est un automorphisme de  $Cl_3$ , l'anneau  $\text{End}(Cl_3) = Cl_{3,3}$  contient le sous-anneau  $\text{Diag}[\text{End}(Cl_3)]$  de tous les :

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_e & 0 \\ 0 & \psi_e \end{pmatrix}; \quad \psi_e = \begin{pmatrix} \phi_e & 0 \\ 0 & \widehat{\phi}_e \end{pmatrix}. \quad (3.191)$$

Ce sous-anneau est isomorphe à  $Cl_3$  (parce que  $P$  est un automorphisme), aussi  $Cl_3$  est un sous-anneau de  $\text{End}(Cl_3)$ , et les opérations de l'anneau  $Cl_3$  sont des cas particuliers des opérations dans  $\text{End}(Cl_3)$ . Le résultat est une identification entre l'onde de première quantification  $\phi_e$  et l'onde de seconde quantification (à valeur opérateur)  $\Psi_e$ . Or  $Cl_3$  est aussi l'ensemble des  $\mathcal{P}_1 = \alpha + \mathbf{A} + \zeta \mathbf{i}$  de (B.95), qui est la sous-algèbre paire  $Cl_{1,3}^+$  de  $Cl_{1,3}$ . On détaille cet isomorphisme en B.1.1. Avec  $\mathbf{A} = \vec{\mathbf{a}} + i\vec{\mathbf{b}}$  on a  $\mathcal{P}_1 = \alpha + \vec{\mathbf{a}} + i\vec{\mathbf{b}} + \zeta \mathbf{i}$  dont la partie auto-adjointe est  $\alpha + \vec{\mathbf{a}}$ . La mécanique quantique inclut l'espace-temps dans ce cadre en posant  $x = x^\mu \sigma_\mu$  (voir (1.33)), ce qui donne :

$$\det(x) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (3.192)$$

Ceci introduit automatiquement la signature  $+- --$  pour l'espace-temps. C'est la principale raison de préférer  $Cl_{1,3}$  à  $Cl_{3,1}$ . Cette autre algèbre, non équivalente, pourrait être pourtant plus importante en physique puisque  $Cl_{3,1} = M_4(\mathbb{R})$  est l'algèbre de Majorana. Et en outre  $\text{End}(Cl_3) = M_8(\mathbb{R})$ , chaque matrice réelle  $8 \times 8$  comprenant quatre matrices réelles  $4 \times 4$ . Partant des quatre  $\gamma_\mu$  de (1.4) qui engendrent  $Cl_{1,3}$ , les quatre  $i\gamma_\mu$  engendrent  $Cl_{3,1}$ . La sous-algèbre paire  $Cl_{3,1}^+$  est donc l'ensemble de tous les :

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = \alpha - \mathbf{A} + \zeta \mathbf{i} = \alpha - \vec{\mathbf{a}} - i\vec{\mathbf{b}} + \zeta \mathbf{i}. \quad (3.193)$$

Donc pour l'espace-temps en tant que partie auto-adjointe de  $Cl_3$ , le passage de la version  $Cl_{1,3}^+$  de  $Cl_3$  à la version  $Cl_{3,1}^+$  de ce même  $Cl_3$  induit le passage de  $\alpha + \vec{\mathbf{a}}$  à  $\alpha - \vec{\mathbf{a}}$ , qui est la transformation  $P$  (parité). C'est donc l'usage de  $Cl_{1,3}^+$  et le non-usage de  $Cl_{3,1}^+$  dans les chapitres 1 et 2 qui fixe la préférence pour une des deux possibles orientations de l'espace, par l'identification :

$$\phi_e \in Cl_3 = \psi_e \in Cl_{1,3}^+ = \Psi_e \in \text{Diag}[\text{End}(Cl_3)]. \quad (3.194)$$

Cette identification explique pourquoi la seconde quantification peut reprendre tous les résultats de la première, dans le cas de l'électron. L'usage de  $Cl_{1,3}$  à la fois pour l'onde de l'électron et pour l'espace-temps, comme requis par le déterminant, conduit à l'utilisation de  $\nabla \hat{\phi}_e$ . Et l'onde gauche est la colonne de gauche de  $\hat{\phi}_e$ . Puis on a deux invariances de jauge, la jauge électrique engendrée par le 2-vecteur  $\sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3$  et la jauge chirale engendrée par le 3-vector  $i$ . Sous la jauge électrique l'onde gauche  $L_e$  tourne comme  $\hat{\phi}_e$ , l'onde droite  $R_e$  tourne comme  $\phi_e$ , et puisque  $i\sigma_3 = i\sigma_3$  alors  $R_e$  tourne comme  $L_e$ . Comme  $L(-i\sigma_3) = -iL$ ,  $L_e$  tourne avec des angles opposés sous la jauge électrique et la jauge chirale. Il en résulte les égalités des coefficients de  $B$  pour les ondes gauches, vues en 2.2 dans le cas leptonique et en 3.4 dans le cas des quarks. Puis la valeur  $\sin(\theta_W) = 1/2$  en (2.217) vient de ce que  $A$  est le potentiel de jauge électrique. Et ceci implique en (2.220) l'annulation du seul terme  $qA\bar{L}^8$ . Le terme  $qA\bar{R}^8$  ne s'annule pas. C'est l'origine de la "violation maximale de la parité" dans les interactions faibles.

### 3.9 L'équation d'onde à valeurs réelles

Jusqu'à l'obtention, par Schrödinger, de son équation d'onde non relativiste de l'électron, les nombres complexes ne jouaient, en physique, que le rôle de simples commodités de calcul. La fin du calcul se terminait toujours par le retour aux grandeurs à valeur réelle. Et c'est avec beaucoup de surprise que Schrödinger a compris qu'on ne pouvait plus se passer du  $i$  qu'il avait introduit dans son équation d'onde. Nous sommes partis de l'équation de Dirac, pour laquelle l'onde  $\psi$  de l'électron était à valeur dans  $\mathbb{C}^4$ . Mais ensuite nous avons associé à ce  $\psi$  une onde  $\phi$  à valeur dans  $Cl_3^*$ , groupe de Lie dont les huit paramètres sont des réels. Certes ce groupe de Lie est isomorphe, en tant que groupe de variables réelles, au groupe des matrices complexes  $2 \times 2$  inversibles. Certes nous avons profité de cet isomorphisme pour simplifier autant que possible les calculs. Mais on peut se passer complètement des nombres complexes, nous allons en examiner les conséquences.

Nous avons écrit l'équation de Dirac (1.2) avec les matrices de Pauli et de Dirac (1.4). Le  $i$  présent dans  $\sigma_2$  et dans les composantes  $\xi_j, \eta_j$  peut être remplacé par une matrice réelle, ce que nous avons déjà utilisé en 2.3.4 :

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \xi_j := a_j + ib_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}; \quad \eta_j := c_j + id_j = \begin{pmatrix} c_j & -d_j \\ d_j & c_j \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{\sigma}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_{0135}, \quad (3.195)$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma}_2 \\ \boldsymbol{\sigma}_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{0135} \\ \gamma_{0135} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.196)$$

On remarquera un changement de signe de  $\Lambda_2$  par rapport à ce qui aurait été attendu à partir des matrices gamma, correspondant à un changement d'orientation de l'espace quand on passe aux matrices réelles. La matrice  $\Lambda_2$  et les cinq autres matrices  $\Lambda_a$ ,  $a = 0, 1, 3, 4, 5$  sont génératrices de l'algèbre  $M_8(\mathbf{R})$  étudiée en B.2.1. L'équation de Dirac (1.2) devient [16] :

$$0 = [\Lambda^\mu (\partial_\mu + qA_\mu \Lambda_{45}) + m\Lambda_{45}] \boldsymbol{\Psi}; \quad \Lambda_{45} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} & 0 \\ 0 & \gamma_{31} \end{pmatrix}, \quad (3.197)$$

$$\boldsymbol{\Psi} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\xi} := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\eta} := \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}. \quad (3.198)$$

En multipliant à gauche par  $\Lambda_{54}$ , et en utilisant la commutation de ce terme avec chacun des quatre  $\Lambda^\mu$ , l'équation de Dirac s'écrit :

$$0 = [\Lambda^\mu (\Lambda_{54} \partial_\mu + qA_\mu) + m] \boldsymbol{\Psi}. \quad (3.199)$$

A la place de  $\Lambda_{54}$  il y a deux termes, et seulement deux, qui peuvent jouer le même rôle :  $\Lambda_{01234}$  et  $\Lambda_{01235}$ , et ceci nous donne deux équations d'onde similaires :

$$0 = [\Lambda^\mu (\Lambda_{01234} \partial_\mu + q A_\mu) + m] \Psi, \quad (3.200)$$

$$0 = [\Lambda^\mu (\Lambda_{01235} \partial_\mu + q A_\mu) + m] \Psi. \quad (3.201)$$

Ceci correspond bien à ce qu'observe la physique des particules : deux objets similaires, et néanmoins différents de l'électron, que sont le muon et le tau. Notons une différence entre l'électron, pour lequel le nombre d'indices est pair, et les deux autres, pour lesquels le nombre d'indices est impair. Les densités tensorielles associées à l'onde deviennent :

$$d_{\text{ind}} := \bar{\Psi} \Lambda_{\text{ind}} \Psi, \quad \bar{\Psi} := (\eta^t \quad \xi^t) \quad (3.202)$$

Et comme la réécriture des matrices complexes  $n \times p$  en matrices réelles  $2n \times 2p$  conserve les opérations, et transforme la matrice adjointe en matrice transposée, on obtient avec les notations de A.4 :

$$\bar{\Psi} \Psi = 2(a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2) = \Omega_1, \quad (3.203)$$

$$\bar{\Psi} \Lambda^\mu \Psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = D_0^\mu, \quad (3.204)$$

$$\bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda^\nu \Lambda_{45} \Psi = \bar{\psi} i \gamma^\mu \gamma^\nu \psi = S_3^{\mu\nu}, \quad (3.205)$$

$$\bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda_{012345} \Psi = K^\mu = D_3^\mu, \quad (3.206)$$

$$\bar{\Psi} \Lambda_{0123} \Psi = \Omega_2; \quad \Omega_1 + i \Omega_2 = \rho e^{i\beta}, \quad (3.207)$$

Les 16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 densités tensorielles ci-dessus, comme on l'a vu en 1.3.2, font partie des 36 = 9 × 8/2 densités possibles, qui correspondent exactement aux 36 générateurs de  $Cl_{3,3} = M_8(\mathbb{R})$  de carré  $I_8$ . Outre  $D_0$  et  $D_3$ , existent aussi deux autres vecteurs, définis en 1.3.2, qui vérifient :

$$\begin{aligned} D_1 &= \phi \sigma_1 \phi^\dagger = D_1^\mu \sigma_\mu; \quad D_2 = \phi \sigma_2 \phi^\dagger = D_2^\mu \sigma_\mu, \\ D_1^\mu &= \bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda_5 \Psi; \quad D_2^\mu = \bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda_4 \Psi. \end{aligned} \quad (3.208)$$

Et de même, les 6 composantes du bivecteur  $S$  font partie des 18 = 3 × 6 densités, formant trois bivecteurs similaires :

$$\begin{aligned} S_3 &= \phi \sigma_3 \bar{\phi} = S_3^{23} \sigma_1 + S_3^{31} \sigma_2 + S_3^{12} \sigma_3 + S_3^{10} i \sigma_1 + S_3^{20} i \sigma_2 + S_3^{30} i \sigma_3, \\ S_3^{\mu\nu} &= \bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda^\nu \Lambda_{45} \Psi, \end{aligned} \quad (3.209)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \phi \sigma_1 \bar{\phi} = S_1^{23} \sigma_1 + S_1^{31} \sigma_2 + S_1^{12} \sigma_3 + S_1^{10} i \sigma_1 + S_1^{20} i \sigma_2 + S_1^{30} i \sigma_3, \\ S_1^{\mu\nu} &= \bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda^\nu \Lambda_5 \Psi, \end{aligned} \quad (3.210)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \phi \sigma_2 \bar{\phi} = S_2^{23} \sigma_1 + S_2^{31} \sigma_2 + S_2^{12} \sigma_3 + S_2^{10} i \sigma_1 + S_2^{20} i \sigma_2 + S_2^{30} i \sigma_3, \\ S_2^{\mu\nu} &= \bar{\Psi} \Lambda^\mu \Lambda^\nu \Lambda_4 \Psi. \end{aligned} \quad (3.211)$$

L'invariance relativiste prend une forme peu différente de celle utilisant les matrices complexes. Il suffit d'associer à tout  $M$  de  $Cl_3^*$  la matrice réelle  $4 \times 4$   $\mathbf{M}$ , et à la matrice  $4 \times 4$   $N$  la matrice réelle  $8 \times 8$  telles que :

$$N = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix}; \quad \phi' = M\phi; \quad \psi' = N\psi, \quad (3.212)$$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 & -c_2 + id_2 \\ a_2 + ib_2 & c_1 - id_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & -c_2 & -d_2 \\ b_1 & a_1 & d_2 & -c_2 \\ a_2 & -b_2 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & -d_1 & c_1 \end{pmatrix}, \quad (3.213)$$

$$\Psi' = \mathbf{N}\Psi; \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{M}} \end{pmatrix}; \quad \Psi' = \mathbf{N}\Psi \quad (3.214)$$

On veillera ici à ne pas confondre la matrice  $4 \times 4$  réelle  $\mathbf{M}$  ci-dessus à la matrice  $4 \times 4$  réelle  $R$  de (1.36), qui est quadratique par rapport à  $\mathbf{M}$ . Rappelons la forme que prend la transformation des variables d'espace-temps :

$$\begin{aligned} x' &= MxM^\dagger; \quad x = x^\mu \sigma_\mu; \quad x' = x'^\mu \sigma_\mu; \quad x'^\mu = R_\nu^\mu x^\nu, \\ \nabla &= \overline{M} \nabla' \widehat{M}; \quad \nabla = \sigma^\mu \partial_\mu; \quad \nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu; \quad R_\nu^\mu \partial'_\mu = \partial_\nu. \end{aligned} \quad (3.215)$$

Ceci, nous donne, avec l'algèbre d'espace-temps et avec les matrices réelles :

$$R_\nu^\mu \Lambda^\nu = \overline{\mathbf{N}} \Lambda^\mu \mathbf{N}; \quad \overline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{M}}^t & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^t \end{pmatrix}; \quad \Lambda^\mu \partial_\mu = \overline{\mathbf{N}} \Lambda^\mu \partial'_\mu \mathbf{N}, \quad (3.216)$$

$$\mathbf{x} := x^\mu \Lambda_\mu; \quad \mathbf{x}' := x'^\mu \Lambda_\mu; \quad \mathbf{x}' = \mathbf{N} \mathbf{x} \mathbf{N}^t. \quad (3.217)$$

On peut aisément passer de l'équation de Dirac à notre équation améliorée en utilisant l'angle d'Yvon-Takabayasi dans le terme de masse, et en remplaçant la masse par une matrice de masse :

$$0 = [\Lambda^\mu (\Lambda_{54} \partial_\mu + q A_\mu) + e^{-\beta \Lambda_{0123}} \mathbf{m}] \Psi; \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{I_4} & 0 \\ 0 & \mathbf{r} I_4 \end{pmatrix}. \quad (3.218)$$

# Chapitre 4

## Gravitation

La variété d'espace-temps de la relativité générale est une sous-variété contenue dans le groupe de Lie  $Cl_3^*$ . La connexion de cette variété est calculée à la fois à partir de l'onde quantique et à partir du groupe d'invariance. Les équations du champ de gravitation sont des égalités entre deux connexions affines. Le  $i$  qui définit l'orientation de l'espace appartient à la fois au groupe d'invariance et au groupe de jauge. On généralise la dérivée invariante de forme. Cette dérivée simplifie la partie interactions faibles pour les ondes des quarks. On étudie le double lien entre les équations d'onde dans leur forme usuelle et les équations sous forme invariante, ses conséquences sur la conservation des courants et le rapport d'homothétie. On montre la compatibilité entre la gravitation et nos résultats sur les densités tensorielles d'impulsion-énergie et de moment cinétique. Au lieu de se propager dans un espace vectoriel de configuration, l'onde fermionique se propage dans la variété d'espace-temps. La dualité entre groupes de Lie et algèbres de Lie, appliquée à l'espace-temps dans sa globalité, explique la flèche du temps, donne un début de résolution du problème EPR, justifie une expansion de l'univers avec accélération récente de l'expansion.

La variété d'espace-temps de la relativité générale a été pensée naturellement comme une variété pseudo-riemannienne basée sur les propriétés de la pseudo-métrique d'espace-temps. Avec les notations de (1.4) on a :

$$\mathbf{x} := x^\mu \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = x^\mu \sigma_\mu. \quad (4.1)$$

Avec (1.36) la similitude  $R$  définie par le dilatateur  $M$  vérifie :

$$\mathbf{x}' = M\mathbf{x}M^\dagger; \quad \widehat{\mathbf{x}}' = \widehat{M}\widehat{\mathbf{x}}\widehat{M}; \quad M^\dagger = \widetilde{M}; \quad \overline{M} = \widehat{M}^\dagger, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x}' \\ \widehat{\mathbf{x}}' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ \widehat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{x}' = N\mathbf{x}\widetilde{N}; \quad N := \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \widehat{M} \end{pmatrix}; \quad \widetilde{N} = \begin{pmatrix} \overline{M} & 0 \\ 0 & M^\dagger \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

L'électron, dans chaque espace-temps tangent en tout point de la variété d'espace-temps, a une onde qui suit l'équation de Dirac améliorée décrite au chapitre 1. L'ensemble des dilatateurs  $N$  est la sous-algèbre paire  $Cl_{1,3}^+$ , isomorphe à l'ensemble des dilatateurs  $M$  qui est  $Cl_3$ . La théorie de Dirac restreignait  $M$  à  $SL(2, \mathbb{C})$  (à tort, on l'a vu en 1.1.2), ce qui impliquait :

$$\det(M) = 1; \quad M^{-1} = \overline{M}, \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla \widehat{\phi} &= \sigma^\nu \partial_\nu \widehat{\phi} = \overline{M} \nabla' \widehat{M} \widehat{\phi} = M^{-1} \sigma^\mu M^{\dagger-1} \partial'_\mu \widehat{\phi} = M^{-1} \sigma^\mu M^{\dagger-1} R_\mu^\nu \partial_\nu \widehat{\phi} \\ \sigma^\nu &= M^{-1} \sigma^\mu R_\mu^\nu (M^\dagger)^{-1}; \quad \sigma^\mu R_\mu^\nu = M \sigma^\nu M^\dagger; \quad \gamma^\mu R_\mu^\nu = N \gamma^\nu \widetilde{N}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ce calcul est valide aussi longtemps que le dilatateur  $M$  est un terme fixe. Mais les dernières égalités ci-dessus (une égalité pour chaque valeur de  $\nu$ ), sont utilisées sans précaution même dans le cas d'un dilatateur variable  $M$ . De plus la matrice  $N$  est en général supposée vérifier :

$$N = \exp \left[ \sum_{a < b} \theta^{ab} \sigma_{ab} \right]; \quad \sigma_{ab} := \frac{1}{2} (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a), \quad \theta^{ab} \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Mais dans les calculs précédents la similitude  $R$  n'est pas du tout la même chose que le dilatateur  $M$ . Même lorsque  $M$  appartient à  $SL(2, \mathbb{C})$  la transformation de Lorentz  $R$  n'est pas la matrice de Pauli  $M$ . Et malheureusement (4.7) n'est pas générale : avec  $M = -1 + \sigma_1 + i\sigma_2$  on a :

$$M = -\exp[-(\sigma_1 + i\sigma_2)] = e^{i\pi - \sigma_0 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_3}, \quad (4.8)$$

$$N = e^{\pi \sigma_{01} \sigma_{23} + \sigma_{01} + \sigma_{13}} = e^{\pi(1+2k) \sigma_{01} \sigma_{23} + \sigma_{01} + \sigma_{13}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.9)$$

Donc tout calcul utilisant (4.7) oublie la périodicité de l'exponentielle complexe, origine mathématique de tout phénomène physique ondulatoire. On se doit donc d'adopter une approche plus sérieuse, ce que l'on va développer maintenant.

L'onde quantique étudiée dans les précédents chapitres introduit un changement majeur avec l'inclusion de l'espace, puis de l'espace-temps dans  $Cl_3$ . La première inclusion, celle de l'espace a été effectuée implicitement par Pauli il y aura bientôt un siècle. L'inclusion du temps, pour l'équation de Dirac, a été tout aussi implicite. On obtient la pseudo-métrique d'espace-temps avec :

$$||\mathbf{x}||^2 = \det(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} P(\mathbf{x}). \quad (4.10)$$

où  $P$  est la transformation de parité. Or c'est très différent de l'approche de la géométrie riemannienne, elle-même issue de l'étude des courbes et surfaces de la géométrie euclidienne : d'abord la pseudo-norme  $\|x\|$  n'est pas, malgré la malheureuse identité de notation, une vraie norme puisque  $\det(x)$  peut être positif, nul ou négatif. Ensuite un déterminant n'est pas une forme bilinéaire symétrique, mais une forme bilinéaire alternée. Et la transformation de parité est directement associée à la géométrie par (4.10). On a rencontré au chapitre 1 l'importante relation (1.304) :

$$D_x : X \mapsto x = \phi X \phi^\dagger$$

qui définit l'élément général  $X$  de ce qu'on a appelé l'espace-temps invariant. Comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants et puisque l'élément  $M_\phi$  de  $SL(2, \mathbb{C})$  a été défini en (1.160) comme  $\phi = \sqrt{\rho} e^{i\beta/2} M_\phi$ , on a :

$$\det(x) = \rho \det(X). \quad (4.11)$$

On a vu que, pour toutes les solutions importantes utilisées dans la théorie de Dirac,  $\rho = \rho(x)$  est partout non nul. Et comme aucun observateur ne peut voyager sur le cône de lumière,  $\det(x) \neq 0$ , on fera donc l'hypothèse que  $\det(X) \neq 0$ . Cela signifie que  $X$  appartient au groupe de Lie  $Cl_3^*$  et l'ensemble des  $X$  est la partie auto-adjointe de  $Cl_3^*$ , c'est-à-dire la partie vérifiant  $X = X^\dagger = \tilde{X}$ . La relation entre  $X$  et  $x$  entraîne que  $x$  aussi a un déterminant non nul : l'ensemble des  $x$ , qui est la variété d'espace-temps, est la partie auto-adjointe du groupe de Lie  $Cl_3^*$ , sous-ensemble de  $Cl_3$ . Un théorème de Whitney indique que toute variété réelle de dimension 4, quelque soit sa structure différentielle, peut être incluse dans un  $\mathbb{R}^8$ , et  $Cl_3$  est précisément de dimension 8 sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent la géométrie de l'espace-temps n'a pas besoin de  $Cl_3$  lui-même (isomorphe à  $\mathbb{R}^8$  comme variété), la géométrie a besoin du groupe de Lie  $Cl_3^*$  lui-même, qui est une variété séparée de dimension 8 ayant  $Cl_3$  pour algèbre de Lie<sup>1</sup>. Puisque c'est un groupe de Lie, chaque point est localement identique au point unité  $x = 1$ . Ce point unité, comme n'importe quel point, signifie un événement : je suis ici, maintenant. En un point-événement, un espace-temps tangent existe, où le point-événement "je suis ici, maintenant" devient le zéro de l'algèbre de Lie  $Cl_3$  du groupe de Lie  $Cl_3^*$ . Comme les distances sont données par le déterminant et comme ce déterminant n'est pas nul, par définition de  $Cl_3^*$ , le cône de lumière de chaque point est un sous-ensemble de l'espace-temps tangent en chaque point de l'espace-temps. L'espace-temps tangent doit être distingué de l'espace-temps lui-même, parce que l'espace-temps tangent est lui-même une variété plate.

1. La géométrie riemannienne utilise une métrique, qui amène automatiquement la séparabilité de la topologie de la variété. Mais la pseudo-métrique de la géométrie d'espace-temps amène tout aussi automatiquement la non séparation des événements distincts mais à pseudo-distance d'espace-temps nulle. L'inclusion de l'espace-temps dans  $Cl_3^*$  assure, elle, cette condition de séparabilité, indispensable pour pouvoir utiliser les résultats généraux de la géométrie différentielle.

On a vu en 1.1.2 et 1.2 que le groupe d'invariance  $\mathcal{G}$  généralisant au cas relativiste le groupe d'invariance  $SU(2)$  de la physique non relativiste des particules de spin  $1/2$ , pouvait sans difficulté être étendu au groupe  $GL(2, \mathbb{C})$  de toutes les matrices  $2 \times 2$  complexes inversibles. Ce groupe est isomorphe au groupe  $Cl_3^*$  des éléments inversibles de l'algèbre  $Cl_3$ . Celle-ci non seulement contient le groupe des éléments inversibles, mais en plus elle en est l'algèbre de Lie. La différence entre le dilatateur  $M$  et la similitude  $R$  qu'il engendre est la même qu'avec le cas particulier des transformations de Lorentz : le groupe des dilatateurs  $M$  est un groupe de Lie de dimension 8, alors que le groupe des similitudes  $R$  est un groupe de dimension seulement 7. Le noyau de l'homomorphisme  $f : M \mapsto R$  est le groupe de Lie de dimension 1 des  $M = e^{ix}$ , où  $x$  est un nombre réel quelconque. La fonction  $f$  n'est donc pas inversible : il n'existe aucun moyen de construire  $M$  en partant de  $R$ . C'est la raison de fond du fait que  $Cl_3$  est le plus important espace vectoriel qu'on utilisera ici tandis que l'ensemble  $Cl_3^*$  des dilatateurs est le plus important groupe d'invariance utilisé dans ce chapitre. C'est ainsi parce que ça ne peut pas être autrement : l'isomorphisme entre  $GL(n, \mathbb{C})$  et  $Cl_p^*$ , en tant que groupes de Lie, a des propriétés qui n'existent que dans le cas très particulier  $n = 2$  et  $p = 3$ .

## 4.1 Géométrie différentielle

### 4.1.1 La gravitation par l'onde quantique

Tous les opérateurs différentiels utilisés dans les précédents chapitres sont construits à partir de l'opérateur  $\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu$  de l'algèbre  $Cl_3$ . L'opérateur  $\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  utilisé par Hestenes s'y ramène (voir B.1.2) puisque l'on a, l'algèbre d'espace-temps étant un module sur l'anneau  $Cl_3$  :

$$\boldsymbol{\partial} = (0 \quad \nabla). \quad (4.12)$$

L'algèbre d'espace-temps d'Hestenes est donc seulement un outil de calcul possible, mais n'a pas de réelle nécessité. On se servira donc ici seulement de l'algèbre  $Cl_3$ . On passe de l'opérateur  $\nabla$  qui agit dans un voisinage de l'événement  $x = x^\mu \sigma_\mu$  à l'opérateur  $\nabla'$  qui agit au voisinage de l'événement  $x' = x'^\mu \sigma_\mu$  par :

$$x' = R(x) = MxM^\dagger; \quad \nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M}; \quad \nabla' = \sigma^\mu \partial'_\mu. \quad (4.13)$$

On rappelle que les  $\sigma_\mu$  sont exactement les mêmes dans l'écriture de  $x$  ou de  $x'$ , et que c'est pareil pour  $\nabla$  et  $\nabla'$ .<sup>2</sup> On a aussi expliqué en 1.9 comment

---

2. La fixité des  $\sigma_\mu$  vient de ce que les quatre matrices  $(1 \pm \sigma_3)/2$  et  $(\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$  forment la base canonique de  $M_2(\mathbb{C})$  et sont donc intrinsèques dans le groupe  $GL(2, \mathbb{C})$ .

l'onde  $\phi$  de l'électron définit en chaque point une similitude :

$$D_x : X = X^\mu \sigma_\mu \mapsto x = \phi X \phi^\dagger = \phi X^\nu \sigma_\nu \phi^\dagger = X^\nu D_\nu, \quad (4.14)$$

$$D_\nu = D_\nu^\mu \sigma_\mu = \phi \sigma_\nu \phi^\dagger. \quad (4.15)$$

Ainsi la fonction  $\phi$  décrit l'insertion de la variété d'espace-temps dans la variété de dimension 8, vue de la variété d'espace-temps. La fonction  $\phi$  est ce que nous pouvons apercevoir à partir de notre variété d'espace-temps.

On a vu en 1.3.2 et retrouvé en 3.9 les quatre vecteurs  $D_\nu$  qui forment une base orthogonale (mais pas une base orthonormée) de l'espace-temps, en chaque point de l'espace-temps. A cette base variable est associée une connexion affine. Ceci nous permet d'utiliser la théorie de la base mobile de Cartan pour cette base  $(D_0, D_1, D_2, D_3)$ . Les composantes de ces vecteurs sont calculées en A.4.2. On rappelle qu'on a :

$$\rho e^{i\beta} = \phi \bar{\phi} = \det(\phi); \quad \rho e^{-i\beta} = \widehat{\phi} \widetilde{\phi}, \quad (4.16)$$

$$D_\mu \cdot D_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad (4.17)$$

$$\rho^2 = D_0 \cdot D_0 = -D_1 \cdot D_1 = -D_2 \cdot D_2 = -D_3 \cdot D_3. \quad (4.18)$$

Cette connexion a été étudiée en [22]. On pose :

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial X^\nu} = D_\nu^\mu \partial_\mu; \quad dx = dX^\nu D_\nu, \quad (4.19)$$

$$dD_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\beta dX^\nu D_\beta.$$

Si  $\rho \neq 0$  cela donne :

$$\begin{aligned} dx &= dx^\mu \sigma_\mu = D_\nu^\mu \sigma_\mu dX^\nu = D_\nu dX^\nu, \\ D_\nu &= \phi \sigma_\nu \phi^\dagger = D_\nu^\mu \sigma_\mu; \quad \sigma_\mu = (D^{-1})_\mu^\beta D_\beta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Puis on utilise la similitude  $\bar{D}$  telle que :

$$\bar{D}(x) = \bar{\phi} x \widehat{\phi}. \quad (4.21)$$

On a :

$$\begin{aligned} D \circ \bar{D}(x) &= D[\bar{D}(x)] = \phi \bar{\phi} x \widehat{\phi} \phi^\dagger = \rho e^{i\beta} x \rho e^{-i\beta} = \rho^2 x, \\ D \circ (\rho^{-2} \bar{D})(x) &= x, \\ D^{-1}(x) &= \rho^{-2} \bar{D}(x). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned} dD_\mu &= \partial_\nu(D_\mu) dX^\nu = \partial_\nu(D_\mu^\xi \sigma_\xi) dX^\nu = \partial_\nu(D_\mu^\xi) \sigma_\xi dX^\nu \\ &= \partial_\nu(D_\mu^\xi) (D^{-1})_\xi^\beta D_\beta dX^\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\beta D_\beta dX^\nu. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Par conséquent les coefficients de la connexion sont :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \partial_\nu(D_\mu^\xi)(D^{-1})_\xi^\beta ; \quad \partial_\nu = D_\nu^\tau \partial_\tau. \quad (4.24)$$

En utilisant la similitude  $\bar{D}$  on obtient :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \rho^{-2} \partial_\nu(D_\mu^\xi) \bar{D}_\xi^\beta ; \quad \partial_\nu = D_\nu^\tau \partial_\tau. \quad (4.25)$$

Comme  $\bar{D}_0^0 = D_0^0$  et  $\bar{D}_j^0 = -D_0^j$  on a :

$$\Gamma_{0\nu}^0 = \Gamma_{1\nu}^1 = \Gamma_{2\nu}^2 = \Gamma_{3\nu}^3 = \partial_\nu[\ln(\rho)] = D_\nu^\mu \partial_\mu[\ln(\rho)]. \quad (4.26)$$

Comme  $\bar{D}_0^j = -D_j^0$  et  $\bar{D}_j^k = D_k^j$  on a :

$$\Gamma_{0\nu}^j = \Gamma_{j\nu}^0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{k\nu}^j = -\Gamma_{j\nu}^k, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad k \neq j. \quad (4.28)$$

Le calcul complet de la connexion a besoin des densités suivantes :

$$S_k = \phi \sigma_k \bar{\phi}, \quad (4.29)$$

$$\mathcal{S}_{(k)} + i\mathcal{S}'_{(k)} = \frac{\nabla S_k^\dagger}{\det(\phi)^\dagger}, \quad (4.30)$$

$$\mathcal{A}_{(k)} + i\mathcal{A}'_{(k)} = \frac{AS_k^\dagger}{\det(\phi)^\dagger}, \quad (4.31)$$

$$\tau = \frac{1}{2}[(\nabla \hat{\phi})\phi^\dagger - \sigma^\mu \hat{\phi} \partial_\mu \phi^\dagger], \quad (4.32)$$

$$\mathcal{T} + i\mathcal{T}' = \frac{\tau}{\det(\phi)^\dagger}. \quad (4.33)$$

Le tenseur  $\tau$  est la densité de spin de Durand [15, 54]. Avec l'équation d'onde améliorée de l'électron, on obtient en D.4 :

$$\Gamma_{1\mu}^0 = D_\mu \cdot [\mathcal{S}_{(1)} - 2q\mathcal{A}_{(2)}] + 2m\rho\delta_\mu^2, \quad (4.34)$$

$$\Gamma_{2\mu}^0 = D_\mu \cdot [\mathcal{S}_{(2)} + 2q\mathcal{A}_{(1)}] - 2m\rho\delta_\mu^1, \quad (4.35)$$

$$\Gamma_{3\mu}^0 = D_\mu \cdot \mathcal{S}_{(3)}, \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{3\mu}^2 = -D_\mu \cdot [\mathcal{S}'_{(1)} + 2q\mathcal{A}'_{(2)}] - 2d\rho\delta_\mu^1, \quad (4.37)$$

$$\Gamma_{1\mu}^3 = -D_\mu \cdot [\mathcal{S}'_{(2)} + 2q\mathcal{A}'_{(1)}] + 2d\rho\delta_\mu^2, \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{2\mu}^1 = -D_\mu \cdot [\mathcal{S}'_{(3)} + 2q\mathcal{A}] - 2m\rho\delta_\mu^0 + 2d\rho\delta_\mu^3, \quad (4.39)$$

$$\Gamma_{0\mu}^0 = D_\mu \cdot [-2\mathcal{T} + 2q\mathcal{A}'_{(3)}], \quad (4.40)$$

avec  $\delta_0^0 = 1$ ,  $\delta_j^j = -1$ ,  $j = 1, 2, 3$  et  $\delta_\mu^\nu = 0$ ,  $\mu \neq \nu$ . Le rôle très particulier de l'indice 3 dans l'équation de Dirac de l'électron est encore très visible

dans ces relations. Pour la seconde ou la troisième génération il suffit de faire une permutation circulaire des indices. Aussi un indice particulier, 1 ou 2, y est toujours visible. Cette connexion n'est pas sans torsion, et le terme de masse propre est justement lié à cette torsion : c'est une raison de penser que cette connexion donne la gravitation. De plus le terme de masse  $m\rho$ , et donc aussi les symboles de Christoffel, ont la dimension physique  $L^{-1}$  d'un rayon de courbure. On peut donc considérer que le lien entre masse-énergie et géométrie ne se fait pas par le tenseur de courbure, mais directement par la connexion affine et la torsion de la variété d'espace-temps. Ceci fait donc suite à l'étude d'Einstein d'une variété d'espace-temps sans courbure mais avec torsion pour rendre compte à la fois de la gravitation et de l'électromagnétisme [68].

Sur une solution en onde plane on a obtenu en 1.5.3 :

$$\phi = \phi_0 e^{-\varphi\sigma_{12}} ; \quad \varphi = m_g v_\mu x^\mu ; \quad v = \sigma^\mu v_\mu, \quad m_g = \sqrt{|\mathbf{r}|}. \quad (4.41)$$

où la vitesse réduite  $v$  et où  $\phi_0$  sont des termes fixes. On obtient :

$$\phi = \sigma^\mu \partial_\mu (\phi_0 e^{-\varphi\sigma_{12}}) = -m_g v \hat{\phi} \sigma_{12}. \quad (4.42)$$

Ceci donne :

$$\phi = e^{i\beta} v \hat{\phi} \frac{\hat{\mathbf{m}}}{m_g}, \quad (4.43)$$

ce qui implique :

$$\phi = e^{i\beta} v (e^{-i\beta} \hat{v} \hat{\phi} \frac{\mathbf{m}}{m_g}) \frac{\hat{\mathbf{m}}}{m_g} = v \hat{v} \phi. \quad (4.44)$$

Donc si  $\phi_0$  est inversible on doit prendre :

$$1 = v \hat{v} = v \cdot v = v_0^2 - \vec{v}^2, \quad (4.45)$$

$$v_0^2 = 1 + \vec{v}^2 ; \quad v_0 = \sqrt{1 + \vec{v}^2}. \quad (4.46)$$

qui est la relation relativiste pour la vitesse réduite d'une particule. On a aussi :

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi) = \det(\phi_0) \det(e^{i\beta}) = \det(\phi_0). \quad (4.47)$$

Donc  $\rho$  et  $\beta$  sont fixes. C'est la même chose pour :

$$D_0 = \phi_0 \phi_0^\dagger ; \quad D_3 = \phi_0 \sigma_3 \phi_0^\dagger. \quad (4.48)$$

Les vecteurs  $D_1$  et  $D_2$ , au contraire, sont variables. On pose :

$$d_1 = \phi_0 \sigma_1 \phi_0^\dagger ; \quad d_2 = \phi_0 \sigma_2 \phi_0^\dagger, \quad (4.49)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} D_1 &= \cos(2\varphi) d_1 + \sin(2\varphi) d_2, \\ D_2 &= -\sin(2\varphi) d_1 + \cos(2\varphi) d_2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Comme  $D_0$  et  $D_3$  sont fixes on obtient :

$$\partial_\nu(D_0^\xi) = \partial_\nu(D_3^\xi) = 0 \quad (4.51)$$

$$\Gamma_{0\nu}^\beta = \Gamma_{3\nu}^\beta = 0. \quad (4.52)$$

Avec  $D_1$  et  $D_2$  on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\tau(D_1^\xi) &= \partial_\tau[\cos(2\varphi)d_1^\xi + \sin(2\varphi)d_2^\xi] = 2m_g v_\tau D_2^\xi, \\ \partial_\tau(D_2^\xi) &= \partial_\tau[-\sin(2\varphi)d_1^\xi + \cos(2\varphi)d_2^\xi] = -2m_g v_\tau D_1^\xi, \\ \partial_\nu(D_1^\xi) &= D_\nu^\tau \partial_\tau(D_1^\xi) = 2m_g D_\nu^\tau v_\tau D_2^\xi = 2m_g (D_\nu \cdot v) D_2^\xi, \\ \partial_\nu(D_2^\xi) &= D_\nu^\tau \partial_\tau(D_2^\xi) = -2m_g - g D_\nu^\tau v_\tau D_1^\xi = -2m_g (D_\nu \cdot v) D_1^\xi. \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\partial_\nu(D_2^\xi) = D_\nu^\tau \partial_\tau(D_2^\xi) = -2m_g - g D_\nu^\tau v_\tau D_1^\xi = -2m_g (D_\nu \cdot v) D_1^\xi. \quad (4.54)$$

Ensuite on obtient :

$$D_\nu \cdot v = \frac{1}{\rho} D_\nu \cdot D_0 = \rho \delta_\nu^0. \quad (4.55)$$

Donc on a :

$$\Gamma_{11}^\beta = \Gamma_{12}^\beta = \Gamma_{13}^\beta = \Gamma_{21}^\beta = \Gamma_{22}^\beta = \Gamma_{23}^\beta = 0. \quad (4.56)$$

Et on obtient :

$$\Gamma_{10}^\beta = \frac{2m_g}{\rho} D_2^\xi \bar{D}_\xi^\beta ; \quad \Gamma_{20}^\beta = -\frac{2m_g}{\rho} D_1^\xi \bar{D}_\xi^\beta, \quad (4.57)$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^2 &= \frac{2m_g}{\rho} D_2^\xi \bar{D}_\xi^2 = \frac{2m_g}{\rho} (D_2^0 \bar{D}_0^2 + D_2^1 \bar{D}_1^2 + D_2^2 \bar{D}_2^2 + D_2^3 \bar{D}_3^2) \\ &= \frac{2m_g}{\rho} (-D_2^0 D_2^0 + D_2^1 D_2^1 + D_2^2 D_2^2 + D_2^3 D_2^3) \\ &= \frac{2m_g}{\rho} (-D_2 \cdot D_2) = 2m_g \rho. \end{aligned} \quad (4.58)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \Gamma_{10}^0 &= \frac{2m_g}{\rho} (D_2 \cdot D_0) = 0, \\ \Gamma_{10}^3 &= \frac{2m_g}{\rho} (-D_2 \cdot D_3) = 0, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{2m_g}{\rho} (-D_2 \cdot D_1) = 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

De même pour les  $\Gamma_{20}^\beta$  on obtient :

$$\Gamma_{20}^1 = -2m_g \rho ; \quad \Gamma_{20}^0 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{20}^3 = 0. \quad (4.60)$$

En résumé, parmi les 64 termes  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ , 62 sont nuls. Seuls deux termes ne sont pas nuls :

$$\Gamma_{10}^2 = -\Gamma_{20}^1 = 2m_g \rho. \quad (4.61)$$

Par conséquent la torsion a deux composantes fixes :

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{10}^2 - \Gamma_{01}^2) = m_g \rho, \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{20}^1 - \Gamma_{02}^1) = -m_g \rho. \quad (4.63)$$

Et les termes  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  étant tous fixes, le tenseur de courbure s'annule. On voit donc que, pour l'équation d'onde améliorée, la variété d'espace-temps liée à l'onde plane est sans courbure mais avec une torsion fixe, et le terme de masse est proportionnel à cette torsion.

#### 4.1.2 Connexion liée au groupe d'invariance

On doit maintenant considérer quatre sortes de spineurs, qui varient de quatre manières différentes dans les similitudes induites par le groupe d'invariance étendu : le groupe  $Cl_3^* = GL(2, \mathbb{C})$  a quatre sortes de représentations non équivalentes. Donc en plus de l'invariance pour ce qui ne change pas (par exemple la densité lagrangienne), on n'a pas moins de six sortes de variance : la contravariance des vecteurs se transformant comme  $x$ , la covariance des vecteurs se transformant comme  $\nabla$ , et quatre sortes de spineurs que l'on a rencontré dans les précédents chapitres :

$$x' = MxM^\dagger; \quad \nabla = \overline{M}\nabla'\widehat{M} = \overline{M}\sigma^\mu\widehat{M}\partial'_\mu, \quad (4.64)$$

$$R'^n = MR^n; \quad \widehat{L}'^n = \widehat{M}\widehat{L}^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad (4.65)$$

$$R'^{4+n} = R^{4+n}\widetilde{M}; \quad \widehat{L}'^{4+n} = \widehat{L}^{4+n}\overline{M}, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (4.66)$$

La géométrie différentielle étudie ce qui arrive dans un voisinage d'un point-événement donné. Cela équivaut à considérer au voisinage de  $x$  un dilatateur  $M$  qui ne diffère de l'unité que de manière infinitésimale. On pose donc :

$$M = 1 + dx^\mu(a_\mu^0 + a_\mu^1\sigma_1 + a_\mu^2\sigma_2 + a_\mu^3\sigma_3 + a_\mu^4i\sigma_1 + a_\mu^5i\sigma_2 + a_\mu^6i\sigma_3 + a_\mu^7i), \quad (4.67)$$

où les  $a_\mu^n$ , pour  $\mu = 1, 2, 3, 4$  et  $n = 0, 1, \dots, 7$  sont 32 fonctions à valeur suffisamment lisses de  $x$ , et  $dx^\mu$  sont les incréments de  $x$  en ce point. Ceci donne :

$$\begin{aligned} M^\dagger &= 1 + dx^\mu(a_\mu^0 + a_\mu^1\sigma_1 + a_\mu^2\sigma_2 + a_\mu^3\sigma_3 - a_\mu^4i\sigma_1 - a_\mu^5i\sigma_2 - a_\mu^6i\sigma_3 - a_\mu^7i), \\ \widehat{M} &= 1 + dx^\mu(a_\mu^0 - a_\mu^1\sigma_1 - a_\mu^2\sigma_2 - a_\mu^3\sigma_3 + a_\mu^4i\sigma_1 + a_\mu^5i\sigma_2 + a_\mu^6i\sigma_3 - a_\mu^7i), \\ \overline{M} &= 1 + dx^\mu(a_\mu^0 - a_\mu^1\sigma_1 - a_\mu^2\sigma_2 - a_\mu^3\sigma_3 - a_\mu^4i\sigma_1 - a_\mu^5i\sigma_2 - a_\mu^6i\sigma_3 + a_\mu^7i). \end{aligned} \quad (4.68)$$

On a aussi :

$$M\overline{M} = \det(M) = 1 + 2dx^\mu(a_\mu^0 + ia_\mu^7), \quad (4.69)$$

$$\det(M^{-1}) = 1 - 2dx^\mu(a_\mu^0 + ia_\mu^7), \quad (4.70)$$

$$\overline{M}^{-1} = M \det(M^{-1}), \quad (4.71)$$

$$= 1 + dx^\mu (-a_\mu^0 + a_\mu^1 \sigma_1 + a_\mu^2 \sigma_2 + a_\mu^3 \sigma_3 + a_\mu^4 i \sigma_1 + a_\mu^5 i \sigma_2 + a_\mu^6 i \sigma_3 - a_\mu^7 i),$$

$$\widehat{M}^{-1} = (\overline{M}^{-1})^\dagger \quad (4.72)$$

$$= 1 + dx^\mu (-a_\mu^0 + a_\mu^1 \sigma_1 + a_\mu^2 \sigma_2 + a_\mu^3 \sigma_3 - a_\mu^4 i \sigma_1 - a_\mu^5 i \sigma_2 - a_\mu^6 i \sigma_3 + a_\mu^7 i).$$

La similitude  $R$  définie par  $M$  change  $x$  en  $x'$ , tel que  $x' = R(x) + dx = MxM^\dagger + dx$  :

$$x'^0 = x^0 + dx^0 + 2(a_\mu^0 x^0 + a_\mu^1 x^1 + a_\mu^2 x^2 + a_\mu^3 x^3) dx^\mu, \quad (4.73)$$

$$x'^1 = x^1 + dx^1 + 2(a_\mu^1 x^0 + a_\mu^0 x^1 + a_\mu^6 x^2 - a_\mu^5 x^3) dx^\mu, \quad (4.74)$$

$$x'^2 = x^2 + dx^2 + 2(a_\mu^2 x^0 - a_\mu^6 x^1 + a_\mu^0 x^2 + a_\mu^4 x^3) dx^\mu, \quad (4.75)$$

$$x'^3 = x^3 + dx^3 + 2(a_\mu^3 x^0 + a_\mu^5 x^1 - a_\mu^4 x^2 + a_\mu^0 x^3) dx^\mu. \quad (4.76)$$

Comme les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  sont définis par

$$x'^\alpha = x^\alpha + dx^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha x^\beta dx^\gamma, \quad (4.77)$$

on a donc :

$$\Gamma_{0\mu}^0 = \Gamma_{1\mu}^1 = \Gamma_{2\mu}^2 = \Gamma_{3\mu}^3 = 2a_\mu^0, \quad (4.78)$$

$$\Gamma_{0\mu}^1 = \Gamma_{1\mu}^0 = 2a_\mu^1; \quad \Gamma_{0\mu}^2 = \Gamma_{2\mu}^0 = 2a_\mu^2; \quad \Gamma_{0\mu}^3 = \Gamma_{3\mu}^0 = 2a_\mu^3, \quad (4.79)$$

$$\Gamma_{3\mu}^2 = -\Gamma_{2\mu}^3 = 2a_\mu^4; \quad \Gamma_{1\mu}^3 = -\Gamma_{3\mu}^1 = 2a_\mu^5; \quad \Gamma_{2\mu}^1 = -\Gamma_{1\mu}^2 = 2a_\mu^6. \quad (4.80)$$

Ainsi la connexion définie par les symboles  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  ne dépend que de 28 des 32 fonctions réelles contenues dans le dilatateur  $M$  de (4.67). Les quatre  $a_\mu^7$  ne peuvent pas figurer dans la connexion, parce qu'ils sont en facteur du générateur  $i$  de la jauge chirale, qui appartient au centre du groupe, c'est-à-dire qui commute avec tout élément du groupe [22][24]. La géométrie différentielle ne peut pas apercevoir ces  $a_\mu^7$  ! Einstein pensait que quelque chose manquait dans la théorie physique pour intégrer la physique quantique à la physique classique. Les quatre paramètres qui manquent dans la partie géométrique de la connexion ne manquent pas dans la partie spinorielle de la géométrie différentielle. Donc quelque chose était effectivement manquant, mais ce n'était pas là où c'était attendu.<sup>3</sup> Les égalités (4.78) à (4.80) ont la même structure que les égalités entre les  $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$  en (4.27) et (4.28). La construction de la relativité générale par Einstein est partie d'une égalité de structure semblable entre gravité et inertie. En identifiant le tenseur de courbure de l'espace-temps à la densité d'impulsion-énergie, Einstein a mis en équations cette identité de structure. Cette construction ne satisfaisait pas sa recherche d'une esthétique des lois physiques, parce qu'elle accolait

3. Le nombre  $28 = 8 \times 7/2$  est aussi la dimension du groupe  $SO(8)$  des rotations dans  $Cl_3$ . Et  $36 = 64 - 28 = 8 \times 9/2$  est le nombre des densités que l'on peut construire à partir de l'onde de l'électron [16].

une très belle géométrie, le tenseur de courbure, et une densité d'impulsion-énergie où l'on pouvait mettre tout et n'importe quoi. Il a donc cherché une théorie dans laquelle les deux côtés de ses équations auraient la même valeur du point de vue géométrique. Il a notamment étudié une variété avec torsion [112], notre approche est donc dans le sillage de la sienne.

Les surfaces étudiées depuis Euler avec les outils de la géométrie différentielle sont les objets à partir desquels ont été définis les variétés. Ces variétés sont orientables (ou non), comportent un bord (ou non). On peut penser, dans  $Cl_3^*$ , la variété d'espace-temps comme une hyper-surface (à 1 + 3 dimensions) dans ce groupe à 8 dimensions, présentant un bord (le cône de lumière), et deux faces : on peut voir l'hyper-surface "par-dessus", ce qui l'oriente, ou "par-dessous", avec l'autre orientation. C'est ce qui explique la différence d'orientation de l'espace-temps entre les calculs du chapitre 1, basés sur l'utilisation systématique des nombres complexes dans la géométrie de l'espace-temps et l'onde  $\phi$ , et les calculs de 3.9 n'utilisant que des grandeurs réelles. Mais si on peut distinguer deux faces, la variété d'espace-temps reste unique, avec une seule connexion, c'est pourquoi on ne peut qu'identifier nos deux connexions, avec les 64 égalités :

$$\Gamma_{\beta\mu}^\alpha = \Gamma_{\beta\mu}^\alpha. \quad (4.81)$$

On peut les regrouper en seulement 7 = 28/4 équations indépendantes :

$$2a_\mu^1 = \Gamma_{1\mu}^0 = D_\mu \cdot [\mathcal{S}_{(1)} - 2q\mathcal{A}_{(2)}] + 2m_g\rho\delta_\mu^2, \quad (4.82)$$

$$2a_\mu^2 = \Gamma_{2\mu}^0 = D_\mu \cdot [\mathcal{S}_{(2)} + 2q\mathcal{A}_{(1)}] - 2m_g\rho\delta_\mu^1, \quad (4.83)$$

$$2a_\mu^3 = \Gamma_{3\mu}^0 = D_\mu \cdot \mathcal{S}_{(3)}, \quad (4.84)$$

$$2a_\mu^4 = \Gamma_{3\mu}^2 = -D_\mu \cdot [\mathcal{S}'_{(1)} - 2q\mathcal{A}'_{(2)}], \quad (4.85)$$

$$2a_\mu^5 = \Gamma_{1\mu}^3 = -D_\mu \cdot [\mathcal{S}'_{(2)} + 2q\mathcal{A}'_{(1)}], \quad (4.86)$$

$$2a_\mu^6 = \Gamma_{2\mu}^1 = -D_\mu \cdot [\mathcal{S}'_{(3)} + 2q\mathcal{A}] - 2m_g\rho\delta_\mu^0, \quad (4.87)$$

$$2a_\mu^0 = \Gamma_{0\mu}^0 = D_\mu \cdot [-2\mathcal{T} + 2q\mathcal{A}'_{(3)}]. \quad (4.88)$$

On voit ainsi clairement les sept vecteurs  $a^n$ ,  $n = 0, 1, \dots, 6$  ainsi que l'absence de  $a^7$ . On appellera ces vecteurs les potentiels d'inertie. Les sept équations peuvent être considérées comme les équations du champ gravitationnel.

Les vecteurs se transformant selon (4.77) sont dits contravariants. Les vecteurs covariants, eux, se transforment comme  $\nabla$  :

$$\nabla = \sigma^\mu \partial_\mu = \overline{M} \sigma^\mu \widehat{M} \partial'_\mu, \quad (4.89)$$

avec toujours les mêmes  $\sigma^\mu$ . Ces relations, démontrées en A.4.4, n'y placent pas les opérateurs  $\partial'_\mu$  derrière  $\widehat{M}$  mais devant, parce que  $M$  y est considéré comme fixe. Néanmoins, pour un  $M$  variable, c'est (4.89) qui est démontré en A.4.4, parce que la preuve n'utilise que les propriétés algébriques des

dérivées partielles. Ceci donne :

$$\begin{aligned}\nabla\widehat{\phi} &= \sigma^\mu \partial_\mu \widehat{\phi} = \overline{M} \sigma^\mu \widehat{M} \partial'_\mu \widehat{\phi} \\ &= \overline{M} \sigma^\mu [\partial'_\mu (\widehat{M} \widehat{\phi}) - (\partial'_\mu \widehat{M}) \widehat{\phi}].\end{aligned}\quad (4.90)$$

Et on a :

$$\begin{aligned}(\partial'_\mu \widehat{M}) \widehat{M}^{-1} + \widehat{M} (\partial'_\mu \widehat{M}^{-1}) &= \partial'_\mu (\widehat{M} \widehat{M}^{-1}) = \partial'_\mu (1) = 0, \\ \partial'_\mu \widehat{M} &= -\widehat{M} (\partial'_\mu \widehat{M}^{-1}) \widehat{M}.\end{aligned}\quad (4.91)$$

Si on définit la dérivée  $\mathbf{D}$  par

$$\mathbf{D}\widehat{\phi} := [\nabla - \frac{1}{2}(\nabla \widehat{M}^{-1}) \widehat{M}] \widehat{\phi}, \quad (4.92)$$

on a nécessairement :

$$\overline{\phi}' \mathbf{D}' \widehat{\phi}' = \overline{\phi}' \left[ \nabla' - \frac{1}{2}(\nabla' \widehat{M}'^{-1}) \widehat{M}' \right] \widehat{\phi}', \quad (4.93)$$

$$M' = M^{-1}, \quad (4.94)$$

$$\overline{\phi}' \mathbf{D}' \widehat{\phi}' = \overline{\phi}' \left[ \nabla' - \frac{1}{2}(\nabla' \widehat{M}) \widehat{M}^{-1} \right] \widehat{\phi}'. \quad (4.95)$$

Par conséquent on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\phi}' (\mathbf{D}' \widehat{\phi}') &= \overline{\phi}' \left[ \nabla' - \frac{1}{2}(\nabla' \widehat{M}) \widehat{M}^{-1} \right] \widehat{\phi}' = \overline{\phi} \overline{M} \sigma^\mu \left[ \partial'_\mu (\widehat{M} \widehat{\phi}) - \frac{1}{2}(\partial'_\mu \widehat{M}) \widehat{\phi} \right] \\ &= \overline{\phi} \overline{M} \sigma^\mu \left[ (\partial'_\mu \widehat{M}) \widehat{\phi} + \widehat{M} (\partial'_\mu \widehat{\phi}) - \frac{1}{2}(\partial'_\mu \widehat{M}) \widehat{\phi} \right] \\ &= \overline{\phi} \overline{M} \sigma^\mu \left[ \widehat{M} \partial'_\mu \widehat{\phi} + \frac{1}{2}(\partial'_\mu \widehat{M}) \widehat{\phi} \right] = \overline{\phi} (\overline{M} \sigma^\mu \widehat{M} \partial'_\mu \widehat{\phi}) - \frac{1}{2} \overline{\phi} (\overline{M} \sigma^\mu \widehat{M} \partial'_\mu \widehat{M}^{-1}) \widehat{M} \widehat{\phi} \\ &= \overline{\phi} [\nabla - \frac{1}{2}(\nabla \widehat{M}^{-1}) \widehat{M}] \widehat{\phi} = \overline{\phi} (\mathbf{D} \widehat{\phi}).\end{aligned}\quad (4.96)$$

On peut donc dire que  $\mathbf{D}$  est **invariante de forme**. En condensé on appelle  $\mathbf{D}$  la dérivée invariante. Utilisant la réversion et la conjugaison de parité  $M \mapsto \widetilde{M}$  on a :

$$\widehat{\mathbf{D}}\phi = [\widehat{\nabla} - \frac{1}{2}(\widehat{\nabla} M^{-1}) M] \phi, \quad (4.97)$$

$$\overline{\phi} \widetilde{\mathbf{D}} = (\overline{\phi} \nabla) - \frac{1}{2} \overline{\phi} \widetilde{M} (\widetilde{M}^{-1} \nabla), \quad (4.98)$$

$$\widetilde{\phi} \overline{\mathbf{D}} = (\widetilde{\phi} \widehat{\nabla}) - \frac{1}{2} \widetilde{\phi} \widetilde{M} (\widetilde{M}^{-1} \widehat{\nabla}). \quad (4.99)$$

**L'onde quantique dans un champ de gravitation non nul suit exactement les mêmes équations d'onde invariantes que dans un champ**

**gravitationnel nul. Seule différence : l'opérateur différentiel  $\nabla$  est remplacé par l'invariant  $\mathbf{D}$ .** Celui-ci utilise les huit vecteurs  $a^n$  de (4.67) :

$$a^n = \sigma^\mu a_\mu^n, \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\hat{\phi} &= \left[ \nabla - \frac{1}{2}(\nabla \widehat{M}^{-1})\widehat{M} \right] \hat{\phi} \\ &= \left[ \nabla - \frac{1}{2}(a^0 - a^1\sigma_1 - a^2\sigma_2 - a^3\sigma_3 + a^4i\sigma_1 + a^5i\sigma_2 + a^6i\sigma_3 - a^7i) \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Ici on doit prendre en considération les 32 fonctions, y compris les quatre qui ne font pas partie de la connexion utilisée par la relativité générale.

Sous une similitude venant d'un dilatateur fixe  $N$  tel que :

$$\underline{x} = NxN^\dagger; \quad \nabla = \overline{N}\underline{\nabla}\widehat{N}, \quad (4.102)$$

on doit avoir, avec la covariance de  $\nabla$  et des termes de jauge :

$$\mathbf{D} = \overline{N}\underline{\mathbf{D}}\widehat{N}; \quad \nabla \widehat{M}^{-1} = \overline{N}\underline{\nabla}(\widehat{M}\widehat{N}^{-1})^{-1}. \quad (4.103)$$

Donc avec :

$$\underline{M} = MN^{-1}; \quad \widehat{\underline{M}} = \widehat{M}\widehat{N}^{-1}; \quad \widehat{M} = \widehat{\underline{M}}\widehat{N}, \quad (4.104)$$

on a :

$$(\nabla \widehat{M}^{-1})\widehat{M} = \overline{N}(\underline{\nabla} \widehat{\underline{M}}^{-1})\widehat{M} = \overline{N}(\underline{\nabla} \widehat{\underline{M}}^{-1})\widehat{\underline{M}}\widehat{N}, \quad (4.105)$$

$$\mathbf{D} = \overline{N}\underline{\nabla}\widehat{N} - \frac{1}{2}[\overline{N}(\underline{\nabla} \widehat{\underline{M}}^{-1})\widehat{\underline{M}}\widehat{N}] = \overline{N}\underline{\mathbf{D}}\widehat{N}, \quad (4.106)$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \underline{\nabla} - \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \widehat{\underline{M}}^{-1})\widehat{\underline{M}}. \quad (4.107)$$

On rappelle aussi qu'avec le  $M$  transformant  $x$  en  $x' = MxM^\dagger$  on a  $\phi' = M\phi$ , et avec le  $X$  de l'espace-temps invariant de (1.304) :

$$x' = MxM^\dagger = M(\phi X \phi^\dagger)M^\dagger = (M\phi)X(M\phi)^\dagger = \phi' X \phi'^\dagger. \quad (4.108)$$

Donc l'élément général  $X$  est indépendant de  $\phi$ , et donc l'ensemble des  $X$  peut encore être appelé l'espace-temps invariant.

## 4.2 Equations d'onde invariantes

Dans la dérivée invariante il y a deux termes contenant le même générateur  $i$  :  $b$  et  $a^7$ , parce que ce  $i$ , qui gouverne l'orientation de l'espace commute avec tout élément de  $Cl_3$  (raison : l'espace a un nombre impair de dimensions). Donc on n'a aucune raison de distinguer une transformation de jauge agissant par multiplication à droite, d'une transformation agissant par multiplication à gauche. Il faut donc identifier ces transformations l'une avec l'autre et se servir d'un unique vecteur potentiel. On va supposer :

$$b = -a^7; \quad 0 = a^7 + b, \quad (4.109)$$

et non pas  $b = a_7$ , parce que les deux "faces" de l'hyper-surface d'espace temps ont des orientations opposées l'une de l'autre. La somme  $a^7 + b$  utilise l'incorporation des charges dans les potentiels recommandée par T. Socroun [108]. On peut aussi dire : quand les constantes sont intégrées dans les potentiels, la gravitation est complètement à égalité avec les forces de jauge. On obtiendra les équations d'onde dans l'espace-temps tordu de la gravitation (torsion et gravitation sont une même chose) en remplaçant les dérivées partielles par les termes de jauge et les termes de la connexion. Comme les équations d'onde étudiées dans les précédents chapitre peuvent être considérées comme des approximations des équations complètes dans le cas où le champ de gravitation est négligeable, on peut obtenir ces approximations en supprimant les  $a^n$ ,  $n = 0, 1, \dots, 6$  qui sont les termes de la connexion. On pose :

$$X + iY := \frac{1}{2}[-a^0 + (a^j + ia^{3+j})\sigma_j]. \quad (4.110)$$

Pour l'onde leptonique (2.148) et (2.149) deviennent :

$$0 = [\nabla + X + iY + i(b + 3w^3 + l_v)]\hat{L}^1, \quad (4.111)$$

$$0 = [\hat{\nabla} + \hat{X} - i\hat{Y} - i(2\hat{b} + r\hat{v})]R^1, \quad (4.112)$$

$$0 = [\tilde{\nabla} + X - iY + i(b - 3w^3 + m_l v)]\bar{L}^8, \quad (4.113)$$

$$0 = [\bar{\nabla} + \hat{X} + i\hat{Y} - i(2p\hat{b} + m_r \hat{v})]\tilde{R}^8. \quad (4.114)$$

Donc ceci vient de :

$$0 = \left[ \nabla + X + iY - i\frac{b}{2} + i\left(\frac{3}{2}b + 3w^3 + l_v\right) \right] \hat{L}^1, \quad (4.115)$$

$$0 = \left[ \hat{\nabla} + \hat{X} - i\hat{Y} + i\frac{\hat{b}}{2} - i\left(\frac{5}{2}\hat{b} + r\hat{v}\right) \right] R^1, \quad (4.116)$$

$$0 = \left[ \tilde{\nabla} + X - iY + i\frac{b}{2} + i\left(\frac{1}{2}b - 3w^3 + m_l v\right) \right] \bar{L}^8, \quad (4.117)$$

$$0 = \left[ \bar{\nabla} + \hat{X} + i\hat{Y} - i\frac{\hat{b}}{2} - i\left(\frac{4p-1}{2}\hat{b} + m_r \hat{v}\right) \right] \tilde{R}^8. \quad (4.118)$$

Pour les quarks on obtient à la place de (3.116) à (3.119) et pour  $n = 2, 3, 4$  :

$$0 = \left[ \nabla + X + iY + i\left(-\frac{b}{3} + 3w_n^3 - 3h_{L_{n+1}}^{d3} + 3h_{L_{n-1}}^{d3} + m_1 v_q\right) \right] \hat{L}^n,$$

$$0 = \left[ \hat{\nabla} + \hat{X} - i\hat{Y} + i\left(\frac{2\hat{b}}{3} + 3\hat{h}_{R_{n+1}}^{d3} - 3\hat{h}_{R_{n-1}}^{d3} + m_2 \hat{v}_q\right) \right] R^n, \quad (4.119)$$

$$0 = \left[ \tilde{\nabla} + X - iY + i\left(-\frac{b}{3} - 3w_n^3 - 3h_{L_{n+1}}^{u3} + 3h_{L_{n-1}}^{u3} + m_3 v_q\right) \right] \bar{L}^{3+n},$$

$$0 = \left[ \bar{\nabla} + \hat{X} + i\hat{Y} + i\left(-\frac{4\hat{b}}{3} + 3\hat{h}_{R_{n+1}}^{u3} - 3\hat{h}_{R_{n-1}}^{u3} + m_4 \hat{v}_q\right) \right] \tilde{R}^{3+n}.$$

C'est équivalent à :

$$\mathbf{D} := \nabla + X + iY - i\frac{\mathbf{b}}{2}, \quad (4.120)$$

$$0 = \left[ \mathbf{D} + i\left(\frac{\mathbf{b}}{6} + 3\mathbf{w}_n^3 - 3\mathbf{h}_{L_{n+1}}^{d3} + 3\mathbf{h}_{L_{n-1}}^{d3} + m_1\mathbf{v}_q\right) \right] \widehat{L}^n, \quad (4.121)$$

$$0 = \left[ \widehat{\mathbf{D}} + i\left(\frac{\widehat{\mathbf{b}}}{6} + 3\widehat{\mathbf{h}}_{R_{n+1}}^{d3} - 3\widehat{\mathbf{h}}_{R_{n-1}}^{d3} + m_2\widehat{\mathbf{v}}_q\right) \right] R^n, \quad (4.122)$$

$$0 = \left[ \widetilde{\mathbf{D}} + i\left(-\frac{5\mathbf{b}}{6} - 3\mathbf{w}_n^3 - 3\mathbf{h}_{L_{n+1}}^{u3} + 3\mathbf{h}_{L_{n-1}}^{u3} + m_3\mathbf{v}_q\right) \right] \overline{L}^{3+n}, \quad (4.123)$$

$$0 = \left[ \overline{\mathbf{D}} + i\left(-\frac{5\widehat{\mathbf{b}}}{6} + 3\widehat{\mathbf{h}}_{R_{n+1}}^{u3} - 3\widehat{\mathbf{h}}_{R_{n-1}}^{u3} + m_4\widehat{\mathbf{v}}_q\right) \right] \widetilde{R}^{3+n}. \quad (4.124)$$

On peut constater des ressemblances et des différences en comparant avec les équations d'onde des leptons ; les termes venant des potentiels d'inertie sont les mêmes, la gravitation fonctionne de la même manière avec n'importe quelle onde matérielle : **la gravitation est universelle**. Le secteur des quarks comporte plus de termes de jauge, parce que les leptons sont insensibles aux interactions fortes. **Le secteur des quarks semble plus simple et plus régulier que le secteur des leptons** : Les termes de jauge du groupe  $U(1)$  sont aussi plus simplifiés par les termes différentiels invariants liés à la gravitation dans le secteur des quarks : seulement deux coefficients demeurent comme facteurs du potentiel chirale  $\mathbf{b}$ ,  $1/6$  et  $-5/6$ .

#### 4.2.1 Quantification des charges

Le modèle standard a besoin d'utiliser la renormalisation des charges avant de pouvoir comparer les calculs théoriques et les valeurs expérimentales des charges électriques. Dans le cas des interactions faibles le succès de cette renormalisation requiert l'annulation d'anomalies venant de la chiralité. Cette annulation des anomalies résulte du fait que la somme des charges de toutes les particules d'une génération est nulle. Comme ces charges viennent des charges faibles on obtiendra la suppression des anomalies en imposant, comme le fait le modèle standard, que la somme de tous les coefficients du potentiel de jauge  $\mathbf{b}$  soit nul :

$$0 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - \frac{4p-1}{2} + 3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{5}{6} - \frac{5}{6}\right) = -2p - 4$$

$$p = -2. \quad (4.125)$$

On peut remarquer que ceci impliquerait, en l'absence des quarks, que la somme ne serait nulle qu'avec  $p = 0$ , c'est-à-dire en l'absence des monopôles magnétiques. On peut donc dire que l'existence des monopôles magnétiques

est liée à l'existence des quarks. On a ensuite, dans le secteur des leptons :

$$0 = \left[ \mathbf{D} + i \left( \frac{3}{2} \mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{l}\mathbf{v} \right) \right] \hat{L}^1, \quad (4.126)$$

$$0 = \left[ \mathbf{D} + i \left( \frac{5}{2} \mathbf{b} + \mathbf{r}\mathbf{v} \right) \right] \hat{R}^1, \quad (4.127)$$

$$0 = \left[ \tilde{\mathbf{D}} + i \left( \frac{1}{2} \mathbf{b} - 3\mathbf{w}^3 + m_l \mathbf{v} \right) \right] \bar{L}^8, \quad (4.128)$$

$$0 = \left[ \tilde{\mathbf{D}} - i \left( -\frac{9}{2} \mathbf{b} + m_r \mathbf{v} \right) \right] \bar{R}^8. \quad (4.129)$$

La somme des coefficients du potentiel chirale est :

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = 0. \quad (4.130)$$

Les égalités (4.125) et (4.130) ne sont possibles qu'avec les valeurs obtenues pour les charges des quarks, donc seulement avec le choix du coefficient  $-1/3$  dans le projecteur  $P_0$ , ce qui implique que le choix fait à cet endroit n'est pas arbitraire mais contraint par les résultats qui en découlent. On peut aussi remarquer dans (4.121) à (4.124) que les coefficients du potentiel  $\mathbf{b}$  sont les mêmes pour les ondes droites et gauches des équations d'onde de chaque quark. Ceci aussi résulte seulement du choix du coefficient  $-1/3$  dans l'opérateur  $P_0$ .

Partant de l'interaction entre un monopôle magnétique et un électron, Dirac obtint une formule reliant les charges électrique  $e$  et magnétique  $g$  à la constante de Planck :

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{1}{2}. \quad (4.131)$$

On a alors :

$$\frac{e}{2} = \frac{e^2 g}{\hbar c} = \alpha g; \quad g = \frac{e}{2\alpha}, \quad (4.132)$$

où  $\alpha$  est la constante de structure fine. Cette formule, seule égalité justifiant la quantification des charges, a été obtenue de multiples manières [70][91]. La manière la plus élégante de l'obtenir, du point de vue de la physique quantique, a été celle de Lochak. Il utilisait le fait que, pour un potentiel électrique en  $1/r$ , il existe une symétrie supplémentaire qui s'ajoute à l'invariance sous les rotations et la transforme en une invariance sous le groupe  $SO(4)$  [1]. La continuité de l'onde du monopôle magnétique sous le groupe  $SO(4)$  permettait alors à Lochak d'obtenir la formule (4.131) [89] [90] [91].

Les multiples manières d'obtenir la formule de Dirac, y compris celle de Lochak, ont toutes en commun une même supposition, à savoir qu'un monopôle magnétique puisse agir par un potentiel de type  $A$  sur une charge électrique  $e$ , ou qu'une charge électrique puisse agir par un potentiel de type  $B$  sur une charge magnétique  $g$ . Or il y a une difficulté dans ces raisonnements, parce que les potentiels ne sont pas de purs outils de calculs,

ils font partie du champ électromagnétique quantique. Les lois de Maxwell impliquent qu'une charge électrique crée un potentiel du type électrique, une charge magnétique un potentiel du type magnétique. De plus ce sont les potentiels qui sont dans les équations d'onde, et non les champs. Un monopôle magnétique ne voit que le terme de potentiel  $B$  correspondant à ses propriétés d'invariance, et s'il n'a pas de charge électrique, il ne peut pas réagir au potentiel  $A$  créé par les charges électriques. La difficulté se résout cependant, grâce à la rotation que réalise l'angle de Weinberg-Salam dans le plan complexe  $(A, Z^0)$  avec (2.212) :  $A + iZ^0 = e^{-i\theta_W}(B + iW)$ . Il en résulte qu'un potentiel  $A^0 = e/r$  créé par une charge électrique  $e$  s'accompagne d'un potentiel :

$$B^0 = \cos(\theta_W)A^0 = \frac{\sqrt{3}e}{2r} = \frac{e'}{r}; \quad e' = \frac{\sqrt{3}}{2}e. \quad (4.133)$$

On obtient alors, à la place de la relation de Dirac :

$$\frac{1}{2} = \frac{e'g}{\hbar c}; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{eg}{\hbar c}; \quad \frac{e}{\sqrt{3}} = \frac{e^2g}{\hbar c} = \alpha g, \quad (4.134)$$

où  $\alpha$  est la constante de structure fine, ce qui donne :

$$\frac{e^2}{3} = \alpha^2 g^2 = \frac{e^2}{3\hbar c} \hbar c = \frac{\alpha}{3} \hbar c; \quad |g| = \sqrt{\frac{\hbar c}{3\alpha}} \approx 79.117771e; \quad |e| = \sqrt{\alpha \hbar c}. \quad (4.135)$$

Cette valeur de la charge du monopôle magnétique est nettement supérieure à la valeur résultant du calcul de Dirac.

### 4.3 Lien double avec la densité lagrangienne

Pour pouvoir obtenir les mêmes propriétés qu'en espace-temps plat, il est nécessaire de remplacer partout les dérivées partielles utilisées dans les premiers chapitres par de nouvelles dérivations prenant en compte la covariance, ou la contravariance ou l'invariance des objets sur lesquels agissent ces dérivées partielles. L'invariance de forme des équations d'onde nécessite le remplacement de l'opérateur  $\nabla$  par l'opérateur invariant  $\mathbf{D}$  de (4.120), avec :

$$\begin{aligned} X_0 &= a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3; \quad Y_0 = a_1^4 + a_2^5 + a_3^6, \\ X_1 &= a_0^1 + a_1^0 + a_3^5 - a_2^6; \quad Y_1 = a_0^4 + a_2^3 - a_3^2, \\ X_2 &= a_0^2 + a_2^0 + a_1^6 - a_3^4; \quad Y_2 = a_0^5 + a_3^1 - a_1^3, \\ X_3 &= a_0^3 + a_3^0 + a_2^4 - a_1^5; \quad Y_3 = a_0^6 + a_1^2 - a_2^1. \end{aligned} \quad (4.136)$$

Pour l'onde gauche  $L^1 = \phi(1-\sigma_3)/2$  et droite  $R^1 = \phi(1+\sigma_3)/2$  de l'électron, l'équation invariante de forme (1.149) devient :

$$0 = \bar{L}^1(\mathbf{D}\hat{L}^1)\sigma_{21} + \bar{L}^1\left(\frac{3\mathbf{b}}{2} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{lv}\right)\hat{L}^1, \quad (4.137)$$

$$0 = \bar{R}^1(\mathbf{D}\hat{R}^1)\sigma_{21} + \bar{R}^1\left(\frac{5\mathbf{b}}{2} + \mathbf{rv}\right)\hat{R}^1, \quad (4.138)$$

Ces équations s'écrivent :

$$0 = [-i\eta^{1\dagger}(\nabla + X + iY)\eta^1 + \eta^{1\dagger}(\mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{lv})\eta^1](\sigma_1 - i\sigma_2), \quad (4.139)$$

$$0 = [i\hat{\xi}^{1\dagger}(\nabla + X + iY)\hat{\xi}^1 + \hat{\xi}^{1\dagger}(2\mathbf{b} + \mathbf{rv})\hat{\xi}^1](\sigma_1 + i\sigma_2). \quad (4.140)$$

Elles sont donc équivalentes, si  $X = 0$  à :

$$0 = -i\eta^{1\dagger}(\nabla\eta^1) + \eta^{1\dagger}(Y + \mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{lv})\eta^1, \quad (4.141)$$

$$0 = i\hat{\xi}^{1\dagger}(\nabla\hat{\xi}^1) + \hat{\xi}^{1\dagger}(-Y + 2\mathbf{b} + \mathbf{rv})\hat{\xi}^1. \quad (4.142)$$

Ces équations se déduisent de manière évidente des équations d'onde sous la forme :

$$0 = -i\nabla\eta^1 + (Y + \mathbf{b} + 3\mathbf{w}^3 + \mathbf{lv})\eta^1, \quad (4.143)$$

$$0 = i\nabla\hat{\xi}^1 + (-Y + 2\mathbf{b} + \mathbf{rv})\hat{\xi}^1. \quad (4.144)$$

Par contre, lorsque  $X \neq 0$ , ces équations sous forme usuelle ne se déduisent pas des équations sous forme invariante (4.141) et (4.142) par équations de Lagrange, parce que, si l'on considère les seconds membres des équations invariantes comme des densités lagrangiennes, ces densités ne sont plus à valeur réelle, mais à valeur complexe, ceci venant de ce que  $\mathbf{D}^\dagger \neq \mathbf{D}$ . Avec dorénavant  $X = 0$  et :

$$\mathbf{I}^1 := \sigma^\mu(Y_\mu + \mathbf{b}_\mu + 3\mathbf{w}_\mu^3 + \mathbf{lv}_\mu), \quad (4.145)$$

l'équation d'onde gauche de l'électron s'écrit :

$$0 = (-i\nabla + \mathbf{I}^1)\eta^1. \quad (4.146)$$

En prenant l'adjoint, on obtient :

$$0 = i(\nabla\eta^1)^\dagger + \eta^{1\dagger}\mathbf{I}^1. \quad (4.147)$$

Lorsque  $X$  est nul, on se retrouve dans le cas du formalisme lagrangien étudié au chapitre 2. Gardant la définition de la densité lagrangienne, on écrira :

$$0 = \mathcal{L}_L^1 = -i\eta^{1\dagger}(\nabla\eta^1) + \mathbf{I}_\mu^1\mathbf{D}_L^{1\mu}, \quad (4.148)$$

avec une densité lagrangienne qui n'est plus réelle mais complexe. La partie réelle, qui correspond à la densité lagrangienne précédemment étudiée, vérifie :

$$2\Re(\mathcal{L}^1) = -i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1) + i(\partial_\mu\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1 + 2\mathbf{l}_\mu^1 D_L^{1\mu}. \quad (4.149)$$

Le double lien logique entre les équations d'onde et la densité lagrangienne réelle subsiste, car les termes  $X_\mu$  sont absents de la densité lagrangienne réelle et l'équation d'onde qu'on obtient en appliquant les équations de Lagrange à partir de la densité lagrangienne réelle donnent une équation d'onde complète et invariante. Le changement par rapport à l'espace-temps plat vient uniquement de la partie imaginaire  $iX$ , le courant gauche  $D_L^1$  se conserve.

Il existe 15 autres équations similaires pour les 15 autres spineurs chiraux du modèle standard. D'une équation à l'autre, les termes  $X_\mu + iY_\mu$  sont constants (universalité de la gravitation), et les  $\eta^n$ ,  $\nabla$ ,  $\sigma^\mu$  et  $D_L^{n\mu}$  doivent être remplacés par des  $\xi^n$ ,  $\widehat{\nabla}$ ,  $\widehat{\sigma}^\mu$ ,  $\widehat{D}_R^{n\mu}$  quand on passe des ondes droites aux ondes gauches. Moyennant ces changements le double lien logique entre équations d'onde et densités lagrangiennes se maintient, dès que les  $X_\mu$  sont nuls, les équations de Lagrange permettant alors comme précédemment de passer des équations d'onde sous forme ordinaire aux équations d'onde sous forme complètement invariantes, par multiplication à gauche par  $\bar{\eta}^n$  ou  $\bar{\xi}^n$ . Le mécanisme lagrangien reste donc d'origine purement algébrique et fonctionne dans tout champ gravitationnel tel que  $X_\mu = 0$ .

Pour les sept autres ondes gauches il suffit de remplacer le vecteur  $\mathbf{l}^1$  par le vecteur approprié  $\mathbf{l}^n$  :

$$\mathbf{l}^8 = Y + \mathbf{b} - 3\mathbf{w}^3 + m_l \mathbf{v}, \quad (4.150)$$

$$\mathbf{l}^n = Y - \frac{\mathbf{b}}{3} + 3\mathbf{w}_n^3 - 3\mathbf{h}_{L\underline{n+1}}^{d3} + 3\mathbf{h}_{L\underline{n-1}}^{d3} + m_1 \mathbf{v}_q, \quad (4.151)$$

$$\mathbf{l}^{3+n} = Y - \frac{\mathbf{b}}{3} - 3\mathbf{w}_n^3 - 3\mathbf{h}_{L\underline{n+1}}^{u3} + 3\mathbf{h}_{L\underline{n-1}}^{u3} + m_3 \mathbf{v}_q, \quad (4.152)$$

pour  $n = 2, 3, 4$ . On obtient alors :

$$0 = -i\eta^{n\dagger}(\nabla\eta^n) + i(\nabla\eta^n)^\dagger\eta^n + 2\mathbf{l}_\mu^n D_L^{n\mu}, \quad (4.153)$$

$$0 = -i\partial_\mu D_L^{n\mu}, \quad (4.154)$$

$$0 = \nabla\eta^n + i\mathbf{l}^n\eta^n, \quad n = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.155)$$

Puis, pour les ondes droites on fait de même, avec le simple remplacement de  $\widehat{L}^n$  par  $R^n$ , de  $\widehat{L}^{4+n}$  par  $\widehat{R}^{4+n}$  pour  $n = 1, 2, 3, 4$ , de  $\eta^n$  par  $\xi^n$  pour  $n = 1, \dots, 8$ , plus un changement de signe pour  $Y$ . Et on utilise la conjugaison de parité  $P : M \mapsto \widehat{M}$ , automorphisme principal de  $Cl_3$ . On pose maintenant,

pour  $n = 2, 3, 4$  :

$$\mathbf{r}^1 = -Y + 2\mathbf{b} + \mathbf{r}\mathbf{v}; \quad \mathbf{r}^8 = -Y - 4\mathbf{b} + m_r\mathbf{v}, \quad (4.156)$$

$$\mathbf{r}^n = -Y + \frac{2}{3}\mathbf{b} + 3\mathbf{h}_{Rn+1}^{d3} - 3\mathbf{h}_{Rn-1}^{d3} + m_2\mathbf{v}_q, \quad (4.157)$$

$$\mathbf{r}^{3+n} = -Y - \frac{4}{3}\mathbf{b} + 3\mathbf{h}_{Rn+1}^{u3} - 3\mathbf{h}_{Rn-1}^{u3} + m_4\mathbf{v}_q. \quad (4.158)$$

Et on obtient :

$$0 = -i\xi^{n\dagger}(\widehat{\nabla}\xi^n) + i(\widehat{\nabla}\xi^n)^\dagger\xi^n + 2\mathbf{r}_\mu^n D_R^{n\mu}, \quad (4.159)$$

$$0 = -i\partial_\mu D_R^{n\mu}, \quad (4.160)$$

$$0 = \widehat{\nabla}\xi^n + i\widehat{\mathbf{r}}^n\xi^n, \quad n = 1, \dots, 8. \quad (4.161)$$

On voit une complète ressemblance entre les équations des ondes gauches et celles des ondes droites. Elles ne diffèrent que par les termes de jauge, par le remplacement des  $\sigma^\mu$  par des  $\widehat{\sigma}^\mu$ , et par un changement de signe inattendu pour  $Y$ . La densité lagrangienne relative à  $L^1$  conserve exactement la forme utilisée en (2.168). Les équations de Lagrange montrent donc comment les équations (2.172) et (2.173) sont équivalentes à l'équation (2.174) de  $L^1$ . A la très ancienne question : pourquoi il existe un mécanisme lagrangien, est-ce qu'un tel "principe extrémal", au-dessus des lois physiques, existe ? La réponse est non, parce que ce qui se passe est très simple : puisque  $\phi = R^1 + L^1$  est inversible,<sup>4</sup> et si les  $X_\mu$  sont nuls, l'équation d'onde de  $L^1$  sous la forme usuelle (2.176) est équivalente à la forme invariante de l'équation d'onde de  $L^1$ , où la partie réelle cliffordienne vérifie l'égalité  $0 = \mathcal{L}^1$ . La forme usuelle (2.176) de l'équation d'onde est équivalente aux quatre équations numériques réelles (2.171) et suivantes, qui sont exactement les équations de Lagrange relatives aux quatre variables réelles de  $L^1$ . Ceci fonctionne pour chaque onde spinorielle  $L^n$  et  $R^n$ . C'est pourquoi le mécanisme lagrangien est la manière automatique de procéder pour passer de l'équation lagrangienne à chaque équation d'onde numérique sous la forme usuelle. Ceci fonctionne sans aucune justification supplémentaire venant d'une intégration par parties et de l'annulation de termes à la frontière du domaine d'intégration. C'est simplement la conséquence de la structure de l'algèbre de Clifford, une propriété purement algébrique qui ne dépend que de la dimension et de la signature de l'espace-temps, et donc de sa géométrie. Et donc tout ceci est conforme à l'idée de base de la relativité générale, qui

4. L'existence d'un inverse n'est pas générale puisque l'onde est à valeur dans un anneau, comportant des diviseurs de zéro, pas dans un corps, mais la propriété d'inversibilité est satisfaite en tout point pour toutes les solutions qui ont été calculées et utilisées à partir de l'équation de Dirac améliorée. Cette condition d'inversibilité est robuste, parce que le déterminant de  $\phi(\mathbf{x})$  est un module de nombre complexe, dont le carré est une somme de deux carrés, qui ne s'annule que si chacun des deux termes est nul (les invariants  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ). En outre, le déterminant étant une fonction continue, si le déterminant ne s'annule pas en un point, il est nécessairement non nul au voisinage de ce point.

est la liaison entre gravitation et géométrie de l'espace-temps. La variété d'espace-temps hérite (mais seulement dans le cas particulier  $X = 0$ ) du mécanisme lagrangien obtenu pour l'électron dans le cadre de la relativité restreinte, parce que tous les espaces-temps tangents à la variété d'espace-temps, en n'importe quel point-événement, ont même dimension et même signature que l'espace-temps de la relativité restreinte.

## 4.4 Impulsion-énergie et moment cinétique

Les propriétés de conservation de l'impulsion-énergie et du moment cinétique résultent de l'invariance de la densité lagrangienne sous le groupe des translations et sous le groupe multiplicatif  $Cl_3^*$  généralisant  $SU(2)$ . Les équations d'onde étant invariantes de forme sous les deux sortes de transformations, on a seulement quelques petits changements par rapport aux précédents chapitres. Dans le cas de l'onde leptonique les tenseurs  $T$  et  $V$  sont ceux de (2.225) et (2.226). On a donc :

$$T_\lambda^\mu = \frac{m}{k\mathbf{l}} T_{L\lambda}^{1\mu} + \frac{m}{k\mathbf{r}} T_{R\lambda}^{1\mu} + \frac{m}{km_l} T_{L\lambda}^{8\mu} + \frac{pm}{km_r} T_{R\lambda}^{8\mu}, \quad (4.162)$$

$$V_\lambda^\mu = \frac{m}{k\mathbf{l}} T_{L\lambda}^{1\mu} - \frac{m}{k\mathbf{r}} T_{R\lambda}^{1\mu} + \frac{m}{km_l} T_{L\lambda}^{8\mu} - \frac{pm}{km_r} T_{R\lambda}^{8\mu}. \quad (4.163)$$

Le tenseur d'impulsion-énergie  $T$  est donc toujours la somme de quatre termes, un pour chaque spineur de l'onde leptonique (et somme de douze termes dans le cas des quarks). Il suffit donc de calculer l'un des termes et de transposer pour les autres. On calcule le terme gauche de l'électron, l'invariance de la densité lagrangienne sous les translations implique :

$$\mathcal{L}_L^1 = \Re[-i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\mu\eta^1 + i\mathbf{l}_\mu^1\eta^1)], \quad (4.164)$$

$$\begin{aligned} T_{L\lambda}^{1\mu} &= \Re[-i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\lambda\eta^1 + i\mathbf{l}_\lambda^1\eta^1)] + \delta_\lambda^\mu \mathcal{L}_L^1 \\ &= \Re[-i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\lambda\eta^1 + i\mathbf{l}_\lambda^1\eta^1)]. \end{aligned} \quad (4.165)$$

On a donc :

$$-i\eta^{1\dagger}(\nabla\eta^1) = -i\eta^{1\dagger}(-i\mathbf{l}^1\eta^1) = -\eta^{1\dagger}\mathbf{l}_\mu^1\sigma^\mu\eta^1 = -\mathbf{l}_\mu^1 D_L^{1\mu}, \quad (4.166)$$

$$2T_{L\lambda}^{1\mu} = -i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu\partial_\lambda\eta^1 + i(\partial_\lambda\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1 + 2\mathbf{l}_\lambda^1 D_L^{1\mu}. \quad (4.167)$$

Ensuite on se sert de l'équation d'onde de  $\eta^1$ , qui donne :

$$\nabla\eta^1 = -i\mathbf{l}^1\eta^1; \quad \partial_\mu D_L^{1\mu} = -X_\mu D_L^{1\mu}, \quad (4.168)$$

$$\begin{aligned} 2\partial_\mu T_{L\lambda}^{1\mu} &= -i(\nabla\eta^1)^\dagger\partial_\lambda\eta^1 - i\eta^{1\dagger}\partial_\lambda(\nabla\eta^1) \\ &\quad + i\partial_\lambda(\nabla\eta^1)^\dagger\eta^1 + i(\partial_\lambda\eta^{1\dagger})\nabla\eta^1 + (\partial_\mu\mathbf{l}_\lambda^1)D_L^{1\mu} \end{aligned} \quad (4.169)$$

On obtient donc :

$$\partial_\mu T_{L\lambda}^{1\mu} = (\partial_\mu\mathbf{l}_\lambda^1 - \partial_\lambda\mathbf{l}_\mu^1)D_L^{1\mu}, \quad (4.170)$$

$$\partial_\mu T_L^{1\mu} = [(\partial_\mu\mathbf{l}_\lambda^1 - \partial_\lambda\mathbf{l}_\mu^1)D_L^{1\mu}]\sigma^\lambda. \quad (4.171)$$

De même, on obtient pour les autres parties de l'onde leptonique :

$$\partial_\mu T_R^{1\mu} = [(\partial_\mu \mathbf{r}_\lambda^1 - \partial_\lambda \mathbf{r}_\mu^1) D_R^{1\mu}] \sigma^\lambda, \quad (4.172)$$

$$\partial_\mu T_L^{8\mu} = [(\partial_\mu \mathbf{l}_\lambda^8 - \partial_\lambda \mathbf{l}_\mu^8) D_L^{8\mu}] \sigma^\lambda, \quad (4.173)$$

$$\partial_\mu T_R^{8\mu} = [(\partial_\mu \mathbf{r}_\lambda^8 - \partial_\lambda \mathbf{r}_\mu^8) D_R^{8\mu}] \sigma^\lambda. \quad (4.174)$$

En sommant sur les quatre parties de l'onde leptonique, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu &= \frac{m}{k\mathbf{l}} [(\partial_\mu \mathbf{l}_\lambda^1 - \partial_\lambda \mathbf{l}_\mu^1) D_L^{1\mu}] \sigma^\lambda + \frac{m}{k\mathbf{r}} [(\partial_\mu \mathbf{r}_\lambda^1 - \partial_\lambda \mathbf{r}_\mu^1) D_R^{1\mu}] \sigma^\lambda \quad (4.175) \\ &+ \frac{m}{km_l} [(\partial_\mu \mathbf{l}_\lambda^8 - \partial_\lambda \mathbf{l}_\mu^8) D_L^{8\mu}] \sigma^\lambda + \frac{pm}{km_r} [(\partial_\mu \mathbf{r}_\lambda^8 - \partial_\lambda \mathbf{r}_\mu^8) D_R^{8\mu}] \sigma^\lambda \\ &= [(\partial_\mu Y_\lambda - \partial_\lambda Y_\mu) \left( \frac{m}{k\mathbf{l}} D_L^{1\mu} - \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^{1\mu} + \frac{m}{km_l} D_L^{8\mu} - \frac{pm}{km_r} D_R^{8\mu} \right) \\ &+ [\partial_\mu (b_\lambda + 3w_\lambda^3) - \partial_\lambda (b_\mu + 3w_\mu^3)] \frac{m}{k\mathbf{l}} D_L^{1\mu} \\ &+ [\partial_\mu (2b_\lambda) - \partial_\lambda (2b_\mu)] \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^{1\mu} \quad (4.176) \\ &+ [\partial_\mu (b_\lambda - 3w_\lambda^3) - \partial_\lambda (b_\mu - 3w_\mu^3)] \frac{m}{km_l} D_L^{8\mu} \\ &+ [\partial_\mu (-4b_\lambda) - \partial_\lambda (-4b_\mu)] \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^{1\mu} \\ &+ \frac{m}{k} (\partial_\mu v_\lambda - \partial_\lambda v_\mu) (D_L^{1\mu} + D_R^{1\mu} + D_L^{8\mu} + D_R^{8\mu})] \sigma^\lambda. \end{aligned}$$

Il apparait un seul terme de plus par rapport à ce qu'on a obtenu dans le chapitre 2, le premier terme, avec un champ de courbure :

$$C_{\mu\nu} = \partial_\mu Y_\nu - \partial_\nu Y_\mu. \quad (4.177)$$

Ce champ n'est pas lié au courant de probabilité, mais à un courant similaire, distinguant le rôle des ondes droites et gauches :

$$K_l := \frac{m}{k\mathbf{l}} D_L^1 - \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^1 + \frac{m}{km_l} D_L^8 - \frac{m}{km_r} D_R^8. \quad (4.178)$$

On obtient donc, à la place de (2.253) :

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^\mu &= \left[ qF_{\mu\lambda}^e (\mathbf{J}^\mu + \frac{mp}{km_r} D_R^{8\mu}) + C_{\mu\lambda} K_l^\mu \right. \\ &\left. + iqF_{\mu\lambda}^m \left( \frac{m}{k\mathbf{l}} D_L^{1\mu} - \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^{1\mu} - 2\frac{m}{km_l} D_L^{8\mu} - p\frac{m}{km_r} D_R^{8\mu} \right) + \frac{m}{k} G_{\mu\lambda} \mathbf{J}_l^\mu \right] \sigma^\lambda. \end{aligned} \quad (4.179)$$

Lorsque l'électron est seul, lorsque les interactions faibles ne sont pas en jeu, ni les champs  $C$  et  $G$ , il reste :

$$\partial_\mu T^\mu = qF_{\mu\lambda}^e \left( \frac{m}{k\mathbf{l}} D_L^{1\mu} + \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^{1\mu} \right) \sigma^\lambda, \quad (4.180)$$

Ceci donne la force de Lorentz (1.328) agissant sur le courant électrique  $\mathbf{j}_e = e(\frac{m}{k\mathbf{l}} D_R^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}} D_L^1)$  de l'électron. On obtient bien l'électromagnétisme classique à la limite des champs gravitationnels faibles.

#### 4.4.1 Densité de probabilité

La composante  $T_0^0$  du tenseur d'impulsion-énergie vérifie :

$$kT_0^0 = \Re \left[ -i \left( \frac{m}{1} \eta^{1\dagger} D_0 \eta^1 + \frac{m}{\mathbf{r}} \xi^{1\dagger} D_0 \xi^1 + \frac{m}{m_l} \eta^{8\dagger} D_0 \eta^8 + \frac{m}{m_r} \xi^{8\dagger} D_0 \xi^8 \right) \right]. \quad (4.181)$$

Pour une solution de l'équation d'onde d'énergie  $E$  de l'onde complète, telle que :

$$-iD_0 \xi^1 = \frac{E}{\hbar c} \xi^1(x); \quad -iD_0 \xi^8 = \frac{E}{\hbar c} \xi^8(x), \quad (4.182)$$

$$-iD_0 \eta^1 = \frac{E}{\hbar c} \eta^1(x); \quad -iD_0 \eta^8 = \frac{E}{\hbar c} \eta^8(x). \quad (4.183)$$

On a alors, comme au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{E}{\hbar c} \left( \frac{m}{k1} \eta^{1\dagger} \eta^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}} \xi^{1\dagger} \xi^1 + \frac{m}{km_l} \eta^{8\dagger} \eta^8 + \frac{m}{km_r} \xi^{8\dagger} \xi^8 \right) \\ &= \frac{E}{\hbar c} \left( \frac{m}{k1} D_L^1 + \frac{m}{k\mathbf{r}} D_R^1 + \frac{m}{km_l} D_L^8 + \frac{m}{km_r} D_R^8 \right)^0 = \frac{E}{\hbar c} \mathbf{J}^0, \end{aligned} \quad (4.184)$$

notant toujours les courants pondérés  $\mathbf{J}$  avec les poids relatifs  $\frac{m}{k1}$ ,  $\frac{m}{k\mathbf{r}}$ ,  $\frac{m}{km_l}$  et  $\frac{m}{km_r}$ . La raison de l'existence d'une probabilité en mécanique quantique reste donc l'équivalence entre masse d'inertie et masse gravitante, qui implique :

$$E = \iiint dv T_0^0; \quad \iiint \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} dv = 1. \quad (4.185)$$

On notera que, si l'on ne peut plus négliger les termes  $X_\mu$ , qui font sortir les équations d'onde du cas lagrangien, ni l'impulsion-énergie, ni les courants ne sont plus conservés. Les termes en  $X_\mu$  peuvent être en jeu dans les champs gravitationnels forts au voisinage des trous noirs. Même dans le cas de champs faibles, le fait que le champ  $C$  agisse sur une différence entre courants gauches et courants droits peut avoir eu une importance dans la préférence des interactions faibles pour les courants gauches.

#### 4.4.2 Quantification du moment cinétique

L'approche est exactement celle de la section 2.5. L'invariance du tenseur d'impulsion-énergie  $V$  sous le groupe  $Cl_3^*$ , avec en outre la normalisation du courant de probabilité, induit la quantification du moment cinétique avec la valeur  $\hbar/2$ , conformément à ce que nous savons depuis 1926.

On a vu au chapitre 3 comment on peut étendre la quantification du moment cinétique aux quarks. Pour intégrer la gravitation, dans le cas où les  $X_\mu$  peuvent être négligés, il suffit de remplacer dans (4.185) les  $d_\mu$  par les  $D_\mu$ . La quantification du moment cinétique ne change pas par rapport au chapitre 3.

### 4.4.3 Le principe d'équivalence

Sur le principe extrémal, qui a jusqu'ici guidé l'ensemble de la mécanique et de l'optique, on a expliqué en 2.3.4 comment ce principe n'est pas au-dessus des lois physiques, comment il émerge de la structure cliffordienne de l'algèbre  $Cl_3$ . On va voir maintenant comment le principe d'équivalence, lui aussi, est une conséquence des propriétés de l'onde de spin 1/2.

Dans la discussion précédente du principe de Pauli on a vu que le terme de masse de l'équation d'onde est variable, dépendant du nombre de particules en jeu. Et l'énergie des photons émis ou absorbés est la différence entre les niveaux d'énergie du système de particules considéré (atome, molécule, ...) avant ou après l'émission et l'absorption. Notant  $m_b$  la masse du système considéré et  $m_a$  la masse du système après transformation, on considère nécessairement la densité lagrangienne comme une différence. On a deux autres raisons pour cette différence : le potentiel  $b$  vaut  $-a^7$ , ce qui justifie (4.109), et le terme différentiel s'exprime lui aussi aisément comme une différence. On rappelle que la densité lagrangienne, dans le cas leptonique, est la somme de quatre termes, et que dans le cas des quarks c'est la somme de douze termes. Pour l'onde gauche de l'électron, avec (4.120) et (4.126) et en supposant l'annulation des  $X_\mu$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_L^1 = -i\eta^{1\dagger}\sigma^\mu \left[ \partial_\mu \eta^1 + i \left( \frac{3}{2}b_\mu + 3w_\mu^3 + \frac{a_\mu^7}{2} + \frac{1}{2}Y_\mu + \mathbf{I}v_\mu \right) \right] \eta^1 \\ &= -\mathcal{L}_i^1 + \mathcal{L}_g^1 \end{aligned} \quad (4.186)$$

$$\mathcal{L}_i^1 = \frac{i}{2}\eta^{1\dagger}\nabla\eta^1 - \eta^{1\dagger}\left(\frac{3}{2}b + 3w^3 - m_a v\right)\eta^1, \quad (4.187)$$

$$\mathcal{L}_g^1 = \frac{i}{2}(\partial_\mu \eta^{1\dagger})\sigma^\mu \eta^1 + \eta^{1\dagger}\left(\frac{1}{2}a_\mu^7 + \frac{1}{2}Y_\mu\sigma^\mu + m_b v\right)\eta_1, \quad (4.188)$$

$$1 = m_b - m_a; \quad \mathcal{L}_i^1 = \mathcal{L}_g^1. \quad (4.189)$$

On notera que l'on n'a pas groupé ensemble les deux termes contenant  $b = -a^7$ , qui ne sont pas d'un seul côté. Le fait que ces termes potentiels appartiennent aux deux parties des densités d'impulsion-énergie vient de la propriété suivante : la multiplication par  $i$  agit de la même manière par multiplication à droite ou par multiplication à gauche. Donc ce potentiel est naturellement présent à la fois dans la partie  $\mathcal{L}_i^1$  qui permet d'obtenir les forces agissant sur l'électron, et dans la partie  $\mathcal{L}_g^1$  part qui contient les symboles de Christoffel. A ces deux parties de la densité lagrangienne sont attachés deux tenseurs d'impulsion-énergie. égaux de par leur définition :

$$T_{Li\lambda}^{1\mu} = \frac{i}{2}\eta^{1\dagger}\sigma^\mu(\partial_\lambda\eta^1) - \eta^{1\dagger}\sigma^\mu\left(\frac{3}{2}b_\lambda + 3w_\lambda^3 - m_a v_\lambda\right)\eta^1, \quad (4.190)$$

$$T_{Lg\lambda}^{1\mu} = \frac{i}{2}(\partial_\lambda\eta^{1\dagger})\sigma^\mu\eta^1 + \eta^{1\dagger}\sigma^\mu\left(\frac{1}{2}a_\lambda^7 + \frac{1}{2}Y_\lambda + m_b v_\lambda\right)\eta^1, \quad (4.191)$$

$$0 = -T_{Li\lambda}^{1\mu} + T_{Lg\lambda}^{1\mu}; \quad T_{Li\lambda}^{1\mu} = T_{Lg\lambda}^{1\mu} \quad (4.192)$$

Comme tout ceci peut être généralisé à chaque partie de la densité lagrangienne on obtient de manière très générale une égalité entre le tenseur inertiel  $T_i$  et le tenseur gravitationnel  $T_g$  : c'est le principe d'équivalence.

#### 4.4.4 Effet Mössbauer

Un photon peut être absorbé ou émis par le noyau d'un atome, sans recul, exactement comme s'il avait été émis ou absorbé par le cristal entier contenant cet atome et son noyau, malgré le fait que la fréquence du photon émis correspond à la différence entre les niveaux d'énergie d'un seul noyau. La compréhension de cet effet nous amène à admettre que non seulement le tenseur d'impulsion-énergie est une différence, mais aussi la masse propre à l'œuvre dans la définition de l'onde quantique :

$$m_a = m_T; \quad m_b = m_{ST}, \quad (4.193)$$

où  $m_T$  est la masse totale (éventuellement celle de tout l'univers si c'est nécessaire) et  $m_{ST}$  est la masse du sous-total formé par la masse totale moins celle du système qui émet ou absorbe. Il est bien connu qu'un référentiel utilisable en mécanique quantique ne doit pas être trop massif, si on veut pouvoir mettre de côté la gravitation, ni trop léger, car il est alors impossible de négliger les phénomènes de recul dû à l'impulsion du photon émis ou absorbé. [7]. Il est toujours possible de prendre comme masse totale celle du référentiel dans lequel sont faites les mesures. Comme seule une différence est requise, il n'y a pas de problème avec l'immensité des masses, même si l'on doit inclure des étoiles ou des galaxies. Si on étudie une particule isolée, le terme de masse de l'équation d'onde est la masse propre de cette particule seule. Si un électron appartient à un système de deux électrons, la masse utilisée dans la double égalité  $E = mc^2 = h\nu$  est la masse du système. C'est la même chose pour les protons ou neutrons d'un noyau, ou même pour un cristal. Et cela explique pourquoi les propriétés d'un noyau peuvent être différentes suivant que le noyau est entouré d'un nuage d'électrons ou non, en particulier pour la probabilité de désintégration radioactive [73].

On voit donc qu'il est possible d'analyser toutes les particules et systèmes de la mécanique quantique relativiste avec des ondes physiques se propageant dans l'espace-temps, dont les propriétés sont déterminées par ces mêmes ondes physiques. Bien entendu il reste à passer de la théorie à la pratique.

## 4.5 La variété globale d'espace-temps

### 4.5.1 Structure locale et globale de l'espace-temps

En posant  $x = x^\mu \sigma_\mu$ , la mécanique quantique inclut en fait l'ensemble des  $x$ , c'est-à-dire la variété d'espace-temps, dans  $Cl_3$ . De plus, la longueur

d'espace-temps devient telle que  $\det(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . Cette égalité implique que la multiplication est l'unique opération à considérer. On doit donc aussi considérer le point de vue physique sur la mesure des longueurs et utiliser [43] :

$$\mathbf{x} := \frac{\mathbf{x}}{l_a}; \quad \mathbf{x} \in Cl_3^*. \quad (4.194)$$

La première différence par rapport à la géométrie usuelle est que l'origine des mesures de temps et d'espace est à  $\mathbf{x} = 1$ , et non pas à 0. Deuxième différence,  $Cl_3$  est l'algèbre de Lie du groupe multiplicatif  $Cl_3^*$ . Cela signifie que le voisinage de tout point-événement  $O$  est isomorphe à  $Cl_3$ . Cet ensemble, qui est non seulement un anneau mais aussi un espace vectoriel, contient deux sous-ensembles :  $Cl_3^*$ , qui est l'ensemble des  $\mathbf{x}$  tels que  $\det(\mathbf{x}) \neq 0$ , et le cône de lumière, qui est l'ensemble des  $\mathbf{x}$  tel que  $\det(\mathbf{x}) = 0$ . Troisième chose à bien voir, ces conditions  $\neq 0$  et  $= 0$  s'excluent l'une l'autre, ce qui signifie que le cône de lumière est inclus dans chaque algèbre de Lie tangente en n'importe quel point-événement  $O$  à la variété d'espace-temps, mais n'appartient pas au groupe de Lie  $Cl_3^*$  lui-même. Quatrièmement, le seul lien pouvant raccorder n'importe quel espace-temps tangent, en n'importe quel point de l'espace et à n'importe quel moment du passé, du présent ou du futur, à l'espace-temps global, est la fonction exponentielle (c'est pour cela qu'il y a des ondes!), qui se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= a + b\mathbf{u}; \quad \mathbf{u} = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3; \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1, \\ \mathbf{x}^n &= \frac{1}{2} \left[ (a+b)^n (1+\mathbf{u}) + (a-b)^n (1-\mathbf{u}) \right] \end{aligned} \quad (4.195)$$

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^n}{n!} = \frac{1}{2} \left[ e^{a+b}(1+\mathbf{u}) + e^{a-b}(1-\mathbf{u}) \right] \\ &= e^a [\cosh(b) + \sinh(b)\mathbf{u}]. \end{aligned} \quad (4.196)$$

De plus, on a :

$$\det[\exp(\mathbf{x})] = \exp[\text{tr}(\mathbf{x})] = e^{2a}. \quad (4.197)$$

Donc, avec  $\exp(\mathbf{x}) = A + B\mathbf{u} = A + B(x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)$ , on obtient :

$$e^{2a} = \det[\exp(\mathbf{x})] = (A + B\mathbf{u})(A - B\mathbf{u}) = A^2 - B^2, \quad (4.198)$$

ce qui implique que le cône de lumière "global" d'équation ( $A^2 = B^2$ ) est le bord (la limite quand  $a$  tend vers  $-\infty$ ) de la variété d'espace-temps et que la variété d'espace-temps ne comporte aucun point au-delà de ce bord, puisque  $e^{2a} > 0$ . Ce signe permet de voir le caractère purement théorique et local de la solution de Schwarzschild en relativité générale. Le signe nous montre aussi la topologie fort différente de la variété globale d'espace-temps et de ses espaces-temps tangents, qui, eux, contiennent le cône de lumière

local. En outre, on obtient :

$$e^a = \sqrt{A^2 - B^2}; \quad \cosh(b) + \sinh(b)\mathbf{u} = \frac{A + B\mathbf{u}}{\sqrt{A^2 - B^2}}.$$

$$a = \ln(\sqrt{A^2 - B^2}) = \frac{1}{2}[\ln(A + B) + \ln(A - B)], \quad (4.199)$$

$$b = \sinh^{-1}\left[\frac{B}{\sqrt{A^2 - B^2}}\right] = \frac{1}{2}[\ln(A + B) - \ln(A - B)],$$

$$a + b = \ln(A + B); \quad A + B = e^{a+b}. \quad (4.200)$$

Mais la confusion entre espace-temps global et espace-temps local est facile à faire, parce que l'écart entre les éléments neutres 1 et 0 respectifs du groupe de Lie et de l'algèbre de Lie est extraordinairement petit par rapport au "rayon" actuel de l'univers. Cette distinction mérite néanmoins d'être faite, comme on va le voir maintenant.

#### 4.5.2 Le paradoxe EPR

Deux photons sont émis au point-événement  $O$ . On suppose (c'est une hypothèse non nécessaire, qui n'a comme intérêt que de simplifier grandement les calculs), qu'ils sont émis dans deux directions perpendiculaires  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , de l'espace-temps tangent en  $O$ . Ils sont absorbés au même moment  $y > 0$  (là aussi, pour simplifier les calculs). Le photon émis dans la direction  $\sigma_1$  est absorbé au point-événement :

$$\mathbf{x}_1 = a_1 + b_1\mathbf{u}_1 = (a + y) + (bx^1 + y)\sigma_1 + b(x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3), \quad (4.201)$$

et on a :

$$a_1 = a + y; \quad \mathbf{u}_1 = x_1^1\sigma_1 + x_1^2\sigma_2 + x_1^3\sigma_3; \quad (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 + (x_1^3)^2 = 1,$$

$$(x^1 + y/b)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1 + 2x^1y/b + (y/b)^2, \quad (4.202)$$

$$b_1 = b\sqrt{1 + 2x^1y/b + (y/b)^2}; \quad \mathbf{u}_1 = \frac{(x^1 + y/b)\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3}{\sqrt{1 + 2x^1y/b + (y/b)^2}}.$$

Le photon émis dans la direction  $\sigma_2$  est absorbé au point-événement :

$$\mathbf{x}_2 = a_2 + b_2\mathbf{u}_2 = (a + y) + bx^1\sigma_1 + (bx^2 + y)\sigma_2 + bx^3\sigma_3. \quad (4.203)$$

Et on a aussi :

$$a_2 = a + y; \quad \mathbf{u}_2 = x_2^1\sigma_1 + x_2^2\sigma_2 + x_2^3\sigma_3; \quad (x_2^1)^2 + (x_2^2)^2 + (x_2^3)^2 = 1,$$

$$(x^1)^2 + (x^2 + y/b)^2 + (x^3)^2 = 1 + 2x^2y/b + (y/b)^2, \quad (4.204)$$

$$b_2 = b\sqrt{1 + 2x^2y/b + (y/b)^2}; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{x^1\sigma_1 + (x^2 + y/b)\sigma_2 + x^3\sigma_3}{\sqrt{1 + 2x^2y/b + (y/b)^2}}.$$

Sur la variété d'espace-temps, le point-événement  $O$  est à  $\mathbf{X} = O/l_a = A + B\mathbf{u} = \exp(\mathbf{x})$ , tandis que le photon émis dans la direction  $\sigma_1$  est absorbé au point-événement  $\mathbf{X}_1 = M/l_a = \exp(\mathbf{x}_1)$ . Le photon émis dans la direction  $\sigma_2$  est absorbé au point-événement  $\mathbf{X}_2 = P/l_a = \exp(\mathbf{x}_2)$ . La position de ce même point-événement  $P$ , vu de 1, est :

$$\mathbf{x}_2^0 = [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2} \exp(\mathbf{x}_2) [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2}. \quad (4.205)$$

La position du point-événement  $P$ , vu maintenant de  $M$ , est :

$$\mathbf{x}_2^1 = [\exp(\mathbf{x}_1)]^{1/2} [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2} \exp(\mathbf{x}_2) [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2} [\exp(\mathbf{x}_1)]^{1/2}. \quad (4.206)$$

La position du point-événement  $M$ , vu de 1, est :

$$\mathbf{x}_1^0 = [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2} \exp(\mathbf{x}_1) [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2}. \quad (4.207)$$

La position du point-événement  $M$ , vu de  $P$ , est :

$$\mathbf{x}_1^2 = [\exp(\mathbf{x}_2)]^{1/2} [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2} \exp(\mathbf{x}_1) [\exp(\mathbf{x})]^{-1/2} \exp[(\mathbf{x}_2)]^{1/2}. \quad (4.208)$$

Et on a, comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{x}_2^1) &= e^{a+y} e^{-a} e^{2(a+y)} e^{-a} e^{a+y} = e^{2(a+y+y)}, \\ \det(\mathbf{x}_1^2) &= e^{a+y} e^{-a} e^{2(a+y)} e^{-a} e^{a+y} = e^{2(a+y+y)}. \end{aligned} \quad (4.209)$$

Par conséquent à chaque point-événement, quand le photon est absorbé au temps local  $a + y$ , **chaque observateur** voit l'absorption de son photon comme précédant, de la même durée  $y$ , l'arrivée du photon chez l'autre observateur ! L'absorption de l'autre photon est dans le futur de chaque observateur, et non pas juste à l'instant de l'arrivée du photon. Cet étrange résultat paraît très semblable au fait que chaque observateur voit la longueur d'un objet en mouvement plus courte, et un observateur sur l'objet en mouvement pense de même pour les longueurs du premier observateur. Le paradoxe vient de ce que la mesure faite sur l'une quelconque des particules écrase l'onde entière du système de photons intriqués et le fait *instantanément*, avant qu'une information sur le résultat de la mesure de l'un ne puisse être communiqué à l'autre [4]. Le précédent calcul montre une des clefs de compréhension de cet étrange et bien réel paradoxe : le caractère simultané des mesures n'est qu'une erreur venant de la non prise en compte de la structure globale de l'espace-temps. Les différentes parties de l'onde de l'autre photon arrivent à l'autre observateur dans le futur de chaque observateur du "premier" photon.

Le "collapse" de l'onde, et son aspect paradoxal, résultent d'abord de la supposition que cette situation peut être décrite par un produit tensoriel d'espaces de Hilbert dont les éléments ne sont pas définis correctement dans le sens mathématique usuel du mot "définition". Attention, il ne s'agit pas du tout d'un déni du phénomène d'intrication, très solide du point de vue

expérimental, et qui nous dit que l'onde quantique n'est pas seulement un phénomène local : la normalisation de l'onde, toujours possible à partir du moment où la mécanique lagrangienne fonctionne, est complètement non locale. Mais une bonne partie du caractère paradoxal de la situation vient de l'interprétation des faits dans le cadre d'une théorie hermitienne à temps unique, forcément non-relativiste, et néanmoins utilisée pour décrire des photons qui sont, eux, complètement relativistes. La physique de la lumière doit nécessairement prendre en compte le fait que chaque "observateur fixe" voyage dans le temps sur la variété d'espace-temps, même lorsqu'il ne voyage pas par rapport à l'espace, considéré dans sa totalité.

La compréhension de la vraie géométrie de l'espace-temps exige l'usage de la variété d'espace-temps elle-même, et non pas seulement l'usage de l'espace-temps plat qu'est l'espace-temps tangent en un point-événement particulier  $O$ .

Einstein, Podolsky et Rosen disaient [69] : "Il en découle que, ou bien (1) la description en mécanique quantique de la réalité, par la fonction d'onde, n'est pas complète, ou bien (2) quand les opérateurs correspondant à deux quantités physiques qui ne commutent pas, les deux quantités ne peuvent pas avoir simultanément réalité. Car si les deux avaient une réalité simultanée – et donc des valeurs définies – ces valeurs entreraient dans la description complète, en accord avec la condition de complétude."

Les expériences sur la polarisation de deux photons émis simultanément (très belles au demeurant), ne peuvent prouver ni (1) ni (2) parce que l'absorption de ces photons ne peut pas être simultanée aux points-événements où chaque absorption se réalise. L'onde quantique étudiée ici, à valeur dans  $\text{End}(Cl_3)$ , et non juste dans  $\mathbb{C}$ , suffit à prouver que (1) était vraie en 1935 ; la description de l'onde quantique n'était pas complète, indépendamment de ce qu'on peut penser au sujet de (2). Plus généralement, aucune contradiction ne peut exister entre la relativité générale et la mécanique quantique. **Toute contradiction apparente résulte de mauvaises approximations faites sur les vraies lois, qui sont relativistes.**

### 4.5.3 La flèche du temps et l'expansion de l'univers

Tout point-événement de la variété d'espace-temps est à la position :

$$X = l_a \exp(a + b\mathbf{u}) = l_a(A + B\mathbf{u}); \quad A = e^a \cosh(b); \quad B = e^a \sinh(b). \quad (4.210)$$

Donc la position dans le temps  $l_a e^a \cosh(b)$  est le produit de deux nombres réels positifs : le temps est donc une quantité orientée, **la flèche du temps a une origine géométrique**. La variable temps va de 0 à  $+\infty$ .

Maintenant on considère un photon absorbé à la position  $X$ , venant d'une galaxie lointaine, par exemple dans la direction  $\sigma_1$ . Il a été émis à la position :

$$l_a \exp[a - y + (bx^1 - y)\sigma_1 + b(x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3)] = l_a \exp(a_1 + b_1\mathbf{u}_1), \quad (4.211)$$

avec <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} a_1 &= a - y; \quad \mathbf{u}_1 = x_1^1 \sigma_1 + x_1^2 \sigma_2 + x_1^3 \sigma_3; \quad (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 + (x_1^3)^2 = 1, \\ (x^1 - y/b)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 &= 1 - 2x^1 y/b + (y/b)^2, \\ b_1 &= b \sqrt{1 - 2x^1 y/b + (y/b)^2}; \quad \mathbf{u}_1 = \frac{(x^1 - y/b) \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3}{\sqrt{1 - 2x^1 y/b + (y/b)^2}}. \end{aligned} \quad (4.212)$$

Le photon a été émis à :

$$\mathbf{x}_e = l_a e^{a_1} [\cosh(b_1) + \sinh(b_1) \mathbf{u}_1]. \quad (4.213)$$

En ce point-événement le temps local était  $t_e = l_a e^{a_1} \cosh(b_1) \approx l_a e^{a_1+b_1}/2$ . Le même photon est absorbé au point-événement  $X$ , donc au temps local  $t_a = l_a e^a \cosh(b) \approx l_a e^{a+b}/2$ . Le seul objet mathématique constant en tout élément d'un groupe de Lie est l'algèbre de Lie du groupe, chaque espace-temps local, en chaque élément de la variété, est isomorphe à la partie auto-adjointe de l'algèbre de Lie du groupe. On va donc supposer que :

$$d(a_1 + b_1) = d(a + b); \quad \frac{dt_e}{t_e} = \frac{dt_a}{t_a} \quad (4.214)$$

Et on a :

$$\frac{\nu_a}{\nu_e} = \frac{dt_e}{dt_a}. \quad (4.215)$$

En première approximation,  $b_1 \approx b$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{\nu_a}{\nu_e} = \frac{dt_e}{dt_a} = \frac{d[l_a e^{a_1} \cosh(b_1)]}{d[l_a e^a \cosh(b)]} \\ &\approx \frac{l_a da e^{a-y} \cosh(b)}{l_a da e^a \cosh(b)} = \frac{1}{e^y} \approx \frac{1}{1+y}. \end{aligned} \quad (4.216)$$

Ceci signifie que le décalage vers le rouge, dû à l'expansion de l'univers, précédemment interprété comme un effet Doppler, est un effet direct de la géométrie de l'espace-temps. Et le paramètre  $z$ , défini comme  $(\nu_e - \nu_a)/\nu_a$ , est en première approximation égal à  $y$ . Mais l'interprétation par un éloignement à grande vitesse n'est qu'une analogie. Quand  $y$  est petit le déplacement vers le rouge semble proportionnel à  $y$ . Le paramètre de Hubble ( $73.3 \pm 1.4 \text{ km/s/Mpc}$ ) donne pour la distance 1 Mpc la valeur  $z = 0,0002443$ , donc donne pour l'hypersphère de rayon  $R$  rendant compte de cet effet Doppler d'éloignement par variation du rayon de l'hypersphère :  $R = l_a e^{a+b}/2 \approx 6.3 \times 10^{25} \text{ m}$ .

En utilisant la condition purement géométrique (4.214), indépendante du contenu matériel de l'espace-temps, qui résulte du fait que l'algèbre de Lie est le seul objet fixe, indépendant de la position spatio-temporelle sur

---

5. Puisqu'on regarde vers le passé,  $a_1 < a$ .

la variété, on peut calculer de manière plus précise le rapport  $dt_e/dt_a$  dans le cas où  $y$  est petit. On a :

$$\frac{d[l_a e^{a_1} \cosh(b_1)]}{d[l_a e^a \cosh(b)]} = \frac{d[e^{a-y} \cosh(b_1)]}{d[e^a \cosh(b)]} = \frac{e^{-y} \cosh(b_1)}{\cosh(b)} = \frac{1}{f(y)} \quad (4.217)$$

$$f(y) := e^y \frac{\cosh(b)}{\cosh(b_1)} \approx f(0) + y f'(0) + y^2 \frac{f''(0)}{2} + \dots \quad (4.218)$$

On utilise :

$$b_1 := bg(y) = \sqrt{b^2 - 2x^1 by + y^2}; \quad g(y) = \sqrt{1 - 2\frac{x^1}{b}y + (\frac{y}{b})^2},$$

$$g(y) \approx 1 - \frac{x^1}{b}y + \frac{1 - (x^1)^2}{2b^2}y^2 + \frac{x^1[1 - (x^1)^2]}{2b^3}y^3 + \dots \quad (4.219)$$

Et on obtient :

$$f(y) \approx e^y \frac{e^b}{e^{b_1}} = e^{a(y)} \quad (4.220)$$

$$a(y) = y + b - b_1 \approx (1 + x^1)y - \frac{1 - (x^1)^2}{2b}y^2 - \frac{x^1[1 - (x^1)^2]}{2b^2}y^3 + \dots,$$

$$f'(y) \approx a'(y)e^{a(y)} = (1 + x^1)[1 - \frac{1 - x^1}{b}y - \frac{3x^1(1 - x^1)}{2b^2}y^2 + \dots]e^{a(y)}. \quad (4.221)$$

Sachant la valeur du paramètre de Hubble et celle de  $l_a$  on obtient  $a + b \approx 142$ . On sait seulement que  $a > b > 0$ . Le rapport  $a/b$  est inconnu. Si notre position sur la variété est quelconque, par exemple si  $(a + b)/a \approx a/b$ , on pourrait avoir  $a \approx 88$  et  $b \approx 54$ . Cela donnerait un ratio  $B/A$  très proche de 1. On va maintenant regarder l'accélération ou la décélération de l'expansion.

#### 4.5.4 Début de l'accélération

On définit  $h$  par  $h(y) := f(y)/y$  le décalage vers le rouge semble accéléré si et seulement si  $h$  est décroissante (parce que  $y$  augmente en sens inverse du temps), c'est-à-dire si  $h'(y) < 0$ . On obtient :

$$y^2 h'(y) = y f'(y) - f(y) \approx [y a'(y) - 1] e^{a(y)} \quad (4.222)$$

$$= [-1 + (1 + x^1)y - \frac{1 - (x^1)^2}{b}y^2 - \frac{3x^1[1 - (x^1)^2]}{2b^2}y^3 + \dots] e^{a(y)}.$$

Par exemple si  $b = 40$  et  $x^1 = 0.6$  on a :

$$y^2 h'(y) \approx [-1 + 1.6y - 0.016y^2 - 0.00036y^3 + \dots] e^{a(y)} \quad (4.223)$$

Donc, dans ce cas,  $h'(y) < 0$  si et seulement si :

$$y < y_0, \quad y_0 \approx 0.63. \quad (4.224)$$

De plus, le signe du coefficient de  $y^3$  indique un changement de signe pour  $y$  grand, mais la méthode de calcul par développement limité utilisée ici ne se prête pas du tout au calcul précis de ce nouveau changement de signe.

Donc l'accélération de l'expansion semble commencer vers  $y_0$ , avec de possibles différences suivant les directions d'observation dues à notre position par rapport à l'espace-temps dans son ensemble. Et l'accélération semble être en décélération pour les très grands décalages. Donc il n'y a aucune nécessité pour la matière noire,<sup>6</sup> ni de gravité répulsive pour expliquer toutes les observations sur le décalage vers le rouge des galaxies lointaines. Ce que nous obtenons ici est complètement différent de la cosmologie développée depuis un siècle à partir de la gravitation relativiste, et bien plus satisfaisant, puisqu'on n'a aucunement besoin de supposer l'homogénéité de l'univers à très grande échelle, contredite par toutes les avancées de l'astronomie, ni de supposer l'existence d'une quantité considérable de matière inconnue, ni d'utiliser une constante cosmologique ad-hoc, ni d'ajuster les paramètres pour tenir compte de l'accélération récente de l'expansion. En plus, on a ici deux choses qu'Einstein avait activement recherchées : un espace-temps qui, en tant que tout, n'est pas variable (à un temps cosmologique  $t$  donné, l'espace n'est pas une hypersphère  $S^3$  de rayon croissant, mais un  $\mathbb{R}^3$  illimité dans toutes les directions de l'espace, naturellement "plat" à grande échelle, indépendant du temps). Seuls les éléments de ce tout sont variables ; la géométrie ne dépend pas, globalement, de son contenu matériel. Dernier avantage, et qui n'est pas des moindres : quelque soit la petitesse de la probabilité d'existence d'une espèce intelligente sur une planète viable des milliards d'années, dans un espace-temps illimité comprenant une infinité d'étoiles, l'existence d'une telle planète quelque part devient probable.

---

6. Le mouvement des étoiles dans les galaxies et le mouvement des galaxies dans les amas est une autre question. Bien entendu la non-nécessité de la matière noire ne prouve pas son inexistence. Le simple nom de "trou noir" indique bien que certains objets peuvent ne pas être directement visibles.

## Chapitre 5

# Pourquoi ?

Il y a des milliers d'années, la physique a commencé avec les questions de nos ancêtres : pourquoi le retour régulier du Soleil, pourquoi les phases de la Lune ? Pourquoi le vent, la pluie, l'arc-en-ciel après l'orage ? Lorsque la physique a commencé à avancer toujours plus vite, comprenant le mouvement des planètes, liant ensemble tous ces "pourquoi" en une théorie de la gravitation, de l'électricité, de la lumière, surgirent de nombreux autres pourquoi.

Prenons l'exemple de la lumière. Les physiciens commencèrent par en comprendre quelques une de ses **propriétés**, comme le fait qu'elle part du Soleil avant d'arriver à la rétine de nos yeux, et non l'inverse, comme on l'a longtemps cru. Allant un peu plus loin, ils comprirent des **lois** gouvernant ces propriétés, par exemple la loi de la réfraction quand la lumière passe d'un milieu à un autre ayant un indice de réfraction différent. Ces lois sont écrites avec des outils mathématiques, comme les sinus des angles d'incidence et de réfraction. Puis ces lois vinrent à découler elles-mêmes de **principes** qui sont, en un certain sens, des lois gouvernant d'autres lois. Pour la lumière, Pierre Fermat comprit que la loi de la réfraction venait d'un principe physique simple : la lumière choisit automatiquement le chemin de durée minimale. On a, dans les précédents chapitres, non seulement étudié des **propriétés** des ondes (pour l'électron, ce sont des fonctions de l'espace-temps à valeur dans  $Cl_3^*$ ), on a aussi étudié les **lois** : les équations aux dérivées partielles pour l'onde, et aussi l'orthonormalisation de l'onde et l'existence d'une densité de probabilité. On a aussi obtenu les lois du mouvement d'un fluide chargé. On a même ensuite expliqué comment ces lois découlent de **principes** : les équations d'onde se déduisent, par un mécanisme lagrangien, du principe extrémal résultant de l'existence d'une densité lagrangienne. L'orthonormalisation de l'onde vient du principe d'équivalence entre masse d'inertie et masse gravitante. Ce qui est vraiment nouveau, c'est qu'on a achevé la boucle des déductions en déduisant ces principes des propriétés des ondes de matière elles-mêmes : on a complète-

ment disséqué le principe extrémal en montrant comment celui-ci, pour les ondes quantiques, est une conséquence des propriétés de l'onde quantique comme fonction à valeur dans une algèbre de Clifford particulière. Ces propriétés sont liées à la structure même de l'espace-temps, au fait que le temps est uni-dimensionnel, que l'espace est à trois dimensions. On a aussi expliqué comment le principe d'équivalence résulte des propriétés de toutes les densités d'impulsion-énergie.

Ce que nous avons continué ici est propre à la construction même de la science : chercher des lois à partir des propriétés même des objets physiques, et non pas au-delà de ces objets. Le cercle logique de causalité que l'on vient de décrire est alors juste la réalisation réussie du processus scientifique, pour ce champ de la science qui étudie la matière et qu'on appelle physique. Et le bouclage termine le processus, même si une boucle peut être élargie, doublée ou intégrée à d'autres boucles semblables.

La double égalité  $E = mc^2 = h\nu$  est un composant essentiel de ces parties de notre boucle de causalité qui a été progressivement améliorée. L'égalité  $E = mc^2$  vient de l'électrodynamique de la matière en mouvement, obtenue par Albert Einstein en 1905. Aussitôt après avoir envoyé son article pour publication, il s'est aperçu de ceci : si toute la masse-énergie a une origine électromagnétique, alors  $E = mc^2$ . Cette égalité est extrêmement bien établie expérimentalement, et donc le si-alors de l'affirmation d'Einstein a été quelque peu oublié. Les physiciens ne se sont plus posé la question : mais pourquoi faut-il que toute la matière ait une origine électromagnétique. On a poussé ici la question un peu plus loin : tous les objets fondamentaux de la physique sont des fermions obéissant aux mêmes lois. Donc dire que toute la matière a la même origine équivaut à ceci : toute masse-énergie, en physique, vient des fermions. Donc si un boson semble avoir une masse propre, c'est qu'il est composé de fermions qui possèdent cette masse.

Après sa découverte des lois de l'électrodynamique des corps en mouvement, Einstein a reconsidéré la gravitation, dans le but d'en faire une théorie du champ, sans action instantanée à distance. Il est parti de l'identité entre masse d'inertie et masse grave. Cette identité implique que le champ de gravitation est un champ d'accélération, pas un champ de force, contrairement au champ électromagnétique, qui agit par la force de Lorentz. Il comprit donc que la gravitation était un phénomène complètement géométrique, lié à la structure même de l'espace-temps, sa courbure. Mais alors pourquoi la gravitation marche-t-elle ainsi ? Pourquoi cette identité entre masse gravitante et masse d'inertie ? On va un peu plus loin ici en montrant que les densités lagrangiennes des fermions peuvent être interprétées comme des différences nulles entre termes gravitationnels et termes d'inertie. On peut encore avancer à la question suivante et se demander : pourquoi est-ce ainsi ? Les différents termes de l'équation d'onde sont les seuls possibles, capables d'exister de manière compatible avec l'invariance de forme des équations d'onde. De plus ces équations d'onde sont invariantes de forme en conséquence de la structure des ondes elles-mêmes. Cette boucle causale passe par

le mécanisme lagrangien, que nous avons disséqué, et dans lequel ne se niche aucun principe méta-physique. Tout vient de la structure algébrique automatiquement associée à la structure géométrique de l'espace-temps. Cette structure est elle-même liée à l'onde quantique, qui a valeur dans la variété  $Cl_3^*$  incluant l'espace-temps.

La seconde des deux égalités,  $E = h\nu$ , a d'abord été obtenue par Max Planck dans son étude des lois d'émission de la lumière par un corps chauffé à haute température. L'égalité contient une constante qui est à juste titre nommée du nom de son inventeur. L'égalité a été étendue deux fois, d'abord par Albert Einstein qui a introduit, dès 1905, le dualisme onde-particule pour la lumière, puis par Louis de Broglie qui, il y a un siècle, a étendu ce dualisme à toute la matière. Au cours de ce siècle, de multiples découvertes du monde physique des quanta ont pris place. Elles sont maintenant intégrées dans le modèle standard de la physique quantique.

## 5.1 Einstein avait raison

Malgré ses découvertes, à la fois du dualisme onde-particule et de la gravitation comme géométrie de l'espace-temps, Einstein a terminé sa vie dans l'isolement par rapport au reste de la communauté scientifique : une physique quantique s'est développée dans une direction très différente de la physique de la gravitation. Einstein a continué à chercher une synthèse unitaire visant à intégrer l'électromagnétisme et la physique quantique avec la physique de la gravitation. Il courait après ce qui est si caractéristique de sa théorie de la gravitation : une physique complètement relativiste, avec un champ unitaire suivant une équation aux dérivées partielles, déterministe, et capable de fournir les lois du mouvement des sources du champ.

C'est exactement ce que fait l'ensemble des équations aux dérivées partielles qu'on a obtenu ici pour les ondes des fermions : elles sont complètement déterministes, elles permettent de déduire les lois du mouvement des sources des champs de jauge que sont en fait ces fermions. Einstein avait donc raison de tenter d'obtenir une telle synthèse, puisque les précédents chapitres prouvent que c'était faisable.

Pourquoi Einstein n'a-t-il pas été entendu ? La première raison fut la nouveauté de sa compréhension de la nature de l'espace et du temps, particulièrement son rejet du temps absolu. Schrödinger, qui avait lui-même parfaitement compris le temps relatif de la gravitation d'Einstein, a trouvé d'abord une équation d'onde non relativiste pour l'onde de de Broglie. Cette équation d'onde, plus le principe d'exclusion de Pauli, ont produit le concept d'une onde qui n'a pas de réalité physique directe. Cette onde ne se propage pas dans l'espace-temps, mais évolue en fonction d'un temps absolu dans un espace de configuration dont Einstein fut le premier à comprendre et utiliser les propriétés géométriques.

De 1917 jusqu'à sa mort, Einstein fit de nombreux essais pour réconcilier

gravitation, électromagnétisme et mécanique quantique. Il essaya notamment une variété d'espace-temps avec torsion, d'une manière très proche de nos calculs. Mais son point de départ ne pouvait pas être les ondes droites et les ondes gauches issues de la découverte, juste après sa mort, de la violation maximale de la parité dans les interactions faibles. De plus les propriétés non locales des ondes quantiques (il fut le premier à penser leur nécessité) n'étaient pas encore comprises. Einstein en fait n'était pas vraiment heureux de sa première théorie de la gravitation, égalant le tenseur de Ricci au tenseur d'impulsion-énergie. Il avait de sérieux doutes sur la longévité de sa théorie, notamment parce que le côté gauche de son équation, qui est purement géométrique, est bien plus solide que le côté droit, qui n'est pas défini de manière unique, qui comporte ou non la constante cosmologique. Et Einstein n'a pas eu de chance avec le cosmos : sa vision du cosmos était celle d'un espace-temps global, forcément invariable, au moment où les astronomes découvrirent l'immensité d'un cosmos paraissant en expansion. Là aussi c'était Einstein qui avait raison, puisque l'espace-temps invariable dans sa totalité est parfaitement compatible avec le décalage vers le rouge des galaxies lointaines, qui plus est avec une accélération récente de ce décalage, accélération mesurée aujourd'hui par les astronomes, et qui s'explique comme un effet de pure géométrie globale (voir 4.5.4).

### 5.1.1 "Il n'y a pas d'alternative"

Certes il n'y a pas moyen d'éviter la double égalité  $E = mc^2 = h\nu$ , il serait stupide de prétendre le contraire. Certes, il est impossible d'éviter les inégalités d'Heisenberg puisque le moment cinétique de tous les fermions est quantifié. Nous sommes d'autant plus d'accord que nous savons d'où ça vient. Mais pour beaucoup d'autres choses une alternative existe, et la preuve en est précisément notre travail : nous avons travaillé en dehors des lois de la mécanique quantique non relativiste, et nous avons obtenu de meilleurs résultats. Une opinion très répandue en physique consiste à croire que l'équation de Dirac est "une sorte d'équation de Schrödinger". C'est faux ! Le premier à l'expliquer a été Louis de Broglie dans son second livre sur l'équation de Dirac [60], à une époque où il commençait à se reposer les questions à l'origine de sa découverte de la mécanique ondulatoire. De plus l'interaction électromagnétique fait partie de l'interaction de jauge décrite par un groupe non commutatif  $U(1) \times SU(2)$ , il est donc impossible de dissocier cette interaction des autres interactions électro-faibles.

La théorie quantique des champs s'est construite sur une onde à une seule phase. Mais l'électron a toujours deux phases. Certes la seconde phase, qui apparaît dans les phénomènes magnétiques et les interactions faibles, est très difficile à voir dans beaucoup de situations. Seulement alors, l'électrodynamique quantique fonctionne à la perfection, même pour ses prédictions les plus surprenantes.

En physique l'univers est ce qu'il est. Nous avons changé le titre de la

version anglaise de ce travail de “Developing a Theory of Everything” en “Developing *the* Theory of Everything” ; c’est une autre manière de dire qu’il n’y a pas d’alternative. Le temps doit être bien ordonné, donc le temps est nécessairement à une seule dimension. L’espace est à trois dimensions, donc l’algèbre d’espace est  $Cl_3$ . L’invariance sous les rotations des lois de la mécanique (il n’existe pas de direction privilégiée dans l’espace) a été remplacée en mécanique quantique par l’invariance sous le groupe de Lie  $SU(2)$ . Ceci a conduit à considérer (depuis presque un siècle !) l’espace-temps comme inclus dans la partie de  $Cl_3$  contenant  $SU(2)$ , qui ne peut être que le groupe multiplicatif  $Cl_3^*$  : l’espace-temps de la relativité générale est une variété de dimension 4, et  $Cl_3^*$  est juste assez vaste (théorème de Whitney), avec ses huit dimensions, pour pouvoir inclure n’importe quelle variété de dimension quatre. La pseudo-métrique d’espace-temps se calcule à partir du déterminant, donc la signature de l’espace-temps est  $+, -, -, -$ . Donc l’espace-temps se place automatiquement dans la partie auto-adjointe de  $Cl_3$ .  $Cl_3^*$  est un groupe de Lie, à tout groupe de Lie est associé une unique algèbre de Lie, et l’algèbre de Lie de  $Cl_3^*$  est  $Cl_3$  : il n’y a pas d’alternative. Un groupe de Lie est une variété, et l’espace vectoriel tangent en tout point de la variété est isomorphe, grâce à la multiplication, à l’espace-tangent en l’unité du groupe : pas d’alternative !

### 5.1.2 Après ce travail

Quand on établit pourquoi l’angle de Weinberg-Salam vérifie exactement  $\sin(\theta_W) = 1/2$ , ou pourquoi la charge du quark  $d$  vaut exactement le tiers de la charge de l’électron, la précision est certainement supérieure à onze chiffres significatifs puisque le calcul est exact. Les avantages d’une compréhension correcte ne concernent pas que la précision des prédictions. Comprendre pourquoi il existe deux quarks de couleur dans chaque génération, pourquoi les leptons sont insensibles aux interactions fortes, pourquoi il existe un mécanisme lagrangien, comment le champ électromagnétique est directement lié à l’impulsion-énergie de l’onde quantique, tout cela est une avancée définitive. Le même pouvoir prédictif sera attendu pour toute proposition de théorie alternative. Par exemple si une telle proposition obtenait un meilleur pouvoir de prédiction à partir d’un lagrangien avec à la fois une partie leptonique et une partie bosonique indépendante de la première, il lui faudrait justifier l’existence même du lagrangien, puisque nous avons donné une explication de l’existence des équations de Lagrange dans le cas de l’onde des fermions. Donc à toute tentative de construction d’une théorie du tout on demandera de faire au moins aussi bien. Nous avons obtenu une origine simple pour la polarisation de la lumière. Toute théorie future du tout sera questionnée sur sa capacité à comprendre le lien entre le champ électromagnétique et l’impulsion-énergie de l’onde fermionique. Nous avons aussi justifié la flèche du temps et le déplacement vers le rouge de la lumière venant des étoiles lointaines, y compris l’accélération récente de cet

effet, à partir de la structure de l'espace-temps elle-même : toute tentative future de théorie du tout sera questionnée sur cette explication simple de "l'expansion".

La compréhension la plus importante, parmi les nouveautés apportées par le présent travail, est celle de la quantification elle-même, quantification du moment cinétique de l'électron, du neutrino, du proton, du neutron, avec la même valeur  $\hbar/2$ . De cette quantification du moment cinétique résultent à la fois les inégalités de Heisenberg [61] et la quantification de la charge électrique et de la charge magnétique. Tout essai de construction d'une théorie du tout devra obtenir cette quantification du moment cinétique, et avec la vraie valeur, complètement établie du point de vue expérimental.

## 5.2 de Broglie avait raison

Einstein et de Broglie en étaient d'accord, l'onde quantique est fondamentalement relativiste. Avec l'onde de l'électron, que ce soit dans le cas des vitesses faibles ou dans celui des vitesses très élevées, les courants  $D_R$  et  $D_L$ , formés par les parties droite et gauche de l'onde quantique, sont sur le cône de lumière. Ces courants ont certes une somme qui est le courant de probabilité, lié à l'invariance de jauge électrique. Ce courant est le seul visible dans la version de la mécanique quantique à la base de la théorie quantique des champs. Mais les courants  $D_R$  et  $D_L$  ont aussi une différence qui est le second courant,  $K$ . Ce courant est aussi important que le premier. Il est lié à la jauge chirale, donc au magnétisme et aux interactions faibles. La dépendance des densités tensorielles par rapport à la chiralité des ondes ne concerne pas que les courants, elle s'étend notamment aux densités d'impulsion-énergie et de moment cinétique, et donc au champ électromagnétique. Grâce à la prise en compte de cette dépendance, on a obtenu en 2.5 et 3.7 la quantification du moment cinétique. Comme l'onde quantique est fondamentalement relativiste, le remplacement de l'équation de Dirac par l'équation de Pauli est indéfendable. Donc l'intégration de l'onde de l'électron dans la physique hamiltonienne ne marche pas bien. C'est pourquoi des difficultés surgissent dans tous les calculs de la théorie quantique des champs, telles que des quantités infinies qu'il faut contourner, une renormalisation et des anomalies qui doivent être domestiquées. Et cela s'avère impossible pour la gravitation, justement parce que la gravitation est complètement relativiste.

En son temps, Einstein ne pouvait pas bâtir une meilleure théorie, car il ne pouvait pas deviner ce qui n'a été découvert qu'après sa mort, découvertes qui ont permis l'élaboration du modèle standard. La plus importante découverte, dans la seconde moitié du vingtième siècle, fut selon Lochak la violation de la parité dans les interactions faibles. Le rôle différent des ondes gauches et des ondes droites est important aussi bien dans le modèle standard qui en tient le plus grand compte, que pour la relativité générale. C'est

dû au fait que l'orientation de l'espace se trouve à nouveau placé au centre de la théorie physique. Cette orientation de l'espace est un raccourci commode, c'est en fait l'orientation de l'espace-temps, plus la flèche du temps, conservée, qui permet l'orientation de l'espace.

De Broglie, qui était très conscient des défauts de la théorie quantique venant du caractère non relativiste des équations d'onde, a étudié de manière très approfondie la théorie relativiste de l'équation de Dirac deux fois, et a publié ses recherches dans deux livres, à 18 ans d'intervalle [56, 60]. Entretemps il avait aussi utilisé l'onde de Dirac comme point de départ de sa théorie de la lumière [57, 58]. Ces travaux ne furent pas compris, ils étaient trop en avance sur leur temps (et en outre la France était occupée par les armées nazies). Et de Broglie ne pouvait connaître ni l'existence des quarks ni la chromodynamique. Le présent travail a été fait principalement par deux personnes qui se sont rencontrées au séminaire organisé par de Broglie lui-même dans la Fondation Louis de Broglie, créée à Paris, à l'Académie des Sciences, pour continuer son travail scientifique. Le directeur de cette fondation privée indépendante fut Georges Lochak qui découvrit le monopôle magnétique leptonique [89, 90]. Son équation d'onde du monopôle a été le point de départ de nos travaux.

De Broglie ne nous a pas seulement légué son savoir immense des domaines variés de la physique classique et quantique, il nous a en outre recommandé d'exercer notre liberté de critiquer les modes, en physique aussi.

### 5.3 Bohr avait aussi (en partie) raison

Au début de la mécanique quantique, l'universalité des inégalités de Heisenberg, et les limites qu'elles impliquent sur nos possibilités de connaître la réalité physique, tout cela n'était pas du tout évident. Einstein, qui n'avait rien rencontré de semblable dans sa théorie de la gravitation, entama une grande discussion avec Bohr. Et ce furent les arguments de Bohr qui prévalurent, justement parce que c'est lui qui sut le mieux utiliser l'universalité de la physique relativiste inventée par Einstein ! La généralisation de cette invariance au groupe  $Cl_3^*$  renforce cette universalité et nous permet, en conséquence des propriétés de l'onde fermionique, la quantification du moment cinétique, avec la valeur  $\hbar/2$  (voir 2.5 et 3.7).

Dans son second livre sur la théorie de Dirac (voir [60] 2.6), à partir de la quantification du moment cinétique, postulée, de Broglie déduisit la forme précise que prennent les relations d'incertitude pour deux quantités  $A$  et  $B$  canoniquement conjuguées (comme  $x$  et  $p_x$ ) :  $\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \hbar/2$ . L'année précédent ce livre, en 1950-1951, de Broglie avait étudié les inégalités de Heisenberg, et écrit un livre qui ne fut édité que grâce à Lochak, trente ans plus tard. Partant de la quantification du moment cinétique, il obtenait la quatrième relation d'incertitude, qui s'écrit selon de Broglie :  $\sigma_t \cdot \sigma_E \geq \hbar/2$ , où  $\sigma_t$  est l'incertitude sur la coordonnée temporelle d'un événement, et  $\sigma_E$

est l'incertitude sur l'énergie à l'œuvre dans cet événement.

## 5.4 Hasard intrinsèque ou statistique ?

Einstein fut le premier à comprendre le mouvement brownien comme le mouvement au hasard d'une particule en constante collision avec les molécules du milieu qui l'entoure, et objectivement il n'avait rien contre les probabilités. Ce qui lui a posé problème était le caractère intrinsèque du hasard attribué à l'onde quantique.

Quand on se permet de supprimer les "petites composantes" de l'onde de Dirac, au prétexte que la vitesse de l'électron est faible et qu'alors deux composantes de l'onde ont un module petit en comparaison des autres, non seulement on démolit l'invariance relativiste de l'équation d'onde, mais on retourne au schéma hamiltonien habituel de l'onde de Schrödinger et Pauli. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, le temps joue un rôle différent de l'espace et l'équation prend la forme hamiltonienne de l'équation de Schrödinger  $i\hbar\partial_t\psi = H(\psi)$ . L'équation d'onde obtenue par cette suppression est rarement présentée comme une simple équation de Pauli. Donc finalement chacun croit que l'équation de Dirac est "une sorte d'équation de Schrödinger". Cela ratatine l'onde de Dirac au schéma probabiliste habituel de la théorie quantique : les seules choses qu'on peut calculer sont des probabilités. Et comme on pense qu'il n'y a pas de réalité physique au-delà de ce qui est mesurable, la recherche d'autres idées, la compréhension de ce qui se passe, est considérée comme inutile, et même dangereuse.

Est-ce qu'on a travaillé ici en dehors du schéma probabiliste ? A première vue il peut sembler que non, puisque l'onde quantique de spin 1/2 est toujours associée à une probabilité : en divisant la densité locale d'énergie par l'énergie totale, on arrive naturellement à une densité dont la somme sur tout l'espace donne la valeur 1. C'est donc une densité de probabilité. Dans le cas de plusieurs fermions indistinguables on obtient aussi une mesure qui donne le nombre de ces fermions. Mais certainement, la vraie réponse est oui, nous avons quitté le schéma purement probabiliste, parce que l'onde ne donne pas *seulement* des probabilités. Dans l'onde quantique on peut trouver l'origine de tous les soit-disant "nombres quantiques", tels que le nombre baryonique, les nombres leptoniques, l'hyper-charge faible et ainsi de suite. Nous sommes maintenant capables de comprendre la valeur de chaque charge élémentaire. Nous savons aussi obtenir la loi de Lorentz du mouvement de la densité de charge électrique, et des autres courants. Nous sommes capables de comprendre comment les électrons diffèrent des neutrinos et des quarks. Donc dans l'onde de spin 1/2, il y a des éléments de réalité physique, et pas simplement des probabilités. L'onde quantique ne se réduit pas à une amplitude et une phase.

Une large part de la mécanique quantique, certainement, se réduit à l'étude du couple amplitude-phase, cette part dans laquelle la phase, pensée

comme unique – et c'est alors toujours celle de l'angle de la jauge électrique, associée au courant de probabilité – est dominante et écrase tous les autres courants.

Même dans ce cas – ce qui veut dire dans le domaine de la théorie quantique des champs, qui est certes fort vaste, parce que la plupart des fermions ont une charge électrique, mais qui n'englobe pas toute la physique – l'onde quantique suit une équation aux dérivées partielles tout aussi déterministe et relativiste que les équations de la gravitation d'Einstein. C'est l'invariance relativiste étendue qui donne la quantification du moment cinétique, et ceci explique les inégalités de Heisenberg, qui impliquent la limitation de notre connaissance des couples position – impulsion-énergie (dans l'espace-temps). De plus, parmi les principes qui peuvent par conséquent se déduire des propriétés des ondes quantiques, figure le principe d'exclusion énoncé par Pauli. Ce principe stipule que le nombre d'occupation d'une onde électronique ne peut être que 0 ou 1. Le concept de "probabilité de présence" est donc non vérifiable : la validation expérimentale d'une loi de probabilité ne peut se faire que par la convergence d'une fréquence statistique vers la probabilité. Et faire une statistique pour un seul objet est un non-sens. Toute statistique basée sur un grand nombre  $n$  d'électrons met en œuvre  $n$  ondes d'électrons. La probabilité que, pour un domaine  $D$  de l'espace, l'électron-particule soit présent, en  $D$  et nulle part ailleurs, est toujours calculable, mais n'est pas statistiquement vérifiable à partir de l'onde d'un unique électron. C'est complètement différent pour un photon, parce qu'une onde électromagnétique peut héberger des myriades de photons. La densité spatiale de ces photons sur l'onde est proportionnelle à l'intensité du champ électrique, c'est statistiquement vérifiable.

Le concept de probabilité a deux sortes de justifications, *a priori* ou *a posteriori*. Le concept de probabilité *a priori*, théorisé par les axiomes de Kolmogorov, définit une probabilité comme une mesure additive sur une famille d'ensembles, telle que la mesure du tout vaut 1. C'est cette définition de la probabilité qui est utilisée dans les précédents chapitres. Très différent, le concept de probabilité *a posteriori* est basé sur le hasard, ce qui veut dire l'intervention de causes dont on ne sait rien : par exemple un atome d'uranium 238, qui existe depuis sa création, il y a des milliards d'années, éjecte soudain un noyau d'hélium, ce qui le transforme en un atome de thorium 234. On ne sait pas comment ça arrive, comment le processus d'émission commence ou comment il évolue. On ne connaît que la fin du processus, quand les deux noyaux se séparent. Les statistiques que les physiciens obtiennent à partir d'un nombre énorme de noyaux d'atomes d'uranium 238 leur permettent d'établir des lois de probabilité. La probabilité de désintégration est constante dans le temps. La demi-vie, c'est-à-dire la durée au bout de laquelle il ne reste plus que la moitié de l'uranium 238, est 4,4688 milliards d'années. Est-ce que cette probabilité peut être reliée à l'onde des protons et neutrons d'un noyau d'atome 238 ? On n'en sait rien. Et la théorie quantique des champs n'en sait pas plus, en dépit des essais faits pour

relier la probabilité temporelle de désintégration à la probabilité spatiale non nulle de présence au-delà de la barrière de potentiel du noyau. Ceci a été discuté par de nombreux physiciens. [107]

Les surprenantes implications de ces probabilités, telles que l'intrication, les inégalités de Bell et l'expérience d'Aspect, sont toujours interprétées à partir du concept d'une onde quantique suivant une dynamique relativiste hamiltonienne. Tout ceci est inclus dans le cadre d'une théorie qui remplace la nécessaire définition des objets mathématiques utilisés par un ensemble de postulats supposés universels. Mais ces postulats ne sont pas universels ! Les différents fermions du modèle standard ont tous des ondes gauche et droite, et il n'a jamais été démontré que ces ondes gauche et droite seraient capables de suivre les postulats de la théorie quantique. Certes ce que nous avons introduit ici, l'usage d'une fonction bien définie de l'espace-temps à valeur dans  $\text{End}(Cl_3)$ , peut être utilisé pour conforter les fondations mathématiques de la seconde quantification. Mais le problème de la dynamique hamiltonienne resterait entier.

Pourquoi avons-nous le droit de douter de la possibilité d'une dynamique relativiste hamiltonienne pour l'onde spinorielle de l'électron ? Le problème vient du temps, qui est réversible en dynamique hamiltonienne, mais qui n'est pas réversible pour l'invariance sous  $Cl_3^*$ . Et puisque la théorie quantique des champs admet la validité universelle de la symétrie CPT, et en même temps admet la violation de la symétrie P et de la symétrie CP, c'est équivalent à admettre la violation de la symétrie T. Il est donc logique de penser que la dynamique des fermions, dans le modèle standard, ne peut pas être hamiltonienne. De plus, nous avons expliqué dans le premier chapitre comment la première forme hamiltonienne de l'équation de Dirac n'est ni relativiste ni équivalente à la seconde forme de l'équation de Dirac, qui est relativiste, elle. Il n'est pas correct de considérer deux équations d'onde non équivalentes comme décrivant la même particule !

Nous avons maintenant une raison encore plus forte, sachant que le temps ordinaire s'exprime à travers la fonction exponentielle qui applique l'algèbre de Lie  $Cl_3$  sur le groupe  $Cl_3^*$ , et en particulier qui applique  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  : le temps est orienté par la structure globale de l'espace-temps. Les mesures d'espace et de temps qui sont faites pour interpréter les phénomènes d'intrication des ondes quantiques devraient, en toute rigueur, n'utiliser ni le temps absolu de la physique pré-relativiste, ni l'espace-temps de la relativité restreinte, mais devraient vivre dans le véritable espace-temps, qui est la variété d'espace-temps elle-même : nous avons expliqué en 4.5.2 comment des événements paraissant simultanés dans un référentiel particulier peuvent en fait se trouver **chacun** dans le futur d'un autre observateur.

Dans la discussion précédente sur la désintégration d'un atome d'uranium, et aussi dans l'émission d'un photon, il est essentiel de comprendre le caractère de tout ou rien du phénomène quantique, qui est la principale caractéristique des phénomènes quantiques. De manière sure et certaine, pour n'importe quel phénomène quantique, le moment cinétique vient en mul-

tiples entiers de  $\hbar/2$ . Néanmoins, en faisant usage de propriétés d'ergodicité, il doit être possible de lier les probabilités temporelles d'événements semblant purement fortuits, aux distributions continues des probabilités spatiales. Cela reste à construire, notamment pour pouvoir rendre compte des probabilités utilisées par Einstein dans sa physique du corps noir.

## 5.5 L'équation de Dirac presque oubliée

C'est à partir de deux parties du travail scientifique d'Einstein que ce travail s'est construit. Une première partie de son travail a été interprétée comme le remplacement du groupe d'invariance de la physique newtonienne par un autre groupe d'invariance, appelé groupe de Poincaré, groupe de dimension 10, constitué des translations d'espace-temps et des transformations de Lorentz. La mécanique quantique relativiste a remplacé le groupe de Lorentz restreint par le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ , et ce groupe, de dimension 6, nous l'avons remplacé par le groupe  $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$ . Cette extension se justifie par le spin  $1/2$  de tous les objets fondamentaux de la physique quantique : les fermions. Ils sont nommés du nom de Fermi, qui donna la statistique issue du principe d'exclusion de Pauli. Concernant ce principe d'exclusion, nous sommes allés aussi un peu plus en avant puisqu'il est maintenant relié à l'additivité des courants et de la masse-énergie fermionique, à travers l'orthonormalisation des ondes. Cette additivité des énergies n'est pas exacte, c'est une loi qui découle de la très petite masse des particules, ce qui rend la non linéarité de la gravitation inopérante.

Pourquoi la mécanique quantique a-t-elle été bâtie à partir de l'équation de Schrödinger, quand seulement quelques mois après l'équation de Dirac devint disponible ? De Broglie a expliqué comment, après le congrès Solvay de 1927, ayant été nommé professeur à la Sorbonne, conscient des obstacles envers son idée de l'onde guidant la particule, il commença à enseigner les travaux des autres physiciens de la mécanique quantique, et non pas sa propre théorie. Il ne revint aux idées de sa jeunesse que bien des années plus tard. Cependant, quelques années avant ce changement d'opinion, il s'était à nouveau intéressé à l'équation de Dirac, parce que cette équation était relativiste, comme son idée initiale d'une onde associée au mouvement de toute particule matérielle, [55]. C'est ainsi qu'il commença à changer d'état d'esprit sur le pouvoir explicatif de la mécanique quantique, à un moment où l'équation de Dirac était déjà considérée dépassée, rarement enseignée. Cette partie de la physique quantique était en train de disparaître progressivement des cursus universitaires de physique.

Parmi les raisons de ce déclin, il y a la grande différence introduite par le spin  $1/2$ , entre ce qui était appelé quantité physique en physique classique et ce qui est appelé ainsi en mécanique quantique. En physique classique, les quantités sont des nombres, par exemple une température de 302 Kelvin. D'autres quantités sont des composantes de vecteurs, comme les vitesses et

les forces, dont les composantes sont des nombres réels. D'autres, un peu plus difficiles à comprendre, sont des tenseurs tels que le tenseur d'inertie, ou le tenseur champ électromagnétique. Là encore, toutes les composantes sont des nombres réels. L'équation d'onde trouvée par Schrödinger, celle de Pauli, et encore plus celle de Dirac, toutes introduisent un profond changement : les états quantiques n'ont pas de lien direct avec les quantités de la physique classique. A chaque quantité classique la théorie quantique associe un opérateur agissant sur l'espace vectoriel des états, et ce sont les valeurs propres de ces opérateurs qui donnent les nombres réels de la physique classique. Si on suit cette manière de raisonner, la réalité physique ultime du champ électromagnétique ce sont les opérateurs de création et d'annihilation qui ajoutent et retranchent une unité au nombre de photons présents sur une onde électromagnétique.

Tout au contraire, on explique dans l'annexe C comment tous les nombres quantiques des solutions pour l'atome d'hydrogène sont obtenus, à partir seulement de la condition de normalisation de l'onde de l'électron. Cela ne contredit pas la mécanique quantique, parce qu'on peut construire des opérateurs ad-hoc tels que chaque solution obtenue est un vecteur propre de ces opérateurs. Néanmoins la théorie générale des opérateurs hermitiens est tout simplement inutile ! De Broglie remarqua dès [56] qu'avec l'équation d'onde de Dirac, c'était encore différent. Certes le concept des nombres classiques remplacés par des valeurs propres d'opérateurs était conservé, mais ce ne sont pas ces quantités qui ont la bonne variance relativiste. Ce sont les densités tensorielles qui se transforment suivant les lois établies en physique relativiste. Puis plusieurs arguments furent apportés contre l'onde de Dirac, l'un d'eux étant que les matrices utilisées dans l'équation d'onde ne sont définies qu'à un facteur matriciel arbitraire près. Il est donc difficile de considérer l'onde comme ayant des éléments de réalité physique, l'onde apparaît comme un simple outil de calcul, non physique. On a résolu cette difficulté en définissant de manière unique les matrices de Dirac à partir des matrices de Pauli, et en définissant les matrices de Pauli de manière unique à partir de la base canonique de  $GL(2, \mathbb{C})$ . Les matrices sont fixes, elles sont les mêmes pour deux observateurs en mouvement relatif, et donc l'onde de spin  $1/2$  peut être considérée comme ayant autant de sens physique qu'une grandeur classique comme le champ électromagnétique, ou l'impulsion-énergie. Un certain nombre d'autres difficultés sont seulement historiques, elles ont été résolues quand l'étude des tenseurs de la théorie a été améliorée : Hestenes a introduit des méthodes de calcul beaucoup plus efficaces. Elles lui ont permis de prouver que la densité de charge électrique et la densité de courant électrique venant de l'onde de l'électron suivent presque la loi de Lorentz de la force exercée sur une charge.<sup>1</sup> Une seule autre théorie est capable d'obtenir les lois du mouvement à partir des équations du champ : la relativité générale. Cette prouesse de la relativité générale impressionna

---

1. Notre équation d'onde améliorée donne cette loi de force exactement, voir 1.10.

grandement de Broglie quand Einstein réussit à le démontrer (de Broglie avait lui-même besoin de lier la particule et l'onde, ce que permet la non linéarité de la théorie de la gravitation). Or on peut dire que l'équation d'onde améliorée est même plus performante que les équations d'Einstein de la gravitation, qui ne donnent le mouvement que pour une singularité du champ, alors que l'équation d'onde de l'électron donne la force de Lorentz pour toutes les solutions de l'équation d'onde.

Une autre raison pour la théorie physique de dévaluer l'onde de spin  $1/2$  est la linéarité de l'équation de Dirac. Elle est donc beaucoup moins bonne que la relativité générale, qui n'est pas linéaire. Autre raison, c'est la théorie d'un seul électron, et dans un potentiel extérieur en plus, ce qui n'est pas admissible dans une théorie de champs. Cependant ces critiques portent sur l'équation de Dirac telle qu'elle fut formulée en 1928, pas sur notre travail : l'équation améliorée présentée au chapitre 1 et ses généralisations dans les chapitres suivants sont non linéaires, tant dans le terme de masse que dans les termes de jauge, où en outre les potentiels dépendent de l'onde. Des identités algébriques suppriment les effets de chaque courant chirale sur lui-même. Cela élimine l'auto-action, sans détruire l'effet. De plus la forme la plus utile de l'équation d'onde d'un fermion est la forme invariante, qui n'est pas du tout linéaire. L'onde est une fonction bien définie de l'espace-temps (pas d'un espace de configuration) à valeur dans un ensemble d'opérateurs agissant sur eux-mêmes. C'est la seule justification possible pour la seconde quantification.

Dans le modèle d'électron-particule de Lorentz, la masse-énergie était l'intégrale sur tout l'espace de la densité d'énergie du champ électromagnétique. Si l'électron était purement ponctuel cette énergie serait infinie. Si l'électron était étendu, la force répulsive due au champ électrique devrait être compensée par d'autres forces, inconnues. C'est cela qui amena à considérer l'action des seules charges extérieures sur une charge donnée. Dans les précédents chapitres, la densité d'énergie n'était plus la densité d'énergie du champ électrique, c'était la composante temporelle du tenseur d'impulsion-énergie lié à la densité lagrangienne de l'électron. On savait auparavant que la densité d'énergie liée au champ électromagnétique  $W = \frac{1}{2}(E^2 + H^2)$  posait problème : la masse associée à cette énergie dépend de comment l'énergie est définie du point de vue mécanique [8]. On a vu au chapitre 1 que c'est le champ électromagnétique lui-même qui est le tenseur d'impulsion-énergie. Ce tenseur densité d'impulsion-énergie en physique quantique est lié par le théorème de Noether à l'invariance de la densité lagrangienne sous les translations d'espace-temps. Comme on n'a eu besoin que de la partie fermionique de la densité lagrangienne du modèle standard, et puisque les équations d'onde des bosons se déduisent des équations d'onde des fermions, par la récursivité de ces équations d'onde, on peut voir qu'on n'a besoin que de la partie fermionique de la densité lagrangienne.

Cette partie de la densité lagrangienne se déduit des équations d'onde, et les équations d'onde se déduisent de la densité lagrangienne. Tout cela

suggère que les champs de jauge n'ont pas d'énergie propre, les phénomènes dans lesquels les champs de jauge semblent posséder leur propre énergie sont des phénomènes dans lesquels il est toujours possible d'allouer cette énergie aux fermions qui donnent ou reçoivent cette énergie.

Ceci amène une première prédiction : **Aussi fort que soit le champ magnétique autour d'une étoile (y compris une étoile à neutrons ou un trou noir) ou d'une galaxie, ce champ, en dépit de la structure bipolaire ou multi-polaire du champ, n'a absolument aucun effet sur la géométrie du champ de gravitation, qui peut demeurer parfaitement sphérique.**

## 5.6 Pourquoi cette forme d'équation d'onde ?

L'équation d'onde globale pour tous les fermions de la première génération se sépare en 16 équations correspondant aux 16 spineurs, huit gauches et huit droits, qui composent cette onde. Cette séparation est ce qui nous permet de distinguer ces objets les uns des autres. Mais la séparation est seulement partielle : les équations d'onde sont toutes bâties sur le même modèle, avec une partie différentielle (la seule partie qui traite vraiment séparément les seize ondes), un terme de masse et un terme de jauge. Le terme de masse et le terme de jauge contiennent des vecteurs d'espace-temps qui sont eux-mêmes des fonctions des spineurs gauches et droits. Cette dépendance des termes de masse et de jauge révèle le caractère hautement non-linéaire de l'équation d'onde.

Examinons à nouveau ces trois parties d'équation d'onde : l'équation complète est contrainte par l'invariance sous le groupe  $Cl_3^*$  qui régit la totalité du modèle standard et de la gravitation. On prend en considération l'homothétie par son rapport qui définit la invdim en 1.8, dont on se sert pour distinguer la contravariance de la covariance.

1. Les spineurs ont une invdim 1. Les dérivées partielles agissant sur eux donnent des termes de invdim  $-1$ .

2. Donc les autres termes doivent aussi avoir la même invdim  $-1$ . Or ils contiennent une multiplication agissant sur le spineur, qui apporte une invdim  $+1$ . Donc les autres facteurs doivent apporter ensemble une invdim  $-2$ . Par conséquent la multiplication par un seul spineur ne peut pas marcher, il est impossible d'avoir des termes quadratiques par rapport aux spineurs, seulement des termes cubiques sont possibles. Ces termes cubiques apportent en plus une invdim de  $+2$ , et non de  $-2$ , et il y a donc une différence de  $+4$  à compenser.

3. Ceci ne peut se faire que de deux manières, soit en apportant une invdim de  $-4$ , soit en apportant deux invdims de  $-2$ . La première possibilité est ce que fait le terme de jauge, où la charge seule (en fait les constantes  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$ ) apporte la invdim  $-4$ .

4. La seconde possibilité,  $-4 = -2 - 2$  est en fait ce que  $m/\rho$  apporte

dans le terme de masse parce que  $m$  apporte une invdim  $-2$  tandis que  $1/\rho$  apporte aussi une invdim  $-2$ . En somme, il y a deux, et seulement deux sortes de termes possibles à côté du terme différentiel, parce qu'il y a exactement deux manières d'exprimer le nombre 2 comme une somme d'entiers ordonnés :  $0+2$  et  $1+1$ . De plus ceci permet de justifier la différence existant entre charge et masse, qui certes donnent toutes deux des potentiels en  $1/r$ , mais qui diffèrent du point de vue de l'invariance étendue.

Pourquoi n'a-t-on pas de dérivées d'ordre supérieur ? D'abord il faut que l'équation d'onde ait des dérivées partielles similaires pour le temps et pour l'espace, sinon on tombe dans la situation de l'équation de Schrödinger, qui n'est pas relativiste. Et seules des dérivées partielles du premier ordre peuvent se concilier avec l'existence d'une densité de probabilité qui puisse se conserver. Les dérivées partielles du premier ordre peuvent aussi être considérées comme des termes de première approximation. Dans l'étude des variétés, en distinguant les variations des points et les variations d'une base mobile, il est possible d'éviter l'écriture de termes différentiels de degré plus élevé. C'est similaire aux systèmes d'équations du premier ordre qu'on obtient en mécanique (où les dérivées du second ordre sont naturelles) quand les vitesses sont utilisées comme variables auxiliaires. Donc l'usage des seules dérivées partielles du premier ordre ne restreint pas la généralité de nos équations d'onde. De plus la récursivité prend place dans les équations d'onde. Itérant une fois, les dérivées du second ordre permettent la définition des bosons de jauge. Itérant deux fois et plus, les termes d'ordre supérieur sont inclus dans les relations liant les champs de jauge aux potentiels, et les courants aux champs de jauge. Finalement le système est clos pour une autre raison : la invdim nulle de tous les champs de jauge. En conséquence, en multipliant les opérateurs agissant sur les champs de jauge on obtient encore de tels opérateurs.

L'onde quantique donne deux connexions sur la variété d'espace-temps une connexion liée aux courants de l'onde quantique (inertie) et une autre liée au groupe d'invariance (géométrie-gravitation) (voir le chapitre 4). L'égalité entre ces connexions est exactement le principe d'équivalence entre inertie et gravitation. Et la raison de cette égalité, c'est que la variété d'espace-temps est une hyper-surface de dimension quatre, elle-même contenue dans le groupe de Lie de dimension huit  $Cl_3^*$ , qui est aussi une variété. Comme la connexion agit par l'équation d'onde, elle concerne directement la densité lagrangienne, et donc aussi l'impulsion-énergie. La masse propre est donc une différence entre une masse d'inertie et une masse gravitationnelle, qui est beaucoup trop petite pour être perçue, parce que le nombre d'Avogadro est très grand. Cette masse n'est pas définie par la particule seule, elle est propre à la particule interagissant avec un système matériel suffisamment grand pour permettre les mesures.

## 5.7 Jeu de piste

Dans le vaste "jeu de piste" qu'est la recherche scientifique, il est très facile de perdre la bonne piste par suite de coïncidences, principales raisons de croire qu'on est sur la bonne piste alors qu'elle est déjà perdue. Et il y a eu plusieurs coïncidences tout au long de l'histoire de la physique. Par exemple l'équation d'onde de l'électron fut découverte juste au même moment que le spin  $1/2$ , et en ce temps-là il n'y avait pas de relation directe entre les deux. Une autre coïncidence concerne les outils mathématiques : l'algèbre de Clifford de l'espace de dimension trois est aussi l'algèbre des matrices complexes  $2 \times 2$  (mais seulement en tant qu'algèbres sur le corps des réels !) Cela a contribué à justifier l'habitude de la mécanique quantique de n'utiliser que des fonctions à valeur complexe. Troisième coïncidence : le groupe de Lie des rotations dans l'espace de dimension 3 a la même algèbre de Lie que le groupe des matrices unitaires complexes  $2 \times 2$ , appelé  $SU(2)$  (mais les groupes eux-mêmes sont différents !). Ça a donné une justification supplémentaire à l'usage des seules fonctions de valeur complexe, et à la primauté des transformations unitaires qui conservent la probabilité. Ces coïncidences, accidentelles du point de vue mathématique, sont les raisons qui ont conduit les physiciens à considérer la théorie des opérateurs sur les états quantiques comme un outil tout à la fois nécessaire, suffisant, et inattaquable – mais quand même : c'était une fausse piste !

L'esprit humain cherche toujours à ramener les nouveautés à des choses qu'il connaît déjà. C'est notre nature. Ainsi il y a encore des gens aujourd'hui qui persistent à restreindre l'étude de l'électromagnétisme au temps absolu, qui n'est que le temps perçu par notre horloge interne biologique. Dans le même ordre d'idée, le concept de spineur a été systématiquement réinterprété, démantibulé, pour réduire le nouveau concept à quelque chose de précédemment connu : la physique des tenseurs. Par conséquent la nouveauté de la situation n'a pas été perçue, par exemple l'infinité de sortes de densités tensorielles qui peuvent être construites à partir des ondes spinorielles. Dans le même ordre de choses, seules les densités tensorielles qui étaient invariantes de jauge ont été prises en considération, comme si l'électron ne pouvait pas être lui aussi concerné par les interactions faibles.

## 5.8 Physique et mathématiques

Les mathématiques et la physique sont des sciences étroitement reliées, les deux travaillent sur des données géométriques et numériques et les intègrent dans un corpus ordonné de savoir. Mais ces deux sciences, toutes deux très développées, sont de nos jours si vastes qu'il est impossible à un jeune scientifique de maîtriser la totalité de la physique, ou la totalité des mathématiques, et encore plus difficile, de maîtriser correctement les deux domaines.

Galilée le premier à mis en évidence que le langage de la physique est mathématique, et depuis lors la connexion entre les deux disciplines a grandi constamment, devenant toujours plus étroite. Mais les mésententes entre les deux disciplines se sont singulièrement aggravées depuis le début de la physique quantique. Les mésententes, c'est souvent le cas, ont des causes des deux côtés. L'évolution des mathématiques vers une plus grande abstraction, une plus grande généralité, est naturelle, mais inadaptée aux besoins des physiciens : l'étude des espaces vectoriels se fait tout naturellement avec un espace de dimension  $n$  quelconque, mais ce qui intéresse la physique est juste l'espace à trois dimensions et l'espace-temps avec ses  $3+1$  dimensions. C'est seulement dans l'espace à trois dimensions que le produit vectoriel existe avec des propriétés simples, si utiles pour les physiciens. Les propriétés spécifiques à la dimension trois (produit scalaire et vectoriel, rotationnel, mais aussi le champ électromagnétique comme un champ de densités d'impulsion-énergie), ça n'intéresse pas la plupart des mathématiciens. Les propriétés particulières à l'algèbre de Pauli des matrices complexes  $2 \times 2$ , comme le fait que les co-matrices sont réduites à des nombres, ne marchent qu'avec  $n = 2$ . Et donc l'usage de la dimension générale  $n$ , si naturelle donc si prisée en mathématiques, est en pratique nuisible pour la physique.

Les physiciens sont aussi en partie responsables de cette mésentente. Il est impossible de profiter de la force des résultats mathématiques quand on ne tient pas compte de leurs contraintes, par exemple de la nécessaire définition des objets mathématiques utilisés, pour lesquels les raisonnements peuvent s'appliquer, l'importance des théorèmes d'existence et d'impossibilité.<sup>2</sup> Ainsi, c'est l'algèbre de Pauli, avec ses modestes 8 dimensions sur  $\mathbb{R}$ , qui est importante, alors que tout semble pousser la théorie de Dirac à travailler avec  $M_4(\mathbb{C})$  ou à la rigueur avec ses sous-algèbres  $Cl_{1,3}$  et  $Cl_{3,1}$ . Il est également nécessaire de distinguer des concepts proches et néanmoins différents, tels que groupe de Lie ou algèbre de Lie.

La théorie quantique s'est bâtie sur la base des mathématiques du siècle précédant ses commencements. Par exemple le concept de fonction était purement calculatoire, et les questions de limite, de topologie, et même les simples notions d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée d'une fonction, ou l'utilité des algèbres de Clifford, tout cela n'était pas compris par des physiciens suffisamment âgés, malgré leur remarquable jeunesse, pour ne connaître que les mathématiques du dix-neuvième siècle. Par la suite les

---

2. Dans son second livre sur la théorie de Dirac ([60] Chapitre II section 2) de Broglie explique clairement l'impossibilité suivante : si on considère trois opérateurs  $m_x$ ,  $m_y$  et  $m_z$  vérifiant les relations d'anti-commutation des rotations en trois dimensions, les seules valeurs propres possibles de  $m_z$  sont  $-j, -j+1, \dots, j-1, j$  où  $j(j+1)$  est valeur propre de  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$ , et toutes les valeurs possibles de  $j$  sont  $0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$ . Mais si  $m_x$ ,  $m_y$  et  $m_z$  sont les opérateurs de moment angulaire ( $m_x = i(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})$  et ainsi de suite), les seules valeurs possibles de  $j$  sont  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Par conséquent les opérateurs de la théorie de Dirac, avec valeurs  $1/2, 3/2, 5/2, \dots$  ne sont pas des opérateurs de moment angulaire ! (Et donc on les nomme ici opérateurs de moment cinétique).

physiciens ont même été induits en erreur par la puissance de la théorie des distributions, qui a rendu l'usage des transformations de Fourier et de Laplace beaucoup plus efficaces. Donc quand la théorie quantique des champs fut introduite, la plupart de ses créateurs furent tout à fait certains que la démonstration mathématique des propriétés dont ils avaient besoin serait forcément très bientôt faite. Mais les preuves attendues ne vinrent jamais : la physique avait trop confiance dans le pouvoir des mathématiques.

## 5.9 Compréhension, prédiction

Parmi les choses qu'on comprend mieux maintenant, plusieurs sont connues depuis longtemps. L'existence de la constante de Planck en physique est vieille de plus d'un siècle, et la quantification du moment cinétique vient de là. On a aussi expliqué ici comment le rapport constant entre énergie et fréquence vient de l'invariance des lois quantiques sous  $Cl_3^*$ . Cette invariance vient de la structure mathématique des ondes fermioniques. Et la structure mathématique des ondes fermioniques à son tour vient de cette invariance.<sup>3</sup> Ceci passe par l'équivalence entre deux formes des équations d'onde, équivalence due à l'irréversibilité des valeurs de la fonction d'onde. De plus cette équivalence donne naissance au mécanisme lagrangien. C'est un principe extrême, donc le théorème de Noether associe l'invariance sous les translations de l'équation d'onde à la conservation du tenseur d'impulsion-énergie. Ce même théorème associe la conservation du tenseur de moment cinétique à l'invariance sous  $Cl_3^*$ . On a obtenu, en conséquence, la quantification du moment cinétique avec la valeur attendue  $\hbar/2$ . Et puisque le moment cinétique est quantifié, la constante de Planck apparaît fixe. L'orthonormalisation de l'onde et la quantification, qui en résulte, du moment cinétique justifie l'utilisation des différents opérateurs de moment cinétique qui donnent les différents états des électrons dans les atomes.

Le principe d'exclusion de Pauli est aussi connu depuis un siècle. On relie ici ce principe à la nécessaire additivité des courants et à la nécessaire orthonormalisation des états dans le cas des électrons des atomes. Cette orthonormalisation est elle-même reliée à l'additivité de la masse-énergie, et donc aux propriétés des sources de la gravitation, parce que les masses des objets de la microphysique sont très petites par rapport aux masses nécessaires pour révéler le caractère non linéaire de la gravitation. Ainsi les énergies des divers électrons d'un atome sont additives. Cette additivité de l'énergie est elle-même reliée à l'additivité des potentiels de jauge. Cela suffit à justifier que la gravité autour d'une étoile soit proportionnelle à la masse totale de l'étoile, somme des masses de tous ses constituants. C'est seulement une approximation linéaire, légitime dans le cas d'un champ gravitationnel faible.

---

3. Ce bouclage de la causalité est la seule raison expliquant pourquoi aucune métaphysique n'est nécessaire.

On a aussi relié le principe d'équivalence à cette approximation en champ faible, à travers les densités lagrangiennes qui peuvent s'écrire comme différence entre une part inertielle et une part gravitationnelle. Le théorème de Noether donne alors la même possibilité pour les densités d'impulsion-énergie, qui ont donc (presque) la même composante temporelle. Par intégration sur l'espace on obtient donc égalité entre la masse d'inertie et la masse gravitationnelle. C'était le point de départ de la relativité générale d'Einstein.

L'inclusion de la variété d'espace-temps dans le groupe de Lie  $Cl_3^*$  suffit à expliquer l'homogénéité et l'isotropie de notre espace-temps : dans un groupe de Lie, le voisinage de chaque élément du groupe est similaire au voisinage de l'élément neutre. Cette homogénéité, limitée seulement par la gravitation, est très largement établie du point de vue expérimental, où la lumière de corps noir du fonds du ciel, est encore aujourd'hui très largement homogène (une part en  $10^5$ ). De plus la géométrie de l'espace physique tend vers l'infini (comme celle de  $\mathbb{R}^3$ ).

## 5.10 Falsifiabilité

Toute théorie scientifique se doit d'être falsifiable : il devrait être possible de prouver que la théorie est fausse. Dans le même temps, il est impossible de prouver, de manière définitive, que la théorie est vraie. Donc ceci ne peut que rendre humbles les auteurs de ce travail. Est-ce qu'une meilleure théorie, un jour, se passera complètement de l'équation de Dirac pour la compréhension des propriétés des électrons, neutrinos, quarks et autres "particules" ? Même si l'équation de Dirac donne tous les résultats connus pour les électrons des atomes, on a prouvé qu'il est possible d'obtenir les mêmes résultats avec un autre point de départ [35].

Depuis le principe de Fermat en passant par la mécanique lagrangienne et jusqu'au modèle standard, la totalité de la théorie physique a été développée à partir d'un principe extrémal. Est-ce que ce principe est fondamental en physique ? La réponse donnée en 2.3.4 est clairement : non ! On a détaillé comment la structure algébrique de  $Cl_3^*$  donne le double lien logique entre l'équation d'onde et la densité lagrangienne. Donc le principe extrémal n'est pas fondamental, bien qu'il soit très efficace parce que l'invariance de la densité lagrangienne donne, à travers le théorème de Noether, des quantités qui se conservent. Et ce qui se conserve, qui est stable, est beaucoup plus facile à comprendre que ce qui est furtif, instable, changeant, imprévu. De plus le principe extrémal est la raison de l'unité de toute la matière-énergie, parce que chaque fermion apporte sa contribution à ce tenseur d'impulsion-énergie, dont la composante temporelle donne l'énergie de la matière. En plus, le champ électromagnétique lui-même est cette impulsion-énergie. Et seuls les fermions contribuent, les photons ne font que transporter l'impulsion-énergie entre deux fermions. Et néanmoins, dans un

régime dominé par la gravitation il n'y a plus de formalisme lagrangien (voir 4.3), et donc plus de loi de conservation.

Le grand débat des débuts de la mécanique quantique tournait autour de la question : qu'est l'objet quantique ? Une particule (un très petit objet, voire un point infiniment petit) ? Une onde ? Une onde **et** une particule (comme le pensait de Broglie) ? Tout phénomène de la physique quantique qui est décrit de manière adéquate avec des particules peut aussi être décrit avec des ondes, et inversement. Et il est possible de décrire le même phénomène avec des objets qui sont à la fois ondes et particules [99]. Ici on est parti de l'onde de Dirac. Et on a même affirmé : un électron est une onde quantique orthonormalisée. Est-ce que l'électron est aussi un objet ponctuel ? Rien ne l'interdit ! Il est possible que notre onde quantique orthonormalisée puisse inclure des singularités, ou même doive inclure des singularités. Pour s'en assurer, il faudra résoudre les équations d'onde, étudier avec soin les solutions, et en particulier comprendre l'émission et l'absorption des photons et des autres bosons. Notons que les solutions calculées, pour un électron d'un atome d'hydrogène, peuvent être qualifiées de "solitons" : l'apparence des fonctions radiales indique que ces solutions ressemblent à des solitons. Leurs approximations linéaires sont complètement stables, indéfiniment. Leur "solitude" est simplement moins visible parce que ces ondes ne sont pas séparées dans l'espace ordinaire, mais sont orthogonales pour un produit scalaire concernant la variété  $Cl_3^*$  où notre espace-temps est seulement une hyper-surface de dimension quatre.

Ce grand débat a commencé à une époque où seulement une particule élémentaire était réellement connue, l'électron. En plus l'onde de l'électron n'est pas élémentaire mais double, elle est faite d'une onde droite et d'une onde gauche, c'est un objet compliqué. Les autres particules connues dans les premières années de la physique nucléaire, les protons et les neutrons, ne sont plus considérés comme élémentaires puisqu'ils sont faits de trois quarks, donc de six ondes, trois gauches et trois droites, ce sont des objets encore plus compliqués.

Nous sommes très loin d'avoir complètement exploré toutes les conséquences de l'extension du groupe d'invariance. Considérons une fois encore un phénomène aussi commun qu'une transition d'un électron de la photosphère du Soleil, d'un état d'énergie à un autre, suivi par le voyage de l'impulsion-énergie, c'est-à-dire du champ électromagnétique, jusqu'à notre œil et son absorption par un électron dans notre rétine. On interprète cette chaîne d'événements en appelant photon le champ électromagnétique voyageant du Soleil à la rétine. Cela nous permet de négliger l'émission et la réception et de se concentrer sur le photon "durant" le transport. Mais la durée de ce transport, du point de vue du photon, est exactement nulle. On pourrait tout aussi bien décrire la chose de la manière suivante : l'onde de l'électron dans la photosphère produit un tenseur d'impulsion-énergie qui se propage jusqu'à l'électron de notre rétine, donnant une interaction directe de deux ondes électroniques, celle de l'électron dans la couronne solaire et

celle de l'électron de notre rétine.

Il reste à comprendre un grand nombre de choses. Donner une équation d'onde des quarks est seulement une première étape. Il sera aussi nécessaire de savoir calculer les moments magnétiques du proton et du neutron, et d'étudier ce que les nouvelles équations permettront de comprendre en physique nucléaire. Et il peut se faire que beaucoup d'autres conséquences existent, auxquelles nous n'avons pas encore pensé.

Ce qui a déjà été obtenu justifie complètement l'extension du groupe d'invariance de  $SL(2, \mathbb{C})$  à  $Cl_3^*$ . Sans cette extension, il n'y a ni quantification du moment cinétique, ni la double présence de l'invariance chirale à la fois dans les symétries de jauge et dans la géométrie de la gravitation. Sans cette extension, la physique ne peut comprendre ni la raison de l'existence du neutrino-monopôle, ni les valeurs des charges électriques des leptons et des quarks de chaque génération du modèle standard, ni les propriétés spécifiques des champs de jauge : leur invdim est nulle, ils sont sensibles seulement à la partie du groupe des similitudes qui se réduit aux transformations de Lorentz. Les produits de tels champs ont aussi une invdim nulle, ils se comportent eux-mêmes comme les champs de jauge, ce qui rend possible la construction d'opérateurs de création et d'annihilation.

En métrologie, les physiciens sont de nos jours en train de travailler pour pouvoir remplacer le vieux kilogramme standard par ce standard de l'action qu'est la constante de Planck. C'est parfaitement compatible avec l'invariance étendue : quand une similitude multiplie les longueurs par  $r$ , la longueur de tous les mètres est aussi multiplié par  $r$ . Donc les physiciens qui mesurent toujours localement le rapport entre la longueur de l'objet mesuré et la longueur du mètre standard ne peuvent pas voir l'homothétie. On peut dire la même chose pour les masses propres et pour les actions, en remplaçant seulement  $r$  respectivement par  $r^3$  et  $r^4$ .



## Chapitre 6

# Épilogue

Merci pour votre attention sur ce travail qui est le fruit de plus de trente années de recherche. On en résume ici les principales caractéristiques. On s'est servi de cinq nouveautés :

1. Le cadre mathématique naturel de l'onde quantique est l'algèbre de Clifford  $Cl_3$  (au lieu de l'algèbre d'espace-temps) ; elle suffit à décrire à la fois l'onde quantique et la variété d'espace-temps.
2. Le groupe d'invariance (invariance de forme qui remplace en physique quantique le groupe de Lorentz de la relativité restreinte) est étendu de  $SL(2, \mathbb{C})$  au groupe  $GL(2, \mathbb{C}) = Cl_3^*$ .
3. L'équation d'onde usuelle de Dirac est remplacée par une équation améliorée, en simplifiant la densité lagrangienne, avec une possibilité de double masse propre.
4. L'espace-temps n'est pas le point de départ, mais est une conséquence du champ des valeurs de l'onde des fermions.
5. La variété d'espace-temps est incluse dans  $Cl_3^*$  (groupe d'invariance des lois physiques).

Les calculs dans  $Cl_3$  sont beaucoup plus simples que les calculs avec les matrices complexes  $4 \times 4$ . Les premiers fruits de ces simplifications sont une meilleure compréhension de :

1. pourquoi il existe un principe extrémal en physique,
2. pourquoi le principe d'équivalence existe en relativité générale,
3. pourquoi la double égalité  $E = mc^2 = h\nu$  (relation d'Einstein et existence du quantum d'action) est vraie,
4. pourquoi l'action et la charge électrique sont toutes deux quantifiées,

5. pourquoi la violation maximale de la parité dans les interactions faibles,
6. pourquoi le spin  $1/2$  et pas des valeurs entières pour les opérateurs de moment cinétique,
7. d'où vient le principe d'exclusion de Pauli,
8. pourquoi cette sorte d'équation d'onde existe et comment ces équations sont liées à la géométrie de l'espace-temps,
9. ce qu'est la conjugaison de charge et comment le puzzle des énergies négatives se résout,
10. comment la partie fermion et la partie boson du modèle standard se connectent,
11. pourquoi le nombre baryonique se conserve,
12. pourquoi les leptons sont insensibles aux interactions fortes.

Toutes ces réponses s'obtiennent sans aucun principe métaphysique.

En élargissant l'espace vectoriel des valeurs de l'onde quantique à  $Cl_{3,3}$ , l'onde fermionique rend compte de la plupart des nouveautés introduites dans le modèle standard :

1. L'existence d'exactly deux quarks avec chacun trois états de couleur, à chaque génération.
2. L'existence liée de trois générations et de la conjugaison de charge.
3. L'invariance de jauge sous le groupe  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  du modèle standard, et l'impossibilité d'un groupe de jauge différent ou plus vaste.
4. La distinction entre leptons insensibles aux interactions fortes, et quarks liés par les interactions fortes, de couleur. Pour le secteur des leptons, l'existence d'une particule avec une charge électrique et d'une autre avec une charge magnétique, le neutrino-monopôle, existence liée aux quatre sortes de représentations du groupe  $Cl_3^*$ . Le neutrino avec une onde gauche et une onde droite et le monopôle magnétique sont deux noms du même objet. Il y a un lepton chargé et un neutrino pour chaque génération, plus un quatrième neutrino qui est sa propre anti-particule.
5. Pour les quarks, l'existence de douze ondes élémentaires, trois pour chacune des quatre sortes de représentations de  $Cl_3^*$ , avec six de ces ondes, trois gauches et trois droites, formant les trois quarks d'un proton ou d'un neutron.
6. La quantification du moment cinétique avec la valeur  $\hbar/2$  pour chaque particule élémentaire (c'est précisément pour cette raison qu'elles peuvent être considérées comme des particules), à savoir : le proton, le neutron, l'électron et le neutrino-monopôle.

7. La valeur des charges électriques de toutes les particules et antiparticules (électrons, neutrinos, quarks...).
8. L'origine de la préférence pour les ondes gauches (voir 3.8). L'inclusion de  $Cl_3$  dans  $\text{End}(Cl_3)$  peut aussi expliquer pourquoi l'onde de l'électron de seconde quantification peut garder tous les résultats de l'onde de première quantification.
9. Sur la géométrie de l'espace-temps on a aussi résolu l'ambiguïté de la signature de l'espace-temps en relativité restreinte. Puisque la forme quadratique donnant la métrique d'espace-temps vient du déterminant en (1.33), la signature est nécessairement  $+$   $-$   $-$   $-$ .
10. L'équivalence entre équations d'onde sous la forme usuelle et sous la forme complètement invariante nécessite l'annulation du  $X$  de 4.3.
11. L'existence dans le champ électromagnétique de quanta d'impulsion-énergie (photons), parce que le champ électromagnétique est fait de composantes du tenseur d'impulsion-énergie du champ fermionique.
12. L'existence en physique quantique d'une densité de probabilité et la nécessité de la normalisation de l'onde quantique. Ceci résulte du principe d'équivalence entre gravitation et inertie.

L'inclusion de la variété d'espace-temps dans le groupe de Lie  $Cl_3^*$  montre :

1. L'origine géométrique de la flèche du temps.
2. Une meilleure compréhension de la non-simultanéité en optique.
3. Une origine principalement géométrique de l'expansion de l'univers, et sa récente accélération.

Tout ce travail n'aurait même pas pu commencer sans la création, par Louis de Broglie lui-même, d'une fondation libre et indépendante, dans le but de continuer ses recherches en microphysique. Le directeur de cette *Fondation Louis de Broglie* fut Georges Lochak (1931-2021), qui découvrit le monopôle magnétique leptonique, point de départ de ce travail.

Si vous avez des questions ou des commentaires vous pouvez utiliser nos adresses mail.

Le chemin est ardu, mais Louis de Broglie a revendiqué la nécessité à la fois de la liberté et de l'imagination. Il a légué sa devise à sa Fondation :  
**Pour l'avenir.**



## Annexe A

# Algèbres de Clifford

**On présente ici les algèbres de Clifford. On étudie l'algèbre du plan euclidien et, de manière très détaillée, l'algèbre de l'espace à trois dimensions. C'est aussi l'algèbre engendrée par les matrices de Pauli. On y inclut l'espace-temps et on y décrit l'invariance relativiste. On étudie les différents densités tensorielles de l'onde de l'électron. On démontre les identités nécessaires pour obtenir l'invariance de forme. On étudie les courants gauche et droit, les vecteurs potentiels et le champ électromagnétique.**

L'algèbre de Clifford est un outil particulièrement utile : la physique de la lumière, de la gravitation, et la physique quantique ont besoin des ondes, donc on y a besoin des fonctions trigonométriques. La trigonométrie est grandement simplifiée par l'usage de la fonction exponentielle. Celle-ci nécessite addition et multiplication. L'addition des vecteurs ne suffit pas, une multiplication est nécessaire : on doit pouvoir ajouter et multiplier les vecteurs. Les mathématiques fournissent alors la structure d'algèbre. On présente cette algèbre au niveau de difficulté le plus bas possible. Comme c'est une présentation pour les besoins de la physique, on s'attend à ce que ce choix pédagogique amène quelques critiques des mathématiciens. Par exemple on a choisi de ne parler que des algèbres de Clifford sur le corps des réels, même si les algèbres sur le corps des complexes existent aussi. On pourrait même penser que ces algèbres complexes pourraient être essentielles en physique quantique, d'autant que la principale algèbre de Clifford utilisée dans ce livre est aussi une algèbre sur le corps des nombres complexes. Mais c'est en fait sa double structure d'algèbre réelle et d'algèbre complexe, qui est utilisée en physique quantique.<sup>1</sup> On peut aussi considérer

---

1. Une algèbre de Clifford réelle a des vecteurs dont les composantes sont des nombres réels, et qui ne sont jamais multipliées par  $i$ . Une algèbre de Clifford complexe a des vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes, qui peuvent être multipliées par  $i$ . On peut aussi suivre Doran et Lasenby [66], plus orientés vers la seule algèbre d'espace-temps. L'inconvénient de leur approche, pourtant naturelle en physique relativiste, vient de ce que les matrices  $2 \times 2$  ont des propriétés très particulières, non transposables aux

que ce n'est pas l'algèbre qui est importante mais seulement la structure d'anneau, et même seulement la structure multiplicative de groupe de Lie. La présentation qui suit est délibérément faite pour des non-spécialistes, pas pour les férus des groupes de Lie.

## A.1 Qu'est-ce qu'une algèbre de Clifford ?

1. C'est d'abord une algèbre [9][23], il y a deux opérations : l'addition notée  $A + B$  et la multiplication notée  $AB$ , telles que, pour tous  $A, B, C$  :

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C ; \quad A + B = B + A, \\ A + 0 &= A ; \quad A + (-A) = 0, \\ A(B + C) &= AB + AC ; \quad (A + B)C = AC + BC, \\ A(BC) &= (AB)C. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Cette dernière égalité (associativité de la multiplication) permet de supprimer les parenthèses, le produit de trois termes est donc simplement noté  $ABC$ .

2. L'algèbre contient un ensemble de vecteurs, notés avec des flèches, pour lesquels un produit scalaire existe, et la multiplication  $\vec{u}\vec{v}$  est supposée vérifier, pour tout vecteur  $\vec{u}$ , l'identité :

$$\vec{u}\vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u}. \tag{A.2}$$

où  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  désigne le produit scalaire<sup>2</sup> de ces vecteurs. Ceci implique, puisque  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est un nombre réel, que l'algèbre qui contient les vecteurs contient aussi les nombres réels.

3. Les nombres réels commutent avec tout élément de l'algèbre : si  $a$  est un nombre réel et si  $A$  est un élément quelconque de l'algèbre :

$$aA = Aa; \quad 1A = A. \tag{A.6}$$

Ces algèbres existent pour tout espace vectoriel de dimension finie. La plus petite de ces algèbres, du point de vue des dimensions, est unique (à un isomorphisme près).

Les relations (A.1) et (A.6) impliquent que l'algèbre est aussi un espace vectoriel, qu'il faut distinguer de l'espace vectoriel de départ. Si on part

---

dimensions supérieures. Ces propriétés jouent un rôle important en physique quantique.

2. Le produit scalaire vérifie, pour tous vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  et tout nombre réel  $a$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \tag{A.3}$$

$$(a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}), \tag{A.4}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w}). \tag{A.5}$$

On rappelle aussi que le produit scalaire de deux vecteurs est le produit de la longueur de ces deux vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

d'un espace vectoriel de dimension  $n$ , la dimension de l'algèbre est  $2^n$ . On verra par exemple que l'algèbre de l'espace de dimension trois est un espace vectoriel de dimension huit.

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs orthogonaux (cela veut dire si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ) l'égalité  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$  implique

$$\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u}\vec{u} + \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} + \vec{v}\vec{v},$$

donc on a :

$$0 = \vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u} \quad ; \quad \vec{v}\vec{u} = -\vec{u}\vec{v}. \quad (\text{A.7})$$

Ceci est la différence majeure en comparaison des règles usuelles du calcul avec des nombres : la multiplication n'est pas commutative et chacun doit être aussi prudent qu'avec le calcul matriciel. Il est d'ailleurs toujours possible d'effectuer tous les calculs en utilisant une algèbre de matrices carrées. L'addition est définie pour toute l'algèbre, qui contient des nombres et des vecteurs, donc on peut ajouter des nombres et des vecteurs :  $3 + 5\vec{i}$  est **autorisé**. Cela peut sembler étrange et perturbant, mais ce n'est pas différent de  $3 + 5i$ . Les deux définitions qui suivent sont importantes et générales :

**Sous-algèbre paire** : La sous-algèbre paire est la sous-algèbre engendrée par tous les produits d'un nombre pair de vecteurs :  $\vec{u}\vec{v}$ ,  $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4$ , et ainsi de suite.

**Retournement** : Le retournement, ou réversion  $A \mapsto \widetilde{A}$  change l'ordre de tous les produits, il ne change ni les nombres  $a$  ni les vecteurs :  $\widetilde{a} = a$ ,  $\widetilde{\vec{u}} = \vec{u}$ , et l'on obtient, pour tout  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , ou  $A$  et  $B$  :

$$\widetilde{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v}\vec{u} \quad ; \quad \widetilde{AB} = \vec{B}\vec{A} \quad ; \quad \widetilde{A+B} = \vec{A} + \vec{B}. \quad (\text{A.8})$$

## A.2 Algèbre de Clifford du plan euclidien

L'algèbre du plan euclidien  $Cl_2$  contient les nombres réels et les vecteurs du plan,  $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ , où  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  forment une base orthonormale directe du plan. Cela veut dire que ce sont deux vecteurs de longueur 1, orthogonaux l'un à l'autre. Ils vérifient :  $\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = 1$ ,  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ . On pose généralement :  $i := \vec{e}_1\vec{e}_2$ . L'élément général de cette algèbre du plan s'écrit :

$$A = a + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + b\vec{e}_1\vec{e}_2 = a + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + ib, \quad (\text{A.9})$$

où  $a, x, y, b$  sont des nombres réels. Ces quatre réels suffisent parce que :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 i &= \vec{e}_1(\vec{e}_1\vec{e}_2) = (\vec{e}_1\vec{e}_1)\vec{e}_2 = 1\vec{e}_2 = \vec{e}_2; & \vec{e}_2 i &= -\vec{e}_1; & i\vec{e}_2 &= \vec{e}_1 \\ i\vec{e}_1 &= -\vec{e}_2; & i^2 &= ii = i(\vec{e}_1\vec{e}_2) = (\vec{e}_1\vec{e}_2) = -\vec{e}_2\vec{e}_2 = -1. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Faisons deux remarques :

1. La sous-algèbre paire  $Cl_2^+$  est l'ensemble formé par tous les  $a + ib$  ; c'est donc le corps des nombres complexes. Cette sous-algèbre est commutative. On peut dire que les nombres complexes sont sous-jacents dès que la dimension de l'espace vectoriel est supérieure ou égale à 2.

2. Ici la réversion est la conjugaison complexe  $\tilde{i} = \widetilde{\vec{e}_1 \vec{e}_2} = \vec{e}_2 \vec{e}_1 = -i$

On obtient donc, pour tout  $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  et tout  $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$  dans le plan :  $\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \det(\vec{u}, \vec{v})$  où  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  et où  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  est le déterminant  $xy' - yx'$  des deux vecteurs dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### A.3 Algèbre de Clifford de l'espace

La dimension 3 de notre espace est la principale raison de l'importance de cette algèbre. On a expliqué dans le chapitre 1 les autres raisons de préférer ce cadre mathématique pour la physique quantique.

Cette algèbre, notée  $Cl_3$ , contient [3] les nombres réels et les vecteurs de la géométrie de l'espace, qui s'écrivent :

$$\vec{u} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3 =: x^j \vec{e}_j, \quad (\text{A.11})$$

où  $x^1, x^2, x^3$  sont trois nombres réels.  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  forment une base orthonormale. La deuxième égalité est la convention usuelle de sommation d'Einstein, avec des indices latins allant de 1 à 3. Le produit scalaire vérifie :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad ; \quad \vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1. \quad (\text{A.12})$$

On pose :

$$i_1 := \vec{e}_2 \vec{e}_3 \quad ; \quad i_2 := \vec{e}_3 \vec{e}_1 \quad ; \quad i_3 := \vec{e}_1 \vec{e}_2 \quad ; \quad i := \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3. \quad (\text{A.13})$$

Cela donne :

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i^2 = -1, \quad (\text{A.14})$$

$$i\vec{u} = \vec{u}i \quad ; \quad i\vec{e}_j = i_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.15})$$

Dans le calcul des carrés on utilise (A.10). Pour obtenir la commutation de  $i$  avec tous les vecteurs il suffit de prouver que  $i$  commute avec chaque  $\vec{e}_j$ . L'élément général de  $Cl_3$  est :  $A = a + \vec{u} + i\vec{v} + ib$ . Pour  $Cl_3$  cela donne  $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$  dimensions (troisième ligne du triangle arithmétique). Cinq remarques :

1. Le centre de  $Cl_3$ , ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres, est l'ensemble des termes  $a + ib$ . Ce sont les seuls éléments qui commutent avec tous les autres. Ce centre est le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. C'est la principale raison de l'important rôle que jouent les nombres complexes en physique. Dans un  $Cl_n$  avec  $n$  pair, le centre de l'algèbre est seulement le corps des nombres réels. Le fait que le centre soit plus large,

3 étant impair, est source de nombreuses propriétés que nous détaillerons plus loin.

2. La sous-algèbre paire  $Cl_3^+$  est l'ensemble des  $a + i\vec{v}$  qui est le corps  $\mathbb{H}$  des quaternions. En utilisant le corps des quaternions on se sert automatiquement de  $Cl_3$  qui est appelée parfois algèbre des bi-quaternions.

3.  $\tilde{A} = a + \vec{u} - i\vec{v} - ib$  : La réversion est, pour le centre  $\mathbb{C}$ , la conjugaison des nombres complexes. C'est aussi la conjugaison des quaternions dans la sous-algèbre paire  $Cl_3^+ = \mathbb{H}$ .

4. Les termes  $i\vec{v}$  sont appelés en physique vecteurs axiaux, et pseudo-vecteurs en mathématiques, tandis que les "vrais" vecteurs  $\vec{u}$  sont appelés simplement des vecteurs. La notion de vecteur axial est propre à la dimension 3, seule dimension pour laquelle il y a égalité entre le deuxième et le troisième nombre sur une ligne du triangle arithmétique.

5. Il existe quatre termes différents et indépendants de carré  $-1$ , donc quatre manières différentes d'obtenir des nombres complexes. La physique quantique non relativiste, qui n'utilise qu'un seul et unique terme de carré  $-1$ , ce qui est le cas avec  $Cl_2$ , fonctionne donc comme un logiciel 2D. Ce dont la physique a besoin, parce que l'espace est de dimension 3, est le logiciel 3D de l'algèbre  $Cl_3$ .

### A.3.1 Produit vectoriel, orientation

Étant donné deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le produit vectoriel  $\vec{u} \times \vec{v}$  est le vecteur orthogonal à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$ , de longueur égale au produit des longueurs de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  par la valeur absolue du sinus de leur angle, et tel que la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$  soit de sens direct. En utilisant les coordonnées dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , on prouve que, pour tout  $\vec{u}$  et tout  $\vec{v}$  :

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + i \vec{u} \times \vec{v}, \quad (\text{A.16})$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 + (\vec{u} \times \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \vec{v}^2. \quad (\text{A.17})$$

De (A.16) on déduit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u}\vec{v} + \vec{v}\vec{u}); \quad \vec{u} \times \vec{v} = \frac{1}{2i}(\vec{u}\vec{v} - \vec{v}\vec{u}). \quad (\text{A.18})$$

En divisant (A.17) par le terme de droite, et en appelant  $\theta$  une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ , on obtient :

$$1 = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|)^2} + \frac{(\vec{u} \times \vec{v})^2}{(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|)^2} = \cos^2(\theta) + \left( \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)^2, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = |\sin(\theta)|, \quad (\text{A.19})$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\theta)|. \quad (\text{A.20})$$

Puis on note  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  le déterminant dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ , dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . En calculant ce déterminant, on peut prouver, pour tout  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \quad (\text{A.21})$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \quad (\text{A.22})$$

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = i \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}. \quad (\text{A.23})$$

Du produit mixte (A.21) on déduit que  $\vec{u} \times \vec{v}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Le déterminant (A.21) donne le sens du produit vectoriel. On rappelle qu'une base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est dite de sens direct (c'est-à-dire a la même orientation que  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ) si  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$ , et est dite de sens inverse (c'est-à-dire a l'orientation contraire) si  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0$ . La règle (A.23) permet d'établir que,  $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  étant une base orthonormale quelconque, alors  $\vec{u}\vec{v}\vec{w} = i$  si et seulement si  $B$  est directe, et  $\vec{u}\vec{v}\vec{w} = -i$  si et seulement si  $B$  est inverse. Dans le cas où  $\vec{u}\vec{v}\vec{w} = i$  on a aussi :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}; \quad \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}; \quad \vec{v} = \vec{w} \times \vec{u}. \quad (\text{A.24})$$

Au contraire, avec l'autre orientation où  $\vec{u}\vec{v}\vec{w} = -i$ , on a :

$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{u}; \quad \vec{u} = \vec{w} \times \vec{v}; \quad \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}. \quad (\text{A.25})$$

Par conséquent  $i$  est pleinement liée à l'orientation de l'espace. Changer  $i$  en  $-i$  équivaut à changer l'orientation de l'espace. Le fait que  $i$  détermine l'orientation joue un rôle essentiel pour le magnétisme et pour les interactions faibles.

Tous les calculs dans  $Cl_3$  se ramènent à l'addition (où on ajoute les nombres aux nombres, les vecteurs aux vecteurs et ainsi de suite) et à la multiplication (produit de deux nombres, produit d'un nombre et d'un vecteur, produit de deux ou trois vecteurs), grâce au produit scalaire, au produit vectoriel et au produit mixte, tous bien connus des physiciens et des ingénieurs. Dans l'algèbre  $Cl_3$  il n'y a donc ni mystère ni complication inutile. Tout ceci devrait être enseigné dans toutes les universités scientifiques et techniques, pour faire gagner du temps aux étudiants.

### A.3.2 L'algèbre de Pauli

Cette algèbre, introduite en physique dès 1926 pour rendre compte du spin 1/2 de l'électron, est l'algèbre  $M_2(\mathbb{C})$  formée par les matrices complexes  $2 \times 2$ . Elle est égale (isomorphe, pour être précis) à  $Cl_3$ , mais seulement en tant qu'algèbre sur le corps des nombres réels<sup>3</sup>. Identifier les nombres complexes aux matrices scalaires, et les vecteurs  $e_j$  de la base orthonormée

3. L'algèbre de Pauli est de dimension 8 sur le corps des réels, et seulement de dimension 4 sur le corps des nombres complexes.

$B$  aux matrices de Pauli  $\sigma_j$  suffit pour identifier les deux algèbres<sup>4</sup>. C'est totalement compatible avec les calculs précédents, parce que :

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i, \quad (\text{A.26})$$

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 \quad ; \quad \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1 \quad ; \quad \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2. \quad (\text{A.27})$$

En conséquence, le retourné est identique à l'adjoint (transposé conjugué) :

$$\tilde{A} = A^\dagger = (A^*)^t. \quad (\text{A.28})$$

On appellera cette algèbre soit  $Cl_3$  soit algèbre de Pauli. Certaines personnes qui ne semblent pas comprendre le concept d'isomorphisme refusent d'utiliser le calcul matriciel. Quant aux physiciens, qui ont toujours calculé en algèbre de Pauli avec des notations compliquées, le plein usage de  $Cl_3$  n'apporte que des simplifications à leurs calculs, sans rien changer aux résultats.

### A.3.3 Trois conjugaisons

$A = a + \vec{u} + i\vec{v} + ib$  est la somme de l'élément pair  $A_1 = a + i\vec{v}$  (quaternion) et de l'élément impair  $A_2 = \vec{u} + ib$ . On définit la conjugaison  $P$  (appelée "parité" en physique quantique) par :

$$P : A \mapsto \hat{A}; \quad \hat{A} = A_1 - A_2 = a - \vec{u} + i\vec{v} - ib. \quad (\text{A.29})$$

Pour deux éléments quelconques  $A$  et  $B$  de  $Cl_3$  la parité vérifie :

$$\widehat{A+B} = \hat{A} + \hat{B} \quad ; \quad \widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}. \quad (\text{A.30})$$

$P$  est l'automorphisme principal de l'algèbre. Toute algèbre de Clifford comporte un tel automorphisme involutif (ce qui signifie :  $PP$  est l'identité). A partir de cette conjugaison et du retournement, on peut définir une troisième conjugaison :

$$\overline{A} := \hat{A}^\dagger = a - \vec{u} - i\vec{v} + ib \quad ; \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B} \quad ; \quad \overline{AB} = \overline{B} \overline{A}. \quad (\text{A.31})$$

La composition, dans n'importe quel ordre, de deux de ces trois conjugaisons donne la troisième. Seule  $P$  conserve l'ordre des produits, tandis que  $A \mapsto \overline{A}$  et  $A \mapsto A^\dagger$  inversent l'ordre des facteurs. Ensuite,  $a, b, c, d$  étant des nombres

---

4. Le procédé d'identification pourrait passer pour un manque de rigueur, mais en fait il est fréquemment utilisé en mathématiques. Ce procédé permet d'inclure les nombres entiers dans les entiers relatifs, ou les nombres réels dans les nombres complexes. S'en passer amène des notations excessivement compliquées. Ce procédé considère la base  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  comme une base orthonormale de sens direct de l'espace.

complexes quelconques et  $\bar{a} = a^*$  le nombre complexe conjugué<sup>5</sup> de  $a$ , on peut prouver que pour tout  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de l'algèbre de Pauli<sup>6</sup> on a :

$$\tilde{A} = A^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} ; \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} d^* & -c^* \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} ; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

$$A\bar{A} = \bar{A}A = \det(A) = ad - bc ; \quad \hat{A}A^\dagger = A^\dagger\hat{A} = [\det(A)]^* ; \quad A + \bar{A} = \text{tr}(A).$$

Si  $\det(A) \neq 0$  on a alors :

$$[\det(A)]^{-1}\bar{A}A = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A^{-1} = [\det(A)]^{-1}\bar{A}. \quad (\text{A.33})$$

### A.3.4 Gradient, divergence et rotationnel

Dans  $Cl_3$  on utilise l'opérateur différentiel :

$$\vec{\partial} = \vec{e}_1\partial_1 + \vec{e}_2\partial_2 + \vec{e}_3\partial_3 = \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

avec<sup>7</sup> :

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 ; \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (\text{A.35})$$

Le laplacien est simplement le carré de  $\vec{\partial}$  :

$$\Delta = (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2 = \vec{\partial}\vec{\partial}. \quad (\text{A.36})$$

Quant on l'applique à un scalaire,  $\vec{\partial}a$  est le gradient de  $a$ , et quand on l'applique à un vecteur,  $\vec{u}$  donne à la fois la divergence et le rotationnel :

$$\vec{\partial}a = \vec{\text{grad}} a = (\partial_1a)\sigma_1 + (\partial_2a)\sigma_2 + (\partial_3a)\sigma_3, \quad (\text{A.37})$$

$$\vec{\partial}\vec{u} = \vec{\partial} \cdot \vec{u} + i\vec{\partial} \times \vec{u}; \quad \vec{\partial} \cdot \vec{u} = \text{div}\vec{u} = \partial_1u^1 + \partial_2u^2 + \partial_3u^3, \quad (\text{A.38})$$

$$\vec{\partial} \times \vec{u} = \text{curl}(\vec{u}) = (\partial_2u^3 - \partial_3u^2)\sigma_1 + (\partial_3u^1 - \partial_1u^3)\sigma_2 + (\partial_1u^2 - \partial_2u^1)\sigma_3.$$

5. La notation  $\bar{a}$  pour le conjugué est aujourd'hui la seule notation utilisée en mathématiques, et la notation  $a^*$  était usuelle dans les manuels de physique quantique. Donc on utilisera l'une ou l'autre des deux notations possibles, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible avec  $\bar{A} = \hat{A}^\dagger$ .

6. L'égalité  $A\bar{A} = \bar{A}A$  est générale dans  $Cl_3$ . L'égalité  $A\bar{A} = \det(A)$  utilise l'identification entre les nombres réels et les matrices scalaires, ce qui signifie l'inclusion des nombres réels dans l'algèbre de Clifford.

7. Cet opérateur  $\vec{\partial}$  est usuellement noté, en mécanique quantique, comme un produit scalaire, par exemple  $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}$ . De là résultent beaucoup de complications. Les notations simples sont très utiles pour simplifier les calculs.

Donc, pour toute fonction à valeur scalaire  $a = a(\vec{x})$  et pour toute fonction à valeur vectorielle  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$  on a :

$$\vec{\partial}(\vec{\partial}a) = (\vec{\partial}\vec{\partial})a = \Delta a; \quad \vec{\partial}(\vec{\partial}\vec{v}) = (\vec{\partial}\vec{\partial})\vec{v} = \Delta\vec{v}, \quad (\text{A.39})$$

$$\vec{\partial} \cdot (\vec{\partial} \times \vec{v}) = 0; \quad \vec{\partial} \times (\vec{\partial}a) = 0, \quad (\text{A.40})$$

$$\vec{\partial} \times (\vec{\partial} \times \vec{v}) = \vec{\partial}(\vec{\partial} \cdot \vec{v}) - \Delta\vec{v}. \quad (\text{A.41})$$

### A.3.5 Centre de $Cl_3^*$ , centralisateur de $\sigma_3$

Le centre d'un groupe est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de ce groupe. Pour  $Cl_3^*$  le centre est l'ensemble des matrices scalaires  $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$  où  $z$  est non nul. Ce groupe est isomorphe à  $\mathbb{C}^*$ , c'est-à-dire à l'ensemble des complexes, privé de 0. Pour simplifier les écritures, il est commode d'identifier nombres complexes et matrices scalaires ( $z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ ).

Le centralisateur  $\mathbb{A}^*$  de  $\sigma_3$  est l'ensemble des matrices diagonales inversibles :

$$a \in \mathbb{A}^* \Leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad a_1 \in \mathbb{C}^*, \quad a_2 \in \mathbb{C}^*. \quad (\text{A.42})$$

Ce groupe commutatif, de dimension 4 sur  $\mathbb{R}$ , a pour algèbre de Lie la sous-algèbre  $\mathbb{A}$  des matrices diagonales. Cet ensemble est à la fois un espace vectoriel de dimension 2 sur  $\mathbb{C}$  et de dimension 4 sur  $\mathbb{R}$ , et un anneau commutatif unitaire. C'est un anneau : la somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale, le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Cet anneau est commutatif : le produit  $AB$  de deux matrices diagonales est égal à  $BA$ . L'unité est la matrice unité. Ce n'est pas un corps, parce que  $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Les éléments de  $\mathbb{A}$  qui ne sont pas des diviseurs de 0 sont inversibles :

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

De plus on a :

$$\phi_d := x - i_2 y := \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Et de même on a :

$$\phi_g := x + \bar{y}(-i_2) := \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 & 0 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{pmatrix} = \phi_d. \quad (\text{A.45})$$

L'écriture  $\phi_d$  permet de considérer  $Cl_3$  comme un module à droite sur  $\mathbb{A}$ , (les scalaires  $x$  et  $y$  étant à droite de  $-i_2$ ), tandis que l'écriture  $\phi_g$  permet de considérer  $Cl_3$  comme un module à gauche sur  $\mathbb{A}$ , (les scalaires  $x$  et  $\bar{y}$  étant à gauche de  $-i_2$ ). On utilisera ici aussi bien la structure de module à droite que celle de module à gauche ; il suffit d'utiliser la conjugaison  $y \mapsto \bar{y}$  pour passer d'une structure à l'autre. Pour :

$$\begin{aligned} v &= (v_1, v_2) := v_1 + (-i_2)v_2 = \begin{pmatrix} x_1 & -\bar{y}_2 \\ x_2 & \bar{y}_1 \end{pmatrix}, \\ v_1 &:= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & \bar{y}_1 \end{pmatrix}; \quad v_2 := \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & \bar{y}_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

on a :

$$v^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ -y_2 & y_1 \end{pmatrix} = v_1^\dagger + v_2^\dagger i_2 = v_1^\dagger + i_2 \hat{v}_2, \quad (\text{A.47})$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 i_2 = \bar{v}_1 + i_2 v_2, \quad (\text{A.48})$$

$$\hat{v} = \hat{v}_1 - i_2 \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 & -\bar{x}_2 \\ y_2 & \bar{x}_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.49})$$

Ceci nous donne, pour la somme et le produit dans  $Cl_3$  :

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) + (w_1, w_2) &= v_1 - i_2 v_2 + w_1 - i_2 w_2 = (v_1 + w_1) - i_2 (v_2 + w_2) \\ &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2), \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} (v_1, v_2)(w_1, w_2) &= (v_1 - i_2 v_2)(w_1 - i_2 w_2) \\ &= v_1 w_1 - v_1 i_2 w_2 - i_2 v_2 w_1 + i_2 v_2 i_2 w_2 \\ &= v_1 w_1 - i_2 \bar{v}_1 w_2 - i_2 v_2 w_1 + i_2^2 \bar{v}_2 w_2 \\ &= v_1 w_1 - \bar{v}_2 w_2 - i_2 (\bar{v}_1 w_2 + v_2 w_1) \\ &= (v_1 w_1 - \bar{v}_2 w_2, \bar{v}_1 w_2 + v_2 w_1). \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

### A.3.6 L'espace-temps en algèbre de Pauli

Cette inclusion a été réalisée implicitement avec l'équation de Dirac :

$$x = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}; \quad \sigma_0 = \sigma^0 = I; \quad x^0 = ct, \quad (\text{A.52})$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $t$  est le temps. En utilisant les scalaires de  $\mathbb{A}$ , on a :

$$\begin{aligned} x &= (x, y) = x - i_2 y; \quad x = x^0 + x^3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & 0 \\ 0 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \\ -i_2 y &= x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_3 (x^1 \sigma_3 + ix^2) = -i_2 (x^1 \sigma_3 + ix^2), \\ y &= ix^2 + x^1 \sigma_3 = \begin{pmatrix} ix^2 + x^1 & 0 \\ 0 & ix^2 - x^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Tout élément  $M$  de l'algèbre de Pauli est somme d'un vecteur  $v$  et du produit d'un second vecteur  $w$  par  $i$  :

$$M = v + iw; \quad v = \frac{1}{2}(M + M^\dagger); \quad v^\dagger = v \quad (\text{A.54})$$

$$iw = \frac{1}{2}(M - M^\dagger); \quad w^\dagger = w. \quad (\text{A.55})$$

Ces deux vecteurs d'espace-temps  $v$  et  $w$  sont uniques. Comme  $x = x^\dagger$ , l'espace-temps est l'ensemble des  $M = v + iw$  tels que  $w = 0$ . On appelle cet ensemble la partie auto-adjointe de  $Cl_3$ . Dans ce cadre, on a besoin de deux opérateurs différentiels :

$$\nabla = \partial_0 - \vec{\partial}; \quad \widehat{\nabla} = \partial_0 + \vec{\partial}. \quad (\text{A.56})$$

Ils permettent de calculer le dalembertien :

$$\nabla \widehat{\nabla} = \widehat{\nabla} \nabla = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2 =: \square. \quad (\text{A.57})$$

La principale raison à l'utilisation de  $Cl_3$  vient de ces relations, elles signifient que le dalembertien contient la transformation de parité  $P: M \mapsto \widehat{M}$ . (On voit les implications aux chapitres 1 à 4). Avec les scalaires de  $\mathbb{A}$ , on utilise la décomposition suivante :

$$\nabla = (\nabla_1, -\nabla_2) = \nabla_1 + i_2 \nabla_2; \quad \widehat{\nabla} = (\widehat{\nabla}_1, -\widehat{\nabla}_2) = \widehat{\nabla}_1 + i_2 \widehat{\nabla}_2, \quad (\text{A.58})$$

$$\nabla_1 = \partial_0 - \sigma_3 \partial_3 = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.59})$$

$$\widehat{\nabla}_1 = \partial_0 + \sigma_3 \partial_3 = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix} = \overline{\nabla}_1, \quad (\text{A.60})$$

$$\nabla_2 = \sigma_3 \partial_1 + i \partial_2 = \begin{pmatrix} \partial_1 + i \partial_2 & 0 \\ 0 & -\partial_1 + i \partial_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.61})$$

$$\widehat{\nabla}_2 = -\sigma_3 \partial_1 - i \partial_2 = -\nabla_2, \quad (\text{A.62})$$

$$\widehat{\nabla} = (\widehat{\nabla}_1, \nabla_2) = \widehat{\nabla}_1 - i_2 \nabla_2. \quad (\text{A.63})$$

Les opérateurs  $\nabla_1$  et  $\nabla_2$  sont des dérivations, au sens où ils sont linéaires et vérifient la condition de Leibniz : soient  $a \in \mathbb{A}$ ,  $v$  et  $w$  deux champs scalaires, fonctions de l'espace-temps à valeur dans  $\mathbb{A}$ .  $a_1$  et  $a_2$  sont des nombres complexes, les fonctions  $v_1$  et  $v_2$ ,  $w_1$  et  $w_2$  sont des fonctions de l'espace-temps à valeur complexe. On peut écrire :

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}, \\ \nabla_1[v + w] &= \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 + w_1 & 0 \\ 0 & v_2 + w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_0 v_1 + \partial_0 w_1 - \partial_3 v_1 - \partial_3 w_1 & 0 \\ 0 & \partial_0 v_2 + \partial_0 w_2 + \partial_3 v_2 + \partial_3 w_2 \end{pmatrix} \\ &= \nabla_1[v] + \nabla_1[w]. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

On a de même :

$$\begin{aligned}\nabla_2[v + w] &= \nabla_2[v] + \nabla_2[w]; \quad \nabla_1[av] = \nabla_1[va] = a\nabla_1[v] = \nabla_1[v]a \\ \nabla_2[av] &= \nabla_2[va] = a\nabla_2[v] = \nabla_2[v]a,\end{aligned}\tag{A.65}$$

Ce qui prouve la linéarité. Pour la multiplication on a la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}\nabla_1[vw] &= \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 w_1 & 0 \\ 0 & v_2 w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_0 v_1)w_1 + v_1(\partial_0 w_1) & 0 \\ 0 & (\partial_0 v_2)w_2 + v_2(\partial_0 w_2) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} -[(\partial_3 v_1)w_1 + v_1(\partial_3 w_1)] & 0 \\ 0 & (\partial_3 v_2)w_2 + v_2(\partial_3 w_2) \end{pmatrix} \\ &= \nabla_1[v]w + v\nabla_1[w].\end{aligned}\tag{A.66}$$

On a de même :

$$\nabla_2[vw] = \nabla_2[v]w + v\nabla_2[w].\tag{A.67}$$

En outre on peut démontrer la linéarité et la règle de Leibniz pour :

$$\bar{\nabla}_1 = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & 0 \\ 0 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{\nabla}_2 = \begin{pmatrix} -\partial_1 + i\partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_1 + i\partial_2 \end{pmatrix},\tag{A.68}$$

ainsi que pour  $\widehat{\nabla}_1, \widehat{\nabla}_2, \nabla_1^\dagger$  et  $\nabla_2^\dagger$ .

Soit  $A$  et  $B$  deux vecteurs d'espace-temps :  $A = A^0 + \vec{A}$ ,  $B = B^0 + \vec{B}$ . Le produit scalaire d'espace-temps  $A \cdot B$  vaut :

$$A \cdot B = \frac{1}{2}(A\widehat{B} + B\widehat{A}) = \frac{1}{2}(\widehat{A}B + \widehat{B}A).\tag{A.69}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}A\widehat{B} + B\widehat{A} &= (A^0 + \vec{A})(B^0 - \vec{B}) + (B^0 + \vec{B})(A^0 - \vec{A}) \\ &= A^0 B^0 - A^0 \vec{B} + B^0 \vec{A} - \vec{A} \vec{B} + A^0 B^0 + A^0 \vec{B} - B^0 \vec{A} - \vec{B} \vec{A} \\ &= 2(A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}) = 2A \cdot B,\end{aligned}\tag{A.70}$$

$$\widehat{A}B + \widehat{B}A = \widehat{A\widehat{B} + B\widehat{A}} = \widehat{2A \cdot B} = 2A \cdot B.\tag{A.71}$$

### A.3.7 L'algèbre d'espace en matrices réelles $4 \times 4$

Lorsqu'on utilise une définition matricielle des nombres complexes, on associe le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$  à l'algèbre  $M_2(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned}z = x + iy &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}; \quad \bar{z} = x - iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = {}^t z, \\ \det(z) &= x^2 + y^2 = |z|^2; \quad x = \Re(z) = \frac{1}{2}\text{tr}(z).\end{aligned}\tag{A.72}$$

Cette association concerne à la fois la structure algébrique et la structure topologique de  $\mathbb{C}$ , l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont identiques, la norme définissant la distance est la même. Le 1 de  $\mathbf{C}$  est associé à la matrice unité  $I_2$  de  $M_2(\mathbb{R})$ , ceci revient à identifier nombres réels et matrices scalaires. Cette identification permet de construire ensuite  $Cl_3$  comme algèbre des  $M$  et des  $\mathbf{M}$  tels que :

$$\begin{aligned} M &= s + \vec{u} + i\vec{v} + ip \\ &= s + u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3 + iv_1\sigma_1 + iv_2\sigma_2 + iv_3\sigma_3 + ip \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} s + u_3 + i(v_3 + p) & u_1 + v_2 + i(v_1 - u_2) \\ u_1 - v_2 + i(u_2 + v_1) & s - u_3 + i(p - v_3) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}, \\ \widehat{M} &= s - \vec{u} + i\vec{v} - ip; \quad M^\dagger = s + \vec{u} - i\vec{v} - ip; \quad \overline{M} = s - \vec{u} - i\vec{v} + ip, \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} s + u_3 & -v_3 - p & u_1 + v_2 & u_2 - v_1 \\ v_3 + p & s + u_3 & v_1 - u_2 & u_1 + v_2 \\ u_1 - v_2 & -u_2 - v_1 & s - u_3 & v_3 - p \\ u_2 + v_1 & u_1 - v_2 & p - v_3 & s - u_3 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & -c & f & -h \\ c & a & h & f \\ e & -g & b & -d \\ g & e & d & b \end{pmatrix}, \quad (\text{A.75})$$

avec :

$$\begin{aligned} z_1 &= \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} f & -h \\ h & f \end{pmatrix}; \quad z_3 = \begin{pmatrix} e & -g \\ g & e \end{pmatrix}; \quad z_4 = \begin{pmatrix} b & -d \\ d & b \end{pmatrix} \\ a &= s + u_3; \quad b = s - u_3; \quad c = p + v_3; \quad d = p - v_3, \\ e &= u_1 - v_2; \quad f = u_1 + v_2; \quad g = u_2 + v_1; \quad h = v_1 - u_2. \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

L'identification entre  $\mathbb{C}$  et la sous-algèbre de  $M_2(\mathbb{R})$  consistant à écrire  $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  peut se prolonger en une identification entre  $M$  et  $\mathbf{M}$ , et entre  $Cl_3$  et le sous-espace vectoriel  $\mathcal{A}$  de  $M_4(\mathbb{R})$  formé par les matrices de la forme (A.75). De plus, comme le produit matriciel peut se calculer par blocs, on peut identifier  $Cl_3$  et  $\mathcal{A}$  en tant qu'anneaux unitaires non commutatifs. Ce sont donc des algèbres unitaires qu'on peut confondre. Cette identification s'étend, pour les éléments inversibles, au calcul des inverses, car l'associativité de la multiplication entraîne l'unicité des inverses. On a :

$$M\overline{M} = \overline{M}M = \det(M) = \Omega_1 + i\Omega_2 = z_1z_4 - z_2z_3 = \rho e^{i\beta}, \quad (\text{A.77})$$

$$\mathbf{M}\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \Omega_1 + i\Omega_2 & 0 \\ 0 & \Omega_1 + i\Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 & -\Omega_2 & 0 & 0 \\ \Omega_2 & \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_1 & -\Omega_2 \\ 0 & 0 & \Omega_2 & \Omega_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.78})$$

On a aussi :

$$\widehat{M} = \overline{M}^\dagger = {}^t\overline{\mathbf{M}} =: \widehat{\mathbf{M}}, \quad (\text{A.79})$$

$$\widehat{M}M^\dagger = \Omega_1 - i\Omega_2 = \rho e^{-i\beta}; \quad \mathbf{M}\overline{\mathbf{M}}\widehat{{}^t\mathbf{M}} = \rho^2 I_4, \quad (\text{A.80})$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \rho^{-2}\overline{\mathbf{M}}\widehat{{}^t\mathbf{M}} \quad (\text{A.81})$$

Ce calcul des inverses est lié au calcul des déterminants et du polynôme caractéristique. Il y a donc deux manières de calculer. Dans  $Cl_3$  on a :

$$\begin{aligned} P_M(X) &= \det(XI_2 - M) = \begin{vmatrix} X - z_1 & -z_2 \\ -z_3 & X - z_4 \end{vmatrix} \\ &= X^2 - (z_1 + z_4)X + z_1z_4 - z_2z_3, \\ 0 &= M^2 - (z_1 + z_4)M + (z_1z_4 - z_2z_3)I_2; \quad z_1 + z_4 = 2(s + ip). \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \det(M) &= z_1z_4 - z_2z_3 = [s + u_3 + i(p + v_3)][s - u_3 + i(p - v_3)] \\ &\quad - [u_1 + v_2 + i(v_1 - u_2)][u_1 - v_2 + i(u_2 - v_1)] \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} &= \Omega_1 + i\Omega_2 := \det(M) = s^2 - \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - p^2 + 2i(sp - \vec{u} \cdot \vec{v}) \\ &= (s + ip)^2 + (\vec{u} + i\vec{v})^2 \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

Ceci nous donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{\Omega_1 + i\Omega_2} [-M + 2(s + ip)I_2] = \frac{e^{-i\beta}\overline{M}}{\rho^2} \quad (\text{A.85})$$

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} s - u_3 + i(p - v_3) & -(u_1 + v_2) + i(u_2 - v_1) \\ v_2 - u_1 - i(v_1 + u_2) & s + u_3 + i(p + v_3) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.86})$$

Et on a aussi :

$$\Omega_1 = ab - cd - ef + gh; \quad \Omega_2 = ad + bc - eh - fg, \quad (\text{A.87})$$

$$M\overline{M} = \overline{M}M = \det(M); \quad \overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} z_4 & -z_2 \\ -z_1 & z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.88})$$

De même le polynôme caractéristique de  $\mathbf{M}$  est :

$$\det(XI_4 - \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} a - X & -c & f & -h \\ c & a - X & h & f \\ e & -g & b - X & -d \\ g & e & d & b - X \end{vmatrix} \quad (\text{A.89})$$

$$= X^4 - k_1X^3 + k_2X^2 - k_3X + k_4; \quad k_4 = \det(\mathbf{M})$$

$$k_1 = 2(a + b) = 4s, \quad (\text{A.90})$$

$$k_2 = (a + b)^2 + (c + d)^2 + 2\Omega_1 = 4s^2 + 4p^2 + 2\Omega_1, \quad (\text{A.91})$$

$$k_3 = 2[(a + b)\Omega_1 + (c + d)\Omega_2] = 4(s\Omega_1 + p\Omega_2), \quad (\text{A.92})$$

$$\det(\mathbf{M}) = \rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 = |\det(M)|^2. \quad (\text{A.93})$$

Par conséquent il vaut mieux éviter d'écrire  $M = \mathbf{M}$ , on préférera :

$$M \equiv \mathbf{M}; \quad M^\dagger \equiv {}^t\mathbf{M}. \quad (\text{A.94})$$

On a pour tout  $\mathbf{M}$  l'équation caractéristique :

$$\mathbf{M}^4 - 4s\mathbf{M}^3 + (4s^2 + 4p^2 + 2\Omega_1)\mathbf{M}^2 - 4(s\Omega_1 + p\Omega_2)\mathbf{M} + \rho^2 = 0 \quad (\text{A.95})$$

Comme la multiplication des  $\mathbf{M}$  correspond exactement à la multiplication des  $M$ , on obtient, pour tout élément  $M$  de  $Cl_3^*$ , l'identité remarquable :

$$-M^3 + 4sM^2 - (4s^2 + 4p^2 + 2\Omega_1)M + 4(s\Omega_1 + p\Omega_2) = \overline{M}(\Omega_1 - i\Omega_2). \quad (\text{A.96})$$

### A.3.8 L'exponentielle dans $Cl_3$

L'algèbre de Lie du groupe de Lie  $Cl_3^*$ , groupe multiplicatif des éléments inversibles de  $Cl_3$ , est l'algèbre  $Cl_3$  elle-même. La fonction exponentielle applique l'élément général  $M$  de l'algèbre sur le groupe de Lie. Soit :

$$M = z_0 + z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3; \quad z_j = x_j + iy_j, j = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{A.97})$$

où les  $x_j$  et les  $y_j$  sont des réels quelconques. On pose :

$$N = z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3 \quad (\text{A.98})$$

Comme les nombres complexes commutent, on a :

$$e^M = e^{z_0+N} = e^{z_0}e^N; \quad e^{z_0} = e^{x_0+iy_0} = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0),$$

$$e^N = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{N^j}{j!}. \quad (\text{A.99})$$

Or on a :

$$N^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = n = n_1 + in_2,$$

$$n_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2; \quad n_2 = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3). \quad (\text{A.100})$$

On utilise maintenant une racine carrée  $r$  de  $n$  (définie au signe près) :

$$n = r^2; \quad r = r_1 + ir_2; \quad r_1 = \sqrt{\frac{n_1 + \sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{2}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{-n_1 + \sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{2}},$$

$$N^2 = r^2 = n; \quad N^3 = N^2N = nN; \quad N^4 = n^2; \quad N^5 = n^2N; \quad N^6 = n^3, \dots$$

$$e^N = \mathbf{C}(n) + \mathbf{S}(n)N, \quad (\text{A.101})$$

Avec :

$$\mathbf{C}(n) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{(2j)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{2j}}{(2j)!} = \cosh(r) = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$$

$$= \cosh r_1 \cos r_2 + i \sinh r_1 \sin r_2 \quad (\text{A.102})$$

$$\mathbf{S}(n) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{(2j+1)!} = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{2j+1}}{(2j+1)!} = \frac{1}{r} \sinh(r)$$

$$= \frac{e^r - e^{-r}}{2r} = \frac{1}{r} (\sinh r_1 \cos r_2 + i \cosh r_1 \sin r_2). \quad (\text{A.103})$$

Et on a :

$$\begin{aligned} e^M &= e^{z_0}[\mathbf{C}(n) + \mathbf{S}(n)(z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3)] \\ &= \begin{pmatrix} e^{z_0}[\mathbf{C}(n) + \mathbf{S}(n)z_3] & e^{z_0}\mathbf{S}(n)(z_1 - iz_2) \\ e^{z_0}\mathbf{S}(n)(z_1 + iz_2) & e^{z_0}[\mathbf{C}(n) - \mathbf{S}(n)z_3] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

Or on a :

$$1 = \cosh^2(r) - \sinh^2(r) = \mathbf{C}^2(n) - n\mathbf{S}^2(n), \quad (\text{A.105})$$

$$\begin{aligned} \det(e^M) &= e^{z_0}[\mathbf{C}(n) + \mathbf{S}(n)z_3]e^{z_0}[\mathbf{C}(n) - \mathbf{S}(n)z_3] \\ &\quad - e^{z_0}\mathbf{S}(n)(z_1 + iz_2)e^{z_0}\mathbf{S}(n)(z_1 - iz_2) \\ &= e^{2z_0}[\mathbf{C}^2(n) - \mathbf{S}^2(n)z_3^2 - \mathbf{S}^2(n)(z_1^2 + z_2^2)] \\ &= e^{2z_0}[\mathbf{C}^2(n) - n\mathbf{S}^2(n)] = e^{2z_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

$$\det(e^N) = \mathbf{C}^2(n) - n\mathbf{S}^2(n) = 1 \quad (\text{A.107})$$

Donc  $e^N$  est un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $2y_0$  est l'angle d'Yvon-Takabayasi de  $e^M$ . Les conjugaisons nous donnent :

$$\begin{aligned} \widehat{M} &= \bar{z}_0 - \bar{z}_1\sigma_1 - \bar{z}_2\sigma_2 - \bar{z}_3\sigma_3; \quad \bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2 = \bar{n} = \bar{r}^2, \\ \widehat{e^M} &= e^{\widehat{M}} = e^{\bar{z}_0}[\mathbf{C}(\bar{n}) - \mathbf{S}(\bar{n})(\bar{z}_1\sigma_1 + \bar{z}_2\sigma_2 + \bar{z}_3\sigma_3)] \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

$$\begin{aligned} \overline{M} &= z_0 - z_1\sigma_1 - z_2\sigma_2 - z_3\sigma_3; \quad M + \overline{M} = 2z_0 = \text{tr}(M), \\ \overline{e^M} &= e^{\overline{M}} = e^{z_0}[\mathbf{C}(n) - \mathbf{S}(n)(z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3)], \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= M^\dagger = \widehat{\widehat{M}} = \bar{z}_0 + \bar{z}_1\sigma_1 + \bar{z}_2\sigma_2 + \bar{z}_3\sigma_3; \quad \bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2 = \bar{n} = \bar{r}^2, \\ \widetilde{e^M} &= e^{M^\dagger} = e^{\bar{z}_0}[\mathbf{C}(\bar{n}) + \mathbf{S}(\bar{n})(\bar{z}_1\sigma_1 + \bar{z}_2\sigma_2 + \bar{z}_3\sigma_3)]. \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

Pour  $\phi = e^\chi$  et  $\chi = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\bar{\eta}_2 \\ \xi_2 & \bar{\eta}_1 \end{pmatrix}$  on a :

$$\begin{aligned} z_0 + z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2 + z_3\sigma_3 &= \begin{pmatrix} z_0 + z_3 & z_1 - iz_2 \\ z_1 + iz_2 & z_0 - z_3 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\bar{\eta}_2 \\ \xi_2 & \bar{\eta}_1 \end{pmatrix} \\ z_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \bar{\eta}_1); \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \bar{\eta}_1), \\ z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2 - \bar{\eta}_2); \quad z_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\xi_2 + \bar{\eta}_2). \end{aligned} \quad (\text{A.111})$$

Comme  $\rho$  est le module et  $\beta$  est un argument de  $\det(\phi)$ , on a :

$$\begin{aligned} \rho &= e^{2x_0}; \quad 2x_0 = z_0 + \bar{z}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \bar{\xi}_1 + \eta_1 + \bar{\eta}_1) \\ 2y_0 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(-\xi_1 + \bar{\xi}_1 + \eta_1 - \bar{\eta}_1), \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

$$n = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2\xi_2\bar{\eta}_2 + \frac{1}{2}(\xi_1^2 - 2\xi_1\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_1^2). \quad (\text{A.113})$$

### A.3.9 Projecteurs

Le centre de  $Cl_3$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres, est  $\mathbb{C}$ . Il en résulte que  $Cl_3$  est aussi un espace vectoriel complexe noté  $M_2(\mathbb{C})$  quand on s'intéresse aux matrices, et noté  $GL(2, \mathbb{C})$  quand on s'intéresse aux applications linéaires de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}^2$ . Une base de cet espace vectoriel est formée par les quatre éléments :

$$p_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \sigma_3}{2}; \quad p_l := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - \sigma_3}{2}, \quad (\text{A.114})$$

$$p_b := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}; \quad p_h := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}. \quad (\text{A.115})$$

Les deux premiers termes de cette base  $(p_r, p_l, p_b, p_h)$  sont des projecteurs, car ils vérifient :

$$p_r^2 = p_r; \quad p_l^2 = p_l; \quad p_r p_l = p_l p_r = 0; \quad p_r + p_l = 1; \quad p_r - p_l = \sigma_3. \quad (\text{A.116})$$

Ces projecteurs font partie du centralisateur  $\mathbb{A}$  de  $\sigma_3$ , donc on a :

$$a \in \mathbb{A} \Leftrightarrow a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 p_r + a_2 p_l \quad (\text{A.117})$$

$$e^a = e^{a_1 p_r + a_2 p_l} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix} = e^{a_1} p_r + e^{a_2} p_l. \quad (\text{A.118})$$

Ainsi les projecteurs linéarisent (partiellement) la fonction exponentielle. Deux autres projecteurs sont importants en coordonnées sphériques :

$$p^+ := \frac{1 + \vec{u}}{2}; \quad p^- := \frac{1 - \vec{u}}{2}, \quad (\text{A.119})$$

où l'on utilise les vecteurs :

$$\vec{x} := x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3 = r \vec{u},$$

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}; \quad r := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}. \quad (\text{A.120})$$

Avec ces définitions, on a :

$$\vec{u}^2 = 1; \quad \vec{u} = S \sigma_3 S^{-1}, \quad S := e^{-\frac{\varphi}{2} i \sigma_3} e^{-\frac{\theta}{2} i \sigma_2}; \quad p^+ - p^- = \vec{u}, \quad (\text{A.121})$$

$$p^+ p^+ = p^+; \quad p^- p^- = p^-; \quad p^+ p^- = p^- p^+ = 0; \quad p^+ + p^- = 1, \quad (\text{A.122})$$

$$p^+ p_l = p_r p^- - \frac{u_3 + \sigma_3}{2}; \quad p^- p_l = p_r p^- + \frac{u_3 - \sigma_3}{2},$$

$$p^+ p_r = p_l p^+ + \frac{u_3 + \sigma_3}{2}; \quad p^- p_r = p_l p^- - \frac{u_3 - \sigma_3}{2}. \quad (\text{A.123})$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
p^+ p_l p^+ &= \frac{1-u_3}{2} p^+; \quad p^+ p_l p^- = \frac{1}{4} [-\sigma_3 + u_3 \vec{u} + i(u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1)], \\
p^- p_l p^+ &= \frac{1}{4} [-\sigma_3 + u_3 \vec{u} - i(u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1)]; \quad p^- p_l p^- = \frac{1+u_3}{2} p^-, \\
p^+ p_r p^+ &= \frac{1+u_3}{2} p^+; \quad p^+ p_r p^- = \frac{1}{4} [\sigma_3 - u_3 \vec{u} - i(u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1)], \quad (\text{A.124}) \\
p^- p_r p^+ &= \frac{1}{4} [\sigma_3 - u_3 \vec{u} + i(u_1 \sigma_2 - u_2 \sigma_1)]; \quad p^- p_r p^- = \frac{1-u_3}{2} p^-.
\end{aligned}$$

### A.3.10 Identités de Krüger

Ces identités sont utilisées dans le chapitre C, pour résoudre l'équation d'onde par séparation des variables en coordonnées sphériques. On pose :

$$\begin{aligned}
x^1 &=: r \sin \theta \cos \varphi; \quad x^2 =: r \sin \theta \sin \varphi; \quad x^3 =: r \cos \theta, \\
i_1 &= \sigma_{23} := i\sigma_1; \quad i_2 = \sigma_{31} := i\sigma_2; \quad i_3 = \sigma_{12} := i\sigma_3, \\
u_1 &:= \sin \theta \cos \varphi; \quad u_2 := \sin \theta \sin \varphi; \quad u_3 = \cos \theta; \quad \vec{u} := u_1 \sigma_1 + u_2 \sigma_2 + u_3 \sigma_3, \\
S &:= e^{-\frac{\varphi}{2} i_3} e^{-\frac{\theta}{2} i_2}; \quad \Omega = \widehat{\Omega} := r^{-1} (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} S, \quad (\text{A.125}) \\
\vec{\partial}' &:= \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi; \quad \vec{\partial} := \sigma_1 \partial_1 + \sigma_2 \partial_2 + \sigma_3 \partial_3.
\end{aligned}$$

Avec (A.59) et (A.61), rappelons que l'on a  $\nabla = \partial_0 - \vec{\partial} = \nabla_1 + i_2 \nabla_2$ . La dérivation d'une fonction composée nous donne :

$$\partial_j = \frac{\partial r}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (\text{A.126})$$

Et l'on a :

$$\begin{aligned}
r &= [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{\frac{1}{2}}, \\
\theta &= \text{Arctan} \left[ \frac{[(x^1)^2 + (x^2)^2]^{\frac{1}{2}}}{x^3} \right]; \quad \varphi = \text{Arctan} \left[ \frac{x^2}{x^1} \right], \quad (\text{A.127}) \\
\frac{\partial r}{\partial x^j} &= \frac{x^j}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^1} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^2} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x^3} = -\frac{\sin \theta}{r}, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = 0. \quad (\text{A.128})
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\vec{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix}; \quad \partial_3 = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta, \quad (\text{A.129})$$

$$\begin{aligned}
\partial_1 + i\partial_2 &= e^{i\varphi} \left( \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta + \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right), \\
\partial_1 - i\partial_2 &= e^{-i\varphi} \left( \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta - \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right). \quad (\text{A.130})
\end{aligned}$$

Ceci nous donne :

$$\vec{\partial} = S\sigma_3 S^{-1} \partial_r + S\sigma_1 S^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta + S\sigma_2 S^{-1} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi. \quad (\text{A.131})$$

Puis on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\partial}(\Omega \hat{\phi}) &= S\sigma_3 S^{-1} \partial_r \left( \frac{1}{r \sqrt{\sin \theta}} S \hat{\phi} \right) \\ &+ S\sigma_1 S^{-1} \frac{1}{r} \partial_\theta \left( \frac{1}{r \sqrt{\sin \theta}} S \hat{\phi} \right) \\ &+ S\sigma_2 S^{-1} \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \left( \frac{1}{r \sqrt{\sin \theta}} S \hat{\phi} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \vec{\partial}(\Omega \hat{\phi}) &= \Omega \left( \sigma_3 \frac{-1}{r} - \sigma_1 \frac{e^\theta i_2}{2r \sin \theta} + \sigma_2 \frac{S^{-1}(-i_3)S}{2r \sin \theta} \right) \hat{\phi} \\ &+ \Omega \left( \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi \right) \hat{\phi} \\ &= 0 + \Omega \left( \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi \right) \hat{\phi} \\ &= \Omega \vec{\partial}' \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

Ensuite, parce que  $\Omega$  ne dépend pas de  $x^0 = ct$ , avec :

$$\begin{aligned} \nabla &= \partial_0 - \vec{\partial}; \quad \nabla' = \partial_0 - \vec{\partial}' = \partial_0 - \left( \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi \right) \\ \nabla' &= \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_r & -\frac{1}{r} \left( \partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) \\ -\frac{1}{r} \left( \partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) & \partial_0 + \partial_r \end{pmatrix} = \nabla'_1 + i_2 \nabla'_2, \\ \nabla'_1 &= \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_r & 0 \\ 0 & \partial_0 + \partial_r \end{pmatrix} = \partial_0 - \sigma_3 \partial_r, \end{aligned} \quad (\text{A.134})$$

$$\nabla'_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi + \frac{1}{r} \partial_\theta & 0 \\ 0 & \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi - \frac{1}{r} \partial_\theta \end{pmatrix} = \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi + \frac{1}{r} \sigma_3 \partial_\theta, \quad (\text{A.135})$$

on a :

$$\nabla(\Omega \hat{\phi}) = \Omega \nabla' \hat{\phi} = \Omega (\nabla'_1 + i_2 \nabla'_2) \hat{\phi}. \quad (\text{A.136})$$

Donc on a :

$$[\bar{\phi}(\nabla \hat{\phi})]^\dagger = (\bar{\phi} \nabla) \hat{\phi}. \quad (\text{A.137})$$

### Laplacien en coordonnées sphériques

Le laplacien d'un terme A vaut :

$$\begin{aligned} \square A &= (\nabla \hat{\nabla}) A = \nabla (\hat{\nabla} A) \\ &= (\partial_0 - \vec{\partial})(\partial_0 A + \vec{\partial} A) = \partial_0 \partial_0 A - \vec{\partial} \partial_0 A + \partial_0 \vec{\partial} A - \vec{\partial} \vec{\partial} A \\ &= \partial_0 \partial_0 A - \vec{\partial} \vec{\partial} A, \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\vec{\partial}\vec{\partial}A &= \vec{\partial}[\vec{\partial}(\Omega B)] = \vec{\partial}[\Omega(\vec{\partial}B)]; \quad A = \Omega B; \quad B = \Omega^{-1}A, \\ \vec{\partial}\vec{\partial}A &= \Omega\vec{\partial}'(\vec{\partial}'B) = \Omega[(\vec{\partial}'\vec{\partial}')B] = \Omega\vec{\partial}'\vec{\partial}'(\Omega^{-1}A)\end{aligned}\quad (\text{A.139})$$

$$\begin{aligned}\vec{\partial}'\vec{\partial}' &= \left(\sigma_3\partial_r + \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2\partial_\varphi\right)\left(\sigma_3\partial_r + \frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2\partial_\varphi\right) \\ &= \sigma_3^2\partial_r\partial_r + \sigma_3\left(\frac{1}{r}\sigma_1\partial_\theta\right) + \sigma_3\partial_r\left(\frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2\partial_\varphi\right) \\ &\quad + \frac{1}{r}\left[\sigma_1\sigma_3\partial_\theta\partial_r + \frac{1}{r}\sigma_1^2\partial_\theta\partial_\theta + \sigma_1\partial_\theta\left(\frac{\sigma_2}{r\sin\theta}\partial_\varphi\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\sigma_2\sigma_3\partial_\varphi\partial_r + \frac{\sigma_1}{r}\partial_\varphi\partial_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\sigma_2^2\partial_\varphi\partial_\varphi\right].\end{aligned}\quad (\text{A.140})$$

On obtient alors :

$$\vec{\partial}'\vec{\partial}' = \partial_r\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta\partial_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi\partial_\varphi - \frac{i_2}{r^2}\partial_\theta - \frac{i_3}{r^2\sin^2\theta}e^{\theta i_2}\partial_\varphi. \quad (\text{A.141})$$

Pour une grandeur physique  $A$  qui ne dépend ni du temps ni de l'angle  $\varphi$ , on a :

$$\begin{aligned}\square A &= \Omega\left[-\partial_r\partial_r(\Omega^{-1}A) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\theta\partial_\theta(\Omega^{-1}A) + \frac{i_2}{r^2\sin^2\theta}\partial_\theta(\Omega^{-1}A)\right] \\ &= \Omega\left[-\partial_r\partial_r(\Omega^{-1}A) + \frac{i_2}{r^2\sin^2\theta}\partial_\theta[(\Omega^{-1}A) + i_2\partial_\theta(\Omega^{-1}A)]\right].\end{aligned}\quad (\text{A.142})$$

### A.3.11 Lois de l'électromagnétisme dans $Cl_3$

Le cadre le plus simple pour exprimer les lois apparemment compliquées de l'électromagnétisme est aussi  $Cl_3$  : on appelle  $A = A^\dagger$  le vecteur d'espace-temps "potentiel" et on calcule, avec l'opérateur de Dirac  $\nabla = \sigma^\mu\partial_\mu = \nabla^\dagger$ , ainsi qu'avec  $A = A^0 + \vec{A}$ , le champ électromagnétique  $F = \vec{E} + i\vec{H}$  associé à ce potentiel. C'est un pur bivecteur dans l'espace-temps, somme du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $i\vec{H}$ , un vecteur axial. La dérivation du potentiel  $A$  donne :

$$\begin{aligned}\vec{E} + i\vec{H} &= F = \nabla\hat{A} = (\partial_0 - \vec{\partial})(A^0 - \vec{A}) = \partial_0A^0 - \partial_0\vec{A} - \vec{\partial}A^0 + \vec{\partial}\vec{A} \\ &= (\partial_0A^0 + \vec{\partial}\cdot\vec{A}) + (-\partial_0\vec{A} - \vec{\partial}A^0) + i\vec{\partial}\times\vec{A}, \\ \vec{E} &= -\partial_0\vec{A} - \vec{\partial}A^0; \quad \vec{H} = \vec{\partial}\times\vec{A}.\end{aligned}\quad (\text{A.143})$$

Donc on obtient un bivecteur  $F$ , somme du seul vecteur  $\vec{E}$  et du pseudo-vecteur  $i\vec{H}$ , si et seulement si la conditions de jauge de Lorentz  $0 = \partial_0A^0 + \vec{\partial}\cdot\vec{A}$  est vérifiée. On a aussi :

$$\begin{aligned}\bar{F} &= (\partial_0A^0 + \vec{\partial}\cdot\vec{A}) - (-\partial_0\vec{A} - \vec{\partial}A^0) - i\vec{\partial}\times\vec{A}, \\ F - \bar{F} &= 2[(-\partial_0\vec{A} - \vec{\partial}A^0) + i\vec{\partial}\times\vec{A}] = 2(\vec{E} + i\vec{H}) = 2F.\end{aligned}\quad (\text{A.144})$$

On pose donc :

$$F := \vec{E} + i\vec{H} := \frac{1}{2}(\nabla\hat{A} - \overline{\nabla\hat{A}}) = \frac{1}{2}(\nabla\hat{A} - A^\dagger\bar{\nabla}). \quad (\text{A.145})$$

Ceci implique :

$$\hat{F} = -F^\dagger = -\vec{E} + i\vec{H} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}A - \hat{A}\nabla). \quad (\text{A.146})$$

$$\nabla\hat{F} = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\nabla}A - \nabla\hat{A}\nabla) = \frac{1}{2}(\square A - \nabla\hat{A}\nabla), \quad (\text{A.147})$$

$$\begin{aligned} \square &:= \nabla\hat{\nabla} = (\partial_0 - \vec{\partial})(\partial_0 + \vec{\partial}) = \partial_0\partial_0 - \partial_1\partial_1 - \partial_2\partial_2 - \partial_3\partial_3 \\ &= (\partial_0 + \vec{\partial})(\partial_0 - \vec{\partial}) = \hat{\nabla}\nabla. \end{aligned} \quad (\text{A.148})$$

De plus on obtient :

$$\nabla\hat{F} = \nabla(\hat{\nabla}A) = (\nabla\hat{\nabla})A = \square A = A\square, \quad (\text{A.149})$$

$$\begin{aligned} (\nabla\hat{F})^\dagger &= \frac{1}{2}(\nabla\hat{\nabla}A - \nabla\hat{A}\nabla)^\dagger = \frac{1}{2}(\square A - \nabla\hat{A}\nabla)^\dagger \\ &= \frac{1}{2}(A\square - \nabla\hat{A}\nabla) = \frac{1}{2}(\square A - \nabla\hat{A}\nabla) = \nabla\hat{F}. \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

Par conséquent  $\mathbf{j} = \nabla\hat{F}$  est aussi un vecteur covariant d'espace-temps, appelé "courant". On a aussi :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^0 - \vec{\mathbf{j}} = \nabla\hat{F} = (\partial_0 - \vec{\partial})(-\vec{E} + i\vec{H}) \quad (\text{A.151})$$

$$= \vec{\partial} \cdot \vec{E} + (-\partial_0\vec{E} + \vec{\partial} \times \vec{H}) + i(\partial_0\vec{H} + \vec{\partial} \times \vec{E}) - i\vec{\partial} \cdot \vec{H}. \quad (\text{A.152})$$

En séparant les parties scalaire, vectorielle, pseudo-vectorielle et pseudo-scalaire, on obtient les équations de Maxwell :

$$\mathbf{j}_0 = \vec{\partial} \cdot \vec{E}, \quad (\text{A.153})$$

$$\vec{\mathbf{j}} = \partial_0\vec{E} - \vec{\partial} \times \vec{H}, \quad (\text{A.154})$$

$$0 = \partial_0\vec{H} + \vec{\partial} \times \vec{E}, \quad (\text{A.155})$$

$$0 = \vec{\partial} \cdot \vec{H}. \quad (\text{A.156})$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} -\nabla\hat{A}\nabla &= (\vec{E} + i\vec{H})(-\partial_0 + \vec{\partial}) \\ &= \vec{\partial} \cdot \vec{E} + (-\partial_0\vec{E} + \vec{\partial} \times \vec{H}) - i(\partial_0\vec{H} + \vec{\partial} \times \vec{E}) + i\vec{\partial} \cdot \vec{H} \\ &= \vec{\partial} \cdot \vec{E} - (\partial_0\vec{E} - \vec{\partial} \times \vec{H}) = \mathbf{j} = \nabla\hat{F} = \square A. \end{aligned} \quad (\text{A.157})$$

Une autre forme d'électromagnétisme existe quand  $A = A^\dagger$  (vecteur d'espace-temps) est remplacé par  $iB = -iB^\dagger$  (pseudo-vecteur d'espace-temps) :

$$\begin{aligned}\vec{E}_m + i\vec{H}_m &= F_m = \nabla \widehat{iB} = -i\nabla \widehat{B} \\ &= -i[(\partial_0 - \vec{\partial})(B^0 - \vec{B})] = -i[\partial_0 B^0 - \partial_0 \vec{B} - \vec{\partial} B^0 + \vec{\partial} \vec{B}] \\ &= -i(\partial_0 B^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{B}) - i(-\partial_0 \vec{B} - \vec{\partial} B^0) + \vec{\partial} \times \vec{B} \\ \vec{H}_m &= \partial_0 \vec{B} + \vec{\partial} B^0; \quad \vec{E}_m = \vec{\partial} \times \vec{B}.\end{aligned}\tag{A.158}$$

On a donc aussi obtenu un bivecteur  $F_m$ , somme du vecteur  $\vec{E}_m$  et du pseudo-vecteur  $i\vec{H}_m$ , si et seulement si la condition de jauge  $0 = \partial_0 B^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{B}$  est vérifiée. On a aussi :

$$\begin{aligned}-iB\widehat{\nabla} &= \overline{F}_m = -i(\partial_0 B^0 + \vec{\partial} \cdot \vec{B}) + i(-\partial_0 \vec{B} - \vec{\partial} B^0) - \vec{\partial} \times \vec{B} \\ F_m - \overline{F}_m &= 2[i(\partial_0 \vec{B} + \vec{\partial} B^0) + \vec{\partial} \times \vec{B}] = 2(\vec{E}_m + i\vec{H}_m) = 2F_m.\end{aligned}\tag{A.159}$$

On pose donc :

$$F_m := \vec{E}_m + i\vec{H}_m := \frac{1}{2}(\nabla \widehat{iB} - \overline{\nabla \widehat{iB}}) = \frac{i}{2}(-\nabla \widehat{B} + B^\dagger \overline{\nabla}).\tag{A.160}$$

Ceci implique :

$$\widehat{F}_m = -F_m^\dagger = -\vec{E}_m + i\vec{H}_m = \frac{i}{2}(\widehat{\nabla} B - \widehat{B} \nabla).\tag{A.161}$$

$$\nabla \widehat{F}_m = \frac{i}{2}(\nabla \widehat{\nabla} B - \nabla \widehat{B} \nabla) = \frac{i}{2}(\square B - \nabla \widehat{B} \nabla).\tag{A.162}$$

De plus on obtient :

$$\nabla \widehat{F}_m = i\nabla(\widehat{\nabla} B) = i(\nabla \widehat{\nabla}) B = i\square B = iB\square,\tag{A.163}$$

$$(\nabla \widehat{F}_m)^\dagger = (iB\square)^\dagger = -i\square B = -\nabla \widehat{F}_m.\tag{A.164}$$

Par conséquent  $-ik = \nabla \widehat{F}_m$  est aussi un pseudo-vecteur covariant d'espace-temps, appelé "courant magnétique". On a aussi :

$$\begin{aligned}-ik &= -ik^0 + i\vec{k} = \nabla \widehat{F}_m = (\partial_0 - \vec{\partial})(-\vec{E}_m + i\vec{H}_m) \\ &= \vec{\partial} \cdot \vec{E}_m + (-\partial_0 \vec{E}_m + \vec{\partial} \times \vec{H}_m) + i(\partial_0 \vec{H}_m + \vec{\partial} \times \vec{E}_m) - i\vec{\partial} \cdot \vec{H}_m.\end{aligned}\tag{A.165}$$

En séparant les parties scalaire, vectorielle, pseudo-vectorielle et pseudo-scalaire, on obtient les équations de Maxwell pour le magnétisme (attention aux signes!) :

$$0 = \vec{\partial} \cdot \vec{E}_m,\tag{A.166}$$

$$0 = -\partial_0 \vec{E}_m + \vec{\partial} \times \vec{H}_m,\tag{A.167}$$

$$\vec{k} = \partial_0 \vec{H}_m + \vec{\partial} \times \vec{E}_m,\tag{A.168}$$

$$k_0 = \vec{\partial} \cdot \vec{H}_m.\tag{A.169}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
 -i\nabla\widehat{B}\nabla &= (\vec{E}_m + i\vec{H}_m)(\partial_0 - \vec{\partial}) \\
 &= -\vec{\partial} \cdot \vec{E}_m + (\partial_0\vec{E}_m - \vec{\partial} \times \vec{H}_m) + i(\partial_0\vec{H}_m + \vec{\partial} \times \vec{E}_m) - i\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_m \\
 &= -i\vec{\partial} \cdot \vec{H}_m + i(\partial_0\vec{H}_m + \vec{\partial} \times \vec{E}_m) = -ik_0 + i\vec{k} = \nabla\widehat{F}_m = \square iB.
 \end{aligned} \tag{A.170}$$

L'électromagnétisme complet, avec à la fois des charges électriques et des charges magnétiques, suit donc les règles simples :

$$F = \nabla\widehat{A + iB}; \quad j - ik = \nabla\widehat{F}; \quad \square(A + iB) = j - ik. \tag{A.171}$$

## A.4 Densités tensorielles

On écrit l'onde de l'électron sous la forme :

$$\phi = \sqrt{2}(\xi \quad \widehat{\eta}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}, \tag{A.172}$$

ce qui nous donne :

$$\widehat{\phi} = \sqrt{2}(\eta \quad \widehat{\xi}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix}, \tag{A.173}$$

$$\phi^\dagger = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi^\dagger \\ \widehat{\eta}^\dagger \end{pmatrix}; \quad \overline{\phi} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta^\dagger \\ \widehat{\xi}^\dagger \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}. \tag{A.174}$$

### A.4.1 Calcul de $\Omega_1$ et $\Omega_2$ , déterminant

On a avec les matrices de Dirac :

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \overline{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \eta^\dagger & \xi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \eta^\dagger\xi + \xi^\dagger\eta = \eta_1^*\xi_1 + \eta_2^*\xi_2 + \xi_1^*\eta_1 + \xi_2^*\eta_2, \\
 \Omega_2 &= \overline{\psi}(-i\gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \eta^\dagger & \xi^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -i\eta^\dagger\xi + i\xi^\dagger\eta, \\
 \Omega_1 + i\Omega_2 &= 2\eta^\dagger\xi; \quad \Omega_1 - i\Omega_2 = 2\xi^\dagger\eta; \quad \Omega_2 = i(-\eta_1^*\xi_1 - \eta_2^*\xi_2 + \xi_1^*\eta_1 + \xi_2^*\eta_2).
 \end{aligned} \tag{A.175}$$

Tandis qu'en algèbre de Pauli on a :

$$\phi\overline{\phi} = \overline{\phi}\phi = \det(\phi) = 2(\xi_1\eta_1^* + \xi_2\eta_2^*) = 2\eta^\dagger\xi = \Omega_1 + i\Omega_2, \tag{A.176}$$

$$\widehat{\phi}\phi^\dagger = \phi^\dagger\widehat{\phi} = \det(\phi)^* = 2(\eta_1\xi_1^* + \eta_2\xi_2^*) = 2\xi^\dagger\eta = \Omega_1 - i\Omega_2. \tag{A.177}$$

On obtient aussi, pour tout  $\phi$  à valeur dans  $Cl_3$  :

$$\phi[\det(\phi)^{-1}\overline{\phi}] = 1; \quad \phi^{-1} = \det(\phi)^{-1}\overline{\phi}. \tag{A.178}$$

La seconde raison de notre intérêt pour  $Cl_3$  vient du sous-ensemble  $Cl_3^*$  des éléments inversibles, qui vérifie  $\det(M) \neq 0$  et forme le groupe de Lie multiplicatif. De plus, ce groupe de Lie a comme algèbre de Lie l'algèbre  $Cl_3$  elle-même. Ce groupe de Lie pour la multiplication est le groupe d'invariance utilisé dans tout ce livre. La plupart des progrès apportés par l'algèbre de Clifford en physique quantique viennent de la multiplication des fonctions d'onde, qui ne sont pas calculables dans la théorie de Dirac utilisant une fonction à valeur dans  $\mathbb{C}^4$ .

#### A.4.2 Calcul des $D_\mu^\nu$

Ce calcul donne aussi les  $R_\mu^\nu$  de 1.1.2. Il suffit pour cela de remplacer  $\phi$  par  $M$ , c'est-à-dire  $\sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}$  par  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On commence par le calcul des composantes du vecteur  $D_0 = J$ . Avec les matrices de Dirac on a :

$$D_0^\mu = J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\eta^\dagger \quad \xi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \hat{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \eta^\dagger \sigma^\mu \eta + \xi^\dagger \hat{\sigma}^\mu \xi. \quad (\text{A.179})$$

On voit immédiatement ici que le courant  $J$  est la somme des deux courants  $D_R$  et  $D_L$  :

$$D_0^\mu = J^\mu = D_R^\mu + D_L^\mu; \quad D_R^\mu = \xi^\dagger \hat{\sigma}^\mu \xi; \quad D_L^\mu = \eta^\dagger \sigma^\mu \eta, \quad (\text{A.180})$$

Cela vient de :

$$\begin{aligned} D_R &:= \phi \frac{1 + \sigma_3}{2} \phi^\dagger = 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \xi_1^* \xi_1 & \xi_2^* \xi_1 \\ \xi_1^* \xi_2 & \xi_2^* \xi_2 \end{pmatrix} \\ &= \xi_1^* \xi_1 (1 + \sigma_3) + \xi_2^* \xi_2 (1 - \sigma_3) + \xi_2^* \xi_1 (\sigma_1 + i\sigma_2) + \xi_1^* \xi_2 (\sigma_1 - i\sigma_2) \\ &= \xi^\dagger \xi + (\xi^\dagger \sigma_3 \xi) \sigma_3 + (\xi^\dagger \sigma_1 \xi) \sigma_1 + (\xi^\dagger \sigma_2 \xi) \sigma_2 = (\xi^\dagger \hat{\sigma}^\mu \xi) \sigma_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.181})$$

De même on a :

$$\begin{aligned} D_L &:= \phi \frac{1 - \sigma_3}{2} \phi^\dagger = 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \eta_2^* \eta_2 & -\eta_2^* \eta_1 \\ -\eta_1^* \eta_2 & \eta_1^* \eta_1 \end{pmatrix} \\ &= \eta_2^* \eta_2 (1 + \sigma_3) + \eta_1^* \eta_1 (1 - \sigma_3) - \eta_2^* \eta_1 (\sigma_1 + i\sigma_2) - \eta_1^* \eta_2 (\sigma_1 - i\sigma_2) \\ &= \eta^\dagger \eta + (\eta^\dagger \sigma^3 \eta) \sigma_3 + (\eta^\dagger \sigma^1 \eta) \sigma_1 + (\eta^\dagger \sigma^2 \eta) \sigma_2 = (\eta^\dagger \sigma^\mu \eta) \sigma_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.182})$$

Et on a :

$$D_R + D_L = \phi \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} + \frac{1 - \sigma_3}{2} \right) \phi^\dagger = \phi \phi^\dagger = D_0 = J, \quad (\text{A.183})$$

$$D_R - D_L = \phi \left( \frac{1 + \sigma_3}{2} - \frac{1 - \sigma_3}{2} \right) \phi^\dagger = \phi \sigma_3 \phi^\dagger = D_3 = K. \quad (\text{A.184})$$

Cela donne :

$$D_0^0 = J^0 = \xi^\dagger \sigma_0 \xi + \eta^\dagger \sigma_0 \eta = \xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* + \eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*, \quad (\text{A.185})$$

$$D_0^1 = J^1 = \xi^\dagger \sigma_1 \xi - \eta^\dagger \sigma_1 \eta = \xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^* - \eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*, \quad (\text{A.186})$$

$$D_0^2 = J^2 = \xi^\dagger \sigma_2 \xi - \eta^\dagger \sigma_2 \eta = i(\xi_1 \xi_2^* - \xi_2 \xi_1^* - \eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*), \quad (\text{A.187})$$

$$D_0^3 = J^3 = \xi^\dagger \sigma_3 \xi - \eta^\dagger \sigma_3 \eta = \xi_1 \xi_1^* - \xi_2 \xi_2^* - \eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*. \quad (\text{A.188})$$

En commençant maintenant par les densités connues dans le formalisme ancien des matrices de Dirac, on utilise (plus de détails en B.1.1) :

$$\gamma^0 \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.189})$$

$$\gamma^j \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{A.190})$$

$$K = K^\mu \sigma_\mu = (\xi^\dagger \hat{\sigma}^\mu \xi) \sigma_\mu - (\eta^\dagger \sigma^\mu \eta) \sigma_\mu = D_R - D_L = D_3. \quad (\text{A.191})$$

On obtient donc :

$$D_3^0 = \xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* - \eta_1 \eta_1^* - \eta_2 \eta_2^*, \quad (\text{A.192})$$

$$D_3^3 = \xi_1 \xi_1^* - \xi_2 \xi_2^* + \eta_1 \eta_1^* - \eta_2 \eta_2^*, \quad (\text{A.193})$$

$$D_3^1 = \xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^* + \eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*, \quad (\text{A.194})$$

$$D_3^2 = i(\xi_1 \xi_2^* - \xi_2 \xi_1^* + \eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*). \quad (\text{A.195})$$

Pour les calculs des composantes de  $D_1$  et  $D_2$ , qui sont inconnus du formalisme matriciel ancien, on se sert directement de l'algèbre de Pauli :

$$\begin{aligned} D_1 + iD_2 &= \phi(\sigma_1 + i\sigma_2)\phi^\dagger \\ &= 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -\eta_2 \xi_1 & \eta_1 \xi_1 \\ -\eta_2 \xi_2 & \eta_1 \xi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.196})$$

$$\begin{aligned} &= 2[-\eta_2 \xi_1(1 + \sigma_3) + \eta_1 \xi_2(1 - \sigma_3) + \eta_1 \xi_1(\sigma_1 + i\sigma_2) - \eta_2 \xi_2(\sigma_1 - i\sigma_2)] \\ &= 2[\hat{\eta}^\dagger \xi + (\hat{\eta}^\dagger \sigma_3 \xi) \sigma_3 + (\hat{\eta}^\dagger \sigma_1 \xi) \sigma_1 + (\hat{\eta}^\dagger \sigma_2 \xi) \sigma_2] \\ D_1 + iD_2 &= 2(\hat{\eta}^\dagger \hat{\sigma}^\mu \xi) \sigma_\mu; \quad \hat{\eta}^\dagger = (-\eta_2 \quad \eta_1). \end{aligned} \quad (\text{A.197})$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} D_1 - iD_2 &= \phi(\sigma_1 - i\sigma_2)\phi^\dagger \\ &= 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -\xi_1^* \eta_2^* & -\xi_2^* \eta_2^* \\ \xi_1^* \eta_1^* & \xi_2^* \eta_1^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.198})$$

$$\begin{aligned} &= 2[-\xi_1^* \eta_2^*(1 + \sigma_3) + \xi_2^* \eta_1^*(1 - \sigma_3) - \xi_2^* \eta_2^*(\sigma_1 + i\sigma_2) + \xi_1^* \eta_1^*(\sigma_1 - i\sigma_2)] \\ &= 2[\xi^\dagger \hat{\eta} + (\xi^\dagger \sigma_3 \hat{\eta}) \sigma_3 + (\xi^\dagger \sigma_1 \hat{\eta}) \sigma_1 + (\xi^\dagger \sigma_2 \hat{\eta}) \sigma_2] \\ D_1 - iD_2 &= 2(\xi^\dagger \hat{\sigma}^\mu \hat{\eta}) \sigma_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.199})$$

Donc en ajoutant et en soustrayant on obtient :

$$D_1^0 = -\xi_1^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1, \quad (\text{A.200})$$

$$D_1^3 = -\xi_1^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1, \quad (\text{A.201})$$

$$D_1^1 = \xi_1^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1, \quad (\text{A.202})$$

$$D_1^2 = i(-\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1). \quad (\text{A.203})$$

$$D_2^0 = i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1), \quad (\text{A.204})$$

$$D_2^3 = i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1), \quad (\text{A.205})$$

$$D_2^1 = i(\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_1), \quad (\text{A.206})$$

$$D_2^2 = \xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 + \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1. \quad (\text{A.207})$$

### A.4.3 Calcul des $S_k$

Pour le calcul de  $S = S_3$ , le formalisme des matrices de Dirac donne, avec  $S^{\mu\nu} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \gamma^\nu \psi$  :

$$E_3^3 := S_3^{12} = \bar{\psi} i \gamma^1 \gamma^2 \psi. \quad (\text{A.208})$$

Et on a :

$$i \gamma^1 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.209})$$

et de même on a :

$$i \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}; \quad i \gamma^3 \gamma^1 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.210})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_3^3 := S_3^{12} &= (\eta^\dagger \quad \xi^\dagger) \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \eta^\dagger \sigma_3 \xi + \xi^\dagger \sigma_3 \eta \\ &= \eta_1^* \xi_1 - \eta_2^* \xi_2 + \xi_1^* \eta_1 - \xi_2^* \eta_2. \end{aligned} \quad (\text{A.211})$$

Et de même :

$$E_3^1 := S_3^{23} = \eta^\dagger \sigma_1 \xi + \xi^\dagger \sigma_1 \eta = \eta_1^* \xi_2 + \eta_2^* \xi_1 + \xi_1^* \eta_2 + \xi_2^* \eta_1, \quad (\text{A.212})$$

$$E_3^2 := S_3^{31} = \eta^\dagger \sigma_2 \xi + \xi^\dagger \sigma_2 \eta = i(-\eta_1^* \xi_2 + \eta_2^* \xi_1 - \xi_1^* \eta_2 + \xi_2^* \eta_1). \quad (\text{A.213})$$

Ensuite on a :

$$\gamma^1 \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.214})$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} H_3^1 &:= S_3^{10} = (\eta^\dagger \quad \xi^\dagger) \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -i\eta^\dagger \sigma_1 \xi + i\xi^\dagger \sigma_1 \eta \quad (\text{A.215}) \\ &= i(-\eta_1^* \xi_2 - \eta_2^* \xi_1 + \xi_1^* \eta_2 + \xi_2^* \eta_1). \end{aligned}$$

De même on a :

$$H_3^2 := S_3^{20} = -i\eta^\dagger \sigma_2 \xi + i\xi^\dagger \sigma_2 \eta = -\eta_1^* \xi_2 - \eta_2^* \xi_1 + \xi_1^* \eta_2 - \xi_2^* \eta_1, \quad (\text{A.216})$$

$$H_3^3 := S_3^{30} = -i\eta^\dagger \sigma_3 \xi + i\xi^\dagger \sigma_3 \eta = i(-\eta_1^* \xi_1 + \eta_2^* \xi_2 + \xi_1^* \eta_1 - \xi_2^* \eta_2). \quad (\text{A.217})$$

On en déduit que :

$$S_3^{12} + iS_3^{30} = 2\eta^\dagger \sigma_3 \xi = 2(\xi_1 \eta_1^* - \xi_2 \eta_2^*), \quad (\text{A.218})$$

$$S_3^{23} + iS_3^{10} = 2\eta^\dagger \sigma_1 \xi = 2(\xi_2 \eta_1^* - \xi_1 \eta_2^*), \quad (\text{A.219})$$

$$S_3^{31} + iS_3^{20} = 2\eta^\dagger \sigma_2 \xi = 2i(-\xi_2 \eta_1^* + \xi_1 \eta_2^*), \quad (\text{A.220})$$

$$S_3^{23} + iS_3^{10} + iS_3^{31} - S_3^{20} = 4\xi_2 \eta_1^*, \quad (\text{A.221})$$

$$S_3^{23} + iS_3^{10} - iS_3^{31} + S_3^{20} = 4\xi_1 \eta_2^*. \quad (\text{A.222})$$

Et on a :

$$\begin{aligned} &S_3^{23} \sigma_1 + S_3^{31} \sigma_2 + S_3^{12} \sigma_3 + S_3^{10} i\sigma_1 + S_3^{20} i\sigma_2 + S_3^{30} i\sigma_3 \\ &= \begin{pmatrix} S_3^{12} + iS_3^{30} & S_3^{23} + iS_3^{10} - iS_3^{31} + S_3^{20} \\ S_3^{23} + iS_3^{10} + iS_3^{31} - S_3^{20} & -(S_3^{12} + iS_3^{30}) \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \xi_1 \eta_1^* - \xi_2 \eta_2^* & 2\xi_1 \eta_2^* \\ 2\xi_2 \eta_1^* & -(\xi_1 \eta_1^* - \xi_2 \eta_2^*) \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \\ &= \phi \sigma_3 \bar{\phi} = S = S_3, \end{aligned} \quad (\text{A.223})$$

Pour le calcul des composantes de  $S_1$  et de  $S_2$ , qui sont inconnus du formalisme des matrices de Dirac, on part directement de l'algèbre de Pauli. On se sert de :

$$R := \phi \frac{1 + \sigma_3}{2} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ \xi_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad L := \phi \frac{1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_2^* \\ 0 & \eta_1^* \end{pmatrix},$$

$$S_R := \frac{1}{2}(S_1 + iS_2) = \phi \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)\bar{\phi} = R \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)\bar{R}, \quad (\text{A.224})$$

$$S_L := \frac{1}{2}(S_1 - iS_2) = \phi \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)\bar{\phi} = L \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)\bar{L}. \quad (\text{A.225})$$

On pose :

$$S_R := \vec{E}_R + i\vec{H}_R; \quad \vec{E}_R := E_R^j \sigma_j; \quad \vec{H}_R := H_R^j \sigma_j, \quad (\text{A.226})$$

$$E_R^1 := S_R^{23}; \quad E_R^2 := S_R^{31}; \quad E_R^3 := S_R^{12}; \quad H_R^j := S_R^{j0}, \quad (\text{A.227})$$

$$S_L := \vec{E}_L + i\vec{H}_L; \quad \vec{E}_L := E_L^j \sigma_j; \quad \vec{H}_L := H_L^j \sigma_j, \quad (\text{A.228})$$

$$E_L^1 := S_L^{23}; \quad E_L^2 := S_L^{31}; \quad E_L^3 := S_L^{12}; \quad H_L^j := S_L^{j0}. \quad (\text{A.229})$$

Cela donne :

$$E_R^1 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2); \quad H_R^1 = \frac{i}{2}(-\xi_1^2 + \xi_2^2 + \bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2), \quad (\text{A.230})$$

$$E_R^2 = \frac{i}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \bar{\xi}_1^2 - \bar{\xi}_2^2); \quad H_R^2 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2), \quad (\text{A.231})$$

$$E_R^3 = -\xi_1 \xi_2 - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2; \quad H_R^3 = i(\xi_1 \xi_2 - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2), \quad (\text{A.232})$$

$$E_L^1 = \frac{1}{2}(\eta_1^2 - \eta_2^2 + \bar{\eta}_1^2 - \bar{\eta}_2^2); \quad H_L^1 = \frac{i}{2}(\eta_1^2 - \eta_2^2 - \bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2), \quad (\text{A.233})$$

$$E_L^2 = \frac{i}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 - \bar{\eta}_1^2 - \bar{\eta}_2^2); \quad H_L^2 = \frac{1}{2}(-\eta_1^2 - \eta_2^2 - \bar{\eta}_1^2 - \bar{\eta}_2^2), \quad (\text{A.234})$$

$$E_L^3 = -\eta_1 \eta_2 - \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2; \quad H_L^3 = i(-\eta_1 \eta_2 + \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2). \quad (\text{A.235})$$

Le lien avec  $S_1$  et  $S_2$  est :

$$S_1 = \vec{E}_1 + i\vec{H}_1 = S_R + S_L = \vec{E}_R + i\vec{H}_R + \vec{E}_L + i\vec{H}_L, \quad (\text{A.236})$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_R + \vec{E}_L; \quad \vec{H}_1 = \vec{H}_R + \vec{H}_L,$$

$$S_2 = \vec{E}_2 + i\vec{H}_2 = -iS_R + iS_L = -i(\vec{E}_R + i\vec{H}_R) + i(\vec{E}_L + i\vec{H}_L),$$

$$\vec{E}_2 = \vec{H}_R - \vec{H}_L; \quad \vec{H}_2 = \vec{E}_L - \vec{E}_R. \quad (\text{A.237})$$

On obtient alors :

$$S_1^{12} = -\xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 - \xi_1^* \xi_2^* - \eta_1^* \eta_2^*, \quad (\text{A.238})$$

$$S_1^{30} = i(\xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 - \xi_1^* \xi_2^* + \eta_1^* \eta_2^*), \quad (\text{A.239})$$

$$S_1^{23} = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2 + \xi_1^{*2} - \xi_2^{*2} + \eta_1^{*2} - \eta_2^{*2}), \quad (\text{A.240})$$

$$S_1^{10} = \frac{i}{2}(-\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2 + \xi_1^{*2} - \xi_2^{*2} - \eta_1^{*2} + \eta_2^{*2}), \quad (\text{A.241})$$

$$S_1^{20} = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 + \xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} - \eta_1^{*2} - \eta_2^{*2}), \quad (\text{A.242})$$

$$S_1^{31} = \frac{i}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - \xi_1^{*2} - \xi_2^{*2} - \eta_1^{*2} - \eta_2^{*2}). \quad (\text{A.243})$$

De même on a :

$$S_2^{12} = i(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 - \xi_1^* \xi_2^* - \eta_1^* \eta_2^*), \quad (\text{A.244})$$

$$S_2^{30} = \xi_1 \xi_2 - \eta_1 \eta_2 + \xi_1^* \xi_2^* - \eta_1^* \eta_2^*, \quad (\text{A.245})$$

$$S_2^{23} = \frac{i}{2}(-\xi_1^2 + \xi_2^2 - \eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_1^{*2} - \xi_2^{*2} + \eta_1^{*2} - \eta_2^{*2}), \quad (\text{A.246})$$

$$S_2^{10} = \frac{1}{2}(-\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2 - \xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} + \eta_1^{*2} - \eta_2^{*2}), \quad (\text{A.247})$$

$$S_2^{20} = \frac{i}{2}(-\xi_1^2 - \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} - \eta_1^{*2} - \eta_2^{*2}), \quad (\text{A.248})$$

$$S_2^{31} = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_1^{*2} + \xi_2^{*2} + \eta_1^{*2} + \eta_2^{*2}). \quad (\text{A.249})$$

On obtient aussi le nombre de 36 densités en remarquant qu'il y a 8 carrés et  $28 = 8 \times 7/2$  paires.

#### Calcul des $\overline{D}_\mu^\nu$

Soit  $\phi$  un élément inversible de  $Cl_3^*$ , de déterminant  $\rho e^{i\beta}$ . Soit  $D$  et  $\overline{D}$  les similitudes telles que :

$$D : x \mapsto x' = D(x) = \phi x \phi^\dagger ; \quad \overline{D} : x \mapsto x' = \overline{D}(x) = \overline{\phi} x \widehat{\phi}. \quad (\text{A.250})$$

Soit  $P$  tel que :

$$\phi = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\beta}{2}} P, \quad (\text{A.251})$$

et soit  $Lo$  et  $\overline{Lo}$  les similitudes telles que :

$$Lo : x \mapsto x' = Lo(x) = P x P^\dagger ; \quad \overline{Lo} : x \mapsto x' = \overline{Lo}(x) = \overline{P} x \widehat{P}. \quad (\text{A.252})$$

On a :

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi) = \phi \overline{\phi} = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\beta}{2}} P \sqrt{\rho} e^{i\frac{\beta}{2}} \overline{P} = \rho e^{i\beta} P \overline{P}, \quad (\text{A.253})$$

alors on obtient :

$$P \overline{P} = 1 ; \quad \overline{P} = P^{-1} ; \quad \overline{Lo} = Lo^{-1}. \quad (\text{A.254})$$

$P$  est donc un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $Lo$  est une transformation de Lorentz. On sait que, pour une telle transformation, si on note  $(Lo)$  la matrice de  $Lo$  dans une base orthonormale et  $g$  la matrice-signature :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.255})$$

alors on a la relation suivante,  $M^t$  étant la matrice transposée<sup>8</sup> de  $M$  :

$$(Lo)^{-1} = g(Lo)^t g ; \quad (\bar{Lo})g = g(Lo)^t. \quad (\text{A.256})$$

Et on a aussi :

$$D(x) = \phi x \phi^\dagger = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\beta}{2}} P x \sqrt{\rho} e^{-i\frac{\beta}{2}} P^\dagger = \rho P x P^\dagger = \rho Lo(x), \quad (\text{A.257})$$

alors :

$$D = \rho Lo ; \quad (D) = \rho(Lo). \quad (\text{A.258})$$

De même on a :

$$\bar{D}(x) = \bar{M} x \bar{M}^\dagger = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\beta}{2}} \bar{P} x \sqrt{\rho} e^{-i\frac{\beta}{2}} \bar{P}^\dagger = \rho \bar{P} x \bar{P}^\dagger = \rho \bar{Lo}(x), \quad (\text{A.259})$$

$$\bar{D} = \rho \bar{Lo} ; \quad (\bar{D}) = \rho(\bar{Lo}). \quad (\text{A.260})$$

Multipliant (A.256) par  $\rho$ , on obtient :

$$(\bar{D})g = g(D)^t ; \quad (\bar{D}) = g(D)^t g. \quad (\text{A.261})$$

Cela donne, pour  $j = 1, 2, 3$  et  $k = 1, 2, 3$  :

$$\bar{D}_0^0 = D_0^0 ; \quad \bar{D}_0^j = -D_j^0 ; \quad \bar{D}_j^0 = -D_0^j ; \quad \bar{D}_j^k = D_k^j \quad (\text{A.262})$$

Le résultat est : les lignes, comme les colonnes, de la matrice  $(D_\mu^\nu)$ , sont orthogonales, parce qu'on a, pour  $D$  et pour  $\bar{D}$  :

$$D_\mu = \phi \sigma_\mu \phi^\dagger = D_\mu^\nu \sigma_\nu ; \quad \bar{D}_\mu = \bar{\phi} \sigma_\mu \bar{\phi}^\dagger = \bar{D}_\mu^\nu \sigma_\nu, \quad (\text{A.263})$$

$$D_\mu \cdot D_\nu = \bar{D}_\mu \cdot \bar{D}_\nu = \delta_{\mu\nu} \rho^2. \quad (\text{A.264})$$

#### A.4.4 Preuve de $\nabla = \bar{M} \nabla' \hat{M}$

Puisque  $\phi$  a la même structure que  $M$ , on va utiliser la même notation :

$$M = \sqrt{2}(\xi \quad \hat{\eta}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.265})$$

et cela donne :

$$\hat{M} = \sqrt{2}(\eta \quad \hat{\xi}) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix}, \quad (\text{A.266})$$

$$M^\dagger = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} ; \quad \bar{M} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.267})$$

---

8. La transposition échange les lignes et les colonnes : si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  alors :  $M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . On a, pour toute matrice  $A$  et  $B$ ,  $(AB)^t = B^t A^t$  et  $\det(A^t) = \det(A)$ .

On obtient :

$$\overline{M}\nabla'\widehat{M} = 2 \begin{pmatrix} \eta_1^* & \eta_2^* \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial'_0 - \partial'_3 & -\partial'_1 + i\partial'_2 \\ -\partial'_1 - i\partial'_2 & \partial'_0 + \partial'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\xi_2^* \\ \eta_2 & \xi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{A.268})$$

Les  $R_\mu^\nu$  s'obtiennent avec (A.185) à (A.195) donnant les  $D_\mu^\nu$ , on a :

$$\begin{aligned} A &= 2[(\eta_1\eta_1^* + \eta_2\eta_2^*)\partial'_0 + (-\eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*)\partial'_1 \\ &\quad + i(\eta_2\eta_1^* - \eta_1\eta_2^*)\partial'_2 + (-\eta_1\eta_1^* + \eta_2\eta_2^*)\partial'_3] \\ &= (R_0^0 - R_3^0)\partial'_0 + (R_0^1 - R_3^1)\partial'_1 + (R_0^2 - R_3^2)\partial'_2 + (R_0^3 - R_3^3)\partial'_3 \\ &= R_0^\mu\partial'_\mu - R_3^\mu\partial'_\mu = \partial_0 - \partial_3. \end{aligned} \quad (\text{A.269})$$

$$\begin{aligned} C &= 2[(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\partial'_0 + (-\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)\partial'_1 \\ &\quad - i(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)\partial'_2 + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\partial'_3] \\ &= (-R_1^0 - iR_2^0)\partial'_0 + (-R_1^1 - iR_2^1)\partial'_1 + (-R_1^2 - iR_2^2)\partial'_2 + (-R_1^3 - iR_2^3)\partial'_3 \\ &= -R_1^\mu\partial'_\mu - iR_2^\mu\partial'_\mu = -\partial_1 - i\partial_2. \end{aligned} \quad (\text{A.270})$$

$$\begin{aligned} B &= 2[(\xi_1^*\eta_2^* - \xi_2^*\eta_1^*)\partial'_0 + (-\xi_1^*\eta_1^* + \xi_2^*\eta_2^*)\partial'_1 \\ &\quad + i(\xi_1^*\eta_1^* + \xi_2^*\eta_2^*)\partial'_2 + (\xi_1^*\eta_2^* + \xi_2^*\eta_1^*)\partial'_3] \\ &= (-R_1^0 + iR_2^0)\partial'_0 + (-R_1^1 + iR_2^1)\partial'_1 + (-R_1^2 + iR_2^2)\partial'_2 + (-R_1^3 + iR_2^3)\partial'_3 \\ &= -R_1^\mu\partial'_\mu + iR_2^\mu\partial'_\mu = -\partial_1 + i\partial_2. \end{aligned} \quad (\text{A.271})$$

$$\begin{aligned} D &= 2[(\xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^*)\partial'_0 + (\xi_1\xi_2^* + \xi_2\xi_1^*)\partial'_1 \\ &\quad + i(\xi_1\xi_2^* - \xi_2\xi_1^*)\partial'_2 + (\xi_1\xi_1^* - \xi_2\xi_2^*)\partial'_3] \\ &= (R_0^0 + R_3^0)\partial'_0 + (R_0^1 + R_3^1)\partial'_1 + (R_0^2 + R_3^2)\partial'_2 + (R_0^3 + R_3^3)\partial'_3 \\ &= R_0^\mu\partial'_\mu + R_3^\mu\partial'_\mu = \partial_0 + \partial_3. \end{aligned} \quad (\text{A.272})$$

donc on obtient :

$$\overline{M}\nabla'\widehat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 + i\partial_2 \\ -\partial_1 - i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix} = \nabla. \quad (\text{A.273})$$

#### A.4.5 Preuve de $\det(R_\mu^\nu) = r^4$

On pose :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y'_3 & y'_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x^{0'} + x^{3'} & x^{1'} - ix^{2'} \\ x^{1'} + ix^{2'} & x^{0'} - x^{3'} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.274})$$

$$\begin{aligned}
Y &:= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = NX, \\
Y' &:= \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = NX'. \quad (A.275)
\end{aligned}$$

On a alors :

$$X = N^{-1}Y ; \quad X' = N^{-1}Y'. \quad (A.276)$$

On pose aussi :

$$Y' = PY ; \quad X' = DX. \quad (A.277)$$

On obtient :

$$PNX = PY = Y' = NX' = NDX ; \quad PN = ND ; \quad D = N^{-1}PN, \quad (A.278)$$

ce qui entraine :

$$\det(R_\mu^\nu) = \det(N^{-1}PN) = \det(N^{-1}) \det(P) \det(N) = \det(P). \quad (A.279)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y'_1 & y'_2 \\ y'_3 & y'_4 \end{pmatrix} &= x' = M_X M^\dagger = 2 \begin{pmatrix} \xi_1 & -\eta_2^* \\ \xi_2 & \eta_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2^* \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \quad (A.280) \\
&= 2 \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* y_1 - \eta_2^* \xi_1^* y_3 & \xi_1 \xi_2^* y_1 - \eta_2^* \xi_2^* y_3 \\ -\xi_1 \eta_2 y_2 + \eta_2^* \eta_2 y_4 & +\xi_1 \eta_1 y_2 - \eta_2^* \eta_1 y_4 \\ \xi_2 \xi_1^* y_1 + \eta_1^* \xi_1^* y_3 & \xi_2 \xi_2^* y_1 + \xi_2^* \eta_1^* y_3 \\ -\xi_2 \eta_2 y_2 - \eta_1^* \eta_2 y_4 & +\xi_2 \eta_1 y_2 + \eta_1^* \eta_1 y_4 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$Y' = PY ; \quad P = 2 \begin{pmatrix} \xi_1 \xi_1^* & -\xi_1 \eta_2 & -\xi_1^* \eta_2^* & \eta_2 \eta_2^* \\ \xi_1 \xi_2^* & \xi_1 \eta_1 & -\xi_2^* \eta_2^* & -\eta_1 \eta_2^* \\ \xi_2 \xi_1^* & -\xi_2 \eta_2 & \xi_1^* \eta_1^* & -\eta_2 \eta_1^* \\ \xi_2 \xi_2^* & \xi_2 \eta_1 & \xi_2^* \eta_1^* & \eta_1 \eta_1^* \end{pmatrix}. \quad (A.281)$$

Le calcul du déterminant de  $P$  donne donc :

$$\begin{aligned}
\det(P) &= 16(\xi_1^2 \xi_1^{*2} \eta_1^2 \eta_1^{*2} + \xi_1^2 \xi_2^{*2} \eta_2^2 \eta_1^{*2} + \xi_2^2 \xi_1^{*2} \eta_1^2 \eta_2^{*2} + \xi_2^2 \xi_2^{*2} \eta_2^2 \eta_2^{*2} \\
&\quad + 2\xi_1^2 \xi_1^* \xi_2^* \eta_1 \eta_1^{*2} \eta_2 + 4\xi_1 \xi_1^* \xi_2 \xi_2^* \eta_1 \eta_1^* \eta_2 \eta_2^* \\
&\quad + 2\xi_1 \xi_1^{*2} \xi_2 \eta_1^2 \eta_1^* \eta_2^* + 2\xi_1 \xi_2 \xi_2^{*2} \eta_1^* \eta_2^2 \eta_2^* + 2\xi_1^* \xi_2^2 \xi_2^* \eta_1 \eta_2 \eta_2^{*2}) \\
&= 16(\xi_1 \xi_1^* \eta_1 \eta_1^* + \xi_1 \xi_2^* \eta_1^* \eta_2 + \xi_1^* \xi_2 \eta_1 \eta_2^* + \xi_2 \xi_2^* \eta_2 \eta_2^*)^2 \\
&= 16[(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*)(\xi_1^* \eta_1 + \xi_2^* \eta_2)]^2. \quad (A.282)
\end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned}\det(R_\mu^\nu) &= [2(\xi_1\eta_1^* + \xi_2\eta_2^*)2(\xi_1^*\eta_1 + \xi_2^*\eta_2)]^2 \\ &= [re^{i\theta}re^{-i\theta}]^2 = (r^2)^2 = r^4.\end{aligned}\quad (\text{A.283})$$

#### A.4.6 Relations entre densités tensorielles

On a :

$$D_\mu \widehat{D}_\nu = \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \widehat{\phi \sigma_\nu \phi^\dagger} = \phi \sigma_\mu \phi^\dagger \widehat{\phi} \widehat{\sigma_\nu} \widehat{\phi}^\dagger \quad (\text{A.284})$$

$$= \phi \sigma_\mu (\Omega_1 - i\Omega_2) \widehat{\sigma}_\nu \bar{\phi} = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_\mu \widehat{\sigma}_\nu \bar{\phi}. \quad (\text{A.285})$$

Pour  $j = 1, 2, 3$  cela donne :

$$D_0 \widehat{D}_j = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \widehat{\sigma}_j \bar{\phi} = -(\Omega_1 - i\Omega_2) S_j, \quad (\text{A.286})$$

$$D_j \widehat{D}_0 = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_j \bar{\phi} = (\Omega_1 - i\Omega_2) S_j, \quad (\text{A.287})$$

$$D_1 \widehat{D}_2 = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_1 \widehat{\sigma}_2 \bar{\phi} = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi (-i) \sigma_3 \bar{\phi} = -(\Omega_2 + i\Omega_1) S_3, \quad (\text{A.288})$$

$$D_2 \widehat{D}_1 = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_2 \widehat{\sigma}_1 \bar{\phi} = (\Omega_1 - i\Omega_2) \phi i \sigma_3 \bar{\phi} = (\Omega_2 + i\Omega_1) S_3. \quad (\text{A.289})$$

Et de même on obtient :

$$D_2 \widehat{D}_3 = -D_3 \widehat{D}_2 = -(\Omega_2 + i\Omega_1) S_1, \quad (\text{A.290})$$

$$D_3 \widehat{D}_1 = -D_1 \widehat{D}_3 = -(\Omega_2 + i\Omega_1) S_2. \quad (\text{A.291})$$

Pour  $j = 1, 2, 3$  et pour  $k = 1, 2, 3$ , on a :

$$D_j \widehat{S}_k = \phi \sigma_j \phi^\dagger \widehat{\phi \sigma_k \phi^\dagger} = \phi \sigma_j \phi^\dagger \widehat{\phi} \widehat{\sigma_k} \widehat{\phi}^\dagger = -(\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_j \sigma_k \phi^\dagger, \quad (\text{A.292})$$

$$S_j D_k = \phi \sigma_j \bar{\phi} \phi \sigma_k \phi^\dagger = (\Omega_1 + i\Omega_2) \phi \sigma_j \sigma_k \phi^\dagger. \quad (\text{A.293})$$

Donc pour  $j = 1, 2, 3$  on obtient :

$$D_j \widehat{S}_j = -(\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \phi^\dagger = (-\Omega_1 + i\Omega_2) D_0, \quad (\text{A.294})$$

$$S_j D_j = (\Omega_1 + i\Omega_2) \phi \phi^\dagger = (\Omega_1 + i\Omega_2) D_0. \quad (\text{A.295})$$

Et pour  $k \neq j$  on a :

$$D_1 \widehat{S}_2 = -i(\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_3 \phi^\dagger = -(\Omega_2 + i\Omega_1) D_3 = -D_2 \widehat{S}_1, \quad (\text{A.296})$$

$$S_1 D_2 = i(\Omega_1 + i\Omega_2) \phi \sigma_3 \phi^\dagger = (-\Omega_2 + i\Omega_1) D_3 = -S_2 D_1, \quad (\text{A.297})$$

$$D_2 \widehat{S}_3 = -i(\Omega_1 - i\Omega_2) \phi \sigma_1 \phi^\dagger = -(\Omega_2 + i\Omega_1) D_1 = -D_3 \widehat{S}_2, \quad (\text{A.298})$$

$$S_2 D_3 = i(\Omega_1 + i\Omega_2) \phi \sigma_1 \phi^\dagger = (-\Omega_2 + i\Omega_1) D_1 = -S_3 D_2, \quad (\text{A.299})$$

$$D_3 \widehat{S}_1 = -i(\Omega_1 - i\Omega_2)\phi\sigma_2\phi^\dagger = -(\Omega_2 + i\Omega_1)D_2 = -D_1 \widehat{S}_3, \quad (\text{A.300})$$

$$S_3 D_1 = i(\Omega_1 + i\Omega_2)\phi\sigma_2\phi^\dagger = (-\Omega_2 + i\Omega_1)D_2 = -S_2 D_1. \quad (\text{A.301})$$

Pour  $j = 1, 2, 3$ , on a aussi :

$$\begin{aligned} D_0 \widehat{S}_j &= \phi\phi^\dagger \widehat{\phi\sigma_j\phi} = \phi\phi^\dagger \widehat{\phi}\widehat{\sigma_j}\phi^\dagger = (-\Omega_1 + i\Omega_2)\phi\sigma_j\phi^\dagger \\ &= (-\Omega_1 + i\Omega_2)D_j, \end{aligned} \quad (\text{A.302})$$

$$S_j D_0 = \phi\sigma_j\overline{\phi}\phi^\dagger = (\Omega_1 + i\Omega_2)\phi\sigma_j\phi^\dagger = (\Omega_1 + i\Omega_2)D_j. \quad (\text{A.303})$$

Finalement on a pour  $j = 1, 2, 3$  et pour  $k = 1, 2, 3$  :

$$S_j S_k = \phi\sigma_j\overline{\phi}\phi\sigma_k\overline{\phi} = (\Omega_1 + i\Omega_2)\phi\sigma_j\sigma_k\overline{\phi}, \quad (\text{A.304})$$

$$S_j S_j = (\Omega_1 + i\Omega_2)\phi\overline{\phi} = (\Omega_1 + i\Omega_2)^2, \quad (\text{A.305})$$

tandis que pour  $k \neq j$ , on obtient :

$$S_1 S_2 = -S_2 S_1 = (-\Omega_2 + i\Omega_1)S_3, \quad (\text{A.306})$$

$$S_2 S_3 = -S_3 S_2 = (-\Omega_2 + i\Omega_1)S_1, \quad (\text{A.307})$$

$$S_3 S_1 = -S_1 S_3 = (-\Omega_2 + i\Omega_1)S_2. \quad (\text{A.308})$$

## Annexe B

# Autres algèbres de Clifford

On présente les deux algèbres d'espace-temps,  $Cl_{1,3}$  et  $Cl_{3,1}$ , sous-algèbres de l'algèbre des matrices de Dirac,  $M_4(\mathbb{C})$ . On étudie le lien avec l'algèbre de Pauli et le lien entre l'équation d'onde invariante et la densité lagrangienne. On étudie la même chose avec l'algèbre d'espace-temps. On calcule le tenseur de Tétrode. Puis on présente les algèbres de matrices réelles, ainsi que l'algèbre de Clifford  $Cl_{3,3} = \text{End}(Cl_3)$  dont on a besoin dans l'étude des interactions électro-faibles et fortes.

### B.1 Les algèbres de Clifford d'espace-temps

L'espace-temps est formé par le temps, on notera la variable  $x^0 = ct$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière, et par l'espace, de dimension 3, où chaque point est repéré par un triplet de nombres réels  $x^1, x^2, x^3$ . Cet espace est pseudo-euclidien, de signature  $+, -, -, -$  ou  $-, +, +, +$ . Il existe donc deux algèbres de Clifford non identiques, notées respectivement  $Cl_{1,3}$  et  $Cl_{3,1}$ . Les promoteurs des algèbres de Clifford se partagent habituellement en deux camps de même importance : ceux qui mettent un signe  $+$  pour le temps (Hestenes [76][81]), et ceux qui mettent un signe  $-$  pour le temps (Deheuvels [63]). On va voir en B.2 que ces deux signatures donnent deux sous-algèbres, différentes mais étroitement liées, de  $Cl_{3,3}$ .

#### B.1.1 L'algèbre $Cl_{1,3}$

Ici nous utilisons un signe  $+$  pour le temps, ce qui correspond au choix d'Hestenes. L'algèbre de Clifford d'espace-temps  $Cl_{1,3}$  contient les nombres réels et les vecteurs d'espace-temps  $\mathbf{x}$  tels que :

$$\mathbf{x} = x^0 \gamma_0 + x^1 \gamma_1 + x^2 \gamma_2 + x^3 \gamma_3 = x^\mu \gamma_\mu. \quad (\text{B.1})$$

Les quatre  $\gamma_\mu$  forment une base orthonormale de l'espace-temps :

$$(\gamma_0)^2 = 1 \quad ; \quad (\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = (\gamma_3)^2 = -1 \quad ; \quad \gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (\text{B.2})$$

Le terme général de  $Cl_{1,3}$  est une somme :

$$N = s + v + B + p_v + p_s \quad (\text{B.3})$$

où  $s$  est un nombre réel,  $v$  est un vecteur d'espace-temps,  $B$  est un 2-vecteur,  $p_v$  est un 3-vecteur (ou pseudo-vecteur) et  $p_s$  est un pseudo-scalaire. Avec les définitions de (1.4) :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^j := \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^j &= -\widehat{\sigma}^j = \widehat{\sigma}_j := -\sigma_j; \quad \gamma^j = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \gamma_0 &= \gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_2 = \sigma_0 = \sigma^0 = \widehat{\sigma}^0 = \widehat{\sigma}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Et avec :

$$v = v^\mu \gamma_\mu; \quad \vec{v} := v^j \sigma_j; \quad p_v = ip_v^\mu \gamma_\mu; \quad p_s =: p\mathbf{i}; \quad \vec{p}_v := p_v^j \sigma_j, \quad (\text{B.4})$$

$$B =: \begin{pmatrix} \vec{E} + i\vec{H} & 0 \\ 0 & -\vec{E} + i\vec{H} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \widehat{F} \end{pmatrix}; \quad \vec{E} = E^j \sigma_j; \quad \vec{H} = H^j \sigma_j, \quad (\text{B.5})$$

L'élément général  $N$  de l'algèbre s'écrit :

$$N = \begin{pmatrix} s + F + ip & v^0 + \vec{v} + i(p_v^0 + \vec{p}_v) \\ v^0 - \vec{v} - i(p_v^0 - \vec{p}_v) & s + \widehat{F} - ip \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} M_e & M_o \\ \widehat{M}_o & \widehat{M}_e \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

$$M_e = s + F + ip = s + E^j \sigma_j + iH^j \sigma_j + ip; \quad M_o = v^0 + \vec{v} + i(p_v^0 + \vec{p}_v).$$

Il y a  $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$  dimensions sur le corps des réels (quatrième ligne du triangle arithmétique) parce que : il y a six 2-vecteurs indépendants  $\gamma_{01} = \gamma_0 \gamma_1, \gamma_{02}, \gamma_{03}, \gamma_{12}, \gamma_{23}$  et  $\gamma_{31}$ , où  $\gamma_{ji} = -\gamma_{ij}, j \neq i$ , quatre 3-vecteurs  $\gamma_{012}, \gamma_{023}, \gamma_{031}, \gamma_{123}$ , et un unique pseudo-scalaire :

$$\gamma_{0j} = \begin{pmatrix} -\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}; \quad \gamma_{12} = \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$p_s = p\gamma_{0123} \quad ; \quad \gamma_{0123} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \mathbf{i} = i\gamma_5, \quad (\text{B.8})$$

où  $p$  est un nombre réel. La partie paire de  $N$  est  $N^+ = s + B + p_s$ , tandis que la partie impaire est  $N^- = v + p_v$ . L'automorphisme principal vérifie  $N \mapsto \tilde{N} = s - v + B - p_v + p_s$ . La réversion vérifie :

$$N \mapsto \tilde{N} = s + v - B - p_v + p_s = \begin{pmatrix} \overline{M}_e & M_o^\dagger \\ \overline{M}_o & M_e^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Parmi les  $16 = 2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$  générateurs de  $Cl_{1,3}$ ,  $10 = 5 \times 4/2$  ont un carré égal à  $-1$  et  $6 = 4 \times 3/2$  ont un carré égal à  $1$ . L'opérateur différentiel privilégié de  $Cl_{1,3}$  est :

$$\partial = \gamma^\mu \partial_\mu \quad ; \quad \gamma^0 = \gamma_0 \quad ; \quad \gamma^j = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.10})$$

Il vérifie :

$$\partial\partial = \square = (\partial_0)^2 - (\partial_1)^2 - (\partial_2)^2 - (\partial_3)^2. \quad (\text{B.11})$$

La plupart des physiciens ne se servent pas directement de l'algèbre de Clifford, ils utilisent les  $\gamma_\mu$  comme des matrices de  $M_4(\mathbb{C})$ ,<sup>1</sup> une algèbre sur le corps des nombres complexes. Cette algèbre est de dimension 16 sur le corps des nombres complexes, elle est donc de dimension 32 sur le corps des nombres réels. Donc  $M_4(\mathbb{C}) \neq Cl_{1,3}$ . Les matrices de Dirac ne sont pas uniques. La manière la plus simple de lier  $Cl_{1,3}$  à  $Cl_3$  utilise les matrices de Pauli et de Dirac de 1.1. En outre on identifie les matrices scalaires aux nombres complexes, écrivant :

$$1 = I_2; \quad z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.12})$$

On a alors :

$$\partial = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}; \quad \nabla = \sigma^\mu \partial_\mu. \quad (\text{B.13})$$

Il est aisé d'établir que :

$$\begin{aligned} \gamma_{0j} &= \begin{pmatrix} -\sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}; \quad \gamma_{23} = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i} = \gamma_{0123} = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \\ N &= \begin{pmatrix} M_e & M_o \\ \widehat{M}_o & \widehat{M}_e \end{pmatrix}, \quad M_e \in Cl_3; \quad M_o \in Cl_3. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

**Isomorphisme entre  $Cl_{1,3}^+$  et  $Cl_3$  :** soit  $N^+$  un élément pair quelconque. Avec :

$$\begin{aligned} N^+ &= a + B + p_s \quad ; \quad B = u_1\gamma_{10} + u_2\gamma_{20} + u_3\gamma_{30} + v_1\gamma_{32} + v_2\gamma_{13} + v_3\gamma_{21}, \\ p_s &= b\gamma_{0123} = b\mathbf{i}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} M_e &= a + \vec{u} + i\vec{v} + ib \quad ; \quad \vec{u} = u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + u_3\sigma_3, \\ \vec{v} &= v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

---

1. Le choix de matrices fait ici n'est pas celui utilisé au début de la théorie de Dirac pour calculer les solutions pour l'atome d'hydrogène. C'est par contre le choix usuel pour traiter de l'électron aux grandes vitesses, ou pour étudier l'invariance de jauge électro-faible. On verra dans l'appendice C que ce choix permet aussi de calculer les solutions, dans le cas de l'atome d'hydrogène, par séparation des variables en coordonnées sphériques. Cela prouvera qu'on pouvait se passer complètement des choix faits en 1928 pour se ramener à l'équation de Pauli.

$B$  est un 2-vecteur et  $p_s$  est un pseudoscalaire d'espace-temps. De même, tout élément impair  $N^-$  s'écrit :

$$N^- = \begin{pmatrix} 0 & M_o \\ \widehat{M}_o & 0 \end{pmatrix}; \quad M_o = v + iw = (v_\mu + iw_\mu)\sigma^\mu. \quad (\text{B.17})$$

Avec le choix (1.4) fait pour les matrices de Dirac on a :

$$N^+ = \begin{pmatrix} M_e & 0 \\ 0 & \widehat{M}_e \end{pmatrix}; \quad \tilde{N}^+ = \begin{pmatrix} \overline{M}_e & 0 \\ 0 & M_e^\dagger \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Comme la conjugaison  $P : M_e \mapsto \widehat{M}_e$  est compatible avec l'addition et avec la multiplication, l'algèbre des  $M_e$  est isomorphe à l'algèbre des  $N^+$ . Puisque  $N^+$  contient à la fois  $M_e$  et  $\widehat{M}_e$ , les matrices de Dirac utilisent les deux représentations non équivalentes du sous-groupe  $SL(2, \mathbb{C})$  de  $Cl_3^*$  (ceci est bien connu en théorie des groupes de Lie [1]). L'opérateur de Dirac est :

$$\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 - \vec{\partial} \\ \partial_0 + \vec{\partial} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

De même, le potentiel électromagnétique est le vecteur :

$$\mathbf{A} := \gamma_\mu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & A^0 + \vec{A} \\ A^0 - \vec{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \widehat{A} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Le champ électromagnétique, en l'absence de monopôles magnétique, est un 2-vecteur tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &:= \boldsymbol{\partial} \wedge \mathbf{A} = (\boldsymbol{\partial} \mathbf{A} - \mathbf{A} \boldsymbol{\partial})/2, \\ 2\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ \widehat{A} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A \\ \widehat{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla \widehat{A} - A \widehat{\nabla} & 0 \\ 0 & \widehat{\nabla} A - \widehat{A} \nabla \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & \widehat{F} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Le courant électrique vérifie :

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\partial} \mathbf{F} = \boldsymbol{\partial} \boldsymbol{\partial} \mathbf{A} = \square \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla \widehat{F} \\ \widehat{\nabla} F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \widehat{\mathbf{j}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

### B.1.2 $Cl_{1,3}$ comme produit cartésien $Cl_3 \times Cl_3$

On peut raccourcir les calculs dans  $Cl_{1,3}$  en n'écrivant que la première ligne des matrices de Dirac écrites en bloc de matrices de Pauli. C'est possible parce que la seconde ligne s'obtient à partir de la première en se servant

de l'automorphisme  $P$  de  $Cl_3$ . L'élément général de  $Cl_{1,3}$  peut donc s'exprimer comme un couple d'éléments de  $Cl_3$  :

$$M = (A \ B); \ N = (C \ D); \ M + N = (A + C \ B + D), \quad (\text{B.23})$$

$$MN = (AC + B\widehat{D} \ AD + B\widehat{C}) \quad (\text{B.24})$$

$$\gamma^\mu = (0 \ \sigma^\mu); \ \mathbf{x} = x^\mu \gamma_\mu = (0 \ x) = (0 \ x^\mu \sigma_\mu), \quad (\text{B.25})$$

$$\boldsymbol{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = (0 \ \nabla) = (0 \ \sigma^\mu \partial_\mu); \ \boldsymbol{\partial}(A \ B) = (\nabla \widehat{B} \ \nabla \widehat{A}). \quad (\text{B.26})$$

Avec ces notations et pour tout  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de l'espace-temps, on a :

$$\mathbf{uv} + \mathbf{vu} = (0 \ u)(0 \ v) + (0 \ v)(0 \ u) = (u\widehat{v} + v\widehat{u} \ 0). \quad (\text{B.27})$$

Identifiant  $A$  et  $(A \ 0)$ , on a alors :

$$\mathbf{uv} + \mathbf{vu} = u\widehat{v} + v\widehat{u} = u^0 v^0 - u^1 v^1 - u^2 v^2 - u^3 v^3. \quad (\text{B.28})$$

Cette identification nous permet de considérer  $Cl_{1,3}$  comme un  $Cl_3$ -module :

$$X(A \ B) = (X \ 0)(A \ B) = (XA \ XB), \quad (\text{B.29})$$

pour tout  $X$ ,  $A$  et  $B$  de  $Cl_3$ . C'est ce qui nous permet d'utiliser dans  $Cl_{1,3}$  le corps des complexes, qui est le centre (ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres) de  $Cl_3$ , malgré le fait que le centre de  $Cl_{1,3}$  est seulement le corps des réels.

### B.1.3 Preuve de $R_\nu^\mu \gamma^\nu = \widetilde{N} \gamma^\mu N$

En utilisant la notation précédente on a :

$$N = (M \ 0); \ \widetilde{N} = (\overline{M} \ 0); \ \gamma^\mu = (0 \ \sigma^\mu), \quad (\text{B.30})$$

l'égalité  $R_\nu^\mu \gamma^\nu = \widetilde{N} \gamma^\mu N$  est équivalente à :

$$(0 \ R_\nu^\mu \sigma^\nu) = \left(0 \ \overline{M} \sigma^\mu \widehat{M}\right). \quad (\text{B.31})$$

Et l'égalité A.4.4 :  $\nabla = \overline{M} \nabla' \widehat{M}$ , peut aussi s'exprimer comme :

$$\partial_\nu \sigma^\nu = \overline{M} \partial'_\mu \sigma^\mu \widehat{M}, \quad (\text{B.32})$$

ce qui signifie :

$$R_\nu^\mu \partial'_\mu \sigma^\nu = \overline{M} \sigma^\mu \widehat{M} \partial'_\mu. \quad (\text{B.33})$$

Et donc on a :

$$R_\nu^\mu \sigma^\nu = \overline{M} \sigma^\mu \widehat{M}; \ R_\nu^\mu \gamma^\nu = \widetilde{N} \gamma^\mu N. \quad (\text{B.34})$$

### B.1.4 Equation invariante et densité lagrangienne

On va prouver que la densité lagrangienne de la théorie de Dirac est la partie réelle, (au sens où l'ensemble des réels est un sous-espace de dimension 1 de l'algèbre), de l'équation d'onde sous sa forme complètement invariante (1.115). Alors, notant  $\langle M \rangle_n$  la partie  $n$ -vectorielle de  $M$  il s'agit de prouver que :

$$L = \langle \bar{\phi}(\nabla \hat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\hat{\phi} + m\bar{\phi}\phi \rangle_0. \quad (\text{B.35})$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}A\hat{\phi} &= A^\mu \bar{\phi}\sigma_\mu \hat{\phi} = A_0 \bar{D}_0 - \sum_{j=1}^{j=3} A_j \bar{D}_j = A_0(\bar{D}_0^\mu \sigma_\mu) - \sum_{j=1}^{j=3} A_j(\bar{D}_j^\mu \sigma_\mu) \\ &= A_0(\bar{D}_0^0 + \sum_{j=1}^{j=3} \bar{D}_0^j \sigma_j) - \sum_{j=1}^{j=3} A_j(\bar{D}_j^0 + \sum_{k=1}^{k=3} \bar{D}_j^k \sigma_k). \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

On a établi en calculant la similitude  $\bar{D}$  (A.262) qu'on a :

$$\bar{\phi}A\hat{\phi} = A_0(D_0^0 - \sum_{j=1}^{j=3} D_j^0 \sigma_j) - \sum_{j=1}^{j=3} A_j(-D_0^j + \sum_{k=1}^{k=3} D_k^j \sigma_k) = A_\nu D_\mu^\nu \sigma^\mu. \quad (\text{B.37})$$

La partie scalaire est alors :

$$\langle \bar{\phi}A\hat{\phi} \rangle_0 = D_0^\nu A_\nu = A_\nu J^\nu = A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (\text{B.38})$$

On a ensuite  $\bar{\phi}\phi = \Omega_1 + i\Omega_2$ , et donc :

$$\langle m\bar{\phi}\phi \rangle_0 = m\Omega_1 = m\bar{\psi}\psi. \quad (\text{B.39})$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i)\partial_\mu\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i)\partial_\mu\psi)^\dagger] &= \frac{i}{2}(-\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \\ &= -\frac{i}{2}[\xi^\dagger(\hat{\nabla}\xi) - (\xi^\dagger\hat{\nabla})\xi + \eta^\dagger(\nabla\eta) - (\eta^\dagger\nabla)\eta]. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Avec  $Cl_3$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) - (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}]\sigma_{21} &= -\frac{i}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}\sigma_3) - (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}\sigma_3] \\ &= -i \begin{pmatrix} \eta^\dagger(\nabla\eta) - (\eta^\dagger\nabla)\eta & -\eta^\dagger(\nabla\hat{\xi}) + (\eta^\dagger\nabla)\hat{\xi} \\ \hat{\xi}^\dagger(\nabla\eta) - (\hat{\xi}^\dagger\nabla)\eta & -\hat{\xi}^\dagger(\nabla\hat{\xi}) + (\hat{\xi}^\dagger\nabla)\hat{\xi} \end{pmatrix}, \\ \langle \frac{1}{2}[\bar{\phi}(\nabla\hat{\phi}) - (\bar{\phi}\nabla)\hat{\phi}]\sigma_{21} \rangle_0 &= -\frac{i}{2}[\eta^\dagger(\nabla\eta) - (\eta^\dagger\nabla)\eta - \hat{\xi}^\dagger(\nabla\hat{\xi}) + (\hat{\xi}^\dagger\nabla)\hat{\xi}]. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Et on a :

$$\begin{aligned} -\widehat{\xi}^\dagger(\nabla\widehat{\xi}) + (\widehat{\xi}^\dagger\nabla)\widehat{\xi} &= \overline{(\widehat{\xi}^\dagger\nabla)\widehat{\xi}} - \overline{\widehat{\xi}^\dagger(\nabla\widehat{\xi})} \\ &= \xi^\dagger(\widehat{\nabla}\xi) - (\xi^\dagger\widehat{\nabla})\xi. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\bar{\psi}\gamma^\mu(-i)\partial_\mu\psi) + (\bar{\psi}\gamma^\mu(-i)\partial_\mu\psi)^\dagger] + qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi \\ &= \langle\bar{\phi}(\nabla\widehat{\phi})\sigma_{21} + \bar{\phi}qA\widehat{\phi} + m\bar{\phi}\phi\rangle_0. \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

### B.1.5 L'algèbre $Cl_{3,1}$

Pour rapprocher  $Cl_{3,1}$  de  $Cl_{1,3}$ , et comme ce sont deux sous-algèbres de  $Cl_{3,3}$ , on peut se servir des générateurs suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\lambda^0 := \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_0^2 = -I_4, \\ \lambda_j &= \lambda^j := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \lambda_j^2 = I_4. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

L'algèbre de Clifford d'espace-temps  $Cl_{3,1}$  contient les nombres réels et les vecteurs d'espace-temps  $\mathbf{x}$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x^\mu\lambda_\mu; \quad \vec{x} = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 0 & x^0 + \vec{x} \\ -(x^0 - \vec{x}) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{x} \\ -\widehat{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Les quatre  $\lambda_\mu$  forment une base orthonormale de l'espace-temps de signature  $-, +, +, +$  :

$$(\lambda_0)^2 = -I_4; \quad (\lambda_1)^2 = (\lambda_2)^2 = (\lambda_3)^2 = I_4; \quad \lambda_\mu \cdot \lambda_\nu = 0, \quad \mu \neq \nu, \quad (\text{B.46})$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2. \quad (\text{B.47})$$

On a aussi :

$$\mathbf{d} := \lambda^\mu\partial_\mu = \lambda^0\partial_0 + \lambda^j\partial_j = \begin{pmatrix} 0 & \partial_0 + \vec{\partial} \\ -\partial_0 + \vec{\partial} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.48})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ -\widehat{\nabla} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

Avec les notations suivantes :

$$\lambda_{ab} := \lambda_a\lambda_b; \quad \lambda_{abc} = \lambda_a\lambda_b\lambda_c; \quad \lambda_{0123} = \lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (\text{B.50})$$

Il est aisé d'établir que :

$$\lambda_{0j} = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}; \lambda_{23} = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix}; \mathbf{i} = \lambda_{0123} = \begin{pmatrix} iI_2 & 0 \\ 0 & -iI_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.51})$$

Avec les parties paires  $M_e$  et  $M_o$  de (B.14), le terme général de  $Cl_{3,1}$  est tel que :

$$N_{3,1} = \begin{pmatrix} \overline{M_e} & iM_o \\ i\widehat{M_o} & M_e^\dagger \end{pmatrix}.$$

La partie paire de  $N_{3,1}$  est  $N_{3,1}^+ = s - B + p_s$ , tandis que la partie impaire est  $N_{3,1}^- = iv - w$ . La réversion vérifie :

$$N_{3,1} \mapsto \widetilde{N}_{3,1} = s + iv + B + w + p_s. \quad (\text{B.52})$$

Parmi les  $16 = 2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$  générateurs de  $Cl_{3,1}$ ,  $10 = 5 \times 4/2$  ont un carré égal à 1 et  $6 = 4 \times 3/2$  ont un carré égal à  $-1$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{0123}^2 &= \lambda_{01}^2 = \lambda_{02}^2 = \lambda_{03}^2 = \lambda_0^2 = \lambda_{123}^2 = 1, \\ \lambda_1^2 &= \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda_{12}^2 = \lambda_{23}^2 = \lambda_{31}^2 \\ &= \lambda_{012}^2 = \lambda_{023}^2 = \lambda_{031}^2 = 1^2 = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

La sous-algèbre paire  $Cl_{3,1}^+$ , formée par tous les éléments  $N = s - B + p_s$  a 8 dimensions et est isomorphe à  $Cl_3$ .

L'opérateur différentiel privilégié de  $Cl_{3,1}$  vérifie :

$$\mathbf{d} = \lambda^\mu \partial_\mu; \lambda^0 = -\lambda_0; \lambda^j = \lambda_j, j = 1, 2, 3. \quad (\text{B.54})$$

Il vérifie :

$$\mathbf{d}^2 = -\square = -(\partial_0)^2 + (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + (\partial_3)^2. \quad (\text{B.55})$$

L'algèbre  $M_4(\mathbb{C})$  des matrices de Dirac est, en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , de dimension 32. Même si  $Cl_{1,3}$  et  $Cl_{3,1}$  sont tous deux de dimension 16, la réunion de leurs représentations matricielles n'est que de dimension 24 sur  $\mathbb{R}$ , ces deux algèbres ayant en commun leur sous-algèbre paire, isomorphe à  $Cl_3$ .

### B.1.6 Représentations matricielles réelles

Dans l'algèbre des matrices complexes  $4 \times 4$ , la sous-algèbre des matrices réelles est de dimension 16 sur  $\mathbb{R}$ . Une base de cette algèbre est formée par les matrices suivantes :  $I_4, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_{05}, \gamma_{10}, \gamma_{51}, \gamma_{53}, \gamma_{30}, \gamma_{13}, \gamma_{105}, \gamma_{305}, \gamma_{013}, \gamma_{135}$  et  $\gamma_{0135}$ . Cette algèbre est à la fois l'algèbre de Clifford  $Cl_{2,2}$  et l'algèbre de Clifford  $Cl_{3,1}$ . Comme algèbre de Clifford  $Cl_{2,2}$ , elle

contient un sous-espace des scalaires, les  $sI_4$ , un sous-espace des vecteurs, de dimension 4, de base  $\gamma_0, \gamma_5, \gamma_1, \gamma_3$  :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma_0^2 = \gamma_5^2 = I_4 \quad (\text{B.56})$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_1^2 = \gamma_3^2 = -I_4,$$

$$\gamma_\mu \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\mu = 0, \mu, \nu = 0, 5, 1, 3, \mu \neq \nu. \quad (\text{B.57})$$

Le sous-espace vectoriel des bi-vecteurs, de dimension 6, a pour base  $\gamma_{05}, \gamma_{10}, \gamma_{51}, \gamma_{53}, \gamma_{30}, \gamma_{13}$ . On a :

$$\gamma_{05} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.58})$$

$$\gamma_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.59})$$

$$\gamma_{51} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{53} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.60})$$

$$\gamma_{05}^2 = \gamma_{13}^2 = -I_4; \gamma_{10}^2 = \gamma_{30}^2 = \gamma_{51}^2 = \gamma_{53}^2 = I_4. \quad (\text{B.61})$$

On notera que, malgré le caractère symétrique de la signature  $++--$  de  $Cl_{2,2}$ , il apparait une dissymétrie entre le nombre de signes  $+$  et le nombre de signes  $-1$  pour les carrés des bivecteurs. Le sous-espace vectoriel des pseudo-vecteurs, de dimension 4, a pour base  $\gamma_{105}, \gamma_{305}, \gamma_{013}, \gamma_{135}$  tels que :

$$\gamma_{305} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma_{105} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.62})$$

$$\gamma_{013} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{135} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.63})$$

$$\gamma_{105}^2 = \gamma_{305}^2 = I_4; \gamma_{013}^2 = \gamma_{135}^2 = -I_4. \quad (\text{B.64})$$

Enfin l'ensemble des pseudo-scalaires est de dimension 1, de générateur :

$$\gamma_{0135} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_{0135}^2 = I_4 \quad (\text{B.65})$$

Finalement, parmi les 16 éléments de base de  $M_4(\mathbb{R}) = Cl_{2,2}$ , 6 sont de carré  $-I_4$  tandis que 10 sont de carré  $I_4$ . Il en résulte que  $M_4(\mathbb{R})$  n'est pas l'algèbre de Clifford  $Cl_{1,3}$ . Par contre c'est non seulement l'algèbre de Clifford  $Cl_{2,2}$ , c'est aussi l'algèbre de Clifford  $Cl_{3,1}$ , avec pour générateurs les  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tels que :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &:= \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 := \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 := \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_0^2 &= -I_4; \quad \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = I_4; \quad \lambda_\mu \lambda_\nu = -\lambda_\nu \lambda_\mu, \quad \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

## B.2 Retournement dans $Cl_{3,3}$

Après  $Cl_3$  et  $Cl_{1,3}$ , la troisième algèbre de Clifford utilisée dans cet exposé est  $Cl_{3,3}$ , algèbre isomorphe, en tant qu'algèbre sur  $\mathbb{R}$ , à l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel  $Cl_3$ , notée  $\text{End}(Cl_3)$ . On utilise cette algèbre de Clifford comme une généralisation naturelle de  $Cl_{1,3}$ , l'algèbre d'espace-temps utilisée par Hestenes [76]–[81]. On n'utilisera donc pas l'algèbre des matrices carrées  $8 \times 8$  réelles  $M_8(\mathbb{R})$ , mais la sous-algèbre de  $M_8(\mathbb{C})$  engendrée par les six matrices :

$$\Gamma_\mu := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \\ \gamma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{B.67})$$

$$\Gamma_4 := \begin{pmatrix} 0 & -iI_4 \\ iI_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.68})$$

$$\mathbf{i} = \gamma_{0123} = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = i \gamma_5. \quad (\text{B.69})$$

On utilise sans aucun changement les matrices de (1.4) et on rappelle ici leur valeur :

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^j = -\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

où les  $\sigma_j$  sont les matrices de Pauli. Les indices  $\mu, \nu, \rho \dots$  valent 0, 1, 2, 3 et les indices  $a, b, c, d, e$  valent 0, 1, 2, 3, 4, 5. On a :

$$\Gamma_a \Gamma_b = -\Gamma_b \Gamma_a, \quad a \neq b, \quad (\text{B.70})$$

$$\Gamma_0^2 = \Gamma_4^2 = \Gamma_5^2 = 1; \quad \Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = \Gamma_3^2 = -1, \quad (\text{B.71})$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_\mu \Gamma_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{\mu\nu\rho} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu\rho} \\ \gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.72})$$

$$\Gamma_{0123} = \Gamma_{01} \Gamma_{23} = \begin{pmatrix} \gamma_{0123} & 0 \\ 0 & \gamma_{0123} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.73})$$

$$\Gamma_{45} = \Gamma_4 \Gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{012345} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.74})$$

On a aussi :

$$\Gamma_{\mu 4} = \begin{pmatrix} i\gamma_\mu & 0 \\ 0 & -i\gamma_\mu \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{\mu 5} = \begin{pmatrix} \gamma_\mu \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \gamma_5 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.75})$$

$$\Gamma_{\mu 45} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\mu \mathbf{i} \\ -\gamma_\mu \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{\mu\nu 4} = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma_{\mu\nu} \\ i\gamma_{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.76})$$

$$\Gamma_{\mu\nu 5} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu 5} \\ \gamma_{\mu\nu 5} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{\mu\nu 45} = \begin{pmatrix} -\gamma_{\mu\nu} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu} \mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.77})$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho 4} = \begin{pmatrix} i\gamma_{\mu\nu\rho} & 0 \\ 0 & -i\gamma_{\mu\nu\rho} \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{\mu\nu\rho 5} = \begin{pmatrix} \gamma_{\mu\nu\rho 5} & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu\nu\rho 5} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.78})$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho 45} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{\mu\nu\rho} \mathbf{i} \\ -\gamma_{\mu\nu\rho} \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{01234} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ -\gamma_5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.79})$$

$$\Gamma_{01235} = \begin{pmatrix} 0 & iI_4 \\ iI_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{012345} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.80})$$

Le terme général de  $Cl_{3,3}$  s'exprime comme :

$$\Psi^{3,3} = \Psi_0^{3,3} + \Psi_1^{3,3} + \Psi_2^{3,3} + \Psi_3^{3,3} + \Psi_4^{3,3} + \Psi_5^{3,3} + \Psi_6^{3,3}, \quad (\text{B.81})$$

$$\Psi_1^{3,3} = \sum_{a=0}^{a=5} N^a \Gamma_a, \quad \Psi_2^{3,3} = \sum_{0 \leq a < b \leq 5} N^{ab} \Gamma_{ab}, \quad \Psi_3^{3,3} = \sum_{0 \leq a < b < c \leq 5} N^{abc} \Gamma_{abc},$$

$$\Psi_4^{3,3} = \sum_{0 \leq a < b < c < d \leq 5} N^{abcd} \Gamma_{abcd}, \quad \Psi_5^{3,3} = \sum_{0 \leq a < b < c < d < e \leq 5} N^{abcde} \Gamma_{abcde},$$

$$\Psi_0^{3,3} = \alpha I_8, \alpha \in \mathbb{R}; \quad \Psi_6^{3,3} = \omega \Gamma_{012345}, \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.82})$$

Les termes scalaire et pseudo-scalaire ont la forme suivante :

$$\alpha I_8 + \omega \Gamma_{012345} = \begin{pmatrix} \alpha + \omega & \\ 0 & \alpha - \omega \end{pmatrix}. \quad (\text{B.83})$$

Pour le calcul du terme 1-vectoriel :

$$N^a \Gamma_a = N^4 \Gamma_4 + N^5 \Gamma_5 + N^\mu \Gamma_\mu,$$

on pose :

$$\beta := N^4 ; \quad \delta := N^5 ; \quad \mathbf{a} := N^\mu \gamma_\mu. \quad (\text{B.84})$$

Cela donne :

$$\Psi_1^{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} - i(\beta + \delta \mathbf{i}) \\ \mathbf{a} + i(\beta - \delta \mathbf{i}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.85})$$

Pour le calcul du terme 2-vectoriel :

$$N^{ab} \Gamma_{ab} = N^{45} \Gamma_{45} + N^{\mu 4} \Gamma_{\mu 4} + N^{\mu 5} \Gamma_{\mu 5} + N^{\mu \nu} \Gamma_{\mu \nu},$$

on pose :

$$\epsilon := N^{45} ; \quad \mathbf{b} := N^{\mu 4} \gamma_\mu ; \quad \mathbf{c} := N^{\mu 5} \gamma_\mu ; \quad \mathbf{A} := N^{\mu \nu} \gamma_{\mu \nu}. \quad (\text{B.86})$$

Cela donne :

$$\Psi_2^{3,3} = \begin{pmatrix} -\epsilon \mathbf{i} + \mathbf{A} + i(\mathbf{b} - \mathbf{c} \mathbf{i}) & 0 \\ 0 & \mathbf{A} + \epsilon \mathbf{i} - i(\mathbf{b} + \mathbf{c} \mathbf{i}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.87})$$

Pour le calcul du terme 3-vectoriel :

$$N^{abc} \Gamma_{abc} = N^{\mu 45} \Gamma_{\mu 45} + N^{\mu \nu 4} \Gamma_{\mu \nu 4} + N^{\mu \nu 5} \Gamma_{\mu \nu 5} + N^{\mu \nu \rho} \Gamma_{\mu \nu \rho},$$

on pose :

$$\mathbf{d} := N^{\mu 45} \gamma_\mu ; \quad \mathbf{B} := N^{\mu \nu 4} \gamma_{\mu \nu} ; \quad \mathbf{C} := N^{\mu \nu 5} \gamma_{\mu \nu} ; \quad \mathbf{ie} := N^{\mu \nu \rho} \gamma_{\mu \nu \rho}. \quad (\text{B.88})$$

Cela donne :

$$\Psi_3^{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{d} - \mathbf{e}) \mathbf{i} - i(\mathbf{B} + \mathbf{C} \mathbf{i}) \\ -(\mathbf{d} + \mathbf{e}) \mathbf{i} + i(\mathbf{B} - \mathbf{C} \mathbf{i}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.89})$$

Pour le calcul du terme 4-vectoriel :

$$N^{abcd} \Gamma_{abcd} = N^{\mu \nu 45} \Gamma_{\mu \nu 45} + N^{\mu \nu \rho 4} \Gamma_{\mu \nu \rho 4} + N^{\mu \nu \rho 5} \Gamma_{\mu \nu \rho 5} + N^{0123} \Gamma_{0123},$$

on pose :

$$\mathbf{D} := N^{\mu \nu 45} \gamma_{\mu \nu} ; \quad \mathbf{if} := N^{\mu \nu \rho 4} \gamma_{\mu \nu \rho} ; \quad \mathbf{ig} := N^{\mu \nu \rho 5} \gamma_{\mu \nu \rho} ; \quad \zeta := N^{0123}. \quad (\text{B.90})$$

Cela donne :

$$\Psi_4^{3,3} = \begin{pmatrix} -\mathbf{D} \mathbf{i} + \zeta \mathbf{i} - i(\mathbf{fi} + \mathbf{g}) & 0 \\ 0 & i(\mathbf{fi} - \mathbf{g}) + \mathbf{D} \mathbf{i} + \zeta \mathbf{i} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.91})$$

Pour le calcul du terme 5-vectoriel :

$$N^{abcde} \Gamma_{abcde} = N^{\mu \nu \rho 45} \Gamma_{\mu \nu \rho 45} + N^{01234} \Gamma_{01234} + N^{01235} \Gamma_{01235},$$

on pose :

$$\mathbf{i}\mathbf{h} := N^{\mu\nu\rho 45}\gamma_{\mu\nu\rho} ; \quad \eta := N^{01234} ; \quad \theta := N^{01235}. \quad (\text{B.92})$$

Cela donne :

$$\Psi_5^{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{h} + i(\theta - \eta\mathbf{i}) \\ -\mathbf{h} + i(\theta + \eta\mathbf{i}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.93})$$

On obtient alors :

$$\Psi^{3,3} = \begin{pmatrix} \Psi_l + i\Psi_b & \Psi_r + \Psi_g \\ \Psi_r - \Psi_g & \Psi_l - i\Psi_b \end{pmatrix}. \quad (\text{B.94})$$

Cela donne :

$$\Psi_l = \alpha + \mathbf{A} + \zeta\mathbf{i} - i(\mathbf{g} + \mathbf{ci}) = \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1, \quad (\text{B.95})$$

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \phi_e & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_e \end{pmatrix} = \alpha + \mathbf{A} + \zeta\mathbf{i}; \quad \mathcal{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_n \\ \hat{\phi}_n & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{g} + \mathbf{ci},$$

$$\Psi_b = \mathbf{b} - \mathbf{fi} + i(-\omega + \mathbf{Di} + \epsilon\mathbf{i}) = \mathcal{I}_4 - i\mathcal{P}_4, \quad (\text{B.96})$$

$$\mathcal{P}_4 = \begin{pmatrix} \phi_{db} & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_{db} \end{pmatrix} = \omega - \mathbf{Di} - \epsilon\mathbf{i}; \quad \mathcal{I}_4 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{ub} \\ \hat{\phi}_{ub} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{b} - \mathbf{fi},$$

$$\Psi_r = \mathbf{a} - \mathbf{ei} - i(-\theta + \mathbf{Ci} + \delta\mathbf{i}) = \mathcal{I}_2 - i\mathcal{P}_2, \quad (\text{B.97})$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \phi_{dr} & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_{dr} \end{pmatrix} = -\theta + \mathbf{Ci} + \delta\mathbf{i}; \quad \mathcal{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{ur} \\ \hat{\phi}_{ur} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{a} - \mathbf{ei},$$

$$\Psi_g = \mathbf{h} + \mathbf{di} - i(\beta + \mathbf{B} + \eta\mathbf{i}) = \mathcal{I}_3 - i\mathcal{P}_3, \quad (\text{B.98})$$

$$\mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \phi_{ug} & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_{ug} \end{pmatrix} = \beta + \mathbf{B} + \eta\mathbf{i}; \quad \mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \phi_{ug} \\ \hat{\phi}_{ug} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{h} + \mathbf{di},$$

Comme  $Cl_{3,3}$  est isomorphe à l'algèbre des matrices réelles  $8 \times 8$ , les quatre parties  $\Psi_l, \Psi_r, \Psi_g, \Psi_b$  sont à valeur dans  $M_4(\mathbb{R}) = Cl_{3,1}$ . Ici  $\Psi_l = \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1$  est une fonction de l'espace-temps à valeur dans  $Cl_{3,1}$  tandis que  $\Psi_r, \Psi_g$  et  $\Psi_b$  ont exactement la même structure, et ne diffèrent de l'onde leptonique  $\Psi_l$  que par un signe :

$$\begin{aligned} \Psi_l &= \mathcal{P}_1 - i\mathcal{I}_1, \\ i\Psi_r &= \mathcal{P}_2 + i\mathcal{I}_2, \\ i\Psi_g &= \mathcal{P}_3 + i\mathcal{I}_3, \\ i\Psi_b &= \mathcal{P}_4 + i\mathcal{I}_4. \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

**C'est l'origine géométrique de la différence entre leptons et quarks.**

Dans  $Cl_{1,3}$  le retourné de  $\Psi_l = \alpha + \mathbf{A} + \zeta\mathbf{i} - i(\mathbf{g} + \mathbf{ci})$  est :

$$\widetilde{\Psi}_l = \alpha - \mathbf{A} + \zeta\mathbf{i} - i(\mathbf{g} - \mathbf{ci}), \quad (\text{B.100})$$

tandis que le retourné dans  $Cl_{3,3}$  de :

$$\Psi^{3,3} = \Psi_0^{3,3} + \Psi_1^{3,3} + \Psi_2^{3,3} + \Psi_3^{3,3} + \Psi_4^{3,3} + \Psi_5^{3,3} + \Psi_6^{3,3}$$

est :

$$\tilde{\Psi}^{3,3} = \Psi_0^{3,3} + \Psi_1^{3,3} - \Psi_2^{3,3} - \Psi_3^{3,3} + \Psi_4^{3,3} + \Psi_5^{3,3} - \Psi_6^{3,3}. \quad (\text{B.101})$$

Donc le retournement dans  $Cl_{3,3}$  change de signe  $\Psi_2^{3,3}, \Psi_3^{3,3}, \Psi_6^{3,3}$ . Ce retournement change donc de signe  $\epsilon, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , et  $\mathbf{d}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{e}$  et enfin  $\omega$ , et ne change que ces signes. On voit donc que, cette fois, c'est  $\Psi_b$  qui est à part des trois autres fonctions, chacune se transformant par la conjugaison  $\Psi \mapsto \tilde{\Psi}$  tandis que  $\Psi_b$  se transforme différemment, par cette conjugaison :  $\phi_{ab} \mapsto -\bar{\phi}_{ab}$  c'est-à-dire en changeant de position dans la diagonale. Les seuls termes qui changent de signe sont les scalaires  $\epsilon$  et  $\omega$ , les vecteurs  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$  et les 2-vecteurs  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ . Ces changements de signe ne sont pas les mêmes dans  $Cl_{3,3}$  que dans  $Cl_{1,3}$ . Les différences se compensent par le changement de position de  $\phi_{ab}$ .

### B.2.1 Matrices $8 \times 8$ réelles

L'algèbre  $M_8(\mathbb{R})$  des matrices réelles  $8 \times 8$  est de dimension 64. Cette algèbre est aussi l'algèbre  $Cl_{3,3}$ . On peut prendre comme générateurs les 6 matrices  $\Gamma_a$  de (B.69), on peut aussi n'utiliser aucun  $i$  et prendre comme générateurs :

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &:= \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_1 := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ -\gamma_0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_{0135} \\ \gamma_{0135} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_3 &:= \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ -\gamma_5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_4 := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_5 := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

On a alors :

$$\Lambda_0^2 = \Lambda_4^2 = \Lambda_5^2 = I_8; \quad \Lambda_1^2 = \Lambda_2^2 = \Lambda_3^2 = -I_8, \quad (\text{B.103})$$

c'est-à-dire 3 vecteurs de carré  $I_8$  et 3 vecteurs de carré  $-I_8$ . Pour les bi-vecteurs, on a :

$$\Lambda_{01} := \Lambda_0 \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -\gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{10}; \quad \Lambda_{01}^2 = I_8, \quad (\text{B.104})$$

$$\Lambda_{02} = \begin{pmatrix} \gamma_{0135} & 0 \\ 0 & 2\gamma_{0135} \end{pmatrix} = -\Lambda_{20}; \quad \Lambda_{02}^2 = I_8, \quad (\text{B.105})$$

$$\Lambda_{03} = \begin{pmatrix} -\gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix} = -\Lambda_{30}; \quad \Lambda_{03}^2 = I_8, \quad (\text{B.106})$$

$$\Lambda_{04} = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} = -\Lambda_{40}; \quad \Lambda_{04}^2 = -I_8, \quad (\text{B.107})$$

$$\Lambda_{05} = \begin{pmatrix} -\gamma_3 & 0 \\ 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} = -\Lambda_{50}; \quad \Lambda_{05}^2 = -I_8, \quad (\text{B.108})$$

$$\Lambda_{12} = \begin{pmatrix} \gamma_{135} & 0 \\ 0 & \gamma_{135} \end{pmatrix} = -\Lambda_{21}; \quad \Lambda_{02}^2 = -I_8, \quad (\text{B.109})$$

$$\Lambda_{13} = \begin{pmatrix} \gamma_{50} & 0 \\ 0 & \gamma_{50} \end{pmatrix} = -\Lambda_{31}; \quad \Lambda_{13}^2 = -I_8, \quad (\text{B.110})$$

$$\Lambda_{14} = \begin{pmatrix} \gamma_{10} & 0 \\ 0 & \gamma_{10} \end{pmatrix} = -\Lambda_{41}; \quad \Lambda_{14}^2 = I_8, \quad (\text{B.111})$$

$$\Lambda_{15} = \begin{pmatrix} \gamma_{30} & 0 \\ 0 & \gamma_{30} \end{pmatrix} = -\Lambda_{51}; \quad \Lambda_{15}^2 = I_8, \quad (\text{B.112})$$

$$\Lambda_{23} = \begin{pmatrix} \gamma_{013} & 0 \\ 0 & \gamma_{013} \end{pmatrix} = -\Lambda_{32}; \quad \Lambda_{23}^2 = -I_8, \quad (\text{B.113})$$

$$\Lambda_{24} = \begin{pmatrix} \gamma_{053} & 0 \\ 0 & \gamma_{053} \end{pmatrix} = -\Lambda_{42}; \quad \Lambda_{24}^2 = I_8, \quad (\text{B.114})$$

$$\Lambda_{25} = \begin{pmatrix} \gamma_{015} & 0 \\ 0 & \gamma_{015} \end{pmatrix} = -\Lambda_{52}; \quad \Lambda_{25}^2 = I_8, \quad (\text{B.115})$$

$$\Lambda_{34} = \begin{pmatrix} \gamma_{15} & 0 \\ 0 & \gamma_{15} \end{pmatrix} = -\Lambda_{43}; \quad \Lambda_{34}^2 = I_8, \quad (\text{B.116})$$

$$\Lambda_{35} = \begin{pmatrix} \gamma_{35} & 0 \\ 0 & \gamma_{35} \end{pmatrix} = -\Lambda_{53}; \quad \Lambda_{35}^2 = I_8, \quad (\text{B.117})$$

$$\Lambda_{45} = \begin{pmatrix} \gamma_{31} & 0 \\ 0 & \gamma_{31} \end{pmatrix} = -\Lambda_{54}; \quad \Lambda_{45}^2 = -I_8, \quad (\text{B.118})$$

c'est-à-dire 9 bi-vecteurs de carré  $I_8$ , et seulement 6 bi-vecteurs de carré  $-I_8$ . Pour les tri-vecteurs, on a :

$$\Lambda_{012} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{135} \\ \gamma_{135} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{021}; \quad \Lambda_{012}^2 = -I_8, \quad (\text{B.119})$$

$$\Lambda_{013} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{50} \\ \gamma_{50} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{031}; \quad \Lambda_{013}^2 = -I_8, \quad (\text{B.120})$$

$$\Lambda_{014} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{10} \\ \gamma_{10} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{041}; \quad \Lambda_{014}^2 = I_8, \quad (\text{B.121})$$

$$\Lambda_{015} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{30} \\ \gamma_{30} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{051}; \quad \Lambda_{015}^2 = I_8, \quad (\text{B.122})$$

$$\Lambda_{023} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{013} \\ \gamma_{013} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{032}; \quad \Lambda_{023}^2 = -I_8, \quad (\text{B.123})$$

$$\Lambda_{024} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{053} \\ \gamma_{053} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{042}; \quad \Lambda_{024}^2 = I_8, \quad (\text{B.124})$$

$$\Lambda_{025} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{015} \\ \gamma_{015} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{052}; \quad \Lambda_{025}^2 = I_8, \quad (\text{B.125})$$

$$\Lambda_{034} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{15} \\ \gamma_{15} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{043}; \quad \Lambda_{034}^2 = I_8, \quad (\text{B.126})$$

$$\Lambda_{035} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{35} \\ \gamma_{35} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{053}; \quad \Lambda_{035}^2 = I_8, \quad (\text{B.127})$$

$$\Lambda_{045} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{31} \\ \gamma_{31} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{054}; \quad \Lambda_{045}^2 = -I_8, \quad (\text{B.128})$$

$$\Lambda_{123} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{13} \\ \gamma_{31} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{132}; \quad \Lambda_{123}^2 = I_8, \quad (\text{B.129})$$

$$\Lambda_{124} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{53} \\ \gamma_{35} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{142}; \quad \Lambda_{124}^2 = -I_8, \quad (\text{B.130})$$

$$\Lambda_{125} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{15} \\ \gamma_{51} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{152}; \quad \Lambda_{125}^2 = -I_8, \quad (\text{B.131})$$

$$\Lambda_{134} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{501} \\ \gamma_{510} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{143}; \quad \Lambda_{134}^2 = -I_8, \quad (\text{B.132})$$

$$\Lambda_{135} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{503} \\ \gamma_{530} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{153}; \quad \Lambda_{135}^2 = -I_8, \quad (\text{B.133})$$

$$\Lambda_{145} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{310} \\ \gamma_{301} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{154}; \quad \Lambda_{145}^2 = I_8, \quad (\text{B.134})$$

$$\Lambda_{234} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{03} \\ \gamma_{30} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{243}; \quad \Lambda_{234}^2 = -I_8, \quad (\text{B.135})$$

$$\Lambda_{235} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{10} \\ \gamma_{01} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{253}; \quad \Lambda_{235}^2 = -I_8, \quad (\text{B.136})$$

$$\Lambda_{245} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{50} \\ \gamma_{05} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{254}; \quad \Lambda_{245}^2 = I_8, \quad (\text{B.137})$$

$$\Lambda_{345} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{153} \\ \gamma_{135} & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{354}; \quad \Lambda_{345}^2 = I_8, \quad (\text{B.138})$$

c'est-à-dire 10 tri-vecteurs de carré  $I_8$  et 10 tri-vecteurs de carré  $-I_8$ . Pour les quatre-vecteurs, on a :

$$\Lambda_{0123}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{31} & 0 \\ 0 & \gamma_{13} \end{pmatrix}^2 = -I_8; \quad \Lambda_{0124}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{35} & 0 \\ 0 & \gamma_{53} \end{pmatrix}^2 = I_8, \quad (\text{B.139})$$

$$\Lambda_{0125}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{51} & 0 \\ 0 & \gamma_{15} \end{pmatrix}^2 = I_8; \quad \Lambda_{0134}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{051} & 0 \\ 0 & -\gamma_{051} \end{pmatrix}^2 = I_8, \quad (\text{B.140})$$

$$\Lambda_{0135}^2 = \begin{pmatrix} -\gamma_{035} & 0 \\ 0 & \gamma_{035} \end{pmatrix}^2 = I_8; \quad \Lambda_{0145}^2 = \begin{pmatrix} -\gamma_{031} & 0 \\ 0 & \gamma_{031} \end{pmatrix}^2 = -I_8, \quad (\text{B.141})$$

$$\Lambda_{0234}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{30} & 0 \\ 0 & \gamma_{03} \end{pmatrix}^2 = I_8; \quad \Lambda_{0235}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{01} & 0 \\ 0 & \gamma_{10} \end{pmatrix}^2 = I_8, \quad (\text{B.142})$$

$$\Lambda_{0245}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{05} & 0 \\ 0 & \gamma_{50} \end{pmatrix}^2 = -I_8; \quad \Lambda_{0345}^2 = \begin{pmatrix} -\gamma_{531} & 0 \\ 0 & \gamma_{531} \end{pmatrix}^2 = -I_8, \quad (\text{B.143})$$

$$\Lambda_{1234}^2 = \begin{pmatrix} -\gamma_3 & 0 \\ 0 & -\gamma_3 \end{pmatrix}^2 = -I_8; \quad \Lambda_{1235}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}^2 = -I_8, \quad (\text{B.144})$$

$$\Lambda_{1245}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_5 \end{pmatrix}^2 = I_8; \quad \Lambda_{1345}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_{0135} & 0 \\ 0 & \gamma_{0135} \end{pmatrix}^2 = I_8, \quad (\text{B.145})$$

$$\Lambda_{2345}^2 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}^2 = I_8, \quad (\text{B.146})$$

c'est-à-dire 9 quatre-vecteurs de carré  $I_8$ , mais seulement 6 quatre-vecteurs de carré  $-I_8$ . Pour les cinq-vecteurs, appelés usuellement pseudo-vecteurs, on a :

$$\Lambda_{01234}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3 \\ -\gamma_3 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_8; \quad \Lambda_{01235}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_8, \quad (\text{B.147})$$

$$\Lambda_{01245}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_8; \quad \Lambda_{01345}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{0135} \\ \gamma_{0135} & 0 \end{pmatrix}^2 = I_8, \quad (\text{B.148})$$

$$\Lambda_{02345}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ \gamma_0 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_8; \quad \Lambda_{12345}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_8, \quad (\text{B.149})$$

c'est-à-dire 3 cinq-vecteurs de carré  $I_8$  et 3 cinq-vecteurs de carré  $-I_8$ . Enfin pour les pseudo-scalaires on a un seul générateur :

$$\Lambda_{012345} = \begin{pmatrix} -I_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{012345}^2 = I_8. \quad (\text{B.150})$$

Les 64 générateurs de  $Cl_{3,3}$  se répartissent donc en  $28 = 8 \times 7/2$  générateurs de carré  $-I_8$ , et  $36 = 8 \times 9/2$  générateurs de carré  $I_8$ . Les 28 termes de carré  $-I_8$  constituent l'algèbre de Lie du groupe  $SO(8)$ . Les 36 termes de carré  $I_8$  sont auto-adjoints et permettent la définition des 36 densités tensorielles associées à l'onde relativiste de l'électron.

L'algèbre engendrée par les matrices  $\Lambda_a$  contient l'espace-temps dans la partie engendrée par les  $\Lambda_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Et de même l'algèbre engendrée par les matrices  $\Gamma_a$  contient l'espace-temps dans la partie engendrée par les  $\Gamma_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . On a donc là deux manières de décrire l'espace-temps, qui ont beaucoup de points communs, par exemple :

$$\Gamma_0^2 = I_8 = \Lambda_0^2; \quad \Gamma_j^2 = -I_8 = \Lambda_j^2, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\Gamma_{012345} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix} = \Lambda_{012345}. \quad (\text{B.151})$$

Mais ces deux manières de décrire l'espace-temps ont néanmoins des propriétés différentes, car on a :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = iI_2; \quad \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.152})$$

tandis que l'on a :

$$\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -iI_2 \\ 0 & 0 & iI_2 & 0 \\ 0 & -iI_2 & 0 & 0 \\ iI_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.153})$$

### B.2.2 $Cl_{3,3}$ avec matrices réelles $16 \times 16$

L'algèbre de Clifford engendrée par les matrices  $\Gamma_a$ , dont les termes  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  contiennent  $i$ , peut aussi être décrite grâce au remplacement de  $i$  par la matrice  $-i\sigma_2$  et le remplacement des réels  $x$  par les matrices scalaires  $xI_2$ . Ce remplacement transforme :

$$I_2 \mapsto I_4; \sigma_1 \mapsto \gamma_0; \sigma_2 \mapsto \gamma_{3105}; \sigma_3 \mapsto \gamma_5; iI_2 \mapsto \gamma_{31}. \quad (\text{B.154})$$

Donc les générateurs  $\Gamma_a$  sont remplacés par :

$$\mathbf{\Gamma}_\mu := \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_\mu \\ \Lambda_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{B.155})$$

$$\mathbf{\Gamma}_4 := \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{45} \\ \Lambda_{45} & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_5 := \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{012345} \\ -\Lambda_{012345} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.156})$$

De même les générateurs  $\Lambda_a$ ,  $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  peuvent être remplacés par :

$$\mathbf{\Lambda}_a = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda_a \\ \Lambda_a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \quad (\text{B.157})$$

On remarquera que la partie d'espace-temps, engendrant l'algèbre de Clifford  $Cl_{1,3}$ , reste la même :  $\mathbf{\Gamma}_\mu = \mathbf{\Lambda}_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

## Annexe C

# L'atome d'hydrogène

On présente la résolution de l'équation d'onde améliorée pour l'atome d'hydrogène. Cette résolution utilise une méthode de séparation des variables en coordonnées sphériques. Les fonctions angulaires utilisent l'équation différentielle des polynômes de Gegenbauer, comme pour les solutions de l'équation de Dirac. Ici on étudie de nouvelles solutions, pour un électron avec sa charge électrique et aussi avec une masse pour l'onde droite et une masse pour l'onde gauche. Et on part de la forme complètement relativiste de l'équation d'onde.

L'atome d'hydrogène est le joyau de la théorie de Dirac. Les solutions de l'équation de Dirac, calculées par C. G. Darwin [11] en 1928, que l'on peut trouver aussi dans des manuels plus récents [105], étaient des vecteurs propres d'opérateurs *ad hoc*, obtenus à partir de la théorie non relativiste de l'électron de Pauli, et qui ne sont pas des opérateurs de moment angulaire. Ces solutions donnent le nombre attendu d'états, la bonne formule pour les niveaux d'énergie, et elles ont comme approximation non relativiste les valeurs attendues. Ceci fut donc considéré comme très satisfaisant. Mais la plupart de ces solutions obtenues par Darwin ont le désavantage d'avoir un angle d'Yvon-Takabayasi qui n'est pas partout défini ni partout petit. Donc elles ne peuvent pas être les approximations linéaires des solutions de l'équation améliorée.

On a précédemment obtenu [13] [21] de nouvelles solutions dans le cas de l'équation de Dirac linéaire, qui ont, elles, un angle d'Yvon-Takabayasi partout défini et partout petit (au maximum de l'ordre de la constante de structure fine). Elles peuvent donc être les approximations linéaires des solutions qu'on va chercher ici, à partir de l'équation améliorée elle-même.

## C.1 Séparation des variables

Pour résoudre l'équation de Dirac ou l'équation améliorée, outre la méthode utilisée initialement par Darwin, il existe une autre méthode, obtenue par Heinz Krüger [85] en 1991, une méthode très jolie et très classique du point de vue mathématique pour des équations aux dérivées partielles, de séparation des variables en coordonnées sphériques :

$$x^1 =: r \sin \theta \cos \varphi; \quad x^2 =: r \sin \theta \sin \varphi; \quad x^3 =: r \cos \theta. \quad (\text{C.1})$$

On se sert des notations suivantes<sup>1</sup> :

$$i_1 = \sigma_{23} := i\sigma_1; \quad i_2 = \sigma_{31} := i\sigma_2; \quad i_3 = \sigma_{12} := i\sigma_3, \quad (\text{C.2})$$

$$u_1 := \sin \theta \cos \varphi; \quad u_2 := \sin \theta \sin \varphi; \quad u_3 = \cos \theta; \quad \vec{u} := u_1 \sigma_1 + u_2 \sigma_2 + u_3 \sigma_3,$$

$$S := e^{-\frac{\varphi}{2} i_3} e^{-\frac{\theta}{2} i_2}; \quad \Omega = \widehat{\Omega} := r^{-1} (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} S, \quad (\text{C.3})$$

$$\vec{\partial}' := \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi. \quad (\text{C.4})$$

Krüger a obtenu l'identité remarquable :

$$\vec{\partial} = \Omega \vec{\partial}' \Omega^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

qui donne, avec :

$$\begin{aligned} \nabla' &:= \partial_0 - \vec{\partial}' = \partial_0 - \left( \sigma_3 \partial_r + \frac{1}{r} \sigma_1 \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \sigma_2 \partial_\varphi \right), \\ &= \partial_0 - \sigma_3 \left[ \partial_r + \frac{i_2}{r} \left( \partial_\theta + \frac{i_3}{\sin \theta} \partial_\varphi \right) \right], \\ &= \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_r & -\frac{1}{r} \partial_\theta + \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi \\ -\frac{1}{r} \partial_\theta - \frac{i}{r \sin \theta} \partial_\varphi & \partial_0 + \partial_r \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

l'identité :

$$\Omega^{-1} (\nabla \widehat{\phi}) = \nabla' (\Omega^{-1} \widehat{\phi}). \quad (\text{C.7})$$

On résout ici l'équation améliorée comportant une masse pour l'onde droite et une pour l'onde gauche, sous sa forme complètement invariante :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\phi} \nabla \widehat{\phi} \sigma_{21} + \bar{\phi} q A \widehat{\phi} + \rho \mathbf{m}, \\ \rho e^{i\beta} &= \phi \bar{\phi} = \bar{\phi} \phi = \det(\phi). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Pour séparer, d'un côté la variable temps  $x^0 := ct$  et la variable angulaire  $\varphi$ , et de l'autre côté les variables  $r$ , variable radiale, et  $\theta$ , l'autre variable angulaire, on pose :

$$\phi =: \Omega X e^{(\lambda \varphi - E x^0) i_3}, \quad (\text{C.9})$$

---

1.  $S$  n'a rien à voir avec le tenseur  $S_3$  et  $\Omega$  ne doit pas être confondu avec les invariants relativistes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  étudiés au chapitre 1.

où  $X$  est une fonction, à valeur dans l'algèbre de Pauli, des seules variables  $r$  et  $\theta$ ,  $\hbar c E$  est l'énergie de l'électron et  $\lambda$  est une constante réelle qui sera interprétée comme le nombre quantique magnétique. On a alors :

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \Omega \hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0)i_3}; \quad \bar{\phi} = e^{-(\lambda\varphi - Ex^0)i_3} \bar{X} \bar{\Omega}, \\ \bar{\Omega} &= r^{-1} (\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}i_2} e^{\frac{\varphi}{2}i_3} = \frac{1}{r\sqrt{\sin \theta}} S^{-1}.\end{aligned}\quad (C.10)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\rho e^{i\beta} &= \det(\phi) = \det(\Omega) \det(X) \det[e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}], \\ \det(\Omega) &= r^{-2} (\sin \theta)^{-1}; \quad \det[e^{(\lambda\varphi - Ex^0 + \delta)i_3}] = 1, \\ \rho e^{i\beta} &= \frac{\det(X)}{r^2 \sin \theta}; \quad \bar{\Omega} \Omega = r^{-2} (\sin \theta)^{-1}.\end{aligned}\quad (C.11)$$

Donc si on pose :

$$\rho_X e^{i\beta_X} := \det(X), \quad (C.12)$$

on obtient :

$$\rho = \frac{\rho_X}{r^2 \sin \theta}; \quad \beta = \beta_X. \quad (C.13)$$

Donc avec la forme (C.9) pour l'onde de l'électron, l'angle d'Yvon-Takabayasi ne dépend ni du temps ni de l'angle  $\varphi$ . Il ne dépend que de  $r$  et de  $\theta$ . Pour l'équation de Dirac, on cherche ensuite les solutions sous la forme :

$$\Omega^{-1} \hat{\phi} := \hat{X} e^{(\lambda\varphi - Ex^0)i_3}; \quad \hat{\phi} = \Omega \hat{X} e^{pi_3}; \quad p := \lambda\varphi - Ex^0, \quad (C.14)$$

$$\hat{X} := \begin{pmatrix} X_1 & -Y_2^* \\ X_2 & Y_1^* \end{pmatrix}. \quad (C.15)$$

Pour séparer les variables on pose :

$$U := U(\theta); \quad V := V(\theta); \quad f_j := f_j(r), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (C.16)$$

avec :

$$\begin{aligned}U' &= \frac{\lambda}{\sin \theta} U - \kappa V; \quad V' = -\frac{\lambda}{\sin \theta} V + \kappa U, \\ \hat{X} &:= \begin{pmatrix} f_1 U & -f_3^* V^* \\ f_2 V & f_4^* U^* \end{pmatrix}; \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} f_1^* U^* & f_2^* V^* \\ -f_3 V & f_4 U \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} f_4 U & -f_2^* V \\ f_3 V & f_1^* U^* \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (C.17)$$

Pour l'atome d'hydrogène on a :<sup>2</sup>

$$qA = qA^0 = -\frac{\alpha}{r}; \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (C.18)$$

---

2. Pour l'équation de Schrödinger le même potentiel est utilisé. Mais le mouvement est censé se faire autour du centre de gravité de l'atome d'hydrogène. Une simple correction est faite, en se servant du théorème sur le mouvement autour du centre de gravité. Cela donne une petite correction entre les niveaux d'énergie dans le cas de l'hydrogène et dans le cas du deutérium. Or aucune correction de ce type n'est étudiée dans le cas de l'équation relativiste, cela revient à supposer que la correction a déjà été faite.

où  $\alpha$  est la constante de structure fine. On a :

$$\begin{aligned} qA\hat{\phi} &= -\frac{\alpha}{r}\hat{\phi} = -\frac{\alpha}{r}\Omega\hat{X}e^{(\lambda\varphi - Ex^0)i_3}, \\ &= \Omega\left(-\frac{\alpha}{r}\right)\begin{pmatrix} f_1U & -f_3^*V^* \\ f_2V & f_4^*U^* \end{pmatrix}e^{pi_3}. \end{aligned} \quad (C.19)$$

L'électromagnétisme pré-quantique considère le champ électromagnétique comme dérivant d'un potentiel électromagnétique, ce qui se traduit en algèbre de Pauli par  $F = \nabla\hat{A}$ , où  $A$  est le vecteur d'espace-temps potentiel électromagnétique. Or on obtient, avec l'équation de Dirac, le champ électromagnétique directement à partir du tenseur d'impulsion-énergie, donc le potentiel électromagnétique est implicitement et automatiquement défini par l'équation d'onde :

$$\bar{\phi}qA\hat{\phi} = \bar{\phi}(\nabla\hat{\phi})\sigma_{12} - \rho\mathbf{m}, \quad (C.20)$$

$$A := \frac{1}{q}\left[(\nabla\hat{\phi})\sigma_{12}\hat{\phi}^{-1} - \rho\bar{\phi}^{-1}\mathbf{m}\hat{\phi}^{-1}\right]. \quad (C.21)$$

A ce potentiel interne, toujours présent même en l'absence de charge et de potentiel créé par ces autres charges, ne peut s'ajouter que le potentiel créé par la singularité centrale de l'onde, d'où le caractère en  $1/r$  de ce potentiel considéré (à tort) comme extérieur à l'onde, puisque qu'il ne dépend pas des variations locales de l'onde. On obtient pour le terme différentiel :

$$\begin{aligned} \left(\partial_\theta + \frac{i_3}{\sin\theta}\partial_\varphi\right)(\hat{X}e^{pi_3}) &= \left(\partial_\theta\hat{X} + \frac{i_3}{\sin\theta}\hat{X}\lambda i_3\right)e^{pi_3} \\ &= \begin{pmatrix} f_1U' & -f_3^*V'^* \\ f_2V' & f_4^*U'^* \end{pmatrix}e^{pi_3} + \frac{\lambda}{\sin\theta}\begin{pmatrix} -f_1U & f_3^*V^* \\ f_2V & -f_4^*U^* \end{pmatrix}e^{pi_3} \\ &= \begin{pmatrix} -\kappa f_1V & -f_3^*\kappa U^* \\ f_2\kappa U & -\kappa f_4^*V^* \end{pmatrix}e^{pi_3}. \end{aligned} \quad (C.22)$$

On obtient ensuite :

$$\left[\partial_r + \frac{i_2}{r}\left(\partial_\theta + \frac{i_3}{\sin\theta}\partial_\varphi\right)\right](\hat{X}e^{pi_3}) \quad (C.23)$$

$$= \begin{pmatrix} (f'_1 + \frac{\kappa f_2}{r})U & -(f_3'^* + \frac{\kappa^* f_4^*}{r})V^* \\ (f'_2 + \frac{\kappa f_1}{r})V & (f_4'^* + \frac{\kappa^* f_3^*}{r})U^* \end{pmatrix}e^{pi_3},$$

$$\nabla'(\hat{X}e^{pi_3})(-i_3) = \begin{pmatrix} M_1 & -M_3 \\ M_2 & M_4 \end{pmatrix}e^{pi_3}$$

$$M_1 = (-Ef_1 + if'_1 + i\kappa\frac{f_2}{r})U; \quad M_3 = (-Ef_3^* - if_3'^* - i\kappa^*\frac{f_4^*}{r})V^*, \quad (C.24)$$

$$M_2 = (-Ef_2 - if'_2 - i\kappa\frac{f_1}{r})V; \quad M_4 = (-Ef_4^* + if_4'^* + i\kappa^*\frac{f_3^*}{r})U^*.$$

### C.1.1 Résolution du système angulaire

Tout d'abord si  $\kappa$  est multiplié par  $e^{ia}$ , il suffit de multiplier  $U$  et  $V$  par  $e^{-ia}$  pour obtenir un système équivalent. On peut donc se ramener à un système angulaire dans lequel  $\kappa$  est un réel. Alors on obtient, pour les parties réelles  $U_r$  et  $V_r$  et pour les parties imaginaires  $U_i$  et  $V_i$  de  $U$  et  $V$ , les mêmes équations (C.17). On a alors :

$$U_i = kU_r; \quad V_i = kV_r; \quad U = (1 + ik)U_r; \quad V = (1 + ik)V_r, \quad (\text{C.25})$$

où  $k$  est une constante réelle. Il suffit donc de chercher les solutions réelles du système angulaire. Avec  $C = C(\theta)$  et si  $\lambda > 0$  on pose :

$$U := \sin^\lambda \theta \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C' - \left(\kappa + \frac{1}{2} - \lambda\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) C \right], \quad (\text{C.26})$$

$$V := \sin^\lambda \theta \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) C' + \left(\kappa + \frac{1}{2} - \lambda\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C \right], \quad (\text{C.27})$$

$$U =: \sqrt{\sin \theta} \cos \frac{\theta}{2} U_1; \quad V =: \sqrt{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} V_1. \quad (\text{C.28})$$

Et si  $\lambda < 0$  on pose :

$$U := \sin^{-\lambda} \theta \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) C' + \left(\kappa + \frac{1}{2} + \lambda\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C \right], \quad (\text{C.29})$$

$$V := \sin^{-\lambda} \theta \left[ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) C' + \left(\kappa + \frac{1}{2} + \lambda\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) C \right], \quad (\text{C.30})$$

$$U =: \sqrt{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} V_1; \quad V =: -\sqrt{\sin \theta} \cos \frac{\theta}{2} U_1. \quad (\text{C.31})$$

On a donc, dans les deux cas :

$$U_1 = \sin^{|\lambda| - \frac{1}{2}}(\theta) \left[ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) C' - \left(\kappa + \frac{1}{2} - |\lambda|\right) C \right], \quad (\text{C.32})$$

$$V_1 = \sin^{|\lambda| - \frac{1}{2}}(\theta) \left[ \cotan\left(\frac{\theta}{2}\right) C' + \left(\kappa + \frac{1}{2} - |\lambda|\right) C \right]. \quad (\text{C.33})$$

Le système angulaire (C.17) est alors équivalent (voir [12]), pour les deux signes de  $\lambda$ , à l'équation différentielle :

$$0 = C'' + \frac{2|\lambda|}{\tan \theta} C' + \left[ \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)^2 - \lambda^2 \right] C. \quad (\text{C.34})$$

Le changement de variable :

$$z = \cos \theta; \quad f(z) = C[\theta(z)], \quad (\text{C.35})$$

donne alors l'équation différentielle de Gegenbauer :

$$0 = f''(z) - \frac{1 + 2|\lambda|}{1 - z^2} z f'(z) + \frac{(\kappa + \frac{1}{2})^2 - \lambda^2}{1 - z^2} f(z). \quad (\text{C.36})$$

Et l'on obtient :

$$\frac{C(\theta)}{C(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}), \quad (\text{C.37})$$

avec :

$$(a)_0 = 1 \quad (a)_1 = a, \quad (a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1). \quad (\text{C.38})$$

Le terme  $C(0)$  est en facteur de  $U$  et  $V$ , il peut être reporté sur les fonctions radiales. On peut donc poser  $C(0) := 1$ , sans perte de généralité. Pour que la fonction d'onde soit intégrable, il faut que la série donnant  $C$  soit une somme finie, donc qu'il existe un entier  $n$  tel que, si  $\kappa > 0$  :

$$C(\theta) = \sum_{n=0}^{n=\frac{1}{2}+|\kappa|-|\lambda|} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}), \quad (\text{C.39})$$

ou, si  $\kappa < 0$

$$C(\theta) = \sum_{n=0}^{n=-\frac{1}{2}+|\kappa|-|\lambda|} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}). \quad (\text{C.40})$$

Or on a :

$$\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) C' = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} j \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}). \quad (\text{C.41})$$

En utilisant, pour tout nombre  $a$  et pour tout entier naturel  $j$ , l'identité remarquable :

$$(a)_j (a+j) = a(a+1)_j, \quad (\text{C.42})$$

on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\tan \frac{\theta}{2}\right) C' - \left(\kappa + \frac{1}{2} - |\lambda|\right) C \\ &= \sum_{j=0}^{j=n} \left(j - \kappa - \frac{1}{2} + |\lambda|\right) \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}) \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$= (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - \kappa)_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}). \quad (\text{C.44})$$

La somme :

$$S_1 := \sum_{j=0}^{j=n} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - \kappa)_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}) \quad (\text{C.45})$$

doit nécessairement être finie pour que les fonctions angulaires soient intégrables, ce qu'impose la normalisation de l'onde. Comme on passe d'un terme au suivant des produits contenus dans les  $(a)_j$  en ajoutant 1, et qu'un produit n'est nul que si l'un des facteurs est nul, il faut, pour que la somme  $S_1$  soit intégrable, qu'il existe un des termes de la suite qui soit nul, et alors tous les produits suivants sont nuls. Le terme de rang  $n$  de la suite des facteurs de  $(a)_j$  étant  $a + j - 1$ , ceci implique qu'existe un entier  $n$  tel que, pour  $\kappa > 0$ , on ait  $|\lambda| + \frac{1}{2} - \kappa + n - 1 = 0$ , c'est-à-dire  $\kappa = n + |\lambda| - \frac{1}{2}$ ; et pour  $\kappa < 0$ , il faut qu'existe un entier tel que  $|\lambda| + \frac{1}{2} + \kappa + n - 1 = 0$ , c'est-à-dire  $-\kappa = n + |\lambda| - \frac{1}{2}$ . En fait, comme ajouter 0 ne change rien, la somme s'arrête au terme précédent, donc pour :

$$|\lambda| + \frac{1}{2} - |\kappa| + n - 1 = -1; \quad n = |\kappa| - |\lambda| - \frac{1}{2}. \quad (\text{C.46})$$

$|\lambda| + \frac{1}{2}$  étant un entier, ceci impose à la constante  $\kappa$  d'être un entier, et cet entier ne peut pas être nul, sinon la somme  $S_1$  serait infinie. De plus, ce nombre  $n$  est un indice, dont la valeur minimale est 0. Donc  $|\kappa| - |\lambda| - \frac{1}{2}$  est un entier naturel, et donc  $|\lambda|$  est un demi-impair strictement inférieur à l'entier  $|\kappa|$ . Et la somme  $S_1$  est, avec l'entier  $n$  précisé ci-dessus :

$$S_1 = \sum_{j=0}^{j=n} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - |\kappa|)_j (|\lambda| + |\kappa| + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}), \quad (\text{C.47})$$

ce qui nous donne :

$$U_1 = (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2}) \sin^{|\lambda| - \frac{1}{2}}(\theta) S_1. \quad (\text{C.48})$$

Pour  $V_1$ , on a :

$$\begin{aligned} V_1(\sin \theta)^{\frac{1}{2} - |\lambda|} &= \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} C' + (\kappa + \frac{1}{2} - |\lambda|) C \\ &= \sum_{j=0}^{j=n} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} j \sin^{2j-1}(\frac{\theta}{2}) \frac{\cos^2(\frac{\theta}{2})}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ &\quad + (\kappa + \frac{1}{2} - |\lambda|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}) \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j (j-1)!} \sin^{2j-2}(\frac{\theta}{2}) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{j=n} (j - \kappa - \frac{1}{2} + |\lambda|) \frac{(|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n}(\frac{\theta}{2}). \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Dans la première somme, on change les indices, dans la seconde on utilise l'identité (C.42), ce qui donne :

$$\begin{aligned} V_1(\sin \theta)^{\frac{1}{2}-|\lambda|} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa)_{j+1} (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_{j+1}}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_{j+1} j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}) \\ &\quad - (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - \kappa)_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}). \end{aligned}$$

Puis on a :

$$\begin{aligned} V_1(\sin \theta)^{\frac{1}{2}-|\lambda|} &= (|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa) \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - \kappa)_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j (|\lambda| + \frac{1}{2} + j) j!} (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2} + j) \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}) \\ &\quad - (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2}) \sum_{j=0}^{j=n} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - \kappa)_j (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_j}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}). \end{aligned} \quad (C.50)$$

Tenant compte de la suppression par soustraction du terme d'indice maximal, on définit alors une seconde somme :

$$S_2 := \sum_{j=0}^{j=n-1} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - |\kappa|)_j (|\lambda| + \frac{1}{2} + |\kappa|)_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_{j+1} j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}) \quad (C.51)$$

Et l'on obtient :

$$\begin{aligned} V_1(\sin \theta)^{\frac{1}{2}-|\lambda|} &= (|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa) [S_1 + \kappa S_2] + (-|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2}) S_1 \\ &= \kappa (|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa) S_2. \end{aligned} \quad (C.52)$$

La somme  $S_2$ , contrairement à  $S_1$ , n'est définie que si l'indice maximal  $n$  n'est pas nul. Les sommes  $S_1$  et  $S_2$  sont inchangées si on y remplace  $\kappa$  par  $-\kappa$ , à ceci près que l'indice maximal  $n$  n'est pas le même quand  $\kappa$  change de signe. Donc  $U_1$  et  $V_1$ , et donc aussi  $U$  et  $V$ , dépendent du signe de  $\kappa$ , on notera avec un  $+$  les fonctions obtenues avec  $\kappa > 0$  et avec un  $-$  celles obtenues avec  $\kappa < 0$ . On a :

$$U_1^+ = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - |\kappa| \right) (\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}} S_1, \quad (C.53)$$

$$U_1^- = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} + |\kappa| \right) (\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}} S_1, \quad (C.54)$$

$$U_1^- = k U_1^+; \quad k := \frac{|\lambda| - \frac{1}{2} + |\kappa|}{|\lambda| - \frac{1}{2} - |\kappa|}; \quad U^- = k U^+, \quad (C.55)$$

$$V_1^+ = |\kappa| \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - |\kappa| \right) (\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}} S_2; \quad V^- = -kV^+, \quad (\text{C.56})$$

$$V_1^- = -|\kappa| \left( |\lambda| - \frac{1}{2} + |\kappa| \right) (\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}} S_2. \quad (\text{C.57})$$

Si on cherche une solution contenant à la fois des fonctions du type  $U^+$  et  $U^-$  on n'obtient pas de solution plus générale car :

$$\begin{aligned} A_1 U^+ + A_2 U^- &= A_1 U^+ + A_2 k U^+ = (A_1 + k A_2) U^+ = A(r) U^+, \\ B_1 V^+ + B_2 V^- &= B_1 V^+ - k B_2 V^+ = (B_1 - k B_2) V^+ = B(r) V^+. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

La solution la plus générale est donc celle utilisant  $U = U^+$  et  $V = V^+$ . Ensuite dans le cas  $\lambda < 0$ , le système angulaire donne :

$$\begin{aligned} U &= \kappa \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \sin^{|\lambda|}(\theta) \underline{s} S_2, \\ V &= - \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \sin^{|\lambda|}(\theta) \underline{c} S_1. \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

### C.1.2 Structure de l'onde

On utilise les projecteurs  $p_r$  et  $p_l$  étudiés en A.3.9, ainsi que le vecteur unitaire  $\vec{u}$ , qui donne lui-même deux projecteurs,  $p^+$  et  $p^-$ , tels que :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1 + \sigma_3}{2}; \quad p_l = \frac{1 - \sigma_3}{2}; \quad \vec{u} := \frac{\vec{x}}{r} = u_1 \sigma_1 + u_2 \sigma_2 + u_3 \sigma_3, \\ p^+ &:= \frac{1 + \vec{u}}{2}; \quad p^- := \frac{1 - \vec{u}}{2}; \quad p^+ + p^- = 1; \quad p^+ - p^- = \vec{u}, \\ p^+ p^+ &= p^+; \quad p^- p^- = p^-; \quad p^+ p^- = p^- p^+ = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

On utilise aussi, pour simplifier les écritures :

$$p = \lambda \varphi - E x^0; \quad \underline{c} = \cos \frac{\theta}{2}; \quad \underline{s} = \sin \frac{\theta}{2}.$$

On a alors :

$$\underline{c}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{1 + u_3}{2}; \quad \underline{s}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - u_3}{2}; \quad \underline{s} \underline{c} = \frac{\sin \theta}{2}. \quad (\text{C.61})$$

On distingue les deux signes possibles du nombre quantique magnétique  $\lambda$  : si  $\lambda > 0$  on a :

$$\frac{\hat{X}}{r \sqrt{\sin \theta}} = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \frac{(\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}}}{r} \begin{pmatrix} f_1 \underline{c} S_1 & -\kappa f_3^* \underline{s} S_2 \\ \kappa f_2 \underline{s} S_2 & f_4^* \underline{c} S_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.62})$$

$$\frac{X}{r \sqrt{\sin \theta}} = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \frac{(\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}}}{r} \begin{pmatrix} f_4 \underline{c} S_1 & -\kappa f_2^* \underline{s} S_2 \\ \kappa f_3 \underline{s} S_2 & f_1^* \underline{c} S_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.63})$$

Toujours si  $\lambda > 0$ , et avec l'un ou l'autre signe pour  $\kappa$ , et avec (C.26) et (C.28), on obtient :

$$\phi_{(\lambda>0)} = \frac{S}{r\sqrt{\sin\theta}} X e^{pi_3} \quad (C.64)$$

$$= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} S \begin{pmatrix} f_4 \underline{c} S_1 & -\kappa f_2^* \underline{s} S_2 \\ \kappa f_3 \underline{s} S_2 & f_1^* \underline{c} S_1 \end{pmatrix} e^{pi_3},$$

$$\bar{\phi}_{(\lambda>0)} = \frac{e^{-pi_3}}{r\sqrt{\sin\theta}} \bar{X} S^{-1} \quad (C.65)$$

$$= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} e^{-pi_3} \begin{pmatrix} f_1^* \underline{c} S_1 & \kappa f_2^* \underline{s} S_2 \\ -\kappa f_3 \underline{s} S_2 & f_4 \underline{c} S_1 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$\hat{\phi}_{(\lambda>0)} = \frac{S}{r\sqrt{\sin\theta}} \hat{X} e^{pi_3} \quad (C.66)$$

$$= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} S \begin{pmatrix} f_1 \underline{c} S_1 & -\kappa f_3^* \underline{s} S_2 \\ \kappa f_2 \underline{s} S_2 & f_4^* \underline{c} S_1 \end{pmatrix} e^{pi_3},$$

$$\phi_{(\lambda>0)}^\dagger = \bar{\phi}_{(\lambda>0)} = \frac{e^{-pi_3}}{r\sqrt{\sin\theta}} X^\dagger S^{-1} \quad (C.67)$$

$$= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} S \begin{pmatrix} f_4^* \underline{c} S_1 & \kappa f_3^* \underline{s} S_2 \\ -\kappa f_2 \underline{s} S_2 & f_1 \underline{c} S_1 \end{pmatrix} e^{pi_3}.$$

Et comme  $\det(S) = 1$ , il en résulte :

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} &= \det(\phi_{(\lambda>0)}) \\ &= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{r^2} \begin{vmatrix} \underline{c} f_4 S_1 & -\kappa \underline{s} f_2^* S_2 \\ \kappa \underline{s} f_3 S_2 & \underline{c} f_1^* S_1 \end{vmatrix} \\ &= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{2r^2} \\ &\quad \times [f_1^* f_4 S_1^2 + \kappa^2 f_2^* f_3 S_2^2 + \cos\theta (f_1^* f_4 S_1^2 - \kappa^2 f_2^* f_3 S_2^2)]. \end{aligned} \quad (C.68)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} D_0 &= D_0^0 + \vec{D}_0 = \phi_{(\lambda>0)} \phi_{(\lambda>0)}^\dagger \\ &= \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{r^2} \end{aligned} \quad (C.69)$$

$$\times S \begin{pmatrix} \underline{c}^2 |f_4|^2 S_1^2 + \kappa^2 \underline{s}^2 |f_2|^2 S_2^2 & \kappa \underline{s} \underline{c} (f_4 f_3^* - f_2^* f_1) S_1 S_2 \\ \kappa \underline{s} \underline{c} (f_3 f_4^* - f_1^* f_2) S_1 S_2 & \underline{c}^2 |f_1|^2 S_1^2 + \kappa^2 \underline{s}^2 |f_3|^2 S_2^2 \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$D_0^0 = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{r^2} \quad (C.70)$$

$$\times [\underline{c}^2 (|f_1|^2 + |f_4|^2) S_1^2 + \kappa^2 \underline{s}^2 (|f_2|^2 + |f_3|^2) S_2^2].$$

Si le nombre quantique magnétique  $\lambda$  est négatif, on obtient :

$$\frac{\hat{X}}{r\sqrt{\sin\theta}} = \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} \begin{pmatrix} \kappa f_1 \underline{s} S_2 & f_3^* \underline{c} S_1 \\ -f_2 \underline{c} S_1 & \kappa f_4^* \underline{s} S_2 \end{pmatrix}, \quad (C.71)$$

$$\frac{X}{r\sqrt{\sin\theta}} = \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} \begin{pmatrix} \kappa f_4 \underline{s} S_2 & f_2^* \underline{c} S_1 \\ -f_3 \underline{c} S_1 & \kappa f_1^* \underline{s} S_2 \end{pmatrix}. \quad (C.72)$$

Toujours si  $\lambda < 0$ , et avec l'un ou l'autre signe pour  $\kappa$ , et avec (C.26) et (C.28), on obtient :

$$\phi_{(\lambda<0)} = \frac{S}{r\sqrt{\sin\theta}} X e^{pi_3} \quad (C.73)$$

$$= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} S \begin{pmatrix} \kappa f_4 \underline{s} S_2 & f_2^* \underline{c} S_1 \\ -f_3 \underline{c} S_1 & \kappa f_1^* \underline{s} S_2 \end{pmatrix} e^{pi_3},$$

$$\bar{\phi}_{(\lambda<0)} = \frac{e^{-pi_3}}{r\sqrt{\sin\theta}} \bar{X} S^{-1} \quad (C.74)$$

$$= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} e^{-pi_3} \begin{pmatrix} \kappa f_1^* \underline{s} S_2 & -f_2^* \underline{c} S_1 \\ f_3 \underline{c} S_1 & \kappa f_4 \underline{s} S_2 \end{pmatrix} S^{-1},$$

$$\hat{\phi}_{(\lambda<0)} = \frac{S}{r\sqrt{\sin\theta}} \hat{X} e^{pi_3} \quad (C.75)$$

$$= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} S \begin{pmatrix} \kappa f_1 \underline{s} S_2 & f_3^* \underline{c} S_1 \\ -f_2 \underline{c} S_1 & \kappa f_4^* \underline{s} S_2 \end{pmatrix} e^{pi_3},$$

$$\phi_{(\lambda<0)}^\dagger = \bar{\phi}_{(\lambda>0)} = \frac{e^{-pi_3}}{r\sqrt{\sin\theta}} X^\dagger S^{-1} \quad (C.76)$$

$$= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right) \frac{(\sin\theta)^{|\lambda|-\frac{1}{2}}}{r} S \begin{pmatrix} \kappa f_4^* \underline{s} S_2 & -f_3^* \underline{c} S_1 \\ f_2 \underline{c} S_1 & \kappa f_1 \underline{s} S_2 \end{pmatrix} e^{pi_3}.$$

Et il en résulte :

$$\begin{aligned} \rho e^{i\beta} &= \det(\phi_{(\lambda<0)}) \\ &= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{r^2} \begin{vmatrix} \kappa \underline{s} f_4 S_2 & \underline{c} f_2^* S_1 \\ -\underline{c} f_3 S_1 & \kappa \underline{s} f_1^* S_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{2r^2} \\ &\quad \times [\kappa^2 f_1^* f_4 S_2^2 + f_2^* f_3 S_1^2 - \cos\theta (\kappa^2 f_1^* f_4 S_2^2 - f_2^* f_3 S_1^2)]. \end{aligned} \quad (C.77)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} D_0 &= D_0^0 + \vec{D}_0 = \phi_{(\lambda<0)} \phi_{(\lambda<0)}^\dagger \\ &= \left(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa\right)^2 \frac{(\sin\theta)^{2|\lambda|-1}}{r^2} \\ &\quad \times S \begin{pmatrix} \kappa^2 \underline{s}^2 |f_4|^2 S_2^2 + \underline{c}^2 |f_2|^2 S_1^2 & \kappa \underline{s} \underline{c} (f_4 f_3^* - f_2^* f_1) S_1 S_2 \\ \kappa \underline{s} \underline{c} (f_3 f_4^* - f_1^* f_2) S_1 S_2 & \kappa^2 \underline{s}^2 |f_1|^2 S_2^2 + \underline{c}^2 |f_3|^2 S_1^2 \end{pmatrix} S^{-1} \end{aligned} \quad (C.78)$$

$$D_0^0 = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa \right)^2 \frac{(\sin \theta)^{2|\lambda|-1}}{r^2} \quad (C.79)$$

$$\times [\kappa^2 \underline{s}^2 (|f_1|^2 + |f_4|^2) S_2^2 + \underline{c}^2 (|f_2|^2 + |f_3|^2) S_1^2].$$

### C.1.3 Séparation des variables $r$ et $\theta$

L'équation d'onde s'écrit, avec (C.24) :

$$\begin{aligned} \nabla'(\widehat{X}e^{pi_3})(-i_3) - \frac{\alpha}{r}\widehat{X}e^{pi_3} &= \begin{pmatrix} M_1 & -M_3 \\ M_2 & M_4 \end{pmatrix} e^{pi_3} \\ M_1 &= \left[ -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 + if_1' + i\kappa\frac{f_2}{r} \right] U, \\ M_3 &= \left[ -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_3^* - if_3'^* - i\kappa^*\frac{f_4^*}{r} \right] V^*, \\ M_2 &= \left[ -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 - if_2' - i\kappa\frac{f_1}{r} \right] V, \\ M_4 &= \left[ -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_4^* + if_4'^* + i\kappa^*\frac{f_3^*}{r} \right] U^*. \end{aligned} \quad (C.80)$$

Comme  $\bar{\Omega}\Omega = \frac{1}{r^2 \sin \theta}$ , l'équation se simplifie en :

$$0 = \bar{X} \left[ \nabla'(\widehat{X}e^{pi_3})(-i_3)e^{-pi_3} - \frac{\alpha}{r}\widehat{X} \right] + \rho_X \mathbf{m}. \quad (C.81)$$

Or on a :

$$\bar{X} \left[ \nabla'(\widehat{X}e^{pi_3})(-i_3)e^{-pi_3} - \frac{\alpha}{r}\widehat{X} \right] \quad (C.82)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} f_1^* U^* M_1 + f_2^* V^* M_2 & -f_1^* U^* M_3 + f_2^* V^* M_4 \\ -f_3 V M_1 + f_4 U M_2 & f_3 V M_3 + f_4 U M_4 \end{pmatrix} \\ f_1^* U^* M_1 + f_2^* V^* M_2 &= \mathcal{D}_1 |U|^2 + \mathcal{D}_2 |V|^2, \\ \mathcal{D}_1 &:= -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 f_1^* + if_1' f_1^* + i\kappa \frac{f_2 f_1^*}{r}, \\ \mathcal{D}_2 &:= -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 f_2^* - if_2' f_2^* - i\kappa \frac{f_1 f_2^*}{r}, \end{aligned} \quad (C.83)$$

$$f_3 V M_3 + f_4 U M_4 = \mathcal{A}_1 |U|^2 + \mathcal{A}_2 |V|^2, \quad (C.84)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_3^* f_3 - if_3'^* f_3 - i\kappa^* \frac{f_3 f_4^*}{r} \\ \mathcal{A}_2 &:= -\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_4 f_4^* + if_4 f_4'^* + i\kappa^* \frac{f_4 f_3^*}{r}, \\ -f_3 V M_1 + f_4 U M_2 &= \left[ \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_1 f_3 - if_1' f_3 - i\kappa \frac{f_2 f_3}{r} \right] UV \\ &\quad - \left[ \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)f_2 f_4 + if_2' f_4 + i\kappa \frac{f_1 f_4}{r} \right] UV \end{aligned} \quad (C.85)$$

$$\begin{aligned}
-f_1^* U^* M_3 + f_2^* V^* M_4 &= \left[ \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) f_1^* f_3^* + i f_1^* f_3'^* + i \kappa^* \frac{f_1^* f_4^*}{r} \right] U^* V^* \\
&\quad - \left[ \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) f_2^* f_4^* - i f_2^* f_4'^* - i \kappa^* \frac{f_2^* f_3^*}{r} \right] U^* V^* \quad (C.86)
\end{aligned}$$

Donc l'équation d'onde équivaut au système suivant :

$$0 = \mathcal{D}_1 |U|^2 + \mathcal{D}_2 |V|^2 + \mathbf{l} \rho_X, \quad (C.87)$$

$$0 = -f_1^* U^* M_3 + f_2^* V^* M_4, \quad (C.88)$$

$$0 = -f_3 V M_1 + f_4 U M_2, \quad (C.89)$$

$$0 = \mathcal{A}_1 |U|^2 + \mathcal{A}_2 |V|^2 + \mathbf{r} \rho_X. \quad (C.90)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
\rho_X e^{i\beta} &= X \bar{X} = \begin{pmatrix} f_4 U & -f_2^* V \\ f_3 V & f_1^* U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^* U^* & f_2^* V^* \\ -f_3 V & f_4 U \end{pmatrix} \\
&= f_1^* f_4 |U|^2 + f_2^* f_3 |V|^2, \quad (C.91)
\end{aligned}$$

$$\rho_X^2 = (f_1^* f_4 |U|^2 + f_2^* f_3 |V|^2)(f_1 f_4^* |U|^2 + f_2 f_3^* |V|^2). \quad (C.92)$$

Si  $\lambda > 0$  on a :

$$|U|^2 = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa^2 \right)^2 (\sin \theta)^{2|\lambda|} \underline{c}^2 S_1^2, \quad (C.93)$$

$$|V|^2 = \kappa^2 \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa^2 \right)^2 (\sin \theta)^{2|\lambda|} \underline{c}^2 S_2^2. \quad (C.94)$$

Si  $\lambda < 0$  on a :

$$|V|^2 = \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa^2 \right)^2 (\sin \theta)^{2|\lambda|} \underline{c}^2 S_1^2, \quad (C.95)$$

$$|U|^2 = \kappa^2 \left( |\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa^2 \right)^2 (\sin \theta)^{2|\lambda|} \underline{s}^2 S_2^2. \quad (C.96)$$

La première équation du système radial, (C.87), nous donne donc :

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{D}_1 |U|^2 + \mathcal{D}_2 |V|^2)(\mathcal{D}_1^* |U|^2 + \mathcal{D}_2^* |V|^2) \\
&= \mathbf{l}^2 (f_1^* f_4 |U|^2 + f_2^* f_3 |V|^2)(f_1 f_4^* |U|^2 + f_2 f_3^* |V|^2). \quad (C.97)
\end{aligned}$$

On n'aura une séparation des variables que si on identifie les termes en  $|U|^4$ ,  $|V|^4$  et  $|U|^2 |V|^2$  :

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1^* = \mathbf{l}^2 f_1 f_1^* f_4^* f_4, \quad (C.98)$$

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2^* + \mathcal{D}_2 \mathcal{D}_1^* = \mathbf{l}^2 (f_1^* f_4 f_2 f_3^* + f_1 f_4^* f_2^* f_3) \quad (C.99)$$

$$\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2^* = \mathbf{l}^2 f_2 f_3^* f_2^* f_3. \quad (C.100)$$

La première et la troisième se simplifient en :

$$|\mathcal{D}_1|^2 = \mathbf{l}^2 |f_1 f_4^*|^2; \quad \mathcal{D}_1 = e^{il_1} \mathbf{l} f_1 f_4^*, \quad (C.101)$$

$$|\mathcal{D}_2|^2 = \mathbf{l}^2 |f_2 f_3^*|^2; \quad \mathcal{D}_2 = e^{il_2} \mathbf{l} f_2 f_3^*, \quad (C.102)$$

où  $l_1$  et  $l_2$  sont des réels. L'équation (C.99) devient :

$$e^{il_1} \mathbf{1} f_1 f_4^* e^{-il_2} \mathbf{1} f_2^* f_3 + e^{il_2} \mathbf{1} f_2 f_3^* e^{-il_1} \mathbf{1} f_1^* f_4 = \mathbf{1}^2 (f_1^* f_4 f_2 f_3^* + f_1 f_4^* f_2^* f_3),$$

$$l_1 = l_2 \bmod 2\pi \quad (\text{C.103})$$

La même étude, pour l'équation (C.90), nous donne :

$$(\mathcal{A}_1 |U|^2 + \mathcal{A}_2 |V|^2)(\mathcal{A}_1^* |U|^2 + \mathcal{A}_2^* |V|^2) = \mathbf{r}^2 (f_1^* f_4 |U|^2 + f_2^* f_3 |V|^2)(f_1 f_4^* |U|^2 + f_2 f_3^* |V|^2). \quad (\text{C.104})$$

On n'aura une séparation des variables que si on identifie les termes en  $|U|^4$ ,  $|V|^4$  et  $|U|^2 |V|^2$  :

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_1^* = \mathbf{r}^2 f_1 f_4^* f_4^* f_4, \quad (\text{C.105})$$

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1^* = \mathbf{r}^2 (f_1^* f_4 f_2 f_3^* + f_1 f_4^* f_2^* f_3) \quad (\text{C.106})$$

$$\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_2^* = \mathbf{r}^2 f_2 f_3^* f_2^* f_3. \quad (\text{C.107})$$

La première et la troisième se simplifient en :

$$|\mathcal{A}_1|^2 = \mathbf{r}^2 |f_1 f_4^*|^2; \quad \mathcal{A}_1 = e^{ir_1} \mathbf{r} f_1 f_4^*, \quad (\text{C.108})$$

$$|\mathcal{D}_2|^2 = \mathbf{r}^2 |f_2 f_3^*|^2; \quad \mathcal{A}_2 = e^{ir_2} \mathbf{r} f_2 f_3^*, \quad (\text{C.109})$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont des réels. L'équation (C.106) devient :

$$e^{ir_1} \mathbf{r} f_1 f_4^* e^{-ir_2} \mathbf{r} f_2^* f_3 + e^{ir_2} \mathbf{r} f_2 f_3^* e^{-ir_1} \mathbf{r} f_1^* f_4 = \mathbf{r}^2 (f_1^* f_4 f_2 f_3^* + f_1 f_4^* f_2^* f_3),$$

$$r_1 = r_2 \bmod 2\pi \quad (\text{C.110})$$

On peut voir que les équations (C.88) et (C.89) sont alors satisfaites. On obtient donc la séparation des variables en supposant que les fonctions radiales satisfont le système radial :

$$A := f_4; \quad B := f_2; \quad C := f_3; \quad D := f_1, \quad (\text{C.111})$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) D - i D' - i \frac{\kappa}{r} B + \mathbf{l} e^{il_1} A = 0, \quad (\text{C.112})$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) B + i B' + i \frac{\kappa}{r} D + \mathbf{l} e^{il_1} C = 0, \quad (\text{C.113})$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) A + i A' + i \frac{\kappa}{r} C - \mathbf{r} e^{-ir_1} D = 0, \quad (\text{C.114})$$

$$\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) C - i C' - i \frac{\kappa}{r} A - \mathbf{r} e^{-ir_1} B = 0. \quad (\text{C.115})$$

où  $l_1$  et  $r_1$  sont deux réels quelconques.

## C.2 Résolution du système radial

Le système d'équations radiales (C.112), C.113 (C.114) et (C.115) est identique au système linéaire résultant de l'équation de Dirac, si l'on y

suppose la nullité de  $l_1$  et de  $r_1$ . Le comportement asymptotique à l'infini des fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  est donc le même que pour l'équation de Dirac. C'est ce comportement asymptotique qui impose de ne considérer que des fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} A &= (a_0 r^s + a_1 r^{s+1} + \dots + a_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \\ B &= (b_0 r^s + b_1 r^{s+1} + \dots + b_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \\ C &= (c_0 r^s + c_1 r^{s+1} + \dots + c_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \\ D &= (d_0 r^s + d_1 r^{s+1} + \dots + d_n r^{s+n}) e^{-\Lambda m r}, \end{aligned} \quad (\text{C.116})$$

où  $s$  et  $\Lambda$  sont deux réels positifs. Le degré  $n$  de ces polynômes peut être nul, auquel cas ils se réduisent au seul premier terme. Rappelons que ce degré  $n$  des polynômes radiaux est relié au nombre quantique principal  $\mathbf{n}$  de l'atome de Bohr par :

$$\mathbf{n} = |\kappa| + n. \quad (\text{C.117})$$

L'équation (C.114) est équivalente à :

$$\begin{aligned} 0 &= -E( \quad + a_0 r + \dots + a_{n-1} r^n + a_n r^{n+1} ) \\ &\quad - \alpha(a_0 + a_1 r + \dots + a_n r^n) \\ &\quad + i\Lambda m( \quad + a_0 r + \dots + a_{n-1} r^n + a_n r^{n+1} ) \\ &\quad - i[s a_0 + (s+1) a_1 r + \dots + a_n (s+n) r^n] \\ &\quad - i\kappa(c_0 + c_1 r + \dots + c_n r^n) \\ &+ e^{-ir_1} \mathbf{r}( \quad + d_0 r + \dots + d_{n-1} r^n + d_n r^{n+1} ). \end{aligned} \quad (\text{C.118})$$

De même l'équation (C.113) est équivalente à :

$$\begin{aligned} 0 &= -E( \quad + b_0 r + \dots + b_{n-1} r^n + b_n r^{n+1} ) \\ &\quad - \alpha(b_0 + b_1 r + \dots + b_n r^n) \\ &\quad + i\Lambda m( \quad + b_0 r + \dots + b_{n-1} r^n + b_n r^{n+1} ) \\ &\quad - i[s b_0 + (s+1) b_1 r + \dots + (s+n) b_n r^n] \\ &\quad - i\kappa(d_0 + d_1 r + \dots + d_n r^n) \\ &- e^{il_1} \mathbf{l}( \quad + c_0 r + \dots + c_{n-1} r^n + c_n r^{n+1} ). \end{aligned} \quad (\text{C.119})$$

Puis l'équation (C.115) est équivalente à :

$$\begin{aligned} 0 &= -E( \quad + c_0^r + \dots + c_{n-1} r^n + c_n r^{n+1} ) \\ &\quad - \alpha(c_0 + c_1 r + \dots + c_n r^n) \\ &\quad - i\Lambda m( \quad + c_0 r + \dots + c_{n-1} r^n + c_n r^{n+1} ) \\ &\quad + i[s c_0 + (s+1) c_1 r + \dots + (s+n) c_n r^n] \\ &\quad + i\kappa(a_0 + a_1 r + \dots + a_n r^n) \\ &+ e^{-ir_1} \mathbf{r}( \quad + b_0 r + \dots + b_{n-1} r^n + b_n r^{n+1} ). \end{aligned} \quad (\text{C.120})$$

Et enfin l'équation (C.112) est équivalente à :

$$\begin{aligned}
0 = & -E( \quad + d_0 r + \cdots + d_{n-1} r^n + d_n r^{n+1} ) \\
& -\alpha(d_0 + d_1 r + \cdots + d_n r^n) \\
& -i\Lambda m( \quad + d_0 r + \cdots + d_{n-1} r^n + d_n r^{n+1} ) \\
& +i[sd_0 + (s+1)d_1 r + \cdots + (s+n)d_n r^n] \\
& +i\kappa(b_0 + b_1 r + \cdots + b_n r^n) \\
& -e^{il_1} \mathbf{I}( \quad + a_0 r + \cdots + a_{n-1} r^n + a_n r^{n+1} ).
\end{aligned} \tag{C.121}$$

On obtient donc trois sortes de systèmes : avec indice 0, avec indice entre 0 et  $n$ , et avec indice  $n$ . Pour l'indice zéro, le système dépend seulement de  $\alpha$ ,  $\kappa$  et  $s$  :

$$\begin{aligned}
0 &= (-\alpha - is)a_0 - i\kappa c_0 ; \quad 0 = (-\alpha - is)b_0 - i\kappa d_0, \\
0 &= i\kappa a_0 + (-\alpha + is)c_0 ; \quad 0 = i\kappa b_0 + (-\alpha + is)d_0.
\end{aligned} \tag{C.122}$$

Ces systèmes sont exactement les mêmes qu'avec l'équation de Dirac. Ils sont constitués de sous-systèmes. On n'obtient une solution non nulle que si le déterminant de chaque sous-système est nul, et donc si  $s$  est tel que :

$$0 = (-\alpha - is)(-\alpha + is) - \kappa^2 ; \quad \kappa^2 = s^2 + \alpha^2 ; \quad s = \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2}. \tag{C.123}$$

C'est de là que vient la condition  $\kappa \neq 0$ . Posons :

$$s + i\alpha := |\kappa|e^{i\gamma} ; \quad s - i\alpha = |\kappa|e^{-i\gamma}. \tag{C.124}$$

Le système (C.122) donne :

$$c_0 = \frac{i\alpha - s}{|\kappa|} a_0 = -e^{-i\gamma} a_0 ; \quad d_0 = \frac{i\alpha - s}{|\kappa|} b_0 = -e^{-i\gamma} b_0. \tag{C.125}$$

Avec l'indice  $n$  on a le système suivant :

$$\begin{aligned}
0 &= (-E + i\Lambda m)a_n + e^{-ir_1} \mathbf{r} d_n ; \quad 0 = (-E + i\Lambda m)b_n - e^{il_1} \mathbf{l} c_n, \\
0 &= -(E + i\Lambda m)d_n - e^{il_1} \mathbf{l} a_n ; \quad 0 = -(E + i\Lambda m)c_n + e^{-ir_1} \mathbf{r} b_n.
\end{aligned} \tag{C.126}$$

Ce système forme deux sous-systèmes semblables, avec le même déterminant  $D$ . Une solution non nulle n'existe que si le déterminant est nul, ce qui donne :

$$0 = D = \begin{vmatrix} -E + i\Lambda m & e^{-ir_1} \mathbf{r} \\ -e^{il_1} \mathbf{l} & -E - i\Lambda m \end{vmatrix} = E^2 + \Lambda^2 m^2 - e^{i(l_1 - r_1 + \pi)} \mathbf{l} \mathbf{r}, \tag{C.127}$$

On n'obtient la relation attendue pour la masse-énergie que si :

$$l_1 - r_1 = \pi \bmod 2\pi ; \quad e^{ir_1} = -e^{il_1}. \tag{C.128}$$

Et alors on a :

$$\begin{aligned} 0 = D &\Leftrightarrow \mathbf{lr} = E^2 + \Lambda^2 m^2, \\ 0 = D &\Leftrightarrow E^2 + \Lambda^2 m^2 = m_g^2. \end{aligned} \quad (\text{C.129})$$

Il existe alors un nombre  $\delta$  tel que

$$E + i\Lambda m := m_g e^{i\delta}; \quad E - i\Lambda m = m_g e^{-i\delta}. \quad (\text{C.130})$$

Le système (C.126) se réduit alors à :

$$d_n = \frac{E - i\Lambda m}{e^{-ir_1 \mathbf{r}}} a_n = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 - \delta)} a_n, \quad (\text{C.131})$$

$$b_n = \frac{E + i\Lambda m}{e^{-ir_1 \mathbf{r}}} c_n = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 + \delta)} c_n. \quad (\text{C.132})$$

### C.2.1 Cas où $n = 0$

Si  $n = 0$ , c'est-à-dire si les polynômes radiaux sont des constantes, le système radial se réduit à (C.125), (C.131) et (C.132), et on a donc :

$$d_0 = \frac{E - i\Lambda m}{e^{-ir_1 \mathbf{r}}} a_0 = \frac{i\alpha - s}{|\kappa|} b_0, \quad (\text{C.133})$$

$$c_0 = \frac{E + i\Lambda m}{e^{ir_1 \mathbf{l}}} b_0 = \frac{i\alpha - s}{|\kappa|} a_0. \quad (\text{C.134})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{(E - i\Lambda m)^2}{\mathbf{lr}} a_0 b_0 &= \frac{(i\alpha - s)^2}{\kappa^2} b_0 a_0, \\ \frac{E - i\Lambda m}{m_g} &= \mp \frac{s - i\alpha}{|\kappa|}. \end{aligned} \quad (\text{C.135})$$

Et comme  $E$ ,  $s$  et  $m_g$  sont positifs, on a une seule possibilité :

$$\begin{aligned} \frac{E}{m_g} &= \frac{s}{|\kappa|}; \quad \frac{\Lambda m}{m_g} = \frac{\alpha}{|\kappa|}; \quad \alpha E = s\Lambda m, \\ \alpha^2 E^2 &= s^2(m_g^2 - E^2); \quad E^2 = \frac{s^2 m_g^2}{s^2 + \alpha^2}, \\ E &= \frac{m_g}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(s+0)^2}}}, \end{aligned} \quad (\text{C.136})$$

qui est la formule de Sommerfeld pour  $n = 0$ .

### C.2.2 Cas $n > 0$

Dans ce cas, il existe au moins un système contenant deux indices consécutifs :

$$0 = (E - i\Lambda m)a_{n-1} + [\alpha + i(s+n)]a_n + i\kappa c_n - e^{-ir_1}\mathbf{r}d_{n-1}, \quad (\text{C.137})$$

$$0 = (E - i\Lambda m)b_{n-1} + [\alpha + i(s+n)]b_n + i\kappa d_n - e^{ir_1}\mathbf{l}c_{n-1}, \quad (\text{C.138})$$

$$0 = (E + i\Lambda m)c_{n-1} + [\alpha - i(s+n)]c_n - i\kappa a_n - e^{-ir_1}\mathbf{r}b_{n-1}, \quad (\text{C.139})$$

$$0 = (E + i\Lambda m)d_{n-1} + [\alpha - i(s+n)]d_n - i\kappa b_n - e^{ir_1}\mathbf{l}a_{n-1}. \quad (\text{C.140})$$

En multipliant (C.137) par  $E + i\Lambda m$ , (C.140) par  $e^{-ir_1}\mathbf{r}$ , et en ajoutant, on supprime les termes d'indice  $n-1$ , et cela donne :

$$\begin{aligned} 0 = & (E + i\Lambda m)[\alpha + i(s+n)]a_n - i\kappa e^{-ir_1}\mathbf{r}b_n \\ & + i\kappa(E + i\Lambda m)c_n + e^{-ir_1}\mathbf{r}[\alpha - i(s+n)]d_n. \end{aligned} \quad (\text{C.141})$$

Dans le cas où  $n$  est le plus grand des indices, c'est-à-dire le degré des polynômes radiaux, on peut utiliser les égalités (C.131) et (C.132), ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 = & (E + i\Lambda m)[\alpha + i(s+n)]a_n - i\kappa e^{-ir_1}\mathbf{r} \frac{e^{ir_1}\mathbf{l}}{E - i\Lambda m} c_n \\ & + i\kappa(E + i\Lambda m)c_n + e^{-ir_1}\mathbf{r}[\alpha - i(s+n)] \frac{E - i\Lambda m}{e^{-ir_1}\mathbf{r}} a_n \\ = & [(E + i\Lambda m)[\alpha + i(s+n)] + [\alpha - i(s+n)](E - i\Lambda m)]a_n. \end{aligned} \quad (\text{C.142})$$

Ceci n'est possible, puisque  $a_n \neq 0$ , que si :

$$\begin{aligned} 0 = & (E + i\Lambda m)[\alpha + i(s+n)] + [\alpha - i(s+n)](E - i\Lambda m), \\ \alpha E = & (s+n)\Lambda m, \\ \alpha E = & (s+n)\sqrt{m_g^2 - E^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.143})$$

On en déduit :

$$\alpha^2 E^2 = (s+n)^2(m_g^2 - E^2), \quad (\text{C.144})$$

$$[\alpha^2 + (s+n)^2]E^2 = (s+n)^2 m_g^2, \quad (\text{C.145})$$

$$E^2 = \frac{(s+n)^2 m_g^2}{(s+n)^2 + \alpha^2}, \quad (\text{C.146})$$

$$E = \frac{m_g}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(s+n)^2}}}. \quad (\text{C.147})$$

Cette formule, d'abord obtenue par Sommerfeld dans le cadre de la théorie corpusculaire de Bohr, est donc vraie pour tout entier naturel  $n$ . On en

déduit :

$$m_g e^{i\delta} = E + i\Lambda m = \frac{E}{s+n}(s+n+i\alpha), \quad (\text{C.148})$$

$$E = \frac{(s+n)m_g}{\sqrt{(s+n)^2 + \alpha^2}}; \quad e^{i\delta} = \frac{s+n+i\alpha}{\sqrt{\kappa^2 + 2sn + n^2}}. \quad (\text{C.149})$$

Pour un indice intermédiaire  $j$  quelconque, le système (C.137) à (C.140) permet de calculer les termes d'indice  $j$  à partir des termes d'indice  $j-1$  :

$$(s+j-i\alpha)a_j + \kappa c_j = (\Lambda m + iE)a_{j-1} - ie^{-ir_1} \mathbf{r} d_{j-1} \quad (\text{C.150})$$

$$\kappa a_j + (s+j+i\alpha)c_j = (\Lambda m - iE)c_{j-1} + ie^{-ir_1} \mathbf{r} b_{j-1} \quad (\text{C.151})$$

$$(s+j+i\alpha)d_j + \kappa b_j = (\Lambda m - iE)d_{j-1} + ie^{ir_1} \mathbf{l} a_{j-1} \quad (\text{C.152})$$

$$\kappa d_j + (s+j-i\alpha)b_j = (\Lambda m + iE)b_{j-1} - ie^{ir_1} \mathbf{l} c_{j-1}. \quad (\text{C.153})$$

Ceci nous donne :

$$\begin{pmatrix} a_j \\ c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+j+i\alpha}{j(2s+j)} & \frac{-\kappa}{j(2s+j)} \\ \frac{-\kappa}{j(2s+j)} & \frac{s+j-i\alpha}{j(2s+j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Lambda m + iE)a_{j-1} - ie^{-ir_1} \mathbf{r} d_{j-1} \\ (\Lambda m - iE)c_{j-1} + ie^{-ir_1} \mathbf{r} b_{j-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.154})$$

$$\begin{pmatrix} b_j \\ d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+j+i\alpha}{j(2s+j)} & \frac{-\kappa}{j(2s+j)} \\ \frac{-\kappa}{j(2s+j)} & \frac{s+j-i\alpha}{j(2s+j)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Lambda m + iE)b_{j-1} - ie^{ir_1} \mathbf{l} c_{j-1} \\ (\Lambda m - iE)d_{j-1} + ie^{ir_1} \mathbf{l} a_{j-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.155})$$

Et l'on obtient les relations de récurrence :

$$j(2s+j)a_j = (s+j+i\alpha)[(\Lambda m + iE)a_{j-1} - ie^{-ir_1} \mathbf{r} d_{j-1}] - \kappa[(\Lambda m - iE)c_{j-1} + ie^{-ir_1} \mathbf{r} b_{j-1}] \quad (\text{C.156})$$

$$j(2s+j)c_j = -\kappa[(\Lambda m + iE)a_{j-1} - ie^{-ir_1} \mathbf{r} d_{j-1}] + (s+j-i\alpha)[(\Lambda m - iE)c_{j-1} + ie^{-ir_1} \mathbf{r} b_{j-1}] \quad (\text{C.157})$$

$$j(2s+j)b_j = (s+j+i\alpha)[(\Lambda m + iE)b_{j-1} - ie^{ir_1} \mathbf{l} c_{j-1}] - \kappa[(\Lambda m - iE)d_{j-1} + ie^{ir_1} \mathbf{l} a_{j-1}] \quad (\text{C.158})$$

$$j(2s+j)d_j = -\kappa[(\Lambda m + iE)b_{j-1} - ie^{ir_1} \mathbf{l} c_{j-1}] + (s+j-i\alpha)[(\Lambda m - iE)d_{j-1} + ie^{ir_1} \mathbf{l} a_{j-1}]. \quad (\text{C.159})$$

La résolution de l'équation d'onde se termine par le calcul de la normalisation, qui nécessite le calcul de  $\mathbf{J}^0$ . On a :

$$\mathbf{D}_R = \phi p_r \phi^\dagger; \quad \mathbf{D}_L = \phi p_l \phi^\dagger, \quad (\text{C.160})$$

$$1 = \iiint d\mathbf{v} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{1}{k\hbar c} \iiint d\mathbf{v} \left( \frac{m}{\mathbf{l}} \mathbf{D}_L^0 + \frac{m}{\mathbf{r}} \mathbf{D}_R^0 \right).$$

En coordonnées sphériques, ceci nous donne :

$$1 = l_P^{-3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \left( \frac{m}{\mathbf{l}} \mathbf{D}_L^0 + \frac{m}{\mathbf{r}} \mathbf{D}_R^0 \right) d\varphi. \quad (\text{C.161})$$

### C.3 Cas des petits nombres quantiques

Le degré des polynômes  $U_1$  et  $V_1$  est  $n = |\kappa| - 1/2 - |\lambda|$ , donc la valeur absolue de  $\lambda$  est un demi-entier inférieur strictement à la valeur absolue de  $\kappa$ . Pour le nombre quantique principal  $\mathbf{n} = 1$ , et comme la plus petite valeur possible de  $|\kappa|$  est 1, le degré  $n$  des polynômes radiaux est nécessairement 0 : ce sont les états  $1s_{1/2}$  :  $n = 0$ ,  $|\kappa| = 1$ ,  $\lambda = \pm 1/2$ . Ensuite, pour la somme  $|\kappa| + n$ , si  $\mathbf{n} = 2$ , il y a seulement deux possibilités, car  $2 = 2 + 0 = 1 + 1$ . Si  $|\kappa| = 2$  alors  $n = 0$  et  $|\lambda|$  est inférieur à 2, donc on a 4 états  $2p_{3/2}$  :  $\lambda = \pm 3/2$  et  $\lambda = \pm 1/2$ . La seconde possibilité est  $|\kappa| = 1$ , pour laquelle  $|\lambda|$  est inférieur à 1, donc ne peut valoir que 1/2. Cela nous donne les deux états  $2s_{1/2}$  ;  $|\kappa| = 1$ ,  $\lambda = \pm 1/2$ , dont on va voir qu'ils sont doubles.

#### C.3.1 Etats $1s_{1/2}$

Comme  $\kappa = 1$  et  $\lambda = 1/2$ , (C.48) et (C.52) donnent :

$$U_1 = -1; V_1 = -1; \mathbf{F}_1 = -\frac{A}{r}; \mathbf{F}_2 = -\frac{\bar{D}}{r}; \mathbf{F}_3 = -\frac{C}{r}; \mathbf{F}_4 = -\frac{\bar{B}}{r}. \quad (\text{C.162})$$

Avec (C.74) on obtient alors ;

$$\phi = -\frac{S}{r} \begin{pmatrix} \underline{c}A & -\underline{s}\bar{B} \\ \underline{s}C & \underline{c}\bar{D} \end{pmatrix} e^{pi_3}; \quad p = \frac{\varphi}{2} - Ex^0, \quad (\text{C.163})$$

$$\rho e^{i\beta} = \frac{1}{r^2} (\underline{c}^2 A \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{B}), \quad (\text{C.164})$$

$$D_0 = \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{c}^2 A \bar{A} + \underline{s}^2 B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (A \bar{C} - D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (C \bar{A} - B \bar{D}) & \underline{c}^2 D \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{C} \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (\text{C.165})$$

$$D_3 = \phi \sigma_3 \phi^\dagger = \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{c}^2 A \bar{A} - \underline{s}^2 B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (A \bar{C} + D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (C \bar{A} + B \bar{D}) & -\underline{c}^2 D \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{C} \end{pmatrix} S^{-1}$$

$$D_0^0 = \frac{1}{2r^2} (\underline{c}^2 A \bar{A} + \underline{s}^2 B \bar{B} + \underline{c}^2 D \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{C}), \quad (\text{C.166})$$

$$D_3^0 = \frac{1}{2r^2} (\underline{c}^2 A \bar{A} - \underline{s}^2 B \bar{B} - \underline{c}^2 D \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{C}). \quad (\text{C.167})$$

On pose :

$$|a_0| := \alpha_1; \quad a_0 := \alpha_1 e^{i\alpha_2}; \quad 2\zeta := \ln 1 - \ln \mathbf{r}. \quad (\text{C.168})$$

Ensuite, comme  $n = 0$  et  $\kappa = 1$ , pour l'état  $1s_{1/2}$  tel que  $\lambda = 1/2$ , on a :

$$E = sm_g; \quad \Lambda m = \alpha m_g; \quad \frac{E - i\Lambda m}{\mathbf{r}} = e^{-i\gamma} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} = e^{\zeta - i\gamma}, \quad (\text{C.169})$$

$$b_0 = -\sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} a_0 = -\alpha_1 e^{\zeta + i\alpha_2}; \quad c_0 = -\alpha_1 e^{i(\alpha_2 - \gamma)}; \quad d_0 = \alpha_1 e^{\zeta + i(\alpha_2 - \gamma)},$$

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_1 e^{-\Lambda m r + i \alpha_2 r^s}; \quad \bar{B} = -\alpha_1 r^s e^{\zeta - \Lambda m r - i \alpha_2} \\
C &= -\alpha_1 e^{i(\alpha_2 - \gamma)} r^s e^{-\Lambda m r}; \quad \bar{D} = \alpha_1 e^{i(\gamma - \alpha_2)} r^s e^{\zeta - \Lambda m r}, \\
A\bar{A} &= C\bar{C} = \alpha_1^2 r^{2s} e^{-2\Lambda m r}, \\
B\bar{B} &= D\bar{D} = \alpha_1^2 \frac{1}{r} r^{2s} e^{-2\Lambda m r}.
\end{aligned} \tag{C.170}$$

$l_P$  étant la longueur de Planck, on obtient donc :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{k}(\mathbf{D}_0 + \frac{d}{m_a} \mathbf{D}_3); \quad \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{2\mathbf{l}}{l_P^3 m_a} \alpha_1^2 r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r}. \tag{C.171}$$

La normalisation de l'onde permet de calculer  $\alpha_1$ , la phase  $\alpha_2$  restant quelconque puisque l'équation d'onde est invariante de jauge :

$$\begin{aligned}
1 &= \iiint d\mathbf{v} \frac{\mathbf{J}_{\pm}^0}{\hbar c} = \frac{\alpha_1^2}{l_P^3} \frac{2\mathbf{l}}{m_a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} dr e^{-2\Lambda m r} r^{2s} \\
&= \frac{8\pi \alpha_1^2 \mathbf{l} \Gamma(2s+1)}{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}; \quad \alpha_1 = \frac{m_a^{1/2} l_P^{3/2} (2\Lambda)^{s+1/2}}{[8\pi \mathbf{l} \Gamma(2s+1)]^{1/2}},
\end{aligned} \tag{C.172}$$

On notera l'unicité de la solution obtenue, à la phase  $\alpha_2$  près.

Pour l'autre état  $1s1/2$ , où  $\kappa = 1$  et  $\lambda = -1/2$  on a :

$$\begin{aligned}
V &= -\sqrt{\sin \theta} \cos \frac{\theta}{2} U_1; \quad U_1 = -1; \quad U = \sqrt{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} V_1; \quad V_1 = -1, \\
r\mathbf{G}_1 &= -A; \quad r\mathbf{G}_3 = -C; \quad r\mathbf{G}_2 = -\bar{B}; \quad r\mathbf{G}_4 = -\bar{D}
\end{aligned} \tag{C.173}$$

$$\phi_{(\lambda=-\frac{1}{2})} = \frac{S}{r} \begin{pmatrix} -\underline{s}A & -\underline{c}\bar{B} \\ \underline{c}C & -\underline{s}\bar{D} \end{pmatrix} e^{p i_3}; \quad p = -\frac{\varphi}{2} - Ex^0, \tag{C.174}$$

et l'on a :

$$\rho e^{i\beta} = \det(\phi) = \underline{s}^2 \mathbf{G}_1 \mathbf{G}_4 + \underline{c}^2 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3 = \frac{1}{r^2} (\underline{s}^2 A \bar{D} + \underline{c}^2 C \bar{B}), \tag{C.175}$$

$$D_0 = \phi \phi^\dagger = \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{s}^2 A \bar{A} + \underline{c}^2 B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (-A \bar{C} + D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (-C \bar{A} + B \bar{D}) & \underline{c}^2 C \bar{C} + \underline{s}^2 D \bar{D} \end{pmatrix} S^{-1}, \tag{C.176}$$

$$D_3 = \phi \sigma_3 \phi^\dagger = \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{s}^2 A \bar{A} - \underline{c}^2 B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (-A \bar{C} - D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (-C \bar{A} - B \bar{D}) & \underline{c}^2 C \bar{C} - \underline{s}^2 D \bar{D} \end{pmatrix} S^{-1}, \tag{C.177}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
2r^2 (\phi \mathbf{m} \phi^\dagger)^0 &= \mathbf{l} (\underline{s}^2 A \bar{A} + \underline{c}^2 C \bar{C}) + \mathbf{r} (\underline{c}^2 B \bar{B} + \underline{s}^2 D \bar{D}) \\
&= \mathbf{l} A \bar{A} + \mathbf{r} B \bar{B}.
\end{aligned} \tag{C.178}$$

Donc la normalisation présente exactement le même résultat que pour la valeur positive du nombre quantique magnétique  $\lambda$ .

### C.3.2 Cas des polynômes radiaux non constants

On pose alors :

$$A := r^s e^{-\Lambda m r} P_a; \quad P_a := a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n, \quad (\text{C.179})$$

$$B := r^s e^{-\Lambda m r} P_b; \quad P_b := b_0 + b_1 r + \cdots + b_n r^n, \quad (\text{C.180})$$

$$C := r^s e^{-\Lambda m r} P_c; \quad P_c := c_0 + c_1 r + \cdots + c_n r^n, \quad (\text{C.181})$$

$$D := r^s e^{-\Lambda m r} P_d; \quad P_d := d_0 + d_1 r + \cdots + d_n r^n. \quad (\text{C.182})$$

Si  $\kappa = 1$  et  $\lambda = 1/2$ ,  $\mathbf{J}^0$  est donné par (C.171) et  $\rho e^{i\beta}$  par (C.164).

Si  $\kappa = 1$  et  $\lambda = -1/2$  alors  $\mathbf{J}^0$  est donné par (C.178) et  $\rho e^{i\beta}$  par (C.175).

### C.3.3 Cas $n = 2$ et $n = 1$ : états $2s1/2$

Dans ce cas particulier on a  $|\kappa| = 1$ , ce qui correspond aux deux états  $2s1/2$ . Dans ces états, on a  $|\lambda| < 1$ , donc  $\lambda$  ne peut prendre que les valeurs  $1/2$  et  $-1/2$ . Du fait que  $\kappa^2 = 1$ , on a :

$$s^2 + \alpha^2 = 1; \quad s = \sqrt{1 - \alpha^2}; \quad s + i\alpha = e^{i\gamma}; \quad s - i\alpha = e^{-i\gamma}; \quad \gamma \approx \alpha, \quad (\text{C.183})$$

$$c_0 = -\frac{e^{-i\gamma}}{|\kappa|} a_0 = -|\kappa| e^{-i\gamma} a_0; \quad d_0 = -\frac{e^{-i\gamma}}{|\kappa|} b_0 = -|\kappa| e^{-i\gamma} b_0, \quad (\text{C.184})$$

$$e^{i\delta} = \frac{s + 1 + i\alpha}{\sqrt{2s + 2}} = \frac{E + i\Lambda m}{m_g}; \quad e^{-i\delta} = \frac{s + 1 - i\alpha}{\sqrt{2s + 2}} = \frac{E - i\Lambda m}{m_g}, \quad (\text{C.185})$$

$$\begin{aligned} e^{2i\delta} &= \frac{(s + 1 + i\alpha)^2}{2s + 2} = \frac{[s^2 + 2s + 1 + 2i(s + 1)\alpha - \alpha^2]}{2s + 2} \\ &= \frac{2s^2 + 2s + (2s + 2)i\alpha}{2s + 2} = s + i\alpha = e^{i\gamma}; \quad \gamma = 2\delta \bmod 2\pi. \end{aligned} \quad (\text{C.186})$$

$$e^{i\delta} = e^{i(\gamma - \delta)}; \quad e^{i(\gamma + \delta)} = e^{3i\delta}. \quad (\text{C.187})$$

On a aussi :

$$d_1 = \frac{E - i\Lambda m}{e^{-ir_1 \mathbf{r}}} a_1 = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 - \delta)} a_1, \quad (\text{C.188})$$

$$b_1 = \frac{E + i\Lambda m}{e^{-ir_1 \mathbf{r}}} c_1 = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 + \delta)} c_1. \quad (\text{C.189})$$

$$aE = (s + 1)\Lambda m; \quad \Lambda m = \frac{\alpha m_g}{\sqrt{2s + 2}}, \quad (\text{C.190})$$

$$\begin{aligned} (s + 1 + i\alpha)(\Lambda m + iE) &= im_g \sqrt{2s + 2}, \\ (s + 1 - i\alpha)(\Lambda m - iE) &= -im_g \sqrt{2s + 2}. \end{aligned} \quad (\text{C.191})$$

Les relations entre coefficients d'indice 0 et coefficients d'indice 1 deviennent :

$$(2s+1)a_1 = (s+1+i\alpha)[(\Lambda m + iE)a_0 - ie^{-ir_1}\mathbf{r}d_0] - |\kappa|[(\Lambda m - iE)c_0 + ie^{-ir_1}\mathbf{r}b_0], \quad (\text{C.192})$$

$$(2s+1)c_1 = -|\kappa|[(\Lambda m + iE)a_0 - ie^{-ir_1}\mathbf{r}d_0] + (s+1-i\alpha)[(\Lambda m - iE)c_0 + ie^{-ir_1}\mathbf{r}b_0] \quad (\text{C.193})$$

$$(2s+1)b_1 = (s+1+i\alpha)[(\Lambda m + iE)b_0 - ie^{ir_1}\mathbf{l}c_0] - |\kappa|[(\Lambda m - iE)d_0 + ie^{ir_1}\mathbf{l}a_0] \quad (\text{C.194})$$

$$(2s+1)d_1 = -|\kappa|[(\Lambda m + iE)b_0 - ie^{ir_1}\mathbf{l}c_0] + (s+1-i\alpha)[(\Lambda m - iE)d_0 + ie^{ir_1}\mathbf{l}b_0]. \quad (\text{C.195})$$

Avec (C.184), (C.192) devient :

$$\begin{aligned} (2s+1)a_1 &= \sqrt{2s+2}e^{i\delta}[im_g e^{-i\delta}a_0 - ie^{-ir_1}\mathbf{r}(-|\kappa|e^{-i\gamma}b_0)] \\ &\quad - |\kappa|[-im_g e^{i\delta}(-\kappa)e^{-i\gamma}a_0 + ie^{-ir_1}\mathbf{r}b_0] \\ &= im_g e^{-i\delta}(\sqrt{2s+2}e^{i\delta}-1)a_0 + i|\kappa|\mathbf{r}e^{-ir_1}(\sqrt{2s+2}e^{-i\delta}-1)b_0 \\ &= im_g e^{i\delta}a_0 + i|\kappa|\mathbf{r}e^{-i(r_1+2\delta)}b_0. \end{aligned} \quad (\text{C.196})$$

De même, (C.193) devient :

$$\begin{aligned} (2s+1)c_1 &= -|\kappa|[im_g e^{-i\delta}a_0 - ie^{-ir_1}\mathbf{r}(-|\kappa|e^{-2i\delta}b_0)] \\ &\quad + \sqrt{2s+2}e^{-i\delta}[-im_g e^{i\delta}(-|\kappa|e^{-2i\delta}a_0) + ie^{-ir_1}\mathbf{r}b_0] \\ &= i|\kappa|m_g e^{-i\delta}(\sqrt{2s+2}e^{-i\delta}-1)a_0 + ie^{-ir_1}\mathbf{r}e^{-2i\delta}(\sqrt{2s+2}e^{i\delta}-1)b_0 \\ &= i|\kappa|m_g e^{-3i\delta}a_0 + ie^{-ir_1}\mathbf{r}b_0. \end{aligned} \quad (\text{C.197})$$

Ceci nous donne, avec (C.188) et (C.189) :

$$a_1 = \frac{i}{2s+1}(m_g e^{i\delta}a_0 + |\kappa|\mathbf{r}e^{-i(2\delta+r_1)}b_0), \quad (\text{C.198})$$

$$b_1 = \frac{i}{2s+1}(m_g e^{i\delta}b_0 + |\kappa|\mathbf{l}e^{i(r_1-2\delta)}a_0), \quad (\text{C.199})$$

$$c_1 = \frac{i}{2s+1}(|\kappa|m_g e^{-3i\delta}a_0 + \mathbf{r}e^{-ir_1}b_0), \quad (\text{C.200})$$

$$d_1 = \frac{i}{2s+1}(|\kappa|m_g e^{-3i\delta}b_0 + \mathbf{l}e^{ir_1}a_0). \quad (\text{C.201})$$

On a aussi :

$$c_0 = -e^{-i\gamma}a_0; \quad d_0 = -e^{-i\gamma}b_0, \quad (\text{C.202})$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{i}{2s+1}(m_g e^{i\delta}a_0 + \mathbf{r}e^{-i(\gamma+r_1)}b_0); \quad b_1 = \frac{i}{2s+1}(m_g e^{i\delta}b_0 + \mathbf{l}e^{i(r_1-\gamma)}a_0), \\ c_1 &= \frac{i}{2s+1}(m_g e^{-3i\delta}a_0 + \mathbf{r}e^{-ir_1}b_0); \quad d_1 = \frac{i}{2s+1}(m_g e^{-3i\delta}b_0 + \mathbf{l}e^{ir_1}a_0). \end{aligned} \quad (\text{C.203})$$

On a obtenu pour l'état  $2s1/2$  de nombres quantiques  $|\kappa| = 1$  et  $\lambda = +1/2$  :

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{S}{r} \begin{pmatrix} \underline{c}A & -\underline{s}\bar{B} \\ \underline{s}C & \underline{c}\bar{D} \end{pmatrix} e^{pi_3}; \quad p = \frac{\varphi}{2} - Ex^0, \\
\rho e^{i\beta} &= \frac{1}{r^2} (\underline{c}^2 A\bar{D} + \underline{s}^2 C\bar{B}) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1+u_3}{2} A\bar{D} + \frac{1-u_3}{2} C\bar{B} \right], \quad (C.204) \\
D_0 &= \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{c}^2 A\bar{A} + \underline{s}^2 B\bar{B} & \underline{s}\underline{c}(A\bar{C} - D\bar{B}) \\ \underline{s}\underline{c}(C\bar{A} - B\bar{D}) & \underline{c}^2 D\bar{D} + \underline{s}^2 C\bar{C} \end{pmatrix} S^{-1}, \\
D_3 &= \phi \sigma_3 \phi^\dagger = \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{c}^2 A\bar{A} - \underline{s}^2 B\bar{B} & \underline{s}\underline{c}(A\bar{C} + D\bar{B}) \\ \underline{s}\underline{c}(C\bar{A} + B\bar{D}) & -\underline{c}^2 D\bar{D} + \underline{s}^2 C\bar{C} \end{pmatrix} S^{-1} \\
D_0^0 &= \frac{1}{2r^2} (\underline{c}^2 A\bar{A} + \underline{s}^2 B\bar{B} + \underline{c}^2 D\bar{D} + \underline{s}^2 C\bar{C}), \quad (C.205) \\
D_3^0 &= \frac{1}{2r^2} (\underline{c}^2 A\bar{A} - \underline{s}^2 B\bar{B} - \underline{c}^2 D\bar{D} + \underline{s}^2 C\bar{C}).
\end{aligned}$$

L'invariant  $\Omega_2$  et l'angle  $\beta$  ne dépendent que de  $r$  et  $u_3$ , et ils s'annulent dans le plan équatorial  $u_3 = 0$ . Dans ce plan équatorial, si  $\Omega_1$  s'annule aussi,  $\rho$  est également nul, alors que la résolution de l'équation repose sur l'équivalence avec l'équation sous forme complètement invariante, donc sur l'hypothèse que la fonction d'onde a ses valeurs dans  $Cl_3^*$ . On peut voir que l'existence de valeurs de  $r$  annulant  $\rho$  vient du terme en  $a_0 b_0^*$  dans  $\Omega_1$ . Il y a cependant une solution à cette difficulté, qui consiste à annuler  $a_0$  ou  $b_0$ . Si  $b_0$  est nul on a :

$$\begin{aligned}
c_0 &= -e^{-i\gamma} a_0; \quad d_0 = b_0 = 0; \quad a_1 = \frac{i}{2s+1} m_g e^{i\delta} a_0, \\
b_1 &= \frac{i}{2s+1} \mathbf{l} e^{i(r_1-\gamma)} a_0; \quad c_1 = \frac{i}{2s+1} m_g e^{-3i\delta} a_0; \quad d_1 = \frac{i}{2s+1} \mathbf{l} e^{ir_1} a_0. \quad (C.206)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A\bar{D}}{r^2} &= r^{2s-2} e^{-2\Lambda mr} (a_0 + a_1 r) \bar{d}_1 r \\
&= r^{2s-1} e^{-2\Lambda mr} \frac{\mathbf{l} a_0 \bar{a}_0}{2s+1} e^{-ir_1} \left( -i + \frac{e^{i\delta}}{2s+1} m_g r \right), \quad (C.207)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C\bar{B}}{r^2} &= r^{2s+2} e^{-2\Lambda mr} (c_0 + c_1 r) \bar{b}_1 r \\
&= r^{2s-1} e^{-2\Lambda mr} \frac{\mathbf{l} a_0 \bar{a}_0}{2s+1} e^{-ir_1} \left( i + \frac{e^{-i\delta}}{2s+1} m_g r \right). \quad (C.208)
\end{aligned}$$

Et alors (C.204) devient :

$$\begin{aligned}
\rho e^{i\beta} &= r^{2s+2} e^{-2\Lambda mr} \frac{\mathbf{l} a_0 \bar{a}_0}{2s+1} e^{-ir_1} \\
&\times \left[ \sqrt{\frac{s+1}{2}} \frac{m_g r}{2s+1} + i u_3 \left( -1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2s+2}(2s+1)} m_g r \right) \right]. \quad (C.209)
\end{aligned}$$

Comme  $\sqrt{\frac{s+1}{2}} \frac{m_g r}{2s+1}$  est strictement positif pour  $r$  non nul, il en est de même de  $\rho : \phi$  est donc bien à valeur dans  $Cl_3^*$ . Il reste à déterminer la valeur du module  $|a_0|$ , grâce à la normalisation. On a :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3} \left( \frac{m}{1} \mathbf{D}_L + \frac{m}{\mathbf{r}} \mathbf{D}_R \right) = \frac{1}{l_P^3} \left( \mathbf{D}_0 + \frac{d}{m_a} \mathbf{D}_3 \right), \quad (\text{C.210})$$

$$\begin{aligned} A\bar{A} &= r^{2s} e^{-2\Lambda m r} (a_0 + a_1 r) (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 r) = C\bar{C} \\ &= |a_0|^2 r^{2s} e^{-2\Lambda m r} \left[ 1 - \frac{2\alpha m_g r}{\sqrt{2s+2}(2s+1)} + \frac{m_g^2 r^2}{(2s+1)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.211})$$

$$B\bar{B} = r^{2s} e^{-2\Lambda m r} (a_1 r) (\bar{a}_1 r) = r^{2s+2} e^{-2\Lambda m r} \frac{|a_0|^2 \mathbf{I}^2}{(2s+1)^2} = D\bar{D}, \quad (\text{C.212})$$

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3 m_a} \frac{S}{r^2} \begin{pmatrix} \underline{c}^2 \mathbf{I} A\bar{A} + \underline{s}^2 \mathbf{r} B\bar{B} & \underline{s} \underline{c} (\mathbf{I} A\bar{C} - \mathbf{r} D\bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (\mathbf{I} C\bar{A} - \mathbf{r} B\bar{D}) & \underline{c}^2 \mathbf{r} D\bar{D} + \underline{s}^2 \mathbf{I} C\bar{C} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (\text{C.213})$$

La normalisation s'obtient grâce à :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} &= \frac{1}{2l_P^3 m_a r^2} [\underline{c}^2 \mathbf{I} A\bar{A} + \underline{s}^2 \mathbf{r} B\bar{B} + \underline{s}^2 \mathbf{I} A\bar{A} + \underline{C}^2 B\bar{B}] \\ &= \frac{1}{2l_P^3 m_a r^2} [\mathbf{I} A\bar{A} + \mathbf{r} B\bar{B}] \end{aligned} \quad (\text{C.214})$$

$$\begin{aligned} 1 &= \iiint d\mathbf{v} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{l\alpha_3^2}{l_P^3 m_a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \\ &\times \int_0^\infty dr r^{2s} e^{-2\Lambda m r} \left[ 1 - \frac{2\alpha m_g r}{\sqrt{2s+2}(2s+1)} + \frac{2m_g^2}{(2s+1)^2} r^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.215})$$

Avec :

$$I_n = \int_0^\infty dr r^{2s+n} e^{-2\Lambda m r} = \frac{\Gamma(2s+1+n)}{(2\Lambda m)^{2s+1+n}}; \quad \nu := \frac{m_g}{m} = \frac{m_a}{m_g}, \quad (\text{C.216})$$

on obtient :

$$1 = \frac{2\pi \mathbf{I} |a_0|^2}{l_P^3 m_a} \left[ I_0 - \frac{2\alpha m_g}{\sqrt{2s+2}(2s+1)} I_1 + \frac{2m_g^2}{(2s+1)^2} I_2 \right], \quad (\text{C.217})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi \mathbf{I} |a_0|^2 \Gamma(2s+1) S}{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}; \quad S = 1 - \frac{\alpha \nu}{\Lambda \sqrt{2s+2}} + \frac{\nu^2 (s+1)}{\Lambda^2 (2s+1)}, \\ |a_0|^2 &= \frac{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{2\pi \mathbf{I} S \Gamma(2s+1)}; \quad |a_0| = \sqrt{\frac{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{2\pi \mathbf{I} S \Gamma(2s+1)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.218})$$

Pour l'état  $2s+1/2$  de nombre quantique magnétique  $\lambda = -1/2$ , on utilise aussi en premier le cas particulier  $b_0 = 0$ . Comme  $|\kappa| = 1$  et  $\lambda = -1/2$  on

a :

$$V = -\sqrt{\sin \theta} \cos \frac{\theta}{2} U_1; \quad U_1 = -1; \quad U = \sqrt{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} V_1; \quad V_1 = -1, \\ r\mathbf{G}_1 = -A; \quad r\mathbf{G}_3 = -C; \quad r\mathbf{G}_2 = -\bar{B}; \quad r\mathbf{G}_4 = -\bar{D} \quad (\text{C.219})$$

$$\phi_{(\lambda=-\frac{1}{2})} = \frac{S}{r} \begin{pmatrix} -sA & -c\bar{B} \\ cC & -s\bar{D} \end{pmatrix} e^{pi_3}; \quad p = -\frac{\varphi}{2} - Ex^0, \quad (\text{C.220})$$

Et on obtient :

$$\bar{\phi} = e^{-pi_3} \begin{pmatrix} -s\bar{D} & c\bar{B} \\ -cC & -sA \end{pmatrix} \frac{S^{-1}}{r} \quad (\text{C.221})$$

$$\phi^\dagger = e^{-pi_3} \begin{pmatrix} -s\bar{A} & c\bar{C} \\ -cB & -sD \end{pmatrix} \frac{S^{-1}}{r} \quad (\text{C.222})$$

$$\phi\bar{\phi} = r^{-2}(s^2 A\bar{D} + c^2 C\bar{B}). \quad (\text{C.223})$$

On étudie ici le cas où  $b_0$  est nul, ce qui donne :

$$c_0 = -e^{-i\gamma} a_0; \quad d_0 = -e^{-i\gamma} b_0 = 0; \quad a_1 = \frac{im_g e^{i\delta}}{2s+1} a_0 \\ b_1 = \frac{ie^{i(-\gamma+r_1)}}{2s+1} a_0; \quad c_1 = \frac{im_g e^{-3i\delta}}{2s+1} a_0; \quad d_1 = \frac{ie^{ir_1}}{2s+1} a_0, \quad (\text{C.224})$$

$$(a_0 + a_1 r) \bar{d}_1 = |a_0|^2 e^{-ir_1} \left( \frac{e^{i\delta}}{(2s+1)^2} m_g r - \frac{i}{2s+1} \right), \quad (\text{C.225})$$

$$(c_0 + c_1 r) \bar{b}_1 = |a_0|^2 e^{-ir_1} \left( \frac{e^{-i\delta}}{(2s+1)^2} m_g r + \frac{i}{2s+1} \right), \quad (\text{C.226})$$

On a alors :

$$\phi\bar{\phi} = r^{2s-1} e^{-2\Lambda mr} \left( \frac{1-u_3}{2} (a_0 + a_1 r) \bar{d}_1 + \frac{1+u_3}{2} (c_0 + c_1 r) \bar{b}_1 \right) \quad (\text{C.227}) \\ = |a_0|^2 \mathbf{l}^{2s} e^{-2\Lambda mr} \left[ \frac{\sqrt{2s+2}}{2(2s+1)^2} m_g r + \frac{iu_3}{2s+1} \left( 1 - \frac{\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} \right) \right].$$

Donc l'onde est bien à valeur sur le groupe  $Cl_3^*$ , comme précédemment. On a, lorsque  $\lambda$  change de signe, juste un changement de signe de  $\beta + r_1$  :

$$\rho e^{i(\beta+r_1)} = \Omega_1 + i\Omega_2; \quad \Omega_1 = |a_0|^2 \mathbf{l}^{2s} e^{-2\Lambda mr} \frac{m_g \sqrt{2s+2}}{(2s+1)^2}, \quad (\text{C.228})$$

$$\Omega_2 = |a_0|^2 \mathbf{l}^{2s} e^{-2\Lambda mr} \frac{u_3}{2s+1} \left( 1 - \frac{\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} \right). \quad (\text{C.229})$$

Ensuite la normalisation calcule :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3 r^2} S \begin{pmatrix} s^2 \mathbf{l} A \bar{A} + c^2 \mathbf{r} B \bar{B} & s c (-\mathbf{l} A \bar{C} + \mathbf{r} D \bar{B}) \\ s c (-\mathbf{l} C \bar{A} + \mathbf{r} B \bar{D}) & c^2 \mathbf{l} C \bar{C} + s^2 \mathbf{r} D \bar{D} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (\text{C.230})$$

La densité de probabilité vaut donc :

$$\frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{1}{2l_P^3 r^2} [\underline{s}^2 \mathbf{1} A \bar{A} + \underline{c}^2 \mathbf{r} B \bar{B} + \underline{c}^2 \mathbf{1} C \bar{C} + \underline{s}^2 \mathbf{r} D \bar{D}]. \quad (\text{C.231})$$

Donc le calcul est le même que pour l'autre signe de  $\lambda$ .

### C.3.4 Cas où $a_0 = 0$

Dans le cas  $\lambda = 1/2$  on a :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{i}{2s+1} \mathbf{r} e^{-i(\gamma+r_1)} b_0; \quad a_0 = c_0 = 0; \quad b_1 = \frac{i}{2s+1} m_g e^{i\delta} b_0, \\ c_1 &= \frac{i}{2s+1} \mathbf{r} e^{-ir_1} b_0; \quad d_1 = \frac{i}{2s+1} m_g e^{-3i\delta} b_0, \end{aligned} \quad (\text{C.232})$$

$$\begin{aligned} A &= b_0 r^{s+1} e^{-\Lambda m r} \frac{i \mathbf{r} e^{-i(\gamma+r_1)}}{2s+1}; \quad B = b_0 r^s e^{-\Lambda m r} \left( 1 + \frac{i m_g r e^{i\delta}}{2s+1} \right), \\ C &= b_0 r^{s+1} e^{-\Lambda m r} \frac{i \mathbf{r}}{2s+1} e^{-ir_1}; \quad D = b_0 r^s e^{-\Lambda m r} \left( -e^{-i\gamma} + \frac{i m_g r}{2s+1} e^{-3i\delta} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.233})$$

Les invariants  $\rho$  et  $\beta$  vérifient :

$$\rho e^{i\beta} = \frac{1}{r^2} (\underline{c}^2 A \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{B}) = \frac{1}{2r^2} [A \bar{D} + C \bar{B} + u_3 (A \bar{D} - C \bar{B})], \quad (\text{C.234})$$

$$\frac{1}{2r^2} (A \bar{D} + C \bar{B}) = r^{2s-1} e^{-2\Lambda m r} |b_0|^2 \left[ \frac{\mathbf{r}}{2s+1} e^{-ir_1} m_g r \cos \delta \right] \quad (\text{C.235})$$

$$\frac{1}{2r^2} (A \bar{D} - C \bar{B}) = i r^{2s-1} e^{-2\Lambda m r} |b_0|^2 \frac{\mathbf{r}}{2s+1} e^{-ir_1} \left( 1 + \frac{m_g r}{2s+1} \sin \delta \right) \quad (\text{C.236})$$

On en déduit que l'on a :

$$\rho e^{i(\beta+r_1)} = \phi \bar{\phi} e^{ir_1} =: \Omega_1 + i\Omega_2 \quad (\text{C.237})$$

$$= \frac{|b_0|^2 \mathbf{1}}{2s+1} r^{2s+1} e^{-2\Lambda m r} \left[ \frac{m_g r}{2s+1} \frac{\sqrt{2s+2}}{2} + i u_3 \left( 1 + \frac{\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} \right) \right].$$

$$\Omega_1 = \frac{|b_0|^2 \mathbf{1}}{2s+1} r^{2s+1} e^{-2\Lambda m r} \frac{m_g r}{2s+1} \frac{\sqrt{2s+2}}{2} \quad (\text{C.238})$$

$$\Omega_2 = \frac{|b_0|^2 \mathbf{1}}{2s+1} r^{2s+1} e^{-2\Lambda m r} u_3 \left( 1 + \frac{\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} \right). \quad (\text{C.239})$$

On peut voir que  $\rho$  est défini en tout point, et que les valeurs des densités relativistes  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont exactement égales partout à celles de l'état  $2s1/2$  de même valeur de  $\lambda$ . On va établir qu'il en est de même pour la normalisation de l'onde. On a :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3 m_a r^2} S \begin{pmatrix} \underline{c}^2 \mathbf{1} A \bar{A} + \underline{s}^2 \mathbf{r} B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (-\mathbf{1} A \bar{C} + \mathbf{r} D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (-\mathbf{1} C \bar{A} + \mathbf{r} B \bar{D}) & \underline{s}^2 \mathbf{1} C \bar{C} + \underline{c}^2 \mathbf{r} D \bar{D} \end{pmatrix} S^{-1} \quad (\text{C.240})$$

Or on a :

$$\begin{aligned} B\bar{B} &= |b_0|^2 r^{2s} e^{-2\Lambda mr} \left[ 1 - \frac{2\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} + \frac{m_g^2 r^2}{(2s+1)^2} \right] = D\bar{D}, \\ A\bar{A} &= |b_0|^2 r^{2s} e^{-2\Lambda mr} \frac{\mathbf{r}^2 r^2}{(2s+1)^2} = C\bar{C}. \end{aligned} \quad (\text{C.241})$$

On obtient donc :

$$\frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{|b_0|^2 \mathbf{r}}{l_P^3 m_a} r^{2s-2} e^{-2\Lambda mr} \left[ 1 - \frac{2\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} + \frac{2m_g^2 r^2}{(2s+1)^2} \right]. \quad (\text{C.242})$$

Donc la normalisation de l'onde lorsque  $\lambda = 1/2$  et  $a_0 = 0$  est exactement la même que pour l'état avec  $\lambda = 1/2$  et  $b_0 = 0$ .

Avec  $a_0 = 0$ , on obtient ensuite pour l'état de nombre quantique magnétique  $\lambda = -1/2$  :

$$\begin{aligned} V &= -\sqrt{\sin \theta} \cos \frac{\theta}{2} U_1; \quad U_1 = -1; \quad U = \sqrt{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} V_1; \quad V_1 = -1, \\ r\mathbf{G}_1 &= -A; \quad r\mathbf{G}_3 = -C; \quad r\mathbf{G}_2 = -\bar{B}; \quad r\mathbf{G}_4 = -\bar{D} \end{aligned} \quad (\text{C.243})$$

$$\phi_{(\lambda=-\frac{1}{2})} = \frac{S}{r} \begin{pmatrix} -\underline{s}A & -\underline{c}\bar{B} \\ \underline{c}C & -\underline{s}\bar{D} \end{pmatrix} e^{pi_3}; \quad p = -\frac{\varphi}{2} - Ex^0, \quad (\text{C.244})$$

Et on obtient :

$$\bar{\phi} = e^{-pi_3} \begin{pmatrix} -\underline{s}\bar{D} & \underline{c}\bar{B} \\ -\underline{c}C & -\underline{s}A \end{pmatrix} \frac{S^{-1}}{r} \quad (\text{C.245})$$

$$\phi^\dagger = e^{-pi_3} \begin{pmatrix} -\underline{s}\bar{A} & \underline{c}\bar{C} \\ -\underline{c}B & -\underline{s}D \end{pmatrix} \frac{S^{-1}}{r} \quad (\text{C.246})$$

$$\phi\bar{\phi} = r^{-2}(\underline{s}^2 A\bar{D} + \underline{c}^2 C\bar{B}). \quad (\text{C.247})$$

On a choisi ici le cas où  $a_0$  est nul, ce qui donne :

$$\begin{aligned} d_0 &= -e^{-i\gamma} b_0; \quad c_0 = -e^{-i\gamma} a_0 = 0; \quad b_1 = \frac{im_g e^{i\delta}}{2s+1} b_0 \\ a_1 &= \frac{i\mathbf{r} e^{i(-\gamma-r_1)}}{2s+1} b_0; \quad d_1 = \frac{im_g e^{-3i\delta}}{2s+1} b_0; \quad c_1 = \frac{i\mathbf{r} e^{-ir_1}}{2s+1} b_0, \end{aligned} \quad (\text{C.248})$$

$$a_1 r(\bar{d}_0 + \bar{d}_1 r) = |b_0|^2 e^{-ir_1} \mathbf{r} r \left( \frac{e^{i\delta}}{(2s+1)^2} m_g r - \frac{i}{2s+1} \right), \quad (\text{C.249})$$

$$c_1 r(\bar{b}_0 \bar{b}_1 r) = |b_0|^2 \mathbf{r} r e^{-ir_1} \left( \frac{e^{-i\delta}}{(2s+1)^2} m_g r + \frac{i}{2s+1} \right), \quad (\text{C.250})$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \phi\bar{\phi} &= r^{2s-1} e^{-2\Lambda mr} \left( \frac{1-u_3}{2} a_1 r(\bar{b}_0 + \bar{d}_1 r) + \frac{1+u_3}{2} c_1 r(\bar{b}_0 + \bar{b}_1 r) \right) \quad (\text{C.251}) \\ &= |b_0|^2 \mathbf{r} r^{2s} e^{-2\Lambda mr} \left[ \frac{\sqrt{2s+2}}{2(2s+1)^2} m_g r + \frac{i u_3}{2s+1} \left( 1 - \frac{\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Donc l'onde est bien à valeur sur le groupe  $Cl_3^*$ , comme précédemment. On a, lorsque  $\lambda$  change de signe, juste un changement de signe de  $\beta + r_1$  :

$$\rho e^{i(\beta+r_1)} = \Omega_1 + i\Omega_2; \quad \Omega_1 = |b_0|^2 \mathbf{r} r^{2s} e^{-2\Lambda m r} \frac{m_g \sqrt{2s+2}}{(2s+1)^2}, \quad (\text{C.252})$$

$$\Omega_2 = |b_0|^2 \mathbf{r} r^{2s} e^{-2\Lambda m r} \frac{u_3}{2s+1} \left( 1 - \frac{\alpha m_g r}{(2s+1)\sqrt{2s+2}} \right). \quad (\text{C.253})$$

Ensuite la normalisation calcule :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{1}{l_P^3 r^2} S \begin{pmatrix} \underline{s}^2 \mathbf{l} A \bar{A} + \underline{c}^2 \mathbf{r} B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (-\mathbf{l} A \bar{C} + \mathbf{r} D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (-\mathbf{l} C \bar{A} + \mathbf{r} B \bar{D}) & \underline{c}^2 \mathbf{l} C \bar{C} + \underline{s}^2 \mathbf{r} D \bar{D} \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (\text{C.254})$$

La densité de probabilité vaut donc :

$$\frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{1}{2l_P^3 r^2} [\underline{s}^2 \mathbf{l} A \bar{A} + \underline{c}^2 \mathbf{r} B \bar{B} + \underline{c}^2 \mathbf{l} C \bar{C} + \underline{s}^2 \mathbf{r} D \bar{D}]. \quad (\text{C.255})$$

Donc le calcul est le même que pour l'autre signe de  $\lambda$ .

### C.3.5 Cas des états $2p_{3/2}$

Ces états ont un nombre quantique  $n$  nul, c'est-à-dire des polynômes radiaux constants. On a ici :

$$\begin{aligned} \kappa = 2; \quad \kappa^2 = 4 = s^2 + \alpha^2; \quad s = \sqrt{4 - \alpha^2}; \quad s + i\alpha =: 2e^{i\gamma}, \\ E + i\Lambda m = m_g e^{i\gamma}; \quad \alpha E = s\Lambda m; \quad E = \frac{sm_g}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.256})$$

$$d_0 = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 - \gamma)} a_0; \quad c_0 = -e^{-i\gamma} a_0; \quad b_0 = -\sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{ir_1} a_0.$$

Les fonctions radiales vérifient donc :

$$\begin{aligned} A = a_0 r^s e^{-\Lambda m r}; \quad C = -a_0 e^{-i\gamma} r^s e^{-\Lambda m r}, \\ B = -\sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{ir_1} a_0 r^s e^{-\Lambda m r}; \quad D = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i(r_1 - \gamma)} a_0 r^s e^{-\Lambda m r}. \end{aligned} \quad (\text{C.257})$$

Les fonctions angulaires sont données par :

$$U_1 = (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2})(\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}} \quad (\text{C.258})$$

$$\times \sum_{j=0}^{j=|\kappa| - |\lambda| - \frac{1}{2}} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - |\kappa|)_j (|\lambda| + |\kappa| + \frac{1}{2})_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_j j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}),$$

$$V_1 = \kappa(|\lambda| - \frac{1}{2} - \kappa)(\sin \theta)^{|\lambda| - \frac{1}{2}} \quad (\text{C.259})$$

$$\times \sum_{j=0}^{j=|\kappa| - |\lambda| - \frac{1}{2}} \frac{(|\lambda| + \frac{1}{2} - |\kappa|)_j (|\lambda| + \frac{1}{2} + |\kappa|)_j}{(|\lambda| + \frac{1}{2})_{j+1} j!} \sin^{2j}(\frac{\theta}{2}).$$

**Etat  $2p_{3/2}$ ,  $\lambda = 3/2$**

Les fonctions angulaires vérifient alors :

$$U_1 = \left(\frac{3}{2} - 2 - \frac{1}{2}\right)(\sin \theta)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{j=2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \frac{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2)_j (\frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{2})_j}{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2})_j j!} \sin^{2j} \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ = -\sin \theta, \quad (C.260)$$

$$V_1 = 2\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2\right)(\sin \theta)^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{j=2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \frac{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2)_j (\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2)_j}{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2})_{j+1} j!} \sin^{2j} \left(\frac{\theta}{2}\right) \\ = 2(-\sin \theta) \frac{1}{2} = -\sin \theta \quad (C.261)$$

On a donc :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{-\sin \theta}{r} A; \quad \mathbf{F}_2 = \frac{-\sin \theta}{r} \bar{D}; \quad \mathbf{F}_3 = \frac{-\sin \theta}{r} C; \quad \mathbf{F}_4 = \frac{-\sin \theta}{r} \bar{B}. \quad (C.262)$$

$$\phi = S \begin{pmatrix} \underline{c}\mathbf{F}_1 & -\underline{s}\mathbf{F}_4 \\ \underline{s}\mathbf{F}_3 & \underline{c}\mathbf{F}_2 \end{pmatrix} e^{p i_3}, \quad p = \frac{3\varphi}{2} - E x^0, \quad (C.263)$$

$$\phi = -\frac{\sin \theta}{r} S \begin{pmatrix} \underline{c}A & -\underline{s}\bar{B} \\ \underline{s}C & \underline{c}\bar{D} \end{pmatrix} e^{p i_3} \quad (C.264)$$

Ceci donne :

$$\rho e^{i\beta} = \frac{\sin^2 \theta}{r^2} (\underline{c}^2 A \bar{D} + \underline{s}^2 C \bar{B}) \\ = \frac{|a_0|^2}{2} \sin^2 \theta r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{-i r_1} (s + i u_3 \alpha), \quad (C.265)$$

$$\phi^\dagger = -\frac{\sin \theta}{r} e^{-p i_3} \begin{pmatrix} \underline{c}\bar{A} & \underline{s}\bar{C} \\ -\underline{s}B & \underline{c}D \end{pmatrix} S^{-1} \quad (C.266)$$

Il en résulte :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{\sin^2 \theta}{r^2} S \begin{pmatrix} \underline{c}^2 \mathbf{1} A \bar{A} + \underline{s}^2 \mathbf{r} B \bar{B} & \underline{s} \underline{c} (\mathbf{1} A \bar{C} - \mathbf{r} D \bar{B}) \\ \underline{s} \underline{c} (\mathbf{1} C \bar{A} - \mathbf{r} B \bar{D}) & \underline{s}^2 \mathbf{1} C \bar{C} + \underline{c}^2 \mathbf{r} D \bar{D} \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (C.267)$$

$$1 = \iiint d\mathbf{v} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{|a_0|^2 \mathbf{1}}{l_p^3 m_a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^3 \theta \int_0^\infty dr r^{2s} e^{-2\Lambda m r} \\ = \frac{|a_0|^2 \mathbf{1}}{l_p^3 m_a} (2\pi) \frac{4}{3} \frac{\Gamma(2s+1)}{(2\Lambda m)^{2s+1}}, \quad (C.268)$$

$$|a_0| = \sqrt{\frac{3 l_p^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{8\pi \mathbf{1} \Gamma(2s+1)}}. \quad (C.269)$$

**Etat**  $2p_{3/2}$ ,  $\lambda = 1/2$

Les fonctions angulaires  $U_1$  et  $V_1$  vérifient :

$$U_1 = -2 \sum_{j=0}^{j=1} \frac{(-1)_j (3)_j}{(1)_j j!} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j} = -1 + 3 \cos \theta \quad (\text{C.270})$$

$$V_1 = 2(-2) \sum_{j=0}^{j=1} \frac{(-1)_j (3)_j}{(1)_{j+1} j!} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2j} = -1 - 3 \cos \theta. \quad (\text{C.271})$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \frac{-1 + 3 \cos \theta}{r} A; \quad \mathbf{F}_2 = \frac{-1 + 3 \cos \theta}{r} \bar{D} \\ \mathbf{F}_3 &= -\frac{1 + 3 \cos \theta}{r}; \quad \mathbf{F}_4 = -\frac{1 + 3 \cos \theta}{r} \bar{B}, \end{aligned} \quad (\text{C.272})$$

$$\phi = S \begin{pmatrix} \underline{c} \frac{-1+3 \cos \theta}{r} A & \underline{s} \frac{1+3 \cos \theta}{r} \bar{B} \\ -\underline{s} \frac{1+3 \cos \theta}{r} C & \underline{c} \frac{-1+3 \cos \theta}{r} \bar{D} \end{pmatrix} e^{p i_3}; \quad p = \frac{\lambda}{2} - E x^0. \quad (\text{C.273})$$

Avec  $\underline{c}^2 = \frac{1+u_3}{2}$  et  $\underline{s}^2 = \frac{1-u_3}{2}$  nous avons :

$$\phi \bar{\phi} = \underline{c}^2 \left( \frac{-1 + 3u_3}{r} \right)^2 A \bar{D} + \underline{s}^2 \left( \frac{1 + 3u_3}{r} \right)^2 C \bar{B}, \quad (\text{C.274})$$

$$A \bar{D} = |a_0| r^{2s} e^{-2\Lambda m r} e^{-ir_1} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i\gamma}; \quad C \bar{B} = |a_0| r^{2s} e^{-2\Lambda m r} e^{-ir_1} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i\gamma}.$$

Donc on obtient :

$$\phi \bar{\phi} = |a_0|^2 r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r} e^{-ir_1} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} [s(1 + 3u_3^2) + i\alpha(9u_3^3 - 5u_3)]. \quad (\text{C.275})$$

Donc  $\rho$  est partout non nul et  $\phi$  est bien à valeur dans  $Cl_3^*$ . Ensuite on a :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{S}{l_P^3 m_a} \begin{pmatrix} j_0 + j_3 & j_1 - ij_2 \\ j_1 + ij_2 & j_0 - j_3 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (\text{C.276})$$

$$j_0 + j_3 = \underline{c}^2 \frac{(1 - 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{I} A \bar{A} + \underline{s}^2 \frac{(1 + 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{r} B \bar{B}, \quad (\text{C.277})$$

$$j_0 - j_3 = \underline{s}^2 \frac{(1 + 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{I} C \bar{C} + \underline{c}^2 \frac{(1 - 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{r} D \bar{D}, \quad (\text{C.278})$$

$$j_1 + ij_2 = \underline{s} \underline{c} \frac{1 - 9u_3^2}{r^2} (\mathbf{I} C \bar{A} - \mathbf{r} B \bar{D}) \quad (\text{C.279})$$

car  $u_3 = \cos \theta$ . Ceci nous donne :

$$\frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} = \frac{|a_0|^2}{l_P^3 m_a} (1 + 3u_3^2) r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r}, \quad (\text{C.280})$$

$$\begin{aligned} 1 &= \iiint d\mathbf{v} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} \\ &= \frac{|a_0|^2}{l_P^3 m_a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta (1 + 3 \cos^2 \theta) \int_0^\infty dr r^{2s} e^{-2\Lambda m r} \\ &= \frac{|a_0|^2}{l_P^3 m_a} \frac{8\pi \Gamma(2s+1)}{(2\Lambda m)^{2s+1}}; \quad |a_0| = \sqrt{\frac{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{8\pi \Gamma(2s+1)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.281})$$

**Etat  $2p_{3/2}$ ,  $\lambda = -1/2$**

Les fonctions angulaires vérifient alors :

$$\begin{aligned} U_1 &= (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{n=\kappa-|\lambda|-1/2} \frac{(|\lambda| - \kappa + \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_n n!} \sin^{2n} \frac{\theta}{2}, \\ &= -2 \sum_{n=0}^{n=1} \frac{(-1)_n (3)_n}{(1)_n n!} \sin^{2n} \frac{\theta}{2} = 1 - 3 \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{C.282})$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \kappa (|\lambda| - \kappa - \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{n=\kappa-|\lambda|-1/2} \frac{(|\lambda| - \kappa + \frac{1}{2})_n (|\lambda| + \kappa + \frac{1}{2})_n}{(\frac{1}{2} + |\lambda|)_{1+n} n!} \sin^{2n} \frac{\theta}{2}, \\ &= -1 - 3 \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{C.283})$$

On a :

$$\begin{aligned} \phi \bar{\phi} &= \underline{c}^2 \left( \frac{-1 + 3u_3}{r} \right)^2 A \bar{D} + \underline{s}^2 \left( \frac{1 + 3u_3}{r} \right)^2 C \bar{B}, \quad (\text{C.284}) \\ A \bar{D} &= |a_0| r^{2s} e^{-2\Lambda m r} e^{-ir_1} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i\gamma}; \quad C \bar{B} = |a_0| r^{2s} e^{-2\Lambda m r} e^{-ir_1} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} e^{i\gamma}. \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\phi \bar{\phi} = |a_0|^2 r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r} e^{-ir_1} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} [s(1 + 3u_3^2) + i\alpha(9u_3^3 - 5u_3)]. \quad (\text{C.285})$$

donc l'onde  $\phi$  est bien à valeur dans  $Cl_3^*$ . Ensuite on a :

$$\frac{\mathbf{J}}{\hbar c} = \frac{S}{l_P^3 m_a} \begin{pmatrix} j_0 + j_3 & j_1 - ij_2 \\ j_1 + ij_2 & j_0 - j_3 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad (\text{C.286})$$

$$j_0 + j_3 = \underline{c}^2 \frac{(1 - 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{l} A \bar{A} + \underline{s}^2 \frac{(1 + 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{r} B \bar{B}, \quad (\text{C.287})$$

$$j_0 - j_3 = \underline{s}^2 \frac{(1 + 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{l} C \bar{C} + \underline{c}^2 \frac{(1 - 3u_3)^2}{r^2} \mathbf{r} D \bar{D}, \quad (\text{C.288})$$

$$j_1 + ij_2 = \underline{s} \underline{c} \frac{1 - 9u_3^2}{r^2} (\mathbf{l} C \bar{A} - \mathbf{r} B \bar{D}) \quad (\text{C.289})$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}^0}{\hbar c} &= \frac{1}{l_P^3 m_a} (\phi \mathbf{m} \phi^\dagger)^0 = \frac{|a_0|^2 \mathbf{l} r^{2s} e^{-2\Lambda m r}}{l_P^3 m_a r^2} (1 + 9 \cos^2 \theta - 6u_3 \cos \theta). \\ &= \frac{|a_0|^2 \mathbf{l} r^{2s} e^{-2\Lambda m r}}{l_P^3 m_a r^2} (1 + 3 \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (\text{C.290})$$

Et donc la normalisation est identique au cas précédent :

$$|a_0| = \sqrt{\frac{l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{8\pi \Gamma(2s+1)}}. \quad (\text{C.291})$$

**Etat  $2p_{3/2}$ ,  $\lambda = -3/2$**

Les fonctions angulaires vérifient alors :

$$U_1 = V_1 = -\sin \theta, \quad (\text{C.292})$$

donc les résultats sont les mêmes que pour l'état  $2p_{3/2}$ ,  $\lambda = 3/2$  :

$$|a_0| = \sqrt{\frac{3l_P^3 m_a (2\Lambda m)^{2s+1}}{8\pi \Gamma(2s+1)}}, \quad (\text{C.293})$$

$$\rho e^{i\beta} = \frac{|a_0|^2}{2} \sqrt{\frac{1}{\mathbf{r}}} \sin^2(\theta) r^{2s-2} e^{-2\Lambda m r} (s + i\alpha u_3). \quad (\text{C.294})$$



## Annexe D

# Divers calculs

### D.1 Invariance de jauge $SU(2)$ des quarks

#### D.1.1 Groupe engendré par $\underline{P}_1$

On a dans ce cas

$$\Psi_L = \underline{P}_+(\Psi); \quad \underline{P}_1(\Psi_L) = \Gamma_{0123}\Psi_L\Gamma_{35}; \quad C = \cos(\theta); \quad S = \sin(\theta), \quad (\text{D.1})$$

$$\Psi'_L = [\exp(\theta \underline{P}_1)](\Psi_L) = C\Psi_L + S\Gamma_{0123}\Psi_L\Gamma_{35}, \quad (\text{D.2})$$

$$W'^1_\mu = W^1_\mu - \frac{2}{g_2}\partial_\mu\theta. \quad (\text{D.3})$$

Cela donne :

$$\begin{pmatrix} L'^n & \tilde{L}'^{3+n} \\ \bar{L}'^{3+n} & -\hat{L}'^n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} L^n & \tilde{L}^{3+n} \\ \bar{L}^{3+n} & -\hat{L}^n \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} i\tilde{L}^{3+n} & iL^n \\ -i\bar{L}^{3+n} & i\hat{L}^n \end{pmatrix}. \quad n = 2, 3, 4, \quad (\text{D.4})$$

$$L'^n = CL^n + iS\tilde{L}^{3+n}, \quad (\text{D.5})$$

$$\tilde{L}'^{3+n} = C\tilde{L}^{3+n} + iSL^n. \quad (\text{D.6})$$

On pose maintenant :

$$2L^n L^{3+n} = D_L^{n3+n} - i d_L^{n3+n}. \quad (\text{D.7})$$

On en déduit pour les courants gauches :

$$D_L^{n3+n} = L^n L^{3+n} + \tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n; \quad d_L^{n3+n} = iL^n L^{3+n} - i\tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n, \quad (\text{D.8})$$

$$2D_L'^n = D_L^n + D_L^{3+n} + \cos(2\theta)(D_L^n - D_L^{3+n}) - \sin(2\theta)d_L^{n3+n}, \quad (\text{D.9})$$

$$2D_L'^{3+n} = D_L^n + D_L^{3+n} - \cos(2\theta)(D_L^n - D_L^{3+n}) + \sin(2\theta)d_L^{n3+n}. \quad (\text{D.10})$$

Ajoutant et soustrayant ces équations on obtient :

$$D_L'^n + D_L'^{3+n} = D_L^n + D_L^{3+n}, \quad (\text{D.11})$$

$$D_L'^{3+n} - D_L'^n = \cos(2\theta)(D_L^{3+n} - D_L^n) + \sin(2\theta)d_L^{n3+n}. \quad (\text{D.12})$$

De ces égalités, on tire la conservation du courant total  $J_q$ , et aussi la différence entre les courants gauches et les courants droits. Puis mettant ensemble ces égalités avec (2.133) on peut voir qu'elles sont compatibles avec :

$$W^2 = d_L^{n3+n}; \quad W^3 = D_L^{3+n} - D_L^n. \quad (\text{D.13})$$

### D.1.2 Groupes engendrés par $\underline{P}_2$ et $\underline{P}_3$

Le calcul est tout-à-fait similaire à celui de la précédente section. Dans les deux cas on obtient la valeur de  $W^1$  comme seul résultat supplémentaire. Et comme précédemment, cette valeur dépend de l'entier  $n$ . Aussi on va utiliser un double système d'indice : on notera  $W_n^j$  les potentiels notés auparavant  $W^j$  qui agissent sur  $L^n$ . On aura alors :

$$W_n^1 = D_L^{n3+n}; \quad W_n^2 = d_L^{n3+n}; \quad W_n^3 = D_L^{3+n} - D_L^n. \quad (\text{D.14})$$

Comme dans la section précédente la somme des courant gauches et la somme des courant droits sont invariantes, ce qui entraîne la conservation du courant  $J_q$ , donc de  $mv_q$ . Cela rend le système formé par les douze équations (6 gauches et 6 droites) invariant sous le groupe  $SU(2)$ .

## D.2 Invariance de jauge sous $SU(3)$

On utilise la transformation suivante :

$$\begin{aligned} \Psi' &= [\exp(\theta\Lambda_1)](\Psi), \\ \Psi'^2 &= C\Psi^2 + S\mathbf{i}\Psi^3; \quad C = \cos(\theta); \quad S = \sin(\theta), \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$\Psi'^3 = C\Psi^3 + S\mathbf{i}\Psi^2; \quad \Psi'^1 = \Psi^1; \quad \Psi'^4 = \Psi^4. \quad (\text{D.16})$$

Ici on peut ignorer  $\Psi^1$  et  $\Psi^4$  qui ne varient pas, l'invariance de jauge signifie que le système :

$$\begin{aligned} \partial\Psi^2 &= -\frac{g_3}{2}\mathbf{G}^1\mathbf{i}\Psi^3 + m\mathbf{v}_q\Psi^2\gamma_{12}, \\ \partial\Psi^3 &= -\frac{g_3}{2}\mathbf{G}^1\mathbf{i}\Psi^2 + m\mathbf{v}_q\Psi^3\gamma_{12}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

doit être équivalent au système :

$$\begin{aligned} \partial\Psi'^2 &= -\frac{g_3}{2}\mathbf{G}'^1\mathbf{i}\Psi'^3 + m\mathbf{v}_q\Psi'^2\gamma_{12}, \\ \partial\Psi'^3 &= -\frac{g_3}{2}\mathbf{G}'^1\mathbf{i}\Psi'^2 + m\mathbf{v}_q\Psi'^3\gamma_{12}. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Utilisant (D.15) et (D.16) le système (D.17) est équivalent à (D.18) si et seulement si :

$$\mathbf{G}'^1 = \mathbf{G}^1 - \frac{2}{g_3} \partial \theta; \quad h_1'^1 = h_1^1 - \partial \theta. \quad (\text{D.19})$$

L'égalité (D.15) équivaut au système suivant :

$$L'^2 = CL^2 + iSL^3; \quad \tilde{L}'^5 = C\tilde{L}^5 + iS\tilde{L}^6, \quad (\text{D.20})$$

$$R'^2 = CR^2 + iSR^3; \quad \tilde{R}'^5 = C\tilde{R}^5 + iS\tilde{R}^6. \quad (\text{D.21})$$

Quant à (D.16), c'est équivalent au système :

$$L'^3 = CL^3 + iSL^2; \quad \tilde{L}'^6 = C\tilde{L}^6 + iS\tilde{L}^5, \quad (\text{D.22})$$

$$R'^3 = CR^3 + iSR^2; \quad \tilde{R}'^6 = C\tilde{R}^6 + iS\tilde{R}^5. \quad (\text{D.23})$$

Ces systèmes peuvent être mis ensemble dans quatre systèmes de même structure :

$$L'^2 = CL^2 + iSL^3; \quad L'^3 = CL^3 + iSL^2, \quad (\text{D.24})$$

$$R'^2 = CR^2 + iSR^3; \quad R'^3 = CR^3 + iSR^2, \quad (\text{D.25})$$

$$\tilde{L}'^5 = C\tilde{L}^5 + iS\tilde{L}^6; \quad \tilde{L}'^6 = C\tilde{L}^6 + iS\tilde{L}^5, \quad (\text{D.26})$$

$$\tilde{R}'^5 = C\tilde{R}^5 + iS\tilde{R}^6; \quad \tilde{R}'^6 = C\tilde{R}^6 + iS\tilde{R}^5. \quad (\text{D.27})$$

Ces systèmes ont la même forme que ceux des ondes gauches pour l'interaction faible. On peut donc faire des calculs similaires à ceux de D.1.1. Pour les ondes gauches du quark  $d$  de couleur  $r$  ou  $g$ , on considère les courants :

$$D_L^2 = L^2 \tilde{L}^2; \quad D_L^3 = L^3 \tilde{L}^3; \quad D_L^{23} - id_L^{23} = 2L^2 \tilde{L}^3, \quad (\text{D.28})$$

$$D_L^{23} + id_L^{23} = 2L^3 \tilde{L}^2; \quad D_L^{23} = L^2 \tilde{L}^3 + L^3 \tilde{L}^2; \quad d_L^{23} = iL^2 \tilde{L}^3 - iL^3 \tilde{L}^2. \quad (\text{D.29})$$

On obtient alors :

$$D_L'^{23} = D_L^{23}; \quad D_L'^2 + D_L'^3 = D_L^2 + D_L^3, \quad (\text{D.30})$$

$$d_L'^{23} = \cos(2\theta) d_L^{23} - \sin(2\theta) (D_L^3 - D_L^2), \quad (\text{D.31})$$

$$D_L'^3 - D_L'^2 = \cos(2\theta) (D_L^3 - D_L^2) + \sin(2\theta) d_L^{23}. \quad (\text{D.32})$$

Une comparaison avec la rotation effectuée sur les potentiels par la transformation de jauge indique que l'on peut avoir :

$$h_1^1 = \frac{g_3}{2} D_L^{23}; \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2} d_L^{23}; \quad h_1^3 = \frac{g_3}{2} (D_L^3 - D_L^2). \quad (\text{D.33})$$

Pour les ondes droites du quark  $d$  de couleur  $r$  ou  $g$  on considère les courants :

$$D_R^2 = R^2 \tilde{R}^2; \quad D_R^3 = R^3 \tilde{R}^3; \quad D_R^{23} - id_R^{23} = 2R^2 \tilde{R}^3, \quad (\text{D.34})$$

$$D_R^{23} + id_R^{23} = 2R^3 \tilde{R}^2; \quad D_R^{23} = R^2 \tilde{R}^3 + R^3 \tilde{R}^2; \quad d_R^{23} = iR^2 \tilde{R}^3 - iR^3 \tilde{R}^2. \quad (\text{D.35})$$

On obtient donc :

$$D_R'^{23} = D_R^{23}; \quad D_R'^2 + D_R'^3 = D_R^2 + D_R^3, \quad (\text{D.36})$$

$$d_R'^{23} = \cos(2\theta)d_R^{23} - \sin(2\theta)(D_R^3 - D_R^2), \quad (\text{D.37})$$

$$D_R'^3 - D_R'^2 = \cos(2\theta)(D_R^3 - D_R^2) + \sin(2\theta)d_R^{23}. \quad (\text{D.38})$$

Une comparaison avec la rotation effectuée sur les potentiels par les transformations de jauge indique que l'on peut avoir :

$$h_1^1 = \frac{g_3}{2}D_R^{23}; \quad h_1^2 = \frac{g_3}{2}d_R^{23}; \quad h_1^3 = \frac{g_3}{2}(D_R^3 - D_R^2). \quad (\text{D.39})$$

Donc on voit ici à nouveau la dépendance des potentiels sur l'onde qu'ils sont en train de tourner. On note donc :

$$h_{L1}^{d1} = \frac{g_3}{2}D_L^{23}; \quad h_{L1}^{d2} = \frac{g_3}{2}d_L^{23}; \quad h_{L1}^{d3} = \frac{g_3}{2}(D_L^3 - D_L^2), \quad (\text{D.40})$$

$$h_{R1}^{d1} = \frac{g_3}{2}D_R^{23}; \quad h_{R1}^{d2} = \frac{g_3}{2}d_R^{23}; \quad h_{R1}^{d3} = \frac{g_3}{2}(D_R^3 - D_R^2). \quad (\text{D.41})$$

Pour l'onde gauche du quark  $u$  quark de couleur  $r$  ou  $g$  on considère les courants :

$$D_L^5 = \tilde{L}^5 L^5; \quad D_L^6 = \tilde{L}^6 L^6; \quad D_L^{56} - id_L^{56} = 2\tilde{L}^5 L^6, \quad (\text{D.42})$$

$$D_L^{56} + id_L^{56} = 2\tilde{L}^6 L^5; \quad D_L^5 = \tilde{L}^5 L^6 + \tilde{L}^6 L^5; \quad d_L^{56} = i\tilde{L}^5 L^6 - i\tilde{L}^6 L^5. \quad (\text{D.43})$$

On obtient donc :

$$D_L'^{56} = D_L^{56}; \quad D_L'^5 + D_L'^6 = D_L^5 + D_L^6, \quad (\text{D.44})$$

$$d_L'^{56} = \cos(2\theta)d_L^{56} - \sin(2\theta)(D_L^6 - D_L^5), \quad (\text{D.45})$$

$$D_L'^6 - D_L'^5 = \cos(2\theta)(D_L^6 - D_L^5) + \sin(2\theta)d_L^{56}. \quad (\text{D.46})$$

Une comparaison avec la rotation effectuée sur les potentiels par les transformations de jauge indique que l'on peut avoir :

$$h_{L1}^{u1} = \frac{g_3}{2}D_L^{56}; \quad h_{L1}^{u2} = \frac{g_3}{2}d_L^{56}; \quad h_{L1}^{u3} = \frac{g_3}{2}(D_L^6 - D_L^5). \quad (\text{D.47})$$

Pour l'onde droite du quark  $u$  de couleur  $r$  ou  $g$  on considère les courants :

$$D_R^5 = \tilde{R}^5 R^5; \quad D_R^6 = \tilde{R}^6 R^6; \quad D_R^{56} - id_R^{56} = 2\tilde{R}^5 R^6, \quad (\text{D.48})$$

$$D_R^{56} + id_R^{56} = 2\tilde{R}^6 R^5; \quad D_R^5 = \tilde{R}^5 R^6 + \tilde{R}^6 R^5; \quad d_R^{56} = i\tilde{R}^5 R^6 - i\tilde{R}^6 R^5. \quad (\text{D.49})$$

On obtient alors :

$$D_R'^{56} = D_R^{56}; \quad D_R'^5 + D_R'^6 = D_R^5 + D_R^6, \quad (\text{D.50})$$

$$d_R'^{56} = \cos(2\theta)d_R^{56} - \sin(2\theta)(D_R^6 - D_R^5), \quad (\text{D.51})$$

$$D_R'^6 - D_R'^5 = \cos(2\theta)(D_R^6 - D_R^5) + \sin(2\theta)d_R^{56}. \quad (\text{D.52})$$

Finalement, une comparaison avec la rotation effectuée sur les potentiels par les transformation de jauge indique que l'on peut avoir :

$$h_{R1}^{u1} = \frac{g_3}{2} D_R^{56}; \quad h_{R1}^{u2} = \frac{g_3}{2} d_R^{56}; \quad h_{R1}^{u3} = \frac{g_3}{2} (D_R^6 - D_R^5). \quad (D.53)$$

### D.3 Simplification des équations d'onde

Avec (D.7) et (D.14) on a :

$$\begin{aligned} (W_n^1 + iW_n^2) \bar{L}^{3+n} &= (D_L^{n3+n} + i d_L^{n3+n}) \bar{L}^{3+n} = 2\tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}, \quad (D.54) \\ \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n} &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\eta_2^n & \eta_1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^{3+n} & 0 \\ \eta_2^{3+n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(-\eta_2^n \eta_1^{3+n} + \eta_1^n \eta_2^{3+n}) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Étant donné que :

$$\begin{aligned} 2(-\eta_2^n \eta_1^{3+n} + \eta_1^n \eta_2^{3+n}) &= 2\tilde{\eta}^{n\dagger} \eta^{3+n} = \bar{s}_2^{3+n} n, \quad (D.55) \\ \tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\eta}_2^{3+n} \\ 0 & \bar{\eta}_1^{3+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{s}_2^{3+n} n & 0 \end{pmatrix} = \bar{s}_2^{3+n} n \tilde{L}^{3+n} \sigma_1, \end{aligned}$$

on a aussi :

$$W_n^3 \hat{L}^n = (D^{3+n} - D^n) \hat{L}^n = \tilde{L}^{3+n} L^{3+n} \hat{L}^n - L^n \tilde{L}^n \hat{L}^n = \tilde{L}^{3+n} L^{3+n} \hat{L}^n, \quad (D.56)$$

$$\begin{aligned} L^{3+n} \hat{L}^n &= \overline{\tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}} = \overline{\bar{s}_2^{3+n} n \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}} = -\bar{s}_2^{3+n} n \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2} = -\tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}, \\ W_n^3 \hat{L}^n &= \tilde{L}^{3+n} L^{3+n} \hat{L}^n = -\tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}. \quad (D.57) \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} (W_n^1 + iW_n^2) \bar{L}^{3+n} - W_n^3 \hat{L}^n &= 2\tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n} - (-\tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}) \\ &= 3\tilde{L}^{3+n} \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n} = -3W_n^3 \hat{L}^n. \quad (D.58) \end{aligned}$$

De plus on a :

$$(W_n^1 - iW_n^2) \hat{L}^n = (D_L^{n3+n} - i d_L^{n3+n}) \hat{L}^n = 2L^n L^{3+n} \hat{L}^n, \quad (D.59)$$

$$\begin{aligned} L^{3+n} \hat{L}^n &= \overline{\tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}} = -\tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}, \\ (W_n^1 - iW_n^2) \hat{L}^n &= 2L^n (-\tilde{L}^n \bar{L}^{3+n}) = -2L^n \tilde{L}^n \bar{L}^{3+n} = -2D_L^n \bar{L}^{3+n}, \quad (D.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n^3 \bar{L}^{3+n} &= (D_n^{3+n} - D_L^n) \bar{L}^{3+n} = -D_L^n \bar{L}^{3+n}, \\ (W_n^1 - iW_n^2) \hat{L}^n + W_n^3 \bar{L}^{3+n} &= -3D_L^n \bar{L}^{3+n} = 3W_n^3 \bar{L}^{3+n}. \quad (D.61) \end{aligned}$$

Pour le groupe de jauge de la chromodynamique, on a le même genre de simplification, on va le voir en détail dans l'un des quatre cas, celui de l'onde

gauche du quark  $d$ . Avec la transformation de jauge engendrée par  $\Gamma_1$  et avec un angle  $\theta$  on a :

$$(\mathbf{h}_{L1}^{d1} + i\mathbf{h}_{L1}^{d2})\widehat{L}^3 - \mathbf{h}_{L1}^{d3}\widehat{L}^2 = \frac{g_3}{2}[(D_L^{23} + id_L^{23})\widehat{L}^3 - (D_L^3 - D_L^2)\widehat{L}^2], \quad (\text{D.62})$$

$$L'^2 = CL^2 + iS\tilde{L}^3; \quad C = \cos(\theta); \quad S = \sin(\theta), \quad (\text{D.63})$$

$$\tilde{L}'^3 = C\tilde{L}^3 + iSL^2. \quad (\text{D.64})$$

En comparaison avec (D.5) et (D.6), seuls les indices changent, pour  $n = 2$  on a les mêmes relations avec les indices 2 et 5 au lieu des indices 2 et 3. Et alors on peut employer la même procédure que celle utilisée pour les interactions faibles. On a finalement :

$$\mathbf{h}_{L1}^{d1} = \frac{g_3}{2}D_L^{23}; \quad \mathbf{h}_{L1}^{d2} = \frac{g_3}{2}d_L^{23}; \quad \mathbf{h}_{L1}^{d3} = \frac{g_3}{2}(D_L^3 - D_L^2), \quad (\text{D.65})$$

$$(\mathbf{h}_{L1}^{d1} + i\mathbf{h}_{L1}^{d2})\widehat{L}^3 - \mathbf{h}_{L1}^{d3}\widehat{L}^2 = -3\mathbf{h}_{L1}^{d3}\widehat{L}^2 = -\frac{3g_3}{2}D_L^3\widehat{L}^2, \quad (\text{D.66})$$

$$(\mathbf{h}_{L1}^{d1} - i\mathbf{h}_{L1}^{d2})\widehat{L}^2 + \mathbf{h}_{L1}^{d3}\widehat{L}^3 = 3\mathbf{h}_{L1}^{d3}\widehat{L}^3 = -\frac{3g_3}{2}D_L^2\widehat{L}^3. \quad (\text{D.67})$$

On obtient des relations similaires pour les autres indices, pour les ondes droites et pour les ondes gauches et droites du quark  $u$ , ceci nous permet de simplifier les équations d'onde.

### D.3.1 Termes de jauge de la densité lagrangienne

On considère la partie  $S$  de la densité lagrangienne  $\mathcal{L}^+$  qui donne les termes de jauge agissant sur les ondes des quarks :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^4 \left[ \begin{aligned} &-i\frac{\mathbf{m}}{q_1}\eta^{n\dagger}\sigma^\mu(ig_{n\mu}^1)\eta^n - i\frac{\mathbf{m}}{q_2}\xi^{n\dagger}\widehat{\sigma}^\mu(ig_{n\mu}^2)\xi^n \\ &-i\frac{\mathbf{m}}{q_3}\eta^{3+n\dagger}\sigma^\mu(ig_{n\mu}^3)\eta^{3+n} - i\frac{\mathbf{m}}{q_4}\xi^{3+n\dagger}\widehat{\sigma}^\mu(ig_{n\mu}^4)\xi^{3+n} \end{aligned} \right] \\ &= \sum_{n=2}^4 \left[ \begin{aligned} &\frac{\mathbf{m}}{q_1}g_{n\mu}^1\eta^{n\dagger}\sigma^\mu\eta^n + \frac{\mathbf{m}}{q_2}g_{n\mu}^2\xi^{n\dagger}\widehat{\sigma}^\mu\xi^n \\ &+ \frac{\mathbf{m}}{q_3}g_{n\mu}^3\eta^{3+n\dagger}\sigma^\mu\eta^{3+n} + \frac{\mathbf{m}}{q_4}g_{n\mu}^4\xi^{3+n\dagger}\widehat{\sigma}^\mu\xi^{3+n} \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.68})$$

On a donc :

$$\begin{aligned} S &= S^1 + S^2 + S^3 + S^4; \quad S^1 = \frac{\mathbf{m}}{q_1} \sum_{n=2}^4 g_{n\mu}^1 D_L^{n\mu}, \\ S^2 &= \frac{\mathbf{m}}{q_2} \sum_{n=2}^4 g_{n\mu}^2 D_R^{n\mu}; \quad S^3 = \frac{\mathbf{m}}{q_3} \sum_{n=2}^4 g_{n\mu}^3 D_L^{3+n\mu}; \quad S^4 = \frac{\mathbf{m}}{q_4} \sum_{n=2}^4 g_{n\mu}^4 D_R^{3+n\mu}. \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

Avec (3.147) Le terme  $S^1$  devient :

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{m} S^1 = & \left( -\frac{b_\mu}{3} + 3w_{2\mu}^3 - 3h_{L3\mu}^{d3} + 3h_{L1\mu}^{d3} \right) D_L^{2\mu} \\ & + \left( -\frac{b_\mu}{3} + 3w_{3\mu}^3 - 3h_{L1\mu}^{d3} + 3h_{L2\mu}^{d3} \right) D_L^{3\mu} \\ & + \left( -\frac{b_\mu}{3} + 3w_{4\mu}^3 - 3h_{L2\mu}^{d3} + 3h_{L3\mu}^{d3} \right) D_L^{4\mu}. \end{aligned} \quad (D.70)$$

Regroupant les termes semblables, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{m} S^1 = & -\frac{1}{3} b \cdot (D_L^2 + D_L^3 + D_L^4) + 3(w_2^3 \cdot D_L^2 + w_3^3 \cdot D_L^3 + w_4^3 \cdot D_L^4) \\ & - 3(h_{L3}^{d3} \cdot D_L^2 + h_{L1}^{d3} \cdot D_L^3 + h_{L2}^{d3} \cdot D_L^4) + 3(h_{L1}^{d3} \cdot D_L^2 + h_{L2}^{d3} \cdot D_L^3 + h_{L3}^{d3} \cdot D_L^4). \end{aligned} \quad (D.71)$$

Et avec (3.142) on a :

$$\begin{aligned} & 3(w_2^3 \cdot D_L^2 + w_3^3 \cdot D_L^3 + w_4^3 \cdot D_L^4) \\ & = \frac{g_2}{2} [(D_L^5 - D_L^2) \cdot D_L^2 + (D_L^6 - D_L^3) \cdot D_L^3 + (D_L^7 - D_L^4) \cdot D_L^4] \\ & = \frac{g_2}{2} (D_L^5 \cdot D_L^2 + D_L^6 \cdot D_L^3 + D_L^7 \cdot D_L^4), \end{aligned} \quad (D.72)$$

et comme les courants chiraux sont sur le cône de lumière, leur longueur d'espace-temps est nulle. Puis avec (D.40) on a :  $h_{L1}^{d1} = \frac{g_3}{2} D_L^{23}$ ,  $h_{L1}^{d2} = \frac{g_3}{2} D_L^{23}$  et  $h_{L1}^{d3} = \frac{g_3}{2} (D_L^3 - D_L^2)$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} & 3(h_{L1}^{d3} \cdot D_L^2 + h_{L2}^{d3} \cdot D_L^3 + h_{L3}^{d3} \cdot D_L^4) \\ & = 3\frac{g_3}{2} [(D_L^3 - D_L^2) \cdot D_L^2 + (D_L^4 - D_L^3) \cdot D_L^3 + (D_L^2 - D_L^4) \cdot D_L^4] \\ & = 3\frac{g_3}{2} (D_L^3 \cdot D_L^2 + D_L^4 \cdot D_L^3 + D_L^2 \cdot D_L^4). \end{aligned} \quad (D.73)$$

De même on a :

$$\begin{aligned} & -3(h_{L3}^{d3} \cdot D_L^2 + h_{L1}^{d3} \cdot D_L^3 + h_{L2}^{d3} \cdot D_L^4) \\ & = -3\frac{g_3}{2} [(D_L^2 - D_L^4) \cdot D_L^2 + (D_L^3 - D_L^2) \cdot D_L^3 + (D_L^4 - D_L^3) \cdot D_L^4] \\ & = 3\frac{g_3}{2} (D_L^4 \cdot D_L^2 + D_L^2 \cdot D_L^3 + D_L^3 \cdot D_L^4) \\ & = 3\frac{g_3}{2} (D_L^3 \cdot D_L^2 + D_L^4 \cdot D_L^3 + D_L^2 \cdot D_L^4). \end{aligned} \quad (D.74)$$

Et si on utilise les sommes de courants suivantes :

$$\begin{aligned} S_L^{25} &= D_L^2 + D_L^5; \quad S_L^{36} = D_L^3 + D_L^6; \quad S_L^{47} = D_L^4 + D_L^7, \\ S_L^d &= D_L^2 + D_L^3 + D_L^4, \end{aligned} \quad (D.75)$$

on a :

$$(S_L^{25})^2 = (D_L^2)^2 + (D_L^5)^2 + 2D_L^2 \cdot D_L^5 = 2D_L^2 \cdot D_L^5, \quad (\text{D.76})$$

$$\begin{aligned} (S_L^d)^2 &= (D_L^2)^2 + (D_L^3)^2 + (D_L^4)^2 + 2D_L^2 \cdot D_L^3 + 2D_L^3 \cdot D_L^4 + 2D_L^4 \cdot D_L^2 \\ &= 2(D_L^2 \cdot D_L^3 + D_L^3 \cdot D_L^4 + D_L^4 \cdot D_L^2). \end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

Et donc on obtient :

$$S^1 = \frac{m}{q_1} \left[ -\frac{g_1}{6} B \cdot S_L^d + \frac{g_2}{4} [(S_L^{25})^2 + (S_L^{36})^2 + (S_L^{47})^2] + \frac{3g_3}{2} (S_L^d)^2 \right]. \quad (\text{D.78})$$

Ensuite pour les ondes droites du quark  $d$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{q_2}{m} S^2 &= \frac{2}{3} b \cdot (D_R^2 + D_R^3 + D_R^4) \\ &+ 3(h_{R3}^{d3} \cdot D_R^2 + h_{R1}^{d3} \cdot D_R^3 + h_{R2}^{d3} \cdot D_R^4) - 3(h_{R1}^{d3} \cdot D_R^2 + h_{R2}^{d3} \cdot D_R^3 + h_{R3}^{d3} \cdot D_R^4). \end{aligned} \quad (\text{D.79})$$

On utilise maintenant la somme des courants droits :

$$S_R^d = D_R^2 + D_R^3 + D_R^4. \quad (\text{D.80})$$

Et on obtient :

$$S^2 = \frac{m}{q_2} \left[ \frac{g_1}{3} B \cdot S_R^d - 3\frac{g_3}{2} (S_R^d)^2 \right]. \quad (\text{D.81})$$

Le calcul des termes correspondant au quark  $u$  est complètement semblable, et on introduit les mêmes sommes :

$$S_L^u = D_L^5 + D_L^6 + D_L^7; \quad S_R^u = D_R^5 + D_R^6 + D_R^7. \quad (\text{D.82})$$

Pour les ondes gauches on a :

$$S^3 = \frac{m}{q_3} \left[ -\frac{g_1}{6} B \cdot S_L^u + \frac{g_2}{4} [(S_L^{25})^2 + (S_L^{36})^2 + (S_L^{47})^2] + \frac{3g_3}{2} (S_L^u)^2 \right]. \quad (\text{D.83})$$

Et on obtient pour les ondes droites du quark  $u$  :

$$S^4 = \frac{m}{q_4} \left[ -\frac{2g_1}{3} B \cdot S_R^u - 3\frac{g_3}{2} (S_R^u)^2 \right]. \quad (\text{D.84})$$

Ceci donne :

$$\begin{aligned} S &= \frac{m}{q_1} \left[ -\frac{g_1}{6} B \cdot S_L^d + \frac{g_2}{4} [(S_L^{25})^2 + (S_L^{36})^2 + (S_L^{47})^2] + \frac{3g_3}{2} (S_L^d)^2 \right] \\ &+ \frac{m}{q_2} \left[ \frac{g_1}{3} B \cdot S_R^d - \frac{3g_3}{2} (S_R^d)^2 \right] \\ &+ \frac{m}{q_3} \left[ -\frac{g_1}{6} B \cdot S_L^u + \frac{g_2}{4} [(S_L^{25})^2 + (S_L^{36})^2 + (S_L^{47})^2] + \frac{3g_3}{2} (S_L^u)^2 \right] \\ &+ \frac{m}{q_4} \left[ -\frac{2g_1}{3} B \cdot S_R^u - \frac{3g_3}{2} (S_R^u)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

## D.4 Calcul des $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$

### D.4.1 Calcul des $\mathcal{S}_{(k)}$ et des $\mathcal{A}_{(k)}$

Les  $S_k$  sont des 2-vecteurs dans  $Cl_3$ . Donc ils s'écrivent :

$$\begin{aligned}\phi\sigma_k\bar{\phi} &= S_k := \vec{E}_k + i\vec{H}_k, \\ \vec{E}_k &:= E_k^1\sigma_1 + E_k^2\sigma_2 + E_k^3\sigma_3, \\ \vec{H}_k &:= H_k^1\sigma_1 + H_k^2\sigma_2 + H_k^3\sigma_3.\end{aligned}\tag{D.86}$$

On a donc :

$$E_k^1 = S_k^{23} ; \quad E_k^2 = S_k^{31} ; \quad E_k^3 = S_k^{12} ; \quad H_k^j = S_k^{j0}.\tag{D.87}$$

Puis on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla S_k^\dagger &= (\partial_0 - \vec{\partial})(\vec{E}_k - i\vec{H}_k) \\ &= -\vec{\partial} \cdot \vec{E}_k + (\partial_0 \vec{E}_k - \vec{\partial} \times \vec{H}_k) + i(-\vec{\partial} \times \vec{E}_k - \partial_0 \vec{H}_k) + i\vec{\partial} \cdot \vec{H}_k \\ &= j_k + ij_k' = j_k^0 + \vec{j}_k + ij_k'^0 + ij_k'^0,\end{aligned}\tag{D.88}$$

avec :

$$j_k^0 := -\vec{\partial} \cdot \vec{E}_k ; \quad \vec{j}_k := \partial_0 \vec{E}_k - \vec{\partial} \times \vec{H}_k,\tag{D.89}$$

$$j_k'^0 := \vec{\partial} \cdot \vec{H}_k ; \quad \vec{j}_k' := -\partial_0 \vec{H}_k - \vec{\partial} \times \vec{E}_k.\tag{D.90}$$

Avec le potentiel électromagnétique  $A$  on a :

$$\begin{aligned}AS_k^\dagger &= (A^0 + \vec{A})(\vec{E}_k - i\vec{H}_k) \\ &= \vec{A} \cdot \vec{E}_k + (A^0 \vec{E}_k + \vec{A} \times \vec{H}_k) + i(\vec{A} \times \vec{E}_k - A^0 \vec{H}_k) - i\vec{A} \cdot \vec{H}_k \\ &= v_k + iv_k' = v_k^0 + \vec{v}_k + iv_k'^0 + iv_k'^0,\end{aligned}\tag{D.91}$$

avec :

$$v_k^0 := \vec{A} \cdot \vec{E}_k ; \quad \vec{v}_k := A^0 \vec{E}_k + \vec{A} \times \vec{H}_k,\tag{D.92}$$

$$v_k'^0 := -\vec{A} \cdot \vec{H}_k ; \quad \vec{v}_k' := -A^0 \vec{H}_k + \vec{A} \times \vec{E}_k.\tag{D.93}$$

De même avec  $v$  et  $S_k$  on a :

$$\begin{aligned}JS_k^\dagger &= \rho v S_k^\dagger = \rho(v^0 + \vec{v})(\vec{E}_k - i\vec{H}_k) \\ &= \rho[\vec{v} \cdot \vec{E}_k + (v^0 \vec{E}_k + \vec{v} \times \vec{H}_k) + i(\vec{v} \times \vec{E}_k - v^0 \vec{H}_k) - i\vec{v} \cdot \vec{H}_k] \\ &= \phi\phi^\dagger(\phi\sigma_k\bar{\phi})^\dagger = \phi\phi^\dagger\widehat{\phi}\sigma_k\phi^\dagger = \phi\rho e^{-i\beta}\sigma_k\phi^\dagger = e^{-i\beta}\phi\sigma_k\phi^\dagger = (\Omega_1 - i\Omega_2)D_k \\ &= \Omega_1 D_k^0 + \Omega_1 \vec{D}_k - i\Omega_2 \vec{D}_k - i\Omega_2 D_k^0\end{aligned}\tag{D.94}$$

Donc on obtient :

$$\frac{\Omega_1}{\rho} D_k^0 = \vec{v} \cdot \vec{E}_k ; \quad \frac{\Omega_1}{\rho} \vec{D}_k = v^0 \vec{E}_k + \vec{v} \times \vec{H}_k, \quad (D.95)$$

$$\frac{\Omega_2}{\rho} D_k^0 = \vec{v} \cdot \vec{H}_k ; \quad \frac{\Omega_2}{\rho} \vec{D}_k = v^0 \vec{H}_k - \vec{v} \times \vec{E}_k. \quad (D.96)$$

Avec la définition (4.30) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(k)} + i\mathcal{S}'_{(k)} &= \frac{\nabla S_k^\dagger}{\det(\phi^\dagger)} = \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{\rho^2} (j_k + ij'_k) \\ &= \rho^{-2} [\Omega_1 j_k - \Omega_2 j'_k + i(\Omega_1 j'_k + \Omega_2 j_k)], \end{aligned} \quad (D.97)$$

$$\rho^2 \mathcal{S}_{(k)} = \Omega_1 j_k - \Omega_2 j'_k, \quad (D.98)$$

$$\rho^2 \mathcal{S}'_{(k)} = \Omega_1 j'_k + \Omega_2 j_k. \quad (D.99)$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(k)} + i\mathcal{A}'_{(k)} &= \frac{AS_k^\dagger}{\det(\phi^\dagger)} = \frac{\Omega_1 + i\Omega_2}{\rho^2} (v_k + iv'_k) \\ &= \rho^{-2} [\Omega_1 v_k - \Omega_2 v'_k + i(\Omega_1 v'_k + \Omega_2 v_k)], \end{aligned} \quad (D.100)$$

$$\rho^2 \mathcal{A}_{(k)} = \Omega_1 v_k - \Omega_2 v'_k, \quad (D.101)$$

$$\rho^2 \mathcal{A}'_{(k)} = \Omega_1 v'_k + \Omega_2 v_k. \quad (D.102)$$

#### D.4.2 Calcul des $\Gamma_{\mu\nu}^\mu$

On part de la définition de la densité de spin de Durand (4.32), qui donne :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2} [(\nabla \hat{\phi}) \phi^\dagger - \sigma^\mu \hat{\phi} \partial_\mu \phi^\dagger], \\ 2\tau &= (\nabla \hat{\phi}) \phi^\dagger - \dot{\nabla} \hat{\phi} \phi^\dagger, \end{aligned} \quad (D.103)$$

où les points indiquent ce qu'on dérive. Et on a :

$$\nabla(\hat{\phi} \phi^\dagger) = (\nabla \hat{\phi}) \phi^\dagger + \dot{\nabla} \hat{\phi} \phi^\dagger. \quad (D.104)$$

Donc en ajoutant on obtient :

$$2\tau + \nabla(\Omega_1 - i\Omega_2) = 2(\nabla \hat{\phi}) \phi^\dagger. \quad (D.105)$$

Avec notre équation d'onde améliorée on a :

$$(\nabla \hat{\phi}) \phi^\dagger = qA \hat{\phi} \sigma_{21} \phi^\dagger + e^{-i\beta} \phi \mathbf{m} \sigma_{21} \phi^\dagger, \quad (D.106)$$

$$\phi \mathbf{m} \sigma_{21} \phi^\dagger = -i(\mathbf{ID}_R - \mathbf{rD}_L), \quad (D.107)$$

$$(\nabla \hat{\phi}) \phi^\dagger = -iqAS_3^\dagger - i\left(\frac{\Omega_1}{\rho} - i\frac{\Omega_2}{\rho}\right)(\mathbf{ID}_R - \mathbf{rD}_L). \quad (D.108)$$

On pose maintenant :

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2 ; \quad \tau_1 = \frac{1}{2}(\tau + \tau^\dagger) ; \quad i\tau_2 = \frac{1}{2}(\tau - \tau^\dagger). \quad (\text{D.109})$$

Avec (D.105) et (D.108) on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla\Omega_1 - i\nabla\Omega_2 &= -2(\tau_1 + i\tau_2) - 2iqAS_3^\dagger - 2\left(\frac{\Omega_2}{\rho} + i\frac{\Omega_1}{\rho}\right)(\text{ID}_R - \mathbf{rD}_L) \\ &= -2(\tau_1 + i\tau_2) - 2iq(v_3 + iv'_3) - 2\left(\frac{\Omega_2}{\rho} + i\frac{\Omega_1}{\rho}\right)(\text{ID}_R - \mathbf{rD}_L). \end{aligned} \quad (\text{D.110})$$

Cela donne :

$$\nabla\Omega_1 = -2\tau_1 + 2qv'_3 - 2\frac{\Omega_2}{\rho}(\text{ID}_R - \mathbf{rD}_L), \quad (\text{D.111})$$

$$\nabla\Omega_2 = 2\tau_2 + 2qv_3 + 2\frac{\Omega_1}{\rho}(\text{ID}_R - \mathbf{rD}_L). \quad (\text{D.112})$$

Comme  $\rho^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2$ , on a :

$$\rho\nabla\rho = \Omega_1\nabla\Omega_1 + \Omega_2\nabla\Omega_2. \quad (\text{D.113})$$

Avec notre équation d'onde améliorée et avec (D.111) et (D.112) on obtient :

$$\begin{aligned} \rho\nabla\rho &= \Omega_1[-2\tau_1 + 2qv'_3 - 2\frac{\Omega_2}{\rho}(\text{ID}_R - \mathbf{rD}_L)] \\ &\quad + \Omega_2[2\tau_2 + 2qv_3 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}(\text{ID}_R - \mathbf{rD}_L)] \\ &= 2(-\Omega_1\tau_1 + \Omega_2\tau_2) + 2q(\Omega_1v'_3 + \Omega_2v_3). \end{aligned} \quad (\text{D.114})$$

Et avec (D.102) on a :

$$\rho\nabla\rho = 2(-\Omega_1\tau_1 + \Omega_2\tau_2) + 2q\rho^2\mathcal{A}'_{(3)}. \quad (\text{D.115})$$

Avec (4.33) on obtient :

$$\rho^2(\mathcal{T} + i\mathcal{T}') = (\tau_1 + i\tau_2)(\Omega_1 + i\Omega_2) = (\tau_1\Omega_1 - \tau_2\Omega_2) + i(\tau_1\Omega_2 + \tau_2\Omega_1). \quad (\text{D.116})$$

En divisant (D.115) par  $\rho^2$  on a finalement :

$$\nabla(\ln\rho) = -2\mathcal{T} + 2q\mathcal{A}'_{(3)}. \quad (\text{D.117})$$

Avec (4.26) on a :

$$\Gamma_{0\nu}^0 = D_\nu^\mu \partial_\mu(\ln\rho) = D_\nu \cdot \nabla(\ln\rho) \quad (\text{D.118})$$

$$= D_\nu \cdot (-2\mathcal{T} + 2q\mathcal{A}'_{(3)}), \quad (\text{D.119})$$

ce qui est (4.40).

### D.4.3 Calcul des $\Gamma_{j\nu}^0$ et $\Gamma_{0\nu}^j$ , $j = 1, 2, 3$

On part de :

$$\begin{aligned}\Gamma_{j\nu}^0 &= \rho^{-2}(\partial_\nu D_j^\mu) \bar{D}_\mu^0 = \rho^{-2}[(\partial_\nu D_j^0) \bar{D}_0^0 + \sum_{k=1}^3 (\partial_\nu D_j^k) \bar{D}_k^0] \\ &= \rho^{-2}[(\partial_\nu D_j^0) D_0^0 - \sum_{k=1}^3 (\partial_\nu D_j^k) D_0^k],\end{aligned}\quad (\text{D.120})$$

et de même :

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\nu}^j &= \rho^{-2}(\partial_\nu D_0^\mu) \bar{D}_\mu^j = \rho^{-2}[(\partial_\nu D_0^0) \bar{D}_0^j + \sum_{k=1}^3 (\partial_\nu D_0^k) \bar{D}_k^j] \\ &= \rho^{-2}[-(\partial_\nu D_0^0) D_j^0 + \sum_{k=1}^3 (\partial_\nu D_0^k) D_j^k].\end{aligned}\quad (\text{D.121})$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\Gamma_{j\nu}^0 - \Gamma_{0\nu}^j &= \rho^{-2}[\partial_\nu(D_0^0 D_j^0) - \sum_{k=1}^3 \partial_\nu(D_0^k D_j^k)] = \rho^{-2} \partial_\nu(D_0 \cdot D_j) = 0, \\ \Gamma_{j\nu}^0 &= \Gamma_{0\nu}^j.\end{aligned}\quad (\text{D.122})$$

On obtient aussi :

$$\begin{aligned}\Gamma_{j\nu}^0 &= \rho^{-2} \begin{pmatrix} D_0^0(D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3)(D_j^0) \\ -D_0^1(D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3)(D_j^1) \\ -D_0^2(D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3)(D_j^2) \\ -D_0^3(D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3)(D_j^3) \end{pmatrix} \\ &= \rho^{-2} \begin{pmatrix} D_\nu^0(D_0^0 \partial_0 D_j^0 - D_0^1 \partial_1 D_j^1 - D_0^2 \partial_2 D_j^2 - D_0^3 \partial_3 D_j^3) \\ +D_\nu^1(D_0^0 \partial_1 D_j^0 - D_0^1 \partial_1 D_j^1 - D_0^2 \partial_1 D_j^2 - D_0^3 \partial_1 D_j^3) \\ +D_\nu^2(D_0^0 \partial_2 D_j^0 - D_0^1 \partial_2 D_j^1 - D_0^2 \partial_2 D_j^2 - D_0^3 \partial_2 D_j^3) \\ +D_\nu^3(D_0^0 \partial_3 D_j^0 - D_0^1 \partial_3 D_j^1 - D_0^2 \partial_3 D_j^2 - D_0^3 \partial_3 D_j^3) \end{pmatrix} \\ &= \rho^{-2} D_\nu^\mu (D_0^0 \partial_\mu D_j^0 - D_0^1 \partial_\mu D_j^1 - D_0^2 \partial_\mu D_j^2 - D_0^3 \partial_\mu D_j^3).\end{aligned}\quad (\text{D.123})$$

Puis on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma_{j\nu}^0 &= \rho^{-2} D_\nu^\mu [\partial_\mu(D_0^0 D_j^0) - \partial_\mu(D_0^1 D_j^1) - \partial_\mu(D_0^2 D_j^2) - \partial_\mu(D_0^3 D_j^3)] \\ &\quad + \rho^{-2} D_\nu^\mu [-D_j^0 \partial_\mu D_0^0 + D_j^1 \partial_\mu D_0^1 + D_j^2 \partial_\mu D_0^2 + D_j^3 \partial_\mu D_0^3]\end{aligned}\quad (\text{D.124})$$

$$\begin{aligned}&= \rho^{-2} D_\nu^\mu [\partial_\mu(D_0 \cdot D_j) - D_j^0 \partial_\mu D_0^0 + D_j^1 \partial_\mu D_0^1 + D_j^2 \partial_\mu D_0^2 + D_j^3 \partial_\mu D_0^3] \\ &= \rho^{-2} D_\nu^\mu [-D_j^0 \partial_\mu D_0^0 + D_j^1 \partial_\mu D_0^1 + D_j^2 \partial_\mu D_0^2 + D_j^3 \partial_\mu D_0^3].\end{aligned}\quad (\text{D.125})$$

On pose :

$$\Gamma_{j\nu}^0 = \rho^{-2} D_\nu^\mu X_{j\mu}, \quad (\text{D.126})$$

$$X_{j\mu} = -D_j^0 \partial_\mu D_0^0 + D_j^1 \partial_\mu D_0^1 + D_j^2 \partial_\mu D_0^2 + D_j^3 \partial_\mu D_0^3. \quad (\text{D.127})$$

**D.4.4 Calcul des  $\Gamma_{1\nu}^0$** 

On part de :

$$\Gamma_{1\nu}^0 = \rho^{-2} D_\nu^\mu X_{1\mu}, \quad (\text{D.128})$$

$$X_{1\mu} = -D_1^0 \partial_\mu D_0^0 + D_1^1 \partial_\mu D_0^1 + D_1^2 \partial_\mu D_0^2 + D_1^3 \partial_\mu D_0^3. \quad (\text{D.129})$$

On a :

$$\begin{aligned} X_{1\mu} = & -(\xi_1^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* + \eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*) \\ & + (\xi_1^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^* - \eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*) \\ & + i(-\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \partial_\mu i(\xi_1 \xi_2^* - \xi_2 \xi_1^* - \eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*) \\ & + (-\xi_1^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_1^* - \xi_2 \xi_2^* - \eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*). \end{aligned} \quad (\text{D.130})$$

Cela donne :

$$X_{1\mu} = 2 \begin{pmatrix} -\xi_2(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*) \partial_\mu \xi_1 + \xi_1(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*) \partial_\mu \xi_2 \\ + \eta_2(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*) \partial_\mu \eta_1 - \eta_1(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*) \partial_\mu \eta_2 \\ - \xi_2^*(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*) \partial_\mu \xi_1^* + \xi_1^*(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*) \partial_\mu \xi_2^* \\ + \eta_2^*(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*) \partial_\mu \eta_1^* - \eta_1^*(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*) \partial_\mu \eta_2^* \end{pmatrix}, \quad (\text{D.131})$$

et avec (A.176) on a :

$$X_{1\mu} = \begin{pmatrix} -\xi_2(\Omega_1 - i\Omega_2) \partial_\mu \xi_1 + \xi_1(\Omega_1 - i\Omega_2) \partial_\mu \xi_2 \\ + \eta_2(\Omega_1 + i\Omega_2) \partial_\mu \eta_1 - \eta_1(\Omega_1 + i\Omega_2) \partial_\mu \eta_2 \\ - \xi_2^*(\Omega_1 + i\Omega_2) \partial_\mu \xi_1^* + \xi_1^*(\Omega_1 + i\Omega_2) \partial_\mu \xi_2^* \\ + \eta_2^*(\Omega_1 - i\Omega_2) \partial_\mu \eta_1^* - \eta_1^*(\Omega_1 - i\Omega_2) \partial_\mu \eta_2^* \end{pmatrix}. \quad (\text{D.132})$$

On peut donc l'exprimer comme suit :

$$X_{1\mu} = \Omega_1 Y_\mu + i\Omega_2 Z_\mu, \quad (\text{D.133})$$

$$\begin{aligned} Y_\mu = & \xi_1 \partial_\mu \xi_2 - \xi_2 \partial_\mu \xi_1 - \eta_1 \partial_\mu \eta_2 + \eta_2 \partial_\mu \eta_1 \\ & + \xi_1^* \partial_\mu \xi_2^* - \xi_2^* \partial_\mu \xi_1^* - \eta_1^* \partial_\mu \eta_2^* + \eta_2^* \partial_\mu \eta_1^*, \end{aligned} \quad (\text{D.134})$$

$$\begin{aligned} Z_\mu = & -\xi_1 \partial_\mu \xi_2 + \xi_2 \partial_\mu \xi_1 - \eta_1 \partial_\mu \eta_2 + \eta_2 \partial_\mu \eta_1 \\ & + \xi_1^* \partial_\mu \xi_2^* - \xi_2^* \partial_\mu \xi_1^* + \eta_1^* \partial_\mu \eta_2^* - \eta_2^* \partial_\mu \eta_1^*. \end{aligned} \quad (\text{D.135})$$

Notre équation d'onde améliorée est équivalente au système :

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla + ia)\eta; \quad a := qA + \mathbf{l}v, \\ 0 &= (\widehat{\nabla} + i\widehat{b})\xi; \quad b := qA + \mathbf{r}v. \end{aligned} \quad (\text{D.136})$$

C'est équivalent au système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_0 \eta_1 - \partial_1 \eta_2 + i\partial_2 \eta_2 - \partial_3 \eta_1 + i(a_0 \eta_1 - a_1 \eta_2 + ia_2 \eta_2 - a_3 \eta_1), \\ 0 &= \partial_0 \eta_2 - \partial_1 \eta_1 - i\partial_2 \eta_1 + \partial_3 \eta_2 + i(a_0 \eta_2 - a_1 \eta_1 - ia_2 \eta_1 + a_3 \eta_2), \\ 0 &= \partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_2 - i\partial_2 \xi_2 + \partial_3 \xi_1 + i(b_0 \xi_1 + b_1 \xi_2 - ib_2 \xi_2 + b_3 \xi_1), \\ 0 &= \partial_0 \xi_2 + \partial_1 \xi_1 + i\partial_2 \xi_1 - \partial_3 \xi_2 + i(b_0 \xi_2 + b_1 \xi_1 + ib_2 \xi_1 - b_3 \xi_2). \end{aligned} \quad (\text{D.137})$$

Grâce au système précédent, et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned}
Y_0 &= -\partial_1 S_1^{23} - \partial_2 S_1^{31} - \partial_3 S_1^{12} \\
&\quad + 2b_1 H_R^1 + 2b_2 H_R^2 + 2b_3 H_R^3 - 2a_1 H_L^1 - 2a_2 H_L^2 - 2a_3 H_L^3 \\
&= -\vec{\partial} \cdot \vec{E}_1 + 2(q\vec{A} + \mathbf{r}\vec{v}) \cdot \vec{H}_R - 2(q\vec{A} + \mathbf{l}\vec{v}) \cdot \vec{H}_L \\
&= -\vec{\partial} \cdot \vec{E}_1 + 2q\vec{A} \cdot \vec{E}_2 + 2m\vec{v} \cdot \vec{E}_2 - 2d\vec{v} \cdot \vec{H}_1 \\
&= j_1^0 + 2qv_2^0 + \frac{2m}{\rho}\Omega_1 D_2^0 - \frac{2d}{\rho}\Omega_2 D_1^0.
\end{aligned} \tag{D.138}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
Z_0 &= i\partial_1 S_1^{10} + i\partial_2 S_1^{20} + i\partial_3 S_1^{30} \\
&\quad + 2i(b_1 E_R^1 + b_2 E_R^2 + b_3 E_R^3) - 2i(a_1 E_L^1 + a_2 E_L^2 + a_3 E_L^3) \\
&= i(\vec{\partial} \cdot \vec{H}_1 + 2\vec{b} \cdot \vec{E}_R - 2\vec{a} \cdot \vec{E}_L)
\end{aligned} \tag{D.139}$$

$$\begin{aligned}
&= i[\vec{\partial} \cdot \vec{H}_1 - 2q\vec{A} \cdot \vec{H}_2 - 2m\vec{v} \cdot \vec{H}_2 - 2d\vec{v} \cdot \vec{E}_1]. \\
&= i[j_1'^0 + 2qv_2'^0 - \frac{2m}{\rho}\Omega_2 D_2^0 - \frac{2d}{\rho}\Omega_1 D_1^0].
\end{aligned} \tag{D.140}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
X_{10} &= \Omega_1 Y_0 + i\Omega_2 Z_0 \\
&= \Omega_1(j_1^0 - 2qv_2^0 - 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^0 + \frac{2d}{\rho}\Omega_2 D_1^0) + i\Omega_2(ij_1'^0 - 2iqv_2'^0 \\
&\quad + 2im\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^0 - \frac{2d}{\rho}\Omega_1 D_1^0) \\
&= \Omega_1 j_1^0 - \Omega_2 j_1'^0 + 2q(-\Omega_1 v_2^0 + \Omega_2 v_2'^0) - 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_2^0 \\
&= \rho^2(\mathcal{S}_{(1)}^0 - 2q\mathcal{A}_{(2)}^0) - 2m\rho D_2^0.
\end{aligned}$$

Utilisant à nouveau (D.137) et en simplifiant, on obtient :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -\partial_0 S_1^{23} + \partial_2 S_1^{30} - \partial_3 S_1^{20} + 2q(A_0 E_2^1 - A_2 H_2^3 + A_3 H_2^2) \\
&\quad + 2m(v_0 E_2^1 - v_2 H_2^3 + v_3 H_2^2) - 2d(v_0 H_1^1 + v_2 E_1^3 - v_3 E_1^2) \\
&= -j_1^1 + 2qv_2^1 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^1 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^1.
\end{aligned} \tag{D.141}$$

De même, après simplification (D.137) donne :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= i[\partial_0 H_1^1 + \partial_2 E_1^3 - \partial_3 E_1^2 - 2q(A^0 H_2^1 - A^3 E_2^2 + A^2 E_2^3) \\
&\quad - 2m(v_0 H_2^1 - v^2 E_2^3 + v^3 E_2^2) - 2d(v_0 E_1^1 + v^2 H_1^3 - v^3 H_1^2) \\
&= i\left[-j_1'^1 + 2qv_2'^1 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^1 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^1\right].
\end{aligned} \tag{D.142}$$

Avec (D.133) et (D.137) on a :

$$\begin{aligned}
X_{11} &= \Omega_1 Y_1 + i\Omega_2 Z_1 \\
&= \Omega_1(-j_1^1 + 2qv_2^1 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^1 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^1) \\
&\quad - \Omega_2(-j_1'^1 + 2qv_2'^1 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^1 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^1) \\
&= -\Omega_1 j_1^1 + \Omega_2 j_1'^1 + 2q(\Omega_1 v_2^1 - \Omega_2 v_2'^1) + 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_2^1 \\
&= \rho^2(-\mathcal{S}_{(1)}^1 + 2q\mathcal{A}_{(2)}^1) + 2m\rho D_2^1.
\end{aligned} \tag{D.143}$$

Utilisant à nouveau (D.137) et en simplifiant, on a :

$$\begin{aligned}
Y_2 &= -\partial_0 S_1^{31} + \partial_3 S_1^{10} - \partial_1 S_1^{30} + 2q(A_0 E_2^2 - A_3 H_2^1 + A_1 H_2^3) \\
&\quad + 2m(v_0 E_2^2 - v_3 H_2^1 + v_1 H_2^3) - 2d(v_0 H_1^2 + v_3 E_1^1 - v_1 E_1^3) \\
&= -j_1^2 + 2qv_2^2 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^2 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^2.
\end{aligned} \tag{D.144}$$

Similarly, after simplification (D.137) gives :

$$\begin{aligned}
Z_2 &= i[\partial_0 H_1^2 + \partial_3 E_1^1 - \partial_1 E_1^3 - 2q(A^0 H_2^2 - A^1 E_2^3 + A^3 E_2^1) \\
&\quad - 2m(v_0 H_2^2 - v^3 E_2^1 + v^1 E_2^3) - 2d(v_0 E_1^2 + v^3 H_1^1 - v^1 H_1^3) \\
&= i[-j_1'^2 + 2qv_2'^2 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^2 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^2].
\end{aligned} \tag{D.145}$$

Avec (D.133) et (D.137) on a :

$$\begin{aligned}
X_{12} &= \Omega_1 Y_2 + i\Omega_2 Z_2 \\
&= \Omega_1(-j_1^2 + 2qv_2^2 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^2 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^2) \\
&\quad - \Omega_2(-j_1'^2 + 2qv_2'^2 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^2 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^2) \\
&= -\Omega_1 j_1^2 + \Omega_2 j_1'^2 + 2q(\Omega_1 v_2^2 - \Omega_2 v_2'^2) + 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_2^2 \\
&= \rho^2(-\mathcal{S}_{(1)}^2 + 2q\mathcal{A}_{(2)}^2) + 2m\rho D_2^2.
\end{aligned} \tag{D.146}$$

Utilisant à nouveau (D.137), et en simplifiant, on a :

$$\begin{aligned}
Y_3 &= -\partial_0 S_1^{12} + \partial_1 S_1^{10} - \partial_2 S_1^{10} + 2q(A_0 E_2^3 - A_1 H_2^2 + A_2 H_2^1) \\
&\quad + 2m(v_0 E_2^3 - v_1 H_2^2 + v_2 H_2^1) - 2d(v_0 H_1^3 + v_1 E_1^2 - v_2 E_1^1) \\
&= -j_1^3 + 2qv_2^3 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^3 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^3.
\end{aligned} \tag{D.147}$$

De même, et après simplification, (D.137) donne :

$$\begin{aligned} Z_3 &= i[\partial_0 H_1^3 + \partial_1 E_1^2 - \partial_2 E_1^1 - 2q(A^0 H_2^3 - A^2 E_2^1 + A^1 E_2^2) \\ &\quad - 2m(v_0 H_2^3 - v^1 E_2^2 + v^2 E_2^1) - 2d(v_0 E_1^3 + v^1 H_1^2 - v^2 H_1^1)] \\ &= i[-j_1'^3 + 2qv_2'^3 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^3 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^3]. \end{aligned} \quad (D.148)$$

Avec (D.133) et (D.137) on a :

$$\begin{aligned} X_{13} &= \Omega_1 Y_3 + i\Omega_2 Z_3 \\ &= \Omega_1(-j_1'^3 + 2qv_2'^3 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^3 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^3) \\ &\quad - \Omega_2(-j_1'^3 + 2qv_2'^3 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^3 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^3) \\ &= -\Omega_1 j_1'^3 + \Omega_2 j_1'^3 + 2q(\Omega_1 v_2^3 - \Omega_2 v_2'^3) + 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_2^3 \\ &= \rho^2(-\mathcal{S}_{(1)}^3 + 2q\mathcal{A}_{(2)}^3) + 2m\rho D_2^3. \end{aligned} \quad (D.149)$$

Et donc on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma_{1\nu}^0 &= \rho^{-2} D_\nu^\mu X_{1\mu} = \rho^{-2} [D_\nu^0 X_{10} + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k X_{1k}] \\ &= \rho^{-2} [D_\nu^0 (\rho^2 \mathcal{S}_{(1)}^0 - 2q\rho^2 \mathcal{A}_{(2)}^0 - 2m\rho D_2^0) \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k (-\rho^2 \mathcal{S}_{(1)}^k + 2q\rho^2 \mathcal{A}_{(2)}^k + 2m\rho D_2^k)] \\ &= D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(1)} - 2q\mathcal{A}_{(2)} - 2\frac{m}{\rho}D_2) \\ &= D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(1)} - 2q\mathcal{A}_{(2)}) + 2m\rho\delta_\nu^2, \end{aligned} \quad (D.150)$$

ce qui est (4.34)

#### D.4.5 Calcul des $\Gamma_{2\nu}^0$

On part de :

$$\Gamma_{2\nu}^0 = \rho^{-2} D_\nu^\mu X_{2\mu}, \quad (D.151)$$

$$X_{2\mu} = -D_2^0 \partial_\mu D_0^0 + D_2^1 \partial_\mu D_0^1 + D_2^2 \partial_\mu D_0^2 + D_2^3 \partial_\mu D_0^3. \quad (D.152)$$

On a :

$$\begin{aligned} X_{2\mu} &= -i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* + \eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*) \\ &\quad + i(\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^* - \eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*) \\ &\quad + (\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 + \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \partial_\mu i(\xi_1 \xi_2^* - \xi_2 \xi_1^* - \eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*) \\ &\quad + i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_1^* - \xi_2 \xi_2^* - \eta_1 \eta_1^* + \eta_2 \eta_2^*), \end{aligned} \quad (D.153)$$

ce qui, avec (A.176), donne :

$$X_{2\mu} = \begin{pmatrix} \xi_2(i\Omega_1 + \Omega_2)\partial_\mu\xi_1 - \xi_1(i\Omega_1 + \Omega_2)\partial_\mu\xi_2 \\ -\eta_2(i\Omega_1 - \Omega_2)\partial_\mu\eta_1 + \eta_1(i\Omega_1 - \Omega_2)\partial_\mu\eta_2 \\ -\xi_2^*(i\Omega_1 - \Omega_2)\partial_\mu\xi_1^* + \xi_1^*(i\Omega_1 - \Omega_2)\partial_\mu\xi_2^* \\ +\eta_2^*(i\Omega_1 + \Omega_2)\partial_\mu\eta_1^* - \eta_1^*(i\Omega_1 + \Omega_2)\partial_\mu\eta_2^* \end{pmatrix}. \quad (\text{D.154})$$

On peut l'exprimer comme :

$$X_{2\mu} = i\Omega_1 L_\mu + \Omega_2 M_\mu, \quad (\text{D.155})$$

$$L_\mu = -\xi_1\partial_\mu\xi_2 + \xi_2\partial_\mu\xi_1 + \eta_1\partial_\mu\eta_2 - \eta_2\partial_\mu\eta_1 \\ + \xi_1^*\partial_\mu\xi_2^* - \xi_2^*\partial_\mu\xi_1^* - \eta_1^*\partial_\mu\eta_2^* + \eta_2^*\partial_\mu\eta_1^*, \quad (\text{D.156})$$

$$M_\mu = -\xi_1\partial_\mu\xi_2 + \xi_2\partial_\mu\xi_1 - \eta_1\partial_\mu\eta_2 + \eta_2\partial_\mu\eta_1 \\ - \xi_1^*\partial_\mu\xi_2^* + \xi_2^*\partial_\mu\xi_1^* - \eta_1^*\partial_\mu\eta_2^* + \eta_2^*\partial_\mu\eta_1^*. \quad (\text{D.157})$$

A nouveau avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$L_0 = i[\partial_1 E_2^1 + \partial_2 E_2^2 + \partial_3 E_2^3 - 2\vec{b} \cdot \vec{E}_R - 2\vec{a} \cdot \vec{E}_L \\ = i[\vec{\partial} \cdot \vec{E}_2 - 2(q\vec{A} + \mathbf{r}\vec{v}) \cdot \vec{E}_R - 2(q\vec{A} + \mathbf{l}\vec{v}) \cdot \vec{E}_L] \\ = i(-j_2^0 - 2qv_1^0 - 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^0 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^0). \quad (\text{D.158})$$

Après simplification l'équation (D.157) donne :

$$M_0 = -\partial_1 H_2^1 - \partial_2 H_2^2 - \partial_3 H_2^3 + 2\vec{b} \cdot \vec{H}_R + 2\vec{a} \cdot \vec{H}_L \\ = -\vec{\partial} \cdot \vec{H}_2 + 2(q\vec{A} + \mathbf{r}\vec{v}) \cdot \vec{H}_R + 2(q\vec{A} + \mathbf{l}\vec{v}) \cdot \vec{H}_L \\ = -j_2'^0 - 2qv_1'^0 + 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^0 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^0. \quad (\text{D.159})$$

Avec (D.155) et (D.158) on obtient :

$$X_{20} = i\Omega_1 L_0 + \Omega_2 M_0 \\ = -\Omega_1(-j_2^0 - 2qv_1^0 - 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^0 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^0) \\ + \Omega_2(-j_2'^0 - 2qv_1'^0 + 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^0 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^0) \\ = (\Omega_1 j_2^0 - \Omega_2 j_2'^0) + 2q(\Omega_1 v_1^0 - \Omega_2 v_1'^0) + 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_1^0 \\ = \rho^2(\mathcal{S}_{(2)}^0 + 2q\mathcal{A}_{(1)}^0) + 2m\rho D_1^0. \quad (\text{D.160})$$

Comme d'habitude avec (D.137) et après simplification on a :

$$L_1 = i[\partial_0(H_R^1 - H_L^1) + \partial_2(E_R^3 - E_L^3) - \partial_3(E_R^2 - E_L^2) \\ + 2b_0 E_R^1 + 2a_0 E_L^1 - 2b_2 H_R^3 - 2a_2 H_L^3 + 2b_3 H_R^2 + 2a_3 H_L^2] \\ = i\left(j_2^1 + 2qv_1^1 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^1 + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^1\right). \quad (\text{D.161})$$

Avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned}
M_1 &= \partial_0(E_R^1 - E_L^1) + \partial_2(-H_R^3 + H_L^3) + \partial_3(H_R^2 - H_L^2) \\
&\quad + 2(-b_0H_R^1 - b_2E_R^3 + b_3E_R^2) + 2(-a_0H_L^1 - a_2E_L^3 + a_3E_L^2) \\
&= j_2'^1 + 2qv_1'^1 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^1 + 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^1.
\end{aligned} \tag{D.162}$$

Avec (D.155), (D.161) et (D.162) on a :

$$\begin{aligned}
X_{21} &= i\Omega_1L_1 + \Omega_2M_1 \\
&= -\Omega_1(j_2^1 + 2qv_1^1 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^1 + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^1) \\
&\quad + \Omega_2(j_2'^1 + 2qv_1'^1 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^1 + 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^1) \\
&= -\Omega_1j_2^1 + \Omega_2j_2'^1 + 2q(-\Omega_1v_1^1 + \Omega_2v_1'^1) - 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_1^1 \\
&= \rho^2(-\mathcal{S}_{(2)}^1 - 2q\mathcal{A}_{(1)}^1) + 2m\rho D_1^1.
\end{aligned} \tag{D.163}$$

A nouveau avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned}
L_2 &= i[\partial_0(H_R^2 - H_L^2) + \partial_3(E_R^1 - E_L^1) - \partial_1(E_R^3 - E_L^3) \\
&\quad + 2b_0E_R^2 + 2a_0E_L^2 - 2b_3H_R^1 - 2a_3H_L^1 + 2b_1H_R^3 + 2a_1H_L^3] \\
&= i(j_2^2 + 2qv_1^2 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^2 + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^2).
\end{aligned} \tag{D.164}$$

De même avec (D.137) et en simplifiant on obtient :

$$\begin{aligned}
M_2 &= \partial_0(E_R^2 - E_L^2) + \partial_3(-H_R^1 + H_L^1) + \partial_1(H_R^3 - H_L^3) \\
&\quad + 2(-b_0H_R^2 - b_3E_R^1 + b_1E_R^3) + 2(-a_0H_L^2 - a_3E_L^1 + a_1E_L^3) \\
&= j_2'^2 + 2qv_1'^2 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^2.
\end{aligned} \tag{D.165}$$

Avec (D.155), (D.164) et (D.165) on a :

$$\begin{aligned}
X_{22} &= i\Omega_1L_2 + \Omega_2M_2 \\
&= -\Omega_1\left(j_2^2 + 2qv_1^2 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^2 + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^2\right) \\
&\quad + \Omega_2\left(j_2'^2 + 2qv_1'^2 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^2 + 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^2\right) \\
&= -\Omega_1j_2^2 + \Omega_2j_2'^2 + 2q(-\Omega_1v_1^2 + \Omega_2v_1'^2) - 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_1^2 \\
&= \rho^2(-\mathcal{S}_{(2)}^2 - 2q\mathcal{A}_{(1)}^2) + 2m\rho D_1^2.
\end{aligned} \tag{D.166}$$

A nouveau avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned} L_3 &= i[\partial_0(H_R^3 - H_L^3) + \partial_2(E_R^2 - E_L^2) - \partial_2(E_R^1 - E_L^1) \\ &\quad + 2b_0E_R^3 + 2a_0E_L^3 - 2b_1H_R^2 - 2a_1H_L^2 + 2b_2H_R^1 + 2a_2H_L^1] \\ &= i\left(j_2^3 + 2qv_1^3 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^3 + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^3\right). \end{aligned} \quad (D.167)$$

De même avec (D.137) et en simplifiant on a :

$$\begin{aligned} M_3 &= \partial_0(E_R^3 - E_L^3) + \partial_1(-H_R^2 + H_L^2) + \partial_2(H_R^1 - H_L^1) \\ &\quad + 2(-b_0H_R^3 - b_1D_R^2 + b_2E_R^1) + 2(-a_0H_L^3 - a_1E_L^2 + a_2E_L^1) \\ &= j_2^3 + 2qv_1^3 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^3. \end{aligned} \quad (D.168)$$

Avec (D.155), (D.167) et (D.168) on obtient :

$$\begin{aligned} X_{23} &= i\Omega_1 L_3 + \Omega_2 M_3 \\ &= -\Omega_1\left(j_2^3 + 2qv_1^3 + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^3 + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^3\right) \\ &\quad + \Omega_2\left(j_2^3 + 2qv_1^3 - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^3 + 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^3\right) \\ &= -\Omega_1 j_2^3 + \Omega_2 j_2^3 + 2q(-\Omega_1 v_1^3 + \Omega_2 v_1^3) - 2m\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho}D_1^3 \\ &= \rho^2(-\mathcal{S}_{(2)}^3 - 2q\mathcal{A}_{(1)}^3) + 2m\rho D_1^3. \end{aligned} \quad (D.169)$$

Et donc on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\nu}^0 &= \rho^{-2}D_\nu^\mu X_{2\mu} = \rho^{-2}\left[D_\nu^0 X_{20} + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k X_{2k}\right] \\ &= \rho^{-2}[D_\nu^0(\rho^2\mathcal{S}_{(2)}^0 + 2q\rho^2\mathcal{A}_{(1)}^0) + 2m\rho D_1^0] \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k(-\rho^2\mathcal{S}_{(2)}^k - 2q\rho^2\mathcal{A}_{(1)}^k - 2m\rho D_1^k) \\ &= D_\nu \cdot \left(\mathcal{S}_{(2)} + 2q\mathcal{A}_{(1)} + 2\frac{m}{\rho}D_1\right) \\ &= D_\nu \cdot (\mathcal{S}_{(2)} + 2q\mathcal{A}_{(1)}) - 2m\rho\delta_\nu^1, \end{aligned} \quad (D.170)$$

ce qui est (4.35),

#### D.4.6 Calcul des $\Gamma_{3\nu}^0$

On commence avec :

$$\Gamma_{3\nu}^0 = \rho^{-2}D_\nu^\mu X_{3\mu}, \quad (D.171)$$

$$X_{3\mu} = -D_3^0\partial_\mu D_0^0 + D_3^1\partial_\mu D_0^1 + D_3^2\partial_\mu D_0^2 + D_3^3\partial_\mu D_0^3. \quad (D.172)$$

On a :

$$\begin{aligned}
X_{3\mu} = & -(\xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* - \eta_1\eta_1^* - \eta_2\eta_2^*)\partial_\mu(\xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* + \eta_1\eta_1^* + \eta_2\eta_2^*) \\
& + (\xi_1\xi_2^* + \xi_2\xi_1^* + \eta_1\eta_2^* + \eta_2\eta_1^*)\partial_\mu(\xi_1\xi_2^* + \xi_2\xi_1^* - \eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*) \\
& + i(\xi_1\xi_2^* - \xi_2\xi_1^* + \eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*)\partial_\mu i(\xi_1\xi_2^* - \xi_2\xi_1^* - \eta_1\eta_2^* + \eta_2\eta_1^*) \\
& + (\xi_1\xi_1^* - \xi_2\xi_2^* + \eta_1\eta_1^* - \eta_2\eta_2^*)\partial_\mu(\xi_1\xi_1^* - \xi_2\xi_2^* - \eta_1\eta_1^* + \eta_2\eta_2^*), \quad (D.173)
\end{aligned}$$

ce qui, par (A.176), donne :

$$X_{3\mu} = \begin{pmatrix} \eta_1^*(\Omega_1 - i\Omega_2)\partial_\mu\xi_1 + \eta_2^*(\Omega_1 - i\Omega_2)\partial_\mu\xi_2 \\ -\xi_1^*(\Omega_1 + i\Omega_2)\partial_\mu\eta_1 - \xi_2^*(\Omega_1 + i\Omega_2)\partial_\mu\eta_2 \\ +\eta_1(\Omega_1 + i\Omega_2)\partial_\mu\xi_1^* + \eta_2(\Omega_1 + i\Omega_2)\partial_\mu\xi_2^* \\ -\xi_1(\Omega_1 - i\Omega_2)\partial_\mu\eta_1^* - \xi_2(\Omega_1 - i\Omega_2)\partial_\mu\eta_2^* \end{pmatrix}. \quad (D.174)$$

On pose :

$$X_{3\mu} := \Omega_1 N_\mu + i\Omega_2 P_\mu, \quad (D.175)$$

$$\begin{aligned}
N_\mu = & \eta_1^*\partial_\mu\xi_1 + \eta_2^*\partial_\mu\xi_2 - \xi_1^*\partial_\mu\eta_1 - \xi_2^*\partial_\mu\eta_2 \\
& + \eta_1\partial_\mu\xi_1^* + \eta_2\partial_\mu\xi_2^* - \xi_1\partial_\mu\eta_1^* - \xi_2\partial_\mu\eta_2^*, \quad (D.176)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_\mu = & -\eta_1^*\partial_\mu\xi_1 - \eta_2^*\partial_\mu\xi_2 - \xi_1^*\partial_\mu\eta_1 - \xi_2^*\partial_\mu\eta_2 \\
& + \eta_1\partial_\mu\xi_1^* + \eta_2\partial_\mu\xi_2^* + \xi_1\partial_\mu\eta_1^* + \xi_2\partial_\mu\eta_2^*. \quad (D.177)
\end{aligned}$$

Avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned}
N_0 = & -\partial_1 E_3^1 - \partial_2 E_3^2 - \partial_3 E_3^3 + (b_0 + a_0)\Omega_2 \\
& + (b_1 - a_1)H_3^1 + (b_2 - a_2)H_3^2 + (b_3 - a_3)H_3^3 \\
= & j_3^0 + 2\Omega_2 \left( qA^0 + mv^0 + \frac{d}{\rho}D_3^0 \right). \quad (D.178)
\end{aligned}$$

A nouveau avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned}
P_0 = & \partial_1(iH_3^1) + \partial_2(iH_3^2) + \partial_3(iH_3^3) + i(b_0 + a_0)\Omega_1 \\
& + i(b_1 - a_1)E_3^1 + i(b_2 - a_2)E_3^2 + i(b_3 - a_3)E_3^3 \\
= & i \left[ j_3'^0 + 2\Omega_1 \left( qA_0 + mv_0 + \frac{d}{\rho}D_3^0 \right) \right]. \quad (D.179)
\end{aligned}$$

A la lumière de (D.175), (D.178) et (D.179) pris ensemble, on obtient :

$$\begin{aligned}
X_{30} = & \Omega_1 N_0 + \Omega_2 i P_0 \\
= & \Omega_1 \left[ j_3^0 + 2\Omega_2 \left( qA^0 + mv^0 + \frac{d}{\rho}D_3^0 \right) \right] - \Omega_2 \left[ j_3'^0 + 2\Omega_1 \left( qA_0 + mv_0 + \frac{d}{\rho}D_3^0 \right) \right] \\
= & \Omega_1 j_3^0 - \Omega_2 j_3'^0 \\
= & \rho^2 \mathcal{S}_{(3)}^0. \quad (D.180)
\end{aligned}$$

Comme toujours avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned} N_1 &= -\partial_0 E_3^1 + \partial_2 H_3^3 - \partial_3 H_3^2 \\ &\quad + (b_1 + a_1)\Omega_2 + (b_0 - a_0)H_3^1 + (b_2 - a_2)E_3^3 + (b_3 - a_3)(-E_3^2) \\ &= -j_3^1 - 2\Omega_2 \left( qA^1 + \frac{m}{\rho}D_0^1 + \frac{d}{\rho}D_3^1 \right). \end{aligned} \quad (D.181)$$

Avec (D.137) et après simplification on obtient :

$$\begin{aligned} P_1 &= i(\partial_0 H_3^1 + \partial_2 E_3^3 - \partial_3 E_3^2 + (b_1 + a_1)E_3^1 \\ &\quad + (b_0 - a_0)E_3^1 - (b_2 - a_2)H_3^3 + (b_3 - a_3)H_3^2) \\ &= i \left[ -j_3^1 - 2\Omega_1 \left( qA^1 + \frac{m}{\rho}D_0^1 + \frac{d}{\rho}D_3^1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (D.182)$$

Avec (D.175), (D.181) et (D.182) on obtient :

$$\begin{aligned} X_{31} &= \Omega_1 N_1 + \Omega_2 i P_1 \\ &= \Omega_1 \left[ -j_3^1 - 2\Omega_2 \left( qA^1 + \frac{m}{\rho}D_0^1 + \frac{d}{\rho}D_3^1 \right) \right] \\ &\quad - \Omega_2 \left[ -j_3^1 - 2\Omega_1 \left( qA^1 + \frac{m}{\rho}D_0^1 + \frac{d}{\rho}D_3^1 \right) \right] \\ &= -\Omega_1 j_3^1 + \Omega_2 j_3^1 = -\rho^2 \mathcal{S}_{(3)}^1. \end{aligned} \quad (D.183)$$

A nouveau (D.137) on obtient :

$$\begin{aligned} N_2 &= -\partial_0 E_3^2 - \partial_1 H_3^3 + \partial_3 H_3^1 + (b_2 + a_2)\Omega_2 \\ &\quad + (b_0 - a_0)H_3^2 + (b_3 - a_3)E_3^1 - (b_1 - a_1)E_3^2 \\ &= -j_3^2 - 2\Omega_2 \left( qA^2 + \frac{m}{\rho}D_0^2 + \frac{d}{\rho}D_3^2 \right). \end{aligned} \quad (D.184)$$

Comme d'habitude avec (D.137) on obtient :

$$\begin{aligned} P_2 &= i(\partial_0 H_3^2 + \partial_3 E_3^1 - \partial_1 E_3^3 + (b_2 + a_2)E_3^2 \\ &\quad + (b_0 - a_0)E_3^2 - (b_3 - a_3)H_3^1 + (b_1 - a_1)H_3^3) \\ &= i \left[ -j_3^2 - 2\Omega_1 \left( qA^2 + \frac{m}{\rho}D_0^2 + \frac{d}{\rho}D_3^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (D.185)$$

Avec (D.175), (D.184) et (D.185) on a :

$$\begin{aligned} X_{32} &= \Omega_1 N_2 + \Omega_2 i P_2 \\ &= \Omega_1 \left[ -j_3^2 - 2\Omega_2 \left( qA^2 + \frac{m}{\rho}D_0^2 + \frac{d}{\rho}D_3^2 \right) \right] \\ &\quad - \Omega_2 \left[ -j_3^2 - 2\Omega_1 \left( qA^2 + \frac{m}{\rho}D_0^2 + \frac{d}{\rho}D_3^2 \right) \right] \\ &= -\Omega_1 j_3^2 + \Omega_2 j_3^2 = -\rho^2 \mathcal{S}_{(3)}^2. \end{aligned} \quad (D.186)$$

Toujours avec (D.137) on obtient :

$$\begin{aligned}
N_3 &= -\partial_0 E_3^3 - \partial_2 H_3^1 + \partial_1 H_3^2 + (b_3 + a_3)\Omega_2 \\
&\quad + (b_0 - a_0)H_3^3 + (b_1 - a_1)E_3^2 - (b_2 - a_2)E_3^3 \\
&= -j_3^3 - 2\Omega_2(qA^3 + \frac{m}{\rho}D_0^3 + \frac{d}{\rho}D_3^3). \tag{D.187}
\end{aligned}$$

Avec (D.137) et après simplification on a :

$$\begin{aligned}
P_3 &= i(\partial_0 H_3^3 + \partial_1 E_3^2 - \partial_2 E_3^1 + (b_3 + a_3)E_3^3 \\
&\quad + (b_0 - a_0)E_3^3 - (b_1 - a_1)H_3^2 + (b_2 - a_2)H_3^1 \\
&= i\left[-j_3^3 - 2\Omega_1\left(qA^3 + \frac{m}{\rho}D_0^3 + \frac{d}{\rho}D_3^3\right)\right]. \tag{D.188}
\end{aligned}$$

Donc avec (D.175), (D.187) et (D.188) on obtient :

$$\begin{aligned}
X_{33} &= \Omega_1 N_3 + \Omega_2 i P_3 \\
&= \Omega_1 \left[-j_3^3 - 2\Omega_2\left(qA^3 + \frac{m}{\rho}D_0^3 + \frac{d}{\rho}D_3^3\right)\right] \\
&\quad - \Omega_2 \left[-j_3^3 - 2\Omega_1\left(qA^3 + \frac{m}{\rho}D_0^3 + \frac{d}{\rho}D_3^3\right)\right] \\
&= -\Omega_1 j_3^3 + \Omega_2 j_3^3 = -\rho^2 \mathcal{S}_{(3)}^3. \tag{D.189}
\end{aligned}$$

Et donc on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3\nu}^0 &= \rho^{-2} D_\nu^\mu X_{3\mu} = \rho^{-2} \left[ D_\nu^0 X_{30} + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k X_{3k} \right] \\
&= \rho^{-2} \left[ D_\nu^0 \left( \rho^2 \mathcal{S}_{(3)}^0 \right) + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k \left( -\rho^2 \mathcal{S}_{(3)}^k \right) \right] \\
&= D_\nu \cdot \mathcal{S}_{(3)}, \tag{D.190}
\end{aligned}$$

ce qui est (4.36).

#### D.4.7 Calcul des $\Gamma_{l\nu}^k$

Il faut calculer ces termes pour for  $k = 1, 2, 3$ ;  $l = 1, 2, 3$  and  $l \neq k$ .  
On part de :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{l\nu}^k &= \rho^{-2} (\partial_\nu D_l^\mu) \bar{D}_\mu^k \\
&= \rho^{-2} \left[ (\partial_\nu D_l^0) \bar{D}_0^k + \sum_{n=1}^3 (\partial_\nu D_l^n) \bar{D}_n^k \right] \\
&= \rho^{-2} \left[ (\partial_\nu D_l^0) (-D_k^0) + \sum_{n=1}^3 (\partial_\nu D_l^n) D_k^n \right], \tag{D.191}
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k\nu}^l &= \rho^{-2}(\partial_\nu D_k^\mu) \overline{D}_\mu^l \\
&= \rho^{-2} \left[ (\partial_\nu D_k^0) \overline{D}_0^l + \sum_{n=1}^3 (\partial_\nu D_k^n) \overline{D}_n^l \right] \\
&= \rho^{-2} \left[ (\partial_\nu D_k^0) (-D_l^0) + \sum_{n=1}^3 (\partial_\nu D_k^n) D_l^n \right]. \tag{D.192}
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{l\nu}^k + \Gamma_{k\nu}^l &= \rho^{-2} \left[ -\partial_\nu (D_k^0 D_l^0) + \sum_{n=1}^3 \partial_\nu (D_k^n D_l^n) \right], \\
&= -\rho^{-2} \partial_\nu (D_k \cdot D_l) = 0 \tag{D.193}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{k\nu}^l = -\Gamma_{l\nu}^k. \tag{D.194}$$

Le calcul de  $\Gamma_{2\nu}^1$ ,  $\Gamma_{3\nu}^2$  et  $\Gamma_{1\nu}^3$  est donc suffisant. De plus on a :

$$\begin{aligned}
\rho^2 \Gamma_{l\nu}^k &= \begin{pmatrix} -D_k^0 (D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3) (D_l^0) \\ +D_k^1 (D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3) (D_l^1) \\ +D_k^2 (D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3) (D_l^2) \\ +D_k^3 (D_\nu^0 \partial_0 + D_\nu^1 \partial_1 + D_\nu^2 \partial_2 + D_\nu^3 \partial_3) (D_l^3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} D_\nu^0 (-D_k^0 \partial_0 D_l^0 + D_k^1 \partial_0 D_l^1 + D_k^2 \partial_0 D_l^2 + D_k^3 \partial_0 D_l^3) \\ +D_\nu^1 (-D_k^0 \partial_1 D_l^0 + D_k^1 \partial_1 D_l^1 + D_k^2 \partial_1 D_l^2 + D_k^3 \partial_1 D_l^3) \\ +D_\nu^2 (-D_k^0 \partial_2 D_l^0 + D_k^1 \partial_2 D_l^1 + D_k^2 \partial_2 D_l^2 + D_k^3 \partial_2 D_l^3) \\ +D_\nu^3 (-D_k^0 \partial_3 D_l^0 + D_k^1 \partial_3 D_l^1 + D_k^2 \partial_3 D_l^2 + D_k^3 \partial_3 D_l^3) \end{pmatrix} \\
&= D_\nu^\mu (-D_k^0 \partial_\mu D_l^0 + D_k^1 \partial_\mu D_l^1 - D_k^2 \partial_\mu D_l^2 + D_k^3 \partial_\mu D_l^3). \tag{D.195}
\end{aligned}$$

#### Calcul des $\Gamma_{2\nu}^1$

Étant donné que :

$$\begin{aligned}
\rho^2 \Gamma_{2\nu}^1 &= D_\nu^\mu (iW_\mu), \\
iW_\mu &= -D_1^0 \partial_\mu D_2^0 + D_1^1 \partial_\mu D_2^1 - D_1^2 \partial_\mu D_2^2 + D_1^3 \partial_\mu D_2^3 \tag{D.196} \\
&= -(-\xi_1^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1) \partial_\mu i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1) \\
&\quad + (\xi_1^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \partial_\mu i(\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_1) \\
&\quad + i(-\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 + \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \\
&\quad + (-\xi_1^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1) \partial_\mu i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}W_\mu &= (\partial_\mu \xi_1)(-\eta_1^*)(\eta_2 \xi_2^* + \eta_1 \xi_1^*) + (\partial_\mu \xi_2)(-\eta_2^*)(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*) \\ &\quad + (\partial_\mu \eta_1)(-\xi_1^*)(\xi_2 \eta_2^* + \xi_1 \eta_1^*) + (\partial_\mu \eta_2)(-\xi_2^*)(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*) \\ &\quad + (\partial_\mu \xi_1^*)\eta_1(\xi_2 \eta_2^* + \xi_1 \eta_1^*) + (\partial_\mu \xi_2^*)\eta_2(\xi_1 \eta_1^* + \xi_2 \eta_2^*) \\ &\quad + (\partial_\mu \eta_1^*)\xi_1(\eta_2 \xi_2^* + \eta_1 \xi_1^*) + (\partial_\mu \eta_2^*)\xi_2(\eta_1 \xi_1^* + \eta_2 \xi_2^*), \end{aligned} \quad (D.197)$$

ce qui donne avec (D.176) et (D.177) calculant  $N_\mu$  et  $P_\mu$  :

$$iW_\mu = \Omega_1 iP_\mu - \Omega_2 N_\mu. \quad (D.198)$$

On peut donc utiliser directement les résultats de D.4.6 et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \rho^2 \Gamma_{2\nu}^1 &= D_\nu^0 \left[ -\rho^2 \mathcal{S}'_{(3)}{}^0 - 2\rho^2 \left( qA^0 + \frac{m}{\rho} D_0^0 + \frac{d}{\rho} D_3^0 \right) \right] \\ &\quad + D_\nu^k \left[ \rho^2 \mathcal{S}'_{(3)}{}^k + 2\rho^2 \left( qA^k + \frac{m}{\rho} D_0^k + \frac{d}{\rho} D_3^k \right) \right] \\ \Gamma_{2\nu}^1 &= -D_\nu \cdot (\mathcal{S}'_{(3)} + 2qA) - 2m\rho \delta_\nu^0 + 2d\rho \delta_\nu^3. \end{aligned} \quad (D.199)$$

ce qui donne (4.39).

### Calcul des $\Gamma_{3\nu}^2$

De même on a :

$$\begin{aligned} \rho^2 \Gamma_{3\nu}^2 &= D_\nu^\mu R_\mu, \\ R_\mu &= -D_2^0 \partial_\mu D_3^0 + D_2^1 \partial_\mu D_3^1 + D_2^2 \partial_\mu D_3^2 + D_2^3 \partial_\mu D_3^3 \\ &= -i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 + \xi_2^* \eta_1^* - \xi_2 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_1^* + \xi_2 \xi_2^* - \eta_1 \eta_1^* - \eta_2 \eta_2^*) \\ &\quad + i(\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 - \xi_2^* \eta_2^* - \xi_1 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_2^* + \xi_2 \xi_1^* + \eta_1 \eta_2^* + \eta_2 \eta_1^*) \\ &\quad + (\xi_1^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_2 + \xi_2^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_1) \partial_\mu i(\xi_1 \xi_2^* - \xi_2 \xi_1^* + \eta_1 \eta_2^* - \eta_2 \eta_1^*) \\ &\quad + i(-\xi_1^* \eta_2^* + \xi_1 \eta_2 - \xi_2^* \eta_1^* + \xi_2 \eta_1) \partial_\mu (\xi_1 \xi_1^* - \xi_2 \xi_2^* + \eta_1 \eta_1^* - \eta_2 \eta_2^*). \end{aligned} \quad (D.201)$$

En se servant toujours de (D.137) on a :

$$R_\mu = i \begin{pmatrix} \xi_2(\partial_\mu \xi_1)(\Omega_1 - i\Omega_2) - \xi_1(\partial_\mu \xi_2)(\Omega_1 - i\Omega_2) \\ + \eta_2(\partial_\mu \eta_1)(\Omega_1 + i\Omega_2) - \eta_1(\partial_\mu \eta_2)(\Omega_1 + i\Omega_2) \\ - \xi_2^*(\partial_\mu \xi_1^*)(\Omega_1 + i\Omega_2) + \xi_1^*(\partial_\mu \xi_2^*)(\Omega_1 + i\Omega_2) \\ - \eta_2^*(\partial_\mu \eta_1^*)(\Omega_1 - i\Omega_2) + \eta_1^*(\partial_\mu \eta_2^*)(\Omega_1 - i\Omega_2) \end{pmatrix}. \quad (D.202)$$

Avec (D.134) et (D.135) calculant  $Y_\mu$  et  $Z_\mu$  on déduit :

$$R_\mu = -\Omega_2 Y_\mu + \Omega_1 iZ_\mu. \quad (D.203)$$

On peut alors utiliser les résultats de D.4.4 et on obtient directement :

$$\begin{aligned}\rho^2\Gamma_{3\nu}^2 &= D_\nu^\mu [-(\Omega_2 j_{1\mu} + \Omega_1 j_{1\mu} - 2q(\Omega_2 v_2^\mu + \Omega_1 v_2'^\mu) \\ &\quad - 2m \frac{\Omega_1 \Omega_2 - \Omega_2 \Omega_1}{\rho} D_2^\mu + 2d \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\rho} D_1^\mu] \\ \Gamma_{3\nu}^2 &= -D_\nu \cdot (\mathcal{S}'_{(1)} + 2q\mathcal{A}'_{(2)}) - 2d\rho\delta_\nu^1.\end{aligned}\quad (D.204)$$

C'est (4.37).

### Calcul des $\Gamma_{1\nu}^3$

On a finalement :

$$\begin{aligned}\rho^2\Gamma_{1\nu}^3 &= D_\nu^\mu(Q_\mu), \\ Q_\mu &= -D_3^0\partial_\mu D_1^0 + D_3^1\partial_\mu D_1^1 + D_3^2\partial_\mu D_1^2 + D_3^3\partial_\mu D_1^3 \\ &= -(\xi_1\xi_1^* + \xi_2\xi_2^* - \eta_1\eta_1^* - \eta_2\eta_2^*)\partial_\mu(-\xi_1^*\eta_2^* - \xi_1\eta_2 + \xi_2^*\eta_1^* + \xi_2\eta_1) \\ &\quad + (\xi_1\xi_2^* + \xi_2\xi_1^* + \eta_1\eta_2^* + \eta_2\eta_1^*)\partial_\mu(\xi_1^*\eta_1^* - \xi_2\eta_2 - \xi_2^*\eta_2^* + \xi_1\eta_1) \\ &\quad + i^2(\xi_1\xi_2^* - \xi_2\xi_1^* + \eta_1\eta_2^* - \eta_2\eta_1^*)\partial_\mu(-\xi_1^*\eta_1^* + \xi_2\eta_2 - \xi_2^*\eta_2^* + \xi_1\eta_1) \\ &\quad + (\xi_1\xi_1^* - \xi_2\xi_2^* + \eta_1\eta_1^* - \eta_2\eta_2^*)\partial_\mu(-\xi_1^*\eta_2^* - \xi_1\eta_2 - \xi_2^*\eta_1^* - \xi_2\eta_1).\end{aligned}\quad (D.205)$$

(D.206)

On obtient avec (D.156) et (D.157) calculant  $L_\mu$  et  $M_\mu$  :

$$Q_\mu = \Omega_1 M_\mu - i\Omega_2 L_\mu. \quad (D.207)$$

On peut donc utiliser les résultats D.4.5 et on obtient directement :

$$\begin{aligned}\rho^2\Gamma_{1\nu}^3 &= D_\nu^0[\Omega_2(-j_2^0 - 2qv_1^0 - 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_1^0 - 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^0) \\ &\quad + \Omega_1(-j_2'^0 - 2qv_1'^0 + 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^0 - 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^0)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^3 D_\nu^k[\Omega_2(j_2^k + 2qv_1^k + 2m\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^k + 2d\frac{\Omega_2}{\rho}D_2^k) \\ &\quad + \Omega_1(j_2'^k + 2qv_1'^k - 2m\frac{\Omega_2}{\rho}D_1^k + 2d\frac{\Omega_1}{\rho}D_2^k)].\end{aligned}\quad (D.208)$$

Ceci donne :

$$\Gamma_{1\nu}^3 = D_\nu \cdot (-\mathcal{S}'_{(2)} - 2q\mathcal{A}'_{(1)}) + 2d\rho\delta_\nu^2, \quad (D.209)$$

ce qui donne (4.38), fin de ce long et fastidieux calcul.



# Bibliographie

- [1] H. Bacry. *Leçons sur la Théorie des Groupes et les Symétries des Particules Élémentaires*. Gordon and Breach, Paris, 1967.
- [2] D. Bailin and A. Love. *Introduction to gauge field theory*. IOP, Bristol USA, 1986.
- [3] W. E. Baylis. *Clifford (Geometric) Algebras*, chapter “The Paravector Model of Spacetime”, pages 237–296. Birkhauser, Boston, 1996.
- [4] J.S. Bell. *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [5] R. Boudet. The Takabayasi moving frame, from a potential to the Z boson. In S. Jeffers and J.P. Vigiér, editors, *The Present Status of the Quantum Theory of the Light*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [6] R. Boudet. *Quantum Mechanics in the Geometry of Space-Time*. Springer, New York, 2011.
- [7] L. Brillouin. *Relativity reexamined*. Academic Press, New York, 1970.
- [8] J.W. Butler. Poynting’s theorem and sources. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 7(3) :167–215, 1982.
- [9] G. Casanova. *L’algèbre vectorielle*. Presses Universitaires de France, Paris, 1976.
- [10] J.P. Crawford. *Clifford Algebras and their applications in mathematical physics*, chapter “Dirac equation for bispinor densities”, pages 353–362. Reidel, Dordrecht, 1985.
- [11] C.G. Darwin. The wave equations of the electron. *Proc. R. Soc. Lond.*, 118 :654–680, 1928.
- [12] C. Daviau. *Equation de Dirac non linéaire*. PhD thesis, Université de Nantes, 1993.
- [13] C. Daviau. Solutions of the Dirac equation and of a nonlinear Dirac equation for the hydrogen atom. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 7(S) :175–194, 1997.
- [14] C. Daviau. Sur l’équation de Dirac dans l’algèbre de Pauli. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 22(1) :87–103, 1997.

- [15] C. Daviau. Sur les tenseurs de la théorie de Dirac en algèbre d'espace. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 23(1), 1998.
- [16] C. Daviau. Vers une mécanique quantique sans nombre complexe. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 26(special) :149–171, 2001.
- [17] C. Daviau. Interprétation cinématique de l'onde de l'électron. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 30(3-4) :409–428, 2005.
- [18] C. Daviau. *What is the Electron*, chapter “Relativistic Wave Equations, Clifford Algebras and Orthogonal Gauge Groups”, pages 83–100. Volodimir Simulik, C. Roy Keys, Montreal, 2005.
- [19] C. Daviau. On the electromagnetism's invariance. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 33 :53–67, 2008.
- [20] C. Daviau. Aspects particuliers de l'onde de Dirac. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 34(1) :45–65, 2009.
- [21] C. Daviau. Résolution d'une équation d'onde de dirac non linéaire homogène pour l'atome d'hydrogène. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 35 :51–79, 2010.
- [22] C. Daviau. *L'espace-temps double*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2011.
- [23] C. Daviau. *Double Space-Time and more*. JePublie, Pouillé-les-coteaux, 2012.
- [24] C. Daviau. Invariant quantum wave equations and double space-time. *Adv. in Imaging and Electron Physics*, 179, chapter 1 :1–137, 2013.
- [25] C. Daviau. Gauge group of the standard model in  $Cl_{1,5}$ . *AACA*, 25, 2015.
- [26] C. Daviau. Retour à l'onde de Louis de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 40 :113–138, 2015.
- [27] C. Daviau. On electron clouds and light. *J. of Mod. Phys.*, 15 :491–510, 2024.
- [28] C. Daviau and J. Bertrand. A lepton Dirac equation with additional mass term and a wave equation for a fourth neutrino. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38, 2013.
- [29] C. Daviau and J. Bertrand. *New Insights in the Standard Model of Quantum Physics in Clifford Algebra*. Je Publie, Pouillé-les-coteaux, 2014.
- [30] C. Daviau and J. Bertrand. Relativistic gauge invariant wave equation of the electron-neutrino. *J. of Mod. Phys.*, 5 :1001–1022, 2014.
- [31] C. Daviau and J. Bertrand. A wave equation including leptons and quarks for the standard model of quantum physics in Clifford algebra. *J. of Mod. Phys.*, 5 :2149–2173, 2014.
- [32] C. Daviau and J. Bertrand. Charge des quarks, bosons de jauge et principe de Pauli. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 40 :181–209, 2015.

- [33] C. Daviau and J. Bertrand. Electro-weak gauge, Weinberg-Salam angle. *J. of Mod. Phys.*, 6 :2080–2092, 2015.
- [34] C. Daviau and J. Bertrand. Geometry of the standard model of quantum physics. *J. of Appl. Math. and Phys.*, 3 :46–61, 2015.
- [35] C. Daviau and J. Bertrand. Left chiral solutions for the hydrogen atom of the wave equation for electron and neutrino. *J. of Mod. Phys.*, 6 :1647–1656, 2015.
- [36] C. Daviau and J. Bertrand. L’onde leptonique générale : électron + monopôle magnétique. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 41 :73–97, 2016.
- [37] C. Daviau and J. Bertrand. *The standard model of quantum physics in Clifford algebra*. World Scientific, Singapore, 2016.
- [38] C. Daviau and J. Bertrand. Three clifford algebras for four kinds of interactions. *J. of Mod. Phys.*, 7 :936–951, 2016.
- [39] C. Daviau and J. Bertrand. Scientific community and remaining errors, physics examples. *J. of Mod. Phys.*, 9 :250–258, 2018.
- [40] C. Daviau and J. Bertrand. Le monopôle magnétique dans le modèle standard. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 44-1 :163–186, 2019.
- [41] C. Daviau and J. Bertrand. Resolution in the case of the hydrogen atom of an improved Dirac equation. *J. of Mod. Phys.*, 11 :1075–1090, 2020.
- [42] C. Daviau and J. Bertrand. Christoffel symbols and chiral properties of the space-time geometry for the atomic electron states. *J. of Mod. Phys.*, 12 :483–512, 2021.
- [43] C. Daviau and J. Bertrand. Including space-time in the extended group  $Cl_3^*$  of relativistic form-invariance. *J. of Mod. Phys.*, 13 :1147–1156, 2022.
- [44] C. Daviau and J. Bertrand. La géométrisation de la physique et Georges Lochak. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 47-1 :1–26, 2022.
- [45] C. Daviau and J. Bertrand. Sur la construction de l’espace-temps. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 47-2 :221–236, 2022.
- [46] C. Daviau and J. Bertrand. Soliton wave for the magnetic electron. *J. of Mod. Phys.*, 14 :1426–1436, 2023.
- [47] C. Daviau and J. Bertrand. Sur l’électron comme onde solitaire. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 48 :159–174, 2023-2024.
- [48] C. Daviau, J. Bertrand, and D. Girardot. Towards the unification, part 2 : Simplified equations, covariant derivative, photons. *J. of Mod. Phys.*, 7 :2398–2417, 2016.
- [49] C. Daviau, J. Bertrand, and D. Girardot. Towards the unification, the first part : The spinor wave. *J. of Mod. Phys.*, 7 :1568–1590, 2016.
- [50] C. Daviau, J. Bertrand, D. Girardot, and T. Socroun. Equations d’onde des bosons résultant des équations récursives des fermions. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 42 no 2 :351–378, 2017.

- [51] C. Daviau, J. Bertrand, T. Socroun, and D. Girardot. *Modèle Standard et Gravitation*. Presses des Mines, Paris, 2019.
- [52] C. Daviau, D. Fargue, D. Priem, and G. Racineux. Tracks of magnetic monopoles. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38 :139–153, 2013.
- [53] C. Daviau, D. Priem, and G. Racineux. Experimental report on magnetic monopoles. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 38 :189–194, 2013.
- [54] O. Costa de Beauregard. Sur un tenseur encore ininterprété en théorie de Dirac. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 14-3 :335–342, 1989.
- [55] L. de Broglie. Recherches sur la théorie des quantas. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 17(1), 1924.
- [56] L. de Broglie. *L'électron magnétique*. Hermann, Paris, 1934.
- [57] L. de Broglie. *La mécanique du photon, Une nouvelle théorie de la lumière : tome 1 La lumière dans le vide*. Hermann, Paris, 1940.
- [58] L. de Broglie. *tome 2 Les interactions entre les photons et la matière*. Hermann, Paris, 1942.
- [59] L. de Broglie. *La mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules*. Gauthier-Villars, Paris, 1950.
- [60] L. de Broglie. *La Théorie des particules de spin 1/2 (électrons de Dirac)*. Gauthier-Villars, Paris, 1952.
- [61] L. de Broglie. *Les incertitudes d'Heisenberg et l'interprétation probabiliste de la mécanique ondulatoire*. Bordas, Paris, 1982.
- [62] N. Debergh and J.-P. Petit. On spacetime algebra and its relations with negative masses. *Rev. of Mod. Phys. (submitted for publication)*, 2022.
- [63] René Deheuvels. *Tenseurs et spineurs*. PUF, Paris, 1993.
- [64] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. R. Soc. Lond.*, 117 :610–624, 1928.
- [65] P.A.M. Dirac. The quantum theory of the electron. part ii. *Proc. R. Soc. Lond.*, 118 :351–361, 1928.
- [66] C. Doran and A. Lasenby. *Geometric Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2003.
- [67] A. Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des liches betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 17 :132–148, 1905.
- [68] A. Einstein. Théorie unitaire du champ physique. *Annales de l'I. H. P.*, 1, no 1 :1–24, 1930.
- [69] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47 :777–780, 1935.

- [70] E. Elbaz. *De l'électromagnétique à l'électro-faible*. Ellipses, Paris, 1989.
- [71] L. Fabbri. Foundations quadrilogy. 2017.
- [72] R.P. Feynman. *Elementary Particles and the Laws of Physics*, chapter "The reason for antiparticles", pages 1–60. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [73] D.V. Filippov, A.A. Rukhadze, and L.I. Urutskoev. Effects of atomic electrons on nuclear stability and radioactive decay. *Ann. Fond. L. de Broglie*, 29(Hors-Série 3) :1207–1217, 2004.
- [74] V. Fock. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon Press, London, 1964.
- [75] S. Galtier. Spectroscopie haute précision de la transition 1s–3s de l'atome d'hydrogène en vue d'une détermination du rayon du proton. *Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie*, 2014.
- [76] D. Hestenes. *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach, New York, 1966.
- [77] D. Hestenes. Real spinor fields. *J. Math. Phys.*, 8(4) :798–808, 1967.
- [78] D. Hestenes. Local observables in the Dirac theory. *J. Math. Phys.*, 14(7) :893–905, 1973.
- [79] D. Hestenes. Observables, operators, and complex numbers in the dirac theory. *J. Math. Phys.*, 16(3) :556–572, 1973.
- [80] D. Hestenes. Space-time structure of weak and electromagnetic interactions. *Found. of Phys.*, 12 :153–168, 1982.
- [81] D. Hestenes. A unified language for Mathematics and Physics and Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics. In Chisholm and AK Common, editors, *Clifford Algebras and their applications in Mathematics and Physics*. Reidel, Dordrecht, 1986.
- [82] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford algebra to geometric calculus*. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [83] I. Kanatchikov. Ehrenfest theorem in precanonical quantization of fields and gravity. *J. Geom. Symmetry Phys.*, 37 :43–66, 2015.
- [84] YOSHIO KOIDE. Charged lepton mass sum rule from u(3)-family higgs potential model. *Modern Physics Letters A*, 05(28) :2319–2323, 1990.
- [85] H. Krüger. New solutions of the Dirac equation for central fields. In D. Hestenes and A. Weingartshofer, editors, *The Electron*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [86] J.L. Andrade e Silva L. de Broglie. *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire*. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

- [87] G. De Lacheze-Murel, E. Bon, C. Daviau, D. Fargue, M. Karatchentzeff, G. Lochak, A. Marizy, D. Priem, and G. Racineux. Enrichissement d'eau en deuterium lors d'une décharge électrique. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 41 :67–71, 2016.
- [88] A. Lasenby, C. Doran, and S. Gull. A multivector derivative approach to lagrangian field theory. *Found. of Phys.*, 23 :1295–1327, 1993.
- [89] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin  $\frac{1}{2}$ . *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 8(4) :345–370, 1983.
- [90] G. Lochak. Sur un monopôle de masse nulle décrit par l'équation de Dirac et sur une équation générale non linéaire qui contient des monopôles de spin  $\frac{1}{2}$  (partie 2). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 9(1) :5–30, 1984.
- [91] G. Lochak. Wave equation for a magnetic monopole. *Int. J. Th. Phys.*, 24 :1019–1050, 1985.
- [92] G. Lochak. Photons électriques et photons magnétiques dans la théorie du photon de Louis de Broglie (un renouvellement possible de la théorie du champ unitaire d'Einstein). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 29 :297–316, 2004.
- [93] G. Lochak. Monopôle magnétique dans le champ de Dirac (états magnétiques du champ de Majorana). *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 31 :193–206, 2006.
- [94] G. Lochak. Twisted space, chiral gauge and magnetism. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 32 :125–136, 2007.
- [95] G. Lochak. “Photons électriques” et “photons magnétiques” dans la théorie du photon de de Broglie. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 33 :107–127, 2008.
- [96] G. Lochak. A theory of light with four different photons : electric and magnetic with spin 1 and spin 0. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 35 :1–18, 2010.
- [97] G. Lochak and G. Jakobi. Paramètres relativistes de Cayley-Klein dans l'équation de Dirac. *C. R. Acad. Sci.*, 243, 1956.
- [98] P. Lounesto. *Clifford (Geometric) Algebras*, chapter Clifford Algebras and Spinor Operators, pages 5–35. Birkhauser, Boston, 1996.
- [99] A. Gondran M. Gondran. *Mécanique quantique*. Editions Matériologiques, Paris, 2014.
- [100] M.A. Naïmark. *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*. Dunod, Paris, 1962.
- [101] N. Nélipa. *Physique des particules élémentaires*. Mir, Moscou, 1981.

- [102] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time Vol. 1 : Two spinor calculus and relativistic physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [103] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and Space-Time Vol. 2 : Spinor and Twistor methods in Space-Time Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [104] D. Priem, C. Daviau, and G. Racineux. Transmutations et traces de monopôles obtenues lors de décharges électriques. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 34 :103–110, 2009.
- [105] M. E. Rose. *Relativistic electron theory*. John Wiley and Sons, New York, 1960.
- [106] F. Scheck. *Electroweak and Strong Interactions*. Springer, Berlin, 1996.
- [107] Ya. G. Sinai. L'aléatoire du non aléatoire. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 10(4) :291–315, 1985.
- [108] T. Socroun. Clifford to unify general relativity and electromagnetism. *Adv. Appl. Cliff. Alg.*, 27 :311–319, 2015.
- [109] O.C. Stoica. Leptons, quarks, and gauge from the complex clifford algebra  $\mathbb{Cl}_6$ . *Adv. Appl. Cliff. Alg*, 28(3) :52, May 2018.
- [110] T. Takabayasi. Relativistic hydrodynamics of the Dirac matter. *Theor. Phys. Suppl.*, 4, 1957.
- [111] J.C. Taylor. *Gauge theories of weak interactions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [112] M. A. Tonnelat. *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- [113] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19 :1264–1266, 1967.

# Index

- absorption, 236
- accélération, 83
- addition, 243, 244
- additivité
  - masse-énergie, 234
- adjoint, 34, 47, 142, 249
- aimant, 28
- algèbre, 243
- algèbre complexe, 243
- Algèbre de Clifford
  - $Cl_{3,3}$ , 294
- algèbre de Clifford, 20, 32, 218, 232, 243, 250
  - $Cl_3$ , 45
  - $Cl_{1,3}$ , 277
  - $Cl_{2,2}$ , 285
  - $Cl_{3,1}$ , 283
  - $Cl_{3,3}$ , 286, 290
- algèbre d'espace-temps, 20, 22, 32, 243, 286
- algèbre de Pauli, 248
  - espace de dimension 3, 246
  - espace-temps, 115, 277
  - sous-algèbre paire, 246, 247
- algèbre de Dirac, 20
- algèbre de Lie, 39, 105, 106, 210, 232, 233, 266
- algèbre de Pauli, 20, 29, 32, 249, 253, 265, 267, 269, 282, 297
- algèbre des matrices, 279
- algèbre réelle, 243
- angle d'Yvon-Takabayasi, 47, 48, 59, 60, 76, 184, 295, 297
- angle de Weinberg-Salam, 133, 159, 221
- anneau, 181, 204
- anneau commutatif  $\mathbb{A}$ , 23
- anomalies, 157, 199
- anti-neutrino, 117
- antifermion, 21
- antineutrino, 114
- antiparticule, 56, 115, 116, 124, 174, 241
- antiquark, 159
- approximation linéaire, 164, 234
- associativité, 244
- atome, 234
- atome d'hydrogène, 236, 295
- automorphisme, 35, 171, 180, 281
- automorphisme principal, 249, 278
- axiomes
  - Kolmogorov, 225
- baryon, 180
- base directe, 247, 248
- base inverse, 248
- base mobile, 51
- base orthonormale, 246, 248, 271, 278, 283
- bi-quaternion, 247
- bivecteur, 45, 50, 280
- boson, 20, 218, 229
  - $Z^0$ , 135
- boson de jauge, 131, 133
- calcul matriciel, 245, 249
- canoniquement conjugué, 223
- carré scalaire, 108
- centre, 281

- champ d'opérateurs, 102, 132
- champ gravitationnel, 89, 130, 234
- champ magnétique, 262
- champ électrique, 262
- champ électromagnétique, 20, 32, 33, 84, 85, 90, 116, 130, 137, 144, 229, 280
- champs de jauge, 133, 158
- champs de Yang-Mills, 132
- charge, 221, 224, 225, 241
- charge magnétique, 144
- charge électrique, 21, 28, 144
  - quark  $d$ , 159
  - quark  $u$ , 159
- chiralité, 22, 199, 222
- chromodynamique, 160, 162, 172, 174, 177, 223, 333
- collapse, 212
- commutation, 246
- commutativité, 245
- complexe conjugué, 246
- conjugaison, 44, 249, 280
- conjugaison de charge, 55, 69, 103, 125, 159, 240
- conjugué, 250
- connexion, 193, 194, 198, 231
- conservation des courants, 127
- constante de Planck, 84, 234
- constante de structure fine, 200, 201
- contravariance, 201
- coordonnées, 224
- corps des complexes, 246–248, 279
- corps des quaternions, 247
- corps des réels, 232, 248, 279
- couleur, 22, 154, 171, 240, 331
- courant, 266
- courant chirale, 125, 127, 168, 335
- courant conservatif, 142
- courant de probabilité, 50, 55, 61, 165, 179, 222
  - courant leptonique, 108
- courant droit, 330, 336
- courant gauche, 110, 329
- courant pondéré, 207
- covariance, 201
- cristal, 209
- cône de lumière, 210, 222, 335
- dalembertien, 32, 98, 253
- densité de probabilité, 67, 109, 139, 207, 217, 224, 231
- densité lagrangienne, 22, 54, 66, 86, 111, 131, 140, 169, 173, 174, 205, 208, 217, 218, 229, 231, 235, 282
  - $\mathcal{L}^+$ , 174
  - $\mathcal{L}^-$ , 174, 176
- cas du proton, 179
- douze termes, 175
  - partie leptonique, 126
- densité tensorielle, 47, 48, 108, 111, 174
- densités tensorielles, 20, 232
- dilatateur, 36–39, 49, 52, 53, 64, 65, 85, 106, 110, 116, 118, 194
- dimension, 22, 131, 246, 278
  - impaire, 197
- dimension finie, 244
- dimensions fictives, 155
- dimensions supplémentaires, 23
- distributions, 234
- divergence, 250
- double lien, 130, 173
- double lien logique, 201, 203
- doublet, 113, 115, 125
- dualisme onde-particule, 219
- dynamique, 131
  - monopôle magnétique, 143
  - quarks, 176
- début de l'accélération, 215
- décalage vers le rouge, 214
- dérivée covariante, 66, 71, 113, 115, 159
- dérivée invariante, 161, 166, 197
- dérivée invariante de jauge, 166–168
- dérivée partielle, 201
- dérivées partielles, 230
- déterminant, 35, 39, 48, 62, 181, 212, 241, 248, 265, 271, 274
- effet Doppler, 214

- effet Lamb, 77
- effet Mössbauer, 209
- espace de configuration, 219
- espace vectoriel, 244, 246
- espace-temps, 277, 283, 293
- espace-temps courbe, 22
- espace-temps invariant, 85
- espace-temps tangent, 102
- expansion, 213, 214
- falsifiable, 235
- fermion, 21, 218, 229
- flèche du temps, 36, 39, 213
- fonction exponentielle, 34, 119, 162, 210, 243
- fonction radiale, 236, 300
- fonction trigonométrique, 243
- fonctions réelles, 193
- force de Lorentz, 21, 67, 86, 89, 139, 206, 228
- formalisme lagrangien, 55
- forme décroisée, 98
- forme invariante, 204
- forme récursive, 32
- formule de Koide, 81
- fréquence statistique, 225
- gluon, 161
- gradient, 250
- gravitation, 22, 168, 198, 199, 209, 219, 222, 231
- groupe d'invariance, 236
- groupe de jauge, 166
  - $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ , 172
- groupe de Lie, 22, 37, 38, 210, 232, 233, 266
  - $Cl_3^*$ , 21
  - $U(1) \times SU(2)$ , 120
- groupe de Lorentz, 37, 41, 53, 116
- groupe de Poincaré, 53, 227
- groupe  $\text{End}(Cl_3)$ , 23
- génération, 21, 22, 102, 110, 221, 230, 240
- hamiltonien, 30, 62, 224, 226
- hasard, 224, 225
  - intrinsèque, 224
- homomorphisme, 37, 40, 142
- homothétie, 230, 237
- hyper-charge faible, 113
- identification, 249
- impulsion-énergie, 66, 86, 136, 139, 140, 175, 205, 207, 208, 218, 229, 234, 236
  - deux tenseurs, 176
  - droite, 87
  - gauche, 87
  - tenseur gravitationnel, 209
  - tenseur inertiel, 209
- indice de réfraction, 217
- indistinguable, 224
- inertie, 67, 168, 180, 231
- intensité
  - champ magnétique, 225
- interaction faible, 20, 110, 220, 222
- interaction forte, 20, 199, 221, 240
- interactions faibles, 23, 181, 222, 232
- interactions fortes, 23
- intrication, 212
- intégration par parties, 130
- invariance, 131, 201
  - invariance de forme, 33, 34
  - invariance de jauge, 22, 42, 45, 53, 61, 83, 119, 164, 222
    - $SU(2)$ , 121, 172
    - $SU(3)$ , 160, 172, 330
    - $U(1)$ , 170
    - $U(1) \times SU(2)$ , 106, 111, 158
  - jauge chirale, 58, 61, 76, 120, 181
  - jauge en  $P_1$ , 123
  - Jauge en  $P_2$ , 124
  - jauge en  $P_3$ , 122
  - jauge électrique, 181
- invariance relativiste étendue, 21
- invariance élargie, 103, 107, 112, 118
- invariance élargie, 105

- invariance étendue, 40, 64, 87, 116, 136, 144, 162, 170, 178, 193, 207, 218, 223, 225, 226, 230, 234, 237
  - translation, 140, 176, 229, 234
  - vitesse de la lumière, 41
- invariance étendue, 83
- invariant relativiste, 109, 110, 168
- invdim, 82, 107, 110, 230
- inversibilité, 234
- inversible, 169, 204, 266, 271
- involutif, 249
- inégalités d'Heisenberg, 220
- inégalités de Bell, 68, 226
- inégalités de Heisenberg, 179, 222, 223
- isomorphisme, 249, 279
- isospin faible, 115, 116
- itération, 131
- jaugé chirale, 194, 222
- Kilogramme Standard, 237
- lagrangien, 130, 334
- laplacien, 250
- lepton, 221, 240, 289
- Lie group, 105
- linéarité, 55, 62
- loi
  - mouvement, 219, 224
- loi du mouvement, 228
- lois, 217, 234
  - probabilité, 225
- longueur, 245, 247, 335
- lumière, 217, 219, 223
- magnétisme, 222
- masse d'inertie, 139, 217, 218, 235
- masse grave, 218
- masse gravitante, 139, 217, 235
- masse gravitationnelle, 67
- masse propre, 21, 23, 28, 53, 84, 105, 110, 135, 169, 209, 218
- matière, 219
- matrice, 228, 271, 272
- matrice complexe, 248
- matrice de Dirac, 29, 30, 265, 266, 268, 280
- matrice de Pauli, 249, 280, 287
- matrice de similitude, 281
- matrice transposée, 272
- matrices de Dirac, 279
- matrices de Pauli, 278
- matrices réelles, 284
- mesure, 209
- mesure additive, 225
- module, 224
- module sur un anneau, 281
- module à gauche, 106
- modèle de Weinberg-Salam, 23, 112
- moment angulaire, 72, 295
- moment cinétique, 21, 177, 178, 205, 222, 234, 240
  - $\hbar/2$ , 179
  - quantification, 140
- monopôle magnétique, 21, 23, 58, 87, 104, 105, 112, 117, 135, 137, 156, 180, 223, 240
  - charge, 113, 114
- mouvement brownien, 224
- mouvement des charges, 89
- multiplication, 243, 244
- muon, 79
- mécanique, 208
- mécanisme lagrangien, 234
- méson, 180
- neutrino, 22, 102, 104, 110, 112, 131, 135, 222, 224, 240
  - onde droite, 180
  - onde gauche, 180
- neutron, 21, 177–180, 222, 236, 240
- niveaux d'énergie, 72
- nombre baryonique, 163
- nombre complexe, 246, 247
- nombre d'Avogadro, 231
- nombre entier, 227
- nombre pair, 245
- nombre quantique magnétique, 96, 297
- nombre réel, 243–246, 250, 277, 278, 283

- nombres complexes, 232
  - nombres réels, 228
  - normalisation, 65, 71, 207
  - noyau, 21, 142, 225
    - noyau d'un homomorphisme, 37
  - noyau atomique, 209
- onde de Dirac, 29
- onde des quarks, 169
- onde droit, 222
- onde droite, 29, 41, 43, 45, 48, 50, 56, 87, 102, 111, 112, 115, 117, 125, 133, 135, 144, 162, 171, 181, 203, 204, 220, 230, 332, 336
- onde gauche, 29, 41, 43, 45, 48, 50, 56, 87, 102, 110–112, 117, 126, 133, 135, 162, 181, 203, 204, 220, 222, 230, 241, 332, 336
- onde leptonique, 21, 105, 115, 169
- onde plane, 46, 63, 165, 193
- onde électromagnétique, 225, 228, 236
- opérateur, 295
  - groupe de jauge, 115
- optique, 208
- opérateur, 156, 171, 229, 231
  - annihilation, 228
  - création, 228
  - groupe de jauge, 112
- opérateur différentiel, 107, 250, 253, 279, 284
- opérateurs, 228
- orientation
  - orientation de l'espace, 37, 39, 61, 116, 181, 197, 223, 247, 248
- orthogonal, 236, 245, 247, 272
- orthonormalisation, 234
- paramètre de Hubble, 214
- parité, 35, 44, 114, 155, 167, 171, 181, 203, 220, 222, 249
- particule, 236, 240
- partie auto-adjointe, 181
- partie impaire, 278, 284
- partie paire, 278, 284
- partie réelle cliffordienne, 204
- permutation circulaire, 163, 171
- petites composantes, 224
- photon, 133, 136, 208, 209, 211, 225, 236
- photosphère, 236
- plan euclidien, 245
- point-événement, 193, 211
- polynômes de Gegenbauer, 299
- positron, 21, 47, 56, 71, 111, 114, 117
- potentiel, 166, 173, 177, 229, 262, 330, 332, 337
- potentiel électromagnétique, 28, 83
- potentiels, 198
- potentiels d'inertie, 195, 199
- pression, 84
- principe d'exclusion, 225, 227, 234
- principe d'équivalence, 143, 208, 209, 218, 231, 235
- principe de moindre action, 127
- principe de Pauli, 94
- principe extrémal, 208, 234, 235
- principes, 217
- probabilité, 67, 225
- probabilité de présence, 225
- produit, 247
- produit cartésien, 280
- produit scalaire, 35, 168, 244, 246
- produit vectoriel, 247
- projecteur, 112, 156, 163
  - gauche, 113
  - onde droite, 157
- projecteur droit, 113
- propriétés, 217
- proton, 21, 177–180, 222, 236, 240
- pseudo-scalaire, 278, 280, 287
- pseudo-vecteur, 247, 278
- quantification, 178, 207, 222, 223, 225, 234
  - charge, 199, 222
  - moment cinétique, 240

- quark, 21, 102, 199, 223, 224, 236, 240, 289, 331, 332, 334, 336
  - d-u, 21, 103, 157, 177
  - quark d, 221
- quatrième neutrino, 163
- racines cubiques de l'unité, 80
- rapport, 230, 237
- rapport d'homothétie, 38, 185
- rapport de similitude, 22, 36–38, 64, 65, 82, 84, 85
- relation de Dirac, 201
- renversé, 169
- représentation, 280
- représentation en matrices réelles, 127
- représentations, 103, 240
  - quatre sortes, 105, 193
- retourné, 155, 249, 289, 290
- rotation, 42
- rotationnel, 250
- récurtivité, 98, 231
- réfine, 236
- réversible, 226
- réversion, 103, 106, 165, 169, 245–247, 278, 284
- sac, 180
- scalaire, 282, 287
- second courant conservatif, 58
- seconde quantification, 20, 103, 226, 229
- separation des variables, 296
- signature, 241
- similitude, 22, 36–39, 49, 52, 53, 64, 65, 82, 85, 106, 110, 112, 118, 120, 142, 194, 237, 271, 282
- simultané, 212
- singularité, 236
- singulet, 113, 115
- soliton, 236
- sous-algèbre paire, 181, 245, 284
- sous-anneau, 180
- sous-groupe, 166
- spherical coordinates, 296
- spin, 338
- spin 1/2, 224, 227, 232, 248
- structure, 234, 289
  - algébrique, 219
  - géométrie, 219
- structure algébrique, 235
- symbole de Christoffel, 194, 208
- système angulaire, 299
- système radial, 96, 308
- séparation des variables, 74
- tau, 79
- temps, 296
- tenseur, 275
  - champ électromagnétique, 228
  - tenseur d'inertie, 228
- tenseur de courbure, 193, 218
- terme de charge, 83
- terme de jauge, 229, 230
- terme de masse, 65, 83, 111, 166, 168, 230, 231
  - conserver, 117
- terme différentiel, 231
- termes de jauge, 204
- théorème de Noether, 61, 131, 140, 141, 229, 234, 235
- torsion, 23, 193, 220
- transformation de jauge, 197
- transformation de Lorentz, 36–39, 41, 52, 271
- translation, 53, 229
- transposition, 272
- trivecteur, 45
- trois générations, 79, 163
- twisteur, 22
- valeur propre, 228
- variable radiale, 296
- variance relativiste, 228
- variété, 23, 43, 102, 193, 220, 231
- variété d'espace-temps, 209
- vecteur, 244, 246, 247
  - contravariant, 42, 49, 50, 52, 83, 85, 123
  - covariant, 83, 107, 123

- pseudovecteur, 47
- vecteur axial, 247
- vecteur covariant, 106, 118
- vecteur d'espace-temps, 253, 254
- vecteurs propres, 295
- violation
  - symétrie T, 226
- violation maximale de la parité, 181, 220
- vitesse de la lumière, 252
- vitesse réduite, 21, 46, 59, 63, 97, 107, 111, 117, 168
- voisinage, 193
- vérifiable, 225
  
- électrodynamique, 218
- électromagnétisme, 22, 262
- électron, 21, 28, 102, 131, 181, 202, 221, 222, 224, 297
- élément général, 246
- émission, 236
- énergie, 297
- équation d'onde
  - approximation linéaire, 58
  - cas des quarks, 169, 198
  - forme découplée, 60
  - forme décroisée, 59
  - forme invariante, 53, 131, 169, 197
  - forme itérative, 97
  - onde de l'électron, 134
  - onde leptonique, 118, 126, 198
  - second ordre, 32, 133
  - équation améliorée, 20, 57, 59, 61, 64, 76, 107, 169, 173, 229, 338, 339, 341
  - équation de Dirac, 28, 43, 45, 220, 227, 228, 235
  - équation de Pauli, 31, 62, 222, 224
  - équation de Schrödinger, 220, 224
  - équation de Schrödinger, 219
  - équation invariante, 282
  - équation leptonique, 117
  - équation numérique, 129
  - équation simplifiée, 125
  - équations numériques, 71, 131
  - équations réelles, 54, 57
  - équation de Schrödinger, 28
  - équation différentielle, 299
  - équation linéaire, 229
  - équations de Lagrange, 128, 130, 174, 204
  - événement, 224